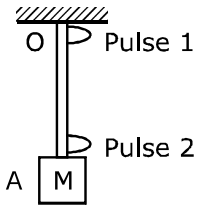
JEE ADVANCED PAPER-I

Time Duration: 3 Hours **Maximum Marks : 183**

PHYSICS

SECTION - 1

1. A block *M* hangs vertically at the bottom end of a uniform rope of constant mass per unit length. The top end of the rope is attached to a fixed rigid support at *O*. A transverse wave pulse (Pulse 1) of wavelength λ_0 is produced at point A (Pulse 2) without disturbing the position of M it takes time T_{AO} to reach point O. Which of the following options is/are correct?



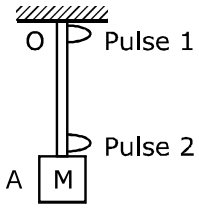
(A) The velocities of the two pulses (Pulse 1 and Pulse 2) are the same at the midpoint of rope

(B) The velocities of any pulse along the rope is independent of its frequency and wavelength

(C) The wavelength of Pulse 1 becomes longer when it reaches point A

(D) The time $T_{AO} = T_{OA}$

1. एक समान रैखिक घनतावाले (uniform mass per unit length) ऊर्ध्वाधर डोर के निचले सिरे पर एक गुटका M लटका हुआ है। डोर का दूसरा सिरा दढ़ आधार (बिंदु O) से संलग्न है। तरंग–दैर्ध्य λ_0 की अनुप्रस्थ तरंग स्पंद (स्पंद 1, Pulse 1) बिंदु O पर उत्पन्न की गई है। ये तरंग स्पंद बिंदु O से बिंदु A तक T_{OA} समय में पहुँचती है। गुटके M को बिना विक्षोभित किये हुए बिंदु A पर निर्माण की गई तरंग–दैर्ध्य λ_0 की अनुप्रस्थ तरंग स्पंद (स्पंद 2, pulse 2), बिंदु A से बिंदु O तक T_{AO} समय में पहुँचती है। निम्न में से कौन सा(से) कथन सही है/हैं?



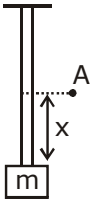
(A) डोर के मध्य बिंदु पर स्पंद 1 (pulse 1) एवं स्पंद 2 (pulse 2) का वेग समान है।

(B) डोर के अनुदिश प्रेषित किसी भी स्पंद का वेग उसकी आवत्ति एवं तरंग दैर्ध्य पर निर्भर नहीं है।

(C) स्पंद 1 (pulse 1) की तरंग–दैर्ध्य बिंदु A तक पहुँचने में लम्बी हो जाएगी।

(D) समय $T_{AO} = T_{OA}$

1. **B,D**

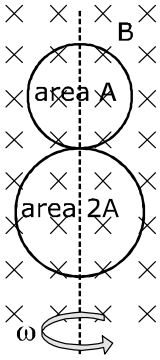


$v_A = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{(M+\mu x)g}{g}}$; μ = mass per unit length

$\Rightarrow$ v depends on x

hence, A,D & B is theoretical

2. A circular insulated copper wire loop is twisted to form two loops of area A and 2A as shown in the figure. At the point of crossing the wires remain electrically insulated from each other. The entire loop lies in the plane (of the paper). A uniform magnetic field $\vec{B}$ points into the plane of the paper. At t = 0, the loop starts rotating about the common diameter as axis with a constant angular velocity ω in the magnetic field. Which of the following options is/are correct?



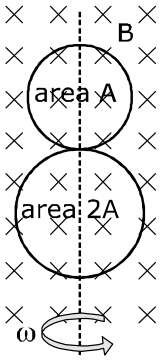
(A) The net emf induced due to both the loops is proportional to cos ωt

(B) The rate of change of the flux is maximum when the plane of the loops is perpendicular to plane of the paper

(C) The amplitude of the maximum net emf induced due to both the loops is equal to the amplitude of maximum emf induced in the smaller loop alone

(D) The *emf* induced in the loop is proportional to the sum of the areas of the two loops

2. एक गोलाकार विद्युत–रोधी ताम्र तार (insulated copper wire) को A एवं 2A वाले दो क्षेत्रफलों के वलयों में व्यावर्तित किया गया है। तारों के अतिक्रमण बिंदु विद्युतरोधी रहते है (जैसा चित्र में दर्शाया गया है)। संपूर्ण वलय कागज के तल में स्थित है। कागज के तल के अभिलम्बवत् स्थिर तथा एक समान चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ सर्वत्र उपस्थित है। वलय अपने सामुदायिक व्यासों से बने अक्ष के परितः समय t = 0 से ω कोणीय वेग (angular velocity) से घूमना शुरू करता है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?



(A) दोनों वलयों से उत्पन्न कुल प्रेषित विद्युत वाहक बल cos ωt से समानुपाती है।

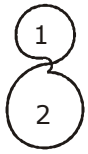
(B) जब वलयों का तल कागज के तल से अभिलंब दिशा में होता है तब अभिवाह के परिवर्तन की दर अधिकतम होती है।

(C) दोनों वलयों से उत्पन्न अधिकतम कुल प्रेषित विद्युत वाहक बल का आयाम, छोटे वलय में उत्पन्न अधिकतम प्रेषित विद्युत वाहक बल के आयाम के बराबर होगा।

(D) प्रेषित विद्युत वाहक बल वलयों के क्षेत्रफलों के योग के समानुपातिक है।

2. **B,C**

induced current is both loops in opposite directions;



$e_{net} = e_2 - e_1$

$\phi_2 = 2BA\cos\omega t$

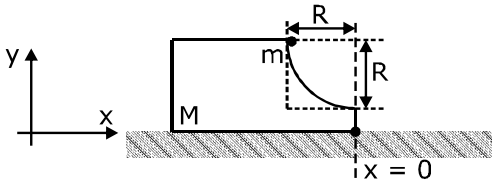
$\phi_1 = BA\cos\omega t$

$e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = 2BA\sin\omega t$

$e_1 = BA\sin\omega t$

$e_{net} = e_2 - e_1 = BA\sin\omega t$

3. A block of mass M has a circular cut with a frictionless surface as shown. The block rests on the horizontal frictionless surface of a fixed table. Initially the right edge of the block is at x = 0, in a co-ordinate system fixed to the table. A point mass m is released from rest at the topmost point of the path as shown and it slides down. When the mass loses contact with the block, its position is x and the velocity is v. At that instant, which of the following options is/are correct?



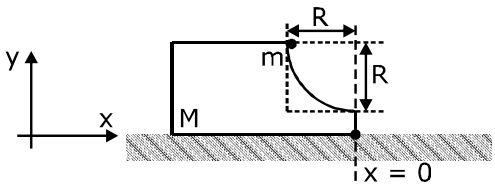
(A) The velocity of the point mass m is : $v = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$

(B) The x component of displacement of the center of mass of the block M is ; $-\frac{mR}{M+m}$

(C) The position of the point mass is : x = $-\sqrt{2}\frac{mR}{M+m}$

(D) The velocity of the block M is : $V = -\frac{m}{M}\sqrt{2gR}$

3. वक्ताकार चाप वाले एक गुटके का द्रव्यमान M है। ये गुटका एक घर्षण रहित मेज पर स्थित है। मेज के सापेक्ष्य (in a coordinate system fixed to the table) गुटके का दाहिना कोर (right edge) x = 0 पर स्थित है। द्रव्यमान m वाले एक बिंदु कण (point mass) को वक्ताकार चाप के उच्चतम बिंदु से विरामावस्था से छोड़ा जाता (released from rest) है। ये बिंदु कण वक्ताकार पथ पर नीचे की ओर सरकता है। जब बिंदु कण गुटके से संपर्क विहीन हो जाता है, तब उसकी तात्क्षणिक स्थिति x और गति v है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?



(A) बिंदु कण (m) का वेग $v = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$ है।

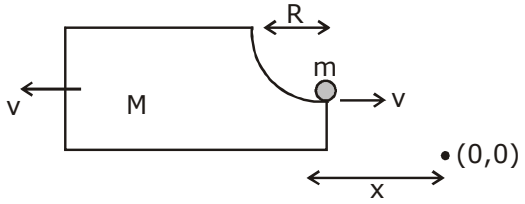
(B) गुटके (M) के संहति केंद्र के विस्थापन का x घटक (x co-ordinate) $-\frac{mR}{M+m}$ हैं

(C) बिंदु कण (m) का स्थान $x = -\sqrt{2}\frac{mR}{M+m}$ है।

(D) गुटके (M) का वेग $V = -\frac{m}{M}\sqrt{2gR}$ हैं।

3. **A,B**

Let wedge shifts by x.



$\Delta x_{CM} = 0 \Rightarrow M(-x) + m(R - x) = 0 \Rightarrow x = \frac{mR}{m+M}$

Then mechanical energy conservation

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = mgR,\ R = h$

& momentum conservation

$mv = MV$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2gR}{1+\frac{m}{M}}}$

4. A flat plate is moving normal to its plane through a gas under the action of a constant force F. The gas is kept at a very low pressure. The speed of the plate v is much less than the average speed u of the gas molecules. Which of the following options is/are true?

(A) The pressure difference between the leading and trailing faces of the plate is proportional to uv

(B) At a later time the external force F balances the resistive force

(C) The resistive force experienced by the plate is proportional to v

(D) The plate will continue to move with constant non-zero acceleration, at all times

4. एक सपाट प्लेट (flat plate) अल्प दबाव के गैस (gas at low pressure) में अपने तल की अभिलंब दिशा में, बाह्य बल F के प्रभाव में अग्रसरित है। प्लेट की गति v, गैस अणुओं के औसत गति u से बहुत कम है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?

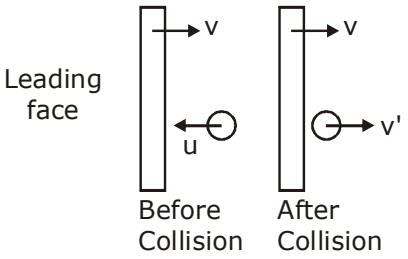
(A) प्रतिगामी एवं अनुगामी पष्ठ के दबाव का अंतर uv के समानुपाती है।

(B) कुछ समय के बाद बाह्य बल F और प्रतिरोध बल संतुलित हो जाएगें।

(C) प्लेट द्वारा अनुभव हुआ प्रतिरोधक बल v के समानुपाती है।

(D) प्लेट सर्वदा शुन्येतर स्थिर त्वरण (constant non-zero acceleration) से चलती रहेगी।

4. **A,B,C**

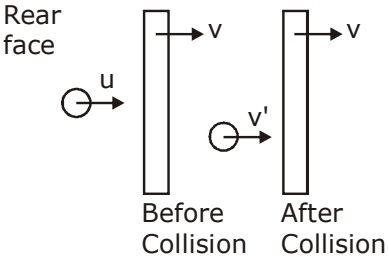


$$1 = \frac{v' - v}{v + u} \Rightarrow v' = u + 2v$$

$\Rightarrow$ $\Delta p = m v' - m(-u) = mv' + mu$

$= 2m (u + v)$

$\Rightarrow$ $F_L \propto \rho A (u + v)^2$



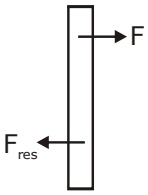
$1 = \frac{v - v'}{u - v} \Rightarrow v' = 2v - u$

$\Rightarrow$ $\Delta P = mv' - mu = 2m (v-u)$

$\Rightarrow$ $F_R \alpha \rho A (v-u)^2$

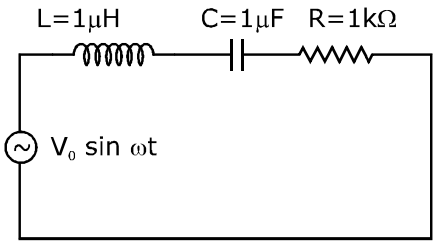
$\therefore$ Force difference $= F_L - F_R \alpha uv$

$\Rightarrow$ $F_{Res} = k u v$



$$F - F_{Res} = \frac{dv}{dt}(M) \Rightarrow F - k u v = M\frac{dv}{dt}$$

5. In the circuit shown, L = 1 μH, C = 1 μF and R = 1 kΩ. They are connected in series with an a.c. source V = V_0 sin ωt as shown. Which of the following options is/are correct?



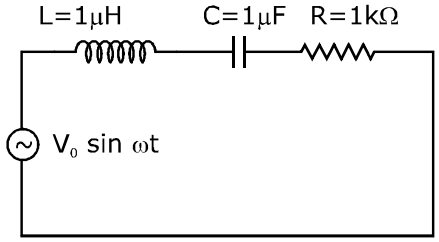
(A) The current will be in phase with the voltage if $\omega = 10^4$ rad.s^{-1}

(B) At $\omega >> 10^6$ rad.s^{-1}, the circuit behaves like a capacitor

(C) The frequency at which the current will be in phase with the voltage is independent of R

(D) At $\omega \sim 0$ the current flowing through the circuit becomes nearly zero.

5. चित्र में दिखाये गए परिपथ में L = 1 μH, C = 1 μF तथा R = 1 kΩ है। एक परिवर्ती वोल्टता ($V = V_0 \sin \omega t$) स्त्रोत से श्रेणी संबंध है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?



(A) जब $\omega = 10^4$ rad.s^{-1} होगी तब विद्युत धारा (electric current) वोल्टता की समकला में होगी।

(B) जब $\omega >> 10^6$ rad.s^{-1}, परिपथ संधारित्र (capacitor) की तरह व्यवहार करता है।

(C) जब विद्युत धारा वोल्टता की समकला में होगी तो वह आवर्ति R पर निर्भर नहीं करेगी।

(D) जब $\omega \sim 0$ होगी तब परिपथ में बहती धारा शून्य के निकट होगी।

5. C,D

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^6$$

$\therefore$ **A & B incorrect**
C & D correct – Theoretical

6. For an isosceles prism of angle A and refractive index μ, it is found that the angle of minimum deviation δ_m = A. Which of the following options is/are correct?

(A) At minimum deviation, the incident angle i_1 and the refracting angle r_1 at the first refracting surface are related by $r_1 = (i_1/2)$

(B) For this prism, the refractive index μ and the angle of prism A are related as $A = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{\mu}{2}\right)$

(C) For the angle of incidence i_1 = A, the ray inside the prism is parallel to the base of the prism

(D) For this prism, the emergent ray at the second surface will be tangential to the surface when the angle of incidence at the first surface is $i_1 = \sin^{-1}\left[\sin A\sqrt{4\cos^2\frac{A}{2}-1} - \cos A\right]$

6. एक समद्विबाहु प्रिज्म का प्रिज्म कोण A है (isosceles prism of angle A)। इस प्रिज्म का अपवर्तनांक μ है। इस प्रिज्म का न्यूनतम विचलन कोण (angle of minimum deviation) δ_m = A है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?

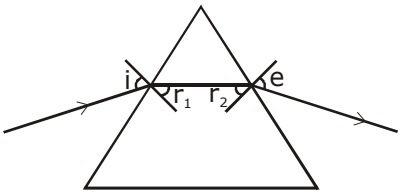
(A) न्यूनतम विचलन में आपतित कोण i_1 एवं प्रथम अपवर्तक तल के अपवर्तक कोण $r_1 = (i_1/2)$ द्वारा संबंधित है।

(B) प्रिज्म का अपवर्तनांक μ एवं प्रिज्म कोण (A), $A = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{\mu}{2}\right)$ द्वारा संबंधित है।

(C) जब प्रिज्म का आपतन कोण i_1 = A है तब प्रिज्म के भीतर प्रकाश किरण प्रिज्म के आधार के समानान्तर होगी।

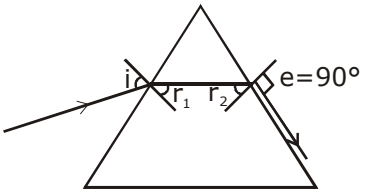
(D) जब पहले तल पर आपतन कोण $i_1 = \sin^{-1}\left[\sin A\sqrt{4\cos^2\frac{A}{2}-1} - \cos A\right]$ है, तब इस प्रिज्म के लिए द्वितीय तल से निर्गत किरण प्रिज्म के पष्ठ से स्पर्शीय होगी। (tangential to the emergent surface)

6. A,C,D



At minimum deviation
$r_1 = r_2 = A/2$ & $i = e$, $\delta_m = A$
$s_m = i + e - A = A \Rightarrow i = A = e$

Also, $\mu = \left(\frac{\sin\left(\frac{A+\delta_m}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} \right) = \frac{\sin A}{\sin\frac{A}{2}} = 2\cos\frac{A}{2}$



$\sin i = \mu \sin r_1$ & $\mu \sin r_2 = \sin 90°$

$\Rightarrow \sin r_2 = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2\cos\frac{A}{2}}$

& $\cos r_2 = \sqrt{1 - \sin^2 r_2}$

$= \frac{\sqrt{4\cos^2\frac{A}{2} - 1}}{2\cos\frac{A}{2}}$

Then, $\sin i = \mu \sin (A - r_2)$

$= 2\cos\frac{A}{2} [\sin A \cos r_2 - \cos A \sin r_2]$

$= \sin A \sqrt{4\cos^2\frac{A}{2} - 1} - \cos A$

7. A human body has a surface area of approximately 1 m^2. The normal body temperature is 10 K above the surrounding room temperature T_0. Take the room temperature to be T_0 = 300 K. For T_0 = 300 K, the value of $\sigma T_0^4 = 460\ Wm^{-2}$ (where σ is the Stefan-Boltzmann constant). Which of the following options is/are correct?

(A) If the surrounding temperature reduces by a small amount $\Delta t_0 << T_0$, then to maintain the same body temperature the same (living) human being needs-to radiate $\Delta W = 4\sigma T_0^3 \Delta T_0$ more energy per unit time

(B) Reducing the exposed surface area of the body (e.g. by curling up) allows humans to maintain the same body temperature while reducing the energy lost by radiation

(C) If the body temperature rises significantly then the peak in the spectrum of electromagnetic radiation emitted by the body would shift to longer wavelengths

(D) The amount of energy radiated by the body in 1 second is close to 60 Joules

7. मानवीय पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 1 m^2 होता है। मानव शरीर का तापमान परिवेश के तापमान से 10 K अधिक होता है। परिवेश तापमान T_0 = 300 K है, इस परिवेश तापमान के लिए $\sigma T_0^4 = 460\ Wm^{-2}$ है। जहाँ σ स्टीफान–बोल्ट्जमान नियतांक (Stefan-Boltzmann constant) है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?

(A) परिवेश तापमान अगर ΔT_0 से कटता है ($\Delta t_0 << T_0$) तब मानव के शरीर को तापमान का अनुरक्षण करने के लिए $\Delta W = 4\sigma T_0^3 \Delta T_0$ अधिक ऊर्जा विकिरित करनी पड़ती है।

(B) पष्ठीय क्षेत्रफल घटाने (जैसेः सिकुड़ने से) से मानव अपने शरीर से विकिरित ऊर्जा घटाते है एवं अपने शरीर का तापमान अनुरक्षित करते है।

(C) मानवीय शरीर के तापमान में अगर सार्थक वद्धि हो तब प्रकाश चुम्बकीय विकिरण स्पैक्ट्रम की शिखर तरंग दैर्ध्य (peak in the electromagnetic spectrum) दीर्घ तरंग–दैर्ध्य की ओर विस्थापित होती है।

(D) मानवीय शरीर से 1 सेकेण्ड में निकटतम विकिरत ऊर्जा 60 जूल (60 Joules) है।

7. **A,B,D**

$A = 1\ m^2$

$\sigma T_0^4 = 460$

$4\sigma e A\ T_0^3 \times (\Delta T)$

SECTION - 2

8. A drop of liquid of radius R = 10^{-2} m having surface tension $S = \frac{0.1}{4\pi} Nm^{-1}$ divides itself into K identical drops. In this process the total change in the surface energy $\Delta U = 10^{-3}$J. If $K = 10^{\alpha}$ then the value of α is

8. पष्ठ तनाव (surface tension) $S = \frac{0.1}{4\pi} Nm^{-1}$ के द्रव के एक बून्द की त्रिज्या R=10^{-2} m है, जिसे K समरूप बून्दों में विभाजित किया गया है। पष्ठ–ऊर्जा का बदलाव $\Delta U = 10^{-3}$J है। यदि $K = 10^{\alpha}$ है तब α का मान होगा –

Sol. **6**

$s = \frac{0.1}{4\pi}$ $\qquad$ $R = 10^{-2}$

$\frac{4}{3}\pi(10^{-2})^3 = k \times \frac{4}{3}\pi r^3$

$K = \frac{10^{-6}}{r^3}$

$r = \frac{10^{-2}}{k^{1/3}}$

$10^{-2} = 10^{-4}\left[k^{1/3} - 1\right]$

$101 = k^{1/3}$

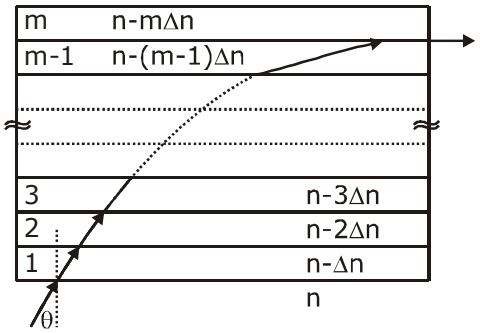
$K = (101)^3$

$10^{\alpha} = (10)^6$

$\alpha = 6$

9. A monochromatic light is travelling in a medium of refractive index n = 1.6. It enters a stack of glass layers from the bottom side at an angle θ = 30°. The interfaces of the glass layers are parallel to each other. The refractive indices of different glass layers are monotonically decreasing as $n_m = n - m\Delta n$, where n_m is the refractive index of the m^{th} slab and $\Delta n = 0.1$ (see the figure). The ray is refracted out parallel to the interface between the $(m-1)^{th}$ and m^{th} slabs from the right side of the stack. What is the value of m?

एकवर्णी प्रकाश (monochromatic light) अपवर्तनांक n = 1.6 वाले माध्यम में प्रगामी है। यह प्रकाश काँच की चीती (stack of glass layers) पर निचले सतह से θ = 30° कोण पर आपतित होता है। (जैसा कि चित्र में दर्शाया गया है।) काँचों के स्तर परस्पर समान्तर है। काँच के चीती के अपवर्तनांक एकदिष्ट $n_m = n - m\Delta n$, क्रम से घट रहे है। यहाँ m स्तर का अपवर्तनांक n_m है और $\Delta n = 0.1$ है। प्रकाश किरण (m–1) एवं m स्तर के पष्ठतल से समान्तर दिशा में दांई और से बाहर निकलता है। तब m का मान होगा?



Sol. **8**

$$\sin\theta_C = \frac{n-(m-1)\Delta n}{n-m\Delta n}$$

$n \sin\theta = (n-m\Delta n)\sin 90°$

$$1.6\times\frac{1}{2} = (1.6-m(0.1))1$$

$0.8 = 1.6 - 0.1m$

$\Rightarrow 0.1\ m = 0.8$

$m = 8$

10. ^{131}I is an isotope of Iodine that β decays to an isotope of Xenon with a half-life of 8 days. A small amount of a serum labelled with ^{131}I is injected into the blood of a person. The activity of the amount of ^{131}I injected was 2.4×10^5 Becquerel (Bq). It is known that the injected serum will get distributed uniformly in the blood stream in less than half an hour. After 11.5 hours, 2.5 ml of blood is drawn from the person's body, and gives an activity of 115 Bq. The total volume of blood in the person's body, in liters is approximately (you may use $e^x \approx 1 + x$ for $|x| << 1$ and $\ln 2 \approx 0.7$).

आयोडीन का समस्थानिक (isotope)^{131}I जिसकी अर्ध–आयु 8 दिन है, β-क्षय के कारण जेनॉन (Xenon) के समस्थानिक में क्षयित होता है। अल्प मात्रा का ^{131}I चिन्हित (labelled) सीरम (serum) मानव शरीर में अन्तःक्षिप्त (inject) किया गया, जिस मात्रा की ॲक्टिवता (activity) 2.4×10^5 बेकेरल (Becquerel) है। यह सीरम रूधिर धारा में आधे घण्टे में एकसमान वितरित होता है। अगर 11.5 घण्टे बाद, 2.5 ml रक्त 115 बैकेरल की ॲक्टिवता दर्शाता है, तब मानव शरीर में रक्त आयतन (लीटर में) है। (आप $e^x \approx 1 + x$ for $|x| << 1$ एवं $\ln 2 \approx 0.7$ का उपयोग कर सकते है।).

Sol. **5**

$A = A_0e^{-\lambda t}$

$$\frac{115}{2.5\times10^{-3}} = \frac{2.4\times10^5}{V}e^{-\frac{0.7}{8}\times\left(\frac{11.5}{24}\right)}$$

$$e^{-\frac{0.7}{8}\left(\frac{11.5}{24}\right)} = \frac{115V}{2.4\times2.5\times10^2}$$

$e^{-0.0419} = 19.167\times10^{-2}$

$1 - 0.0419 = 19.167\times10^{-2}\ V$

$$V = \frac{0.95\times100}{19.167} = 5 \text{ Litre}$$

11. An electron in a hydrogen atom undergoes a transition from an orbit with quantum number n_i to another with quantum number n_f. V_i and V_f are respectively the initial and final potential energies of the electron. If $\frac{V_i}{V_f} = 6.25$, then the smallest possible n_f is

एक हाइड्रोजन परमाणु का एक इलेक्ट्रॉन n_i क्वांटम संख्या (quantum number) वाले कक्ष से n_f क्वांटम संख्या (quantum number) के कक्ष में प्रवेश करता है। V_i तथा V_f प्राथमिक एवं अन्तिम स्थितिज ऊर्जाए है। यदि $\frac{V_i}{V_f} = 6.25$, तब n_f की न्यूनतम संभावी संख्या (smallest possible n_f) है।

Sol. **5**

$$\frac{V_i}{V_f} = 6.25$$

$$-13.6\frac{Z^2}{n^2}$$

$$\frac{n_f^2}{n_i^2} = 6.25 \Rightarrow \frac{n_f}{n_i} = 2.5$$

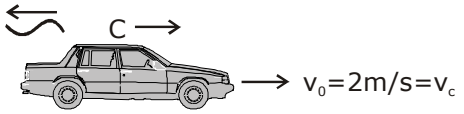
Min. value of n_f = 5

12. A stationary source emits the sound of frequency f_0 = 492 Hz. The sound is reflected by a large car approaching the source with a speed of 2 ms^{-1}. The reflected signal is received by the source and superposed with the original. What will be the beat frequency of the resulting signal in Hz? (Given that the speed of sound in air is 330 ms^{-1} and the car reflects the sound at the frequency it has received)

12. एक स्थिर स्त्रोत f_0 = 492 Hz की ध्वनि उत्सर्जित करता है। 2 ms^{-1} के गति से अपगमनी कार से यह ध्वनि परावर्तित होती है। ध्वनि स्त्रोत परावर्तित संकेत को प्राप्त कर के मूल संकेत पर अध्यारोपित (superpose) करता है। तब परिणामी सिग्नल की विस्पंद–आवत्ति (beat frequency) है –
(ध्वनि की गति 330 ms^{-1} है। कार ध्वनि को उसकी प्राप्त हुई आवत्ति पर परावर्तित करती है)

Sol. **6**

$\longrightarrow v_0=2m/s=v_c$



f_0 = 492 Hz

$S \longrightarrow f_0=492$ Hz

$S \Leftrightarrow C$

$$f = f_0\left(\frac{v - v_0}{v}\right)$$

Now, $C \Leftrightarrow S$

$$f' = f\left(\frac{v - v_0}{v - v_s}\right)$$

$$f' = f_0\left(\frac{v - v_0}{v}\right)\left(\frac{v - 0}{v + v_0}\right)$$

$$f' = 492\left(\frac{330 - 2}{330}\right)\left(\frac{330}{330 + 2}\right)$$

= 486 Hz

Beat frequency = 492 – 486 = 6 Hz

SECTION-3

Paragraph-I

A charged particle (electron or proton) is introduced at the origin (x = 0, y = 0, z = 0) with a given initial velocity $\vec{v}$. A uniform electric field $\vec{E}$ and a uniform magnetic field $\vec{B}$ exist everywhere. The velocity $\vec{v}$, electric field $\vec{E}$ and magnetic field $\vec{B}$ are given in columns 1,2 and 3 respectively. The quantities E_0, B_0 are positive in magnitude.

एक चार्जयुक्त कण (इलेक्ट्रॉन या प्रोटोन) आरंभिक गति $\vec{v}$ से मूल बिंदु (x = 0, y = 0, z = 0) पर प्रस्तुत (introduced) होता है। स्थिर तथा एकसमान विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ एवं चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ सर्वत्र उपस्थित है। कण की गति $\vec{v}$, विद्युत क्षेत्र $\vec{E}$ तथा चुम्बकीय क्षेत्र $\vec{B}$ निम्न कॉलमों 1,2 एवं 3 क्रमशः दर्शाये गये है। E_0, B_0 के मान धनात्मक है।

Column-1	**Column-2**	**Column - 3**
(I) Electron with $\vec{v} = 2\frac{E_0}{B_0}\hat{x}$	(i) $\vec{E} = E_0\hat{z}$	(P) $\vec{B} = -B_0\hat{x}$
(II) Electron with $\vec{v} = \frac{E_0}{B_0}\hat{y}$	(ii) $\vec{E} = -E_0\hat{y}$	(Q) $\vec{B} = B_0\hat{x}$
(III) Proton with $\vec{v} = 0$	(iii) $\vec{E} = -E_0\hat{x}$	(R) $\vec{B} = B_0\hat{y}$
(IV) Proton with $\vec{v} = 2\frac{E_0}{B_0}\hat{x}$	(iv) $\vec{E} = E_0\hat{x}$	(S) $\vec{B} = B_0\hat{z}$

कॉलम-1	**कॉलम-2**	**कॉलम- 3**
(I) इलेक्ट्रॉन $\vec{v} = 2\frac{E_0}{B_0}\hat{x}$ से	(i) $\vec{E} = E_0\hat{z}$	(P) $\vec{B} = -B_0\hat{x}$
(II) इलेक्ट्रॉन $\vec{v} = \frac{E_0}{B_0}\hat{y}$ से	(ii) $\vec{E} = -E_0\hat{y}$	(Q) $\vec{B} = B_0\hat{x}$
(III) प्रोटोन $\vec{v} = 0$ से	(iii) $\vec{E} = -E_0\hat{x}$	(R) $\vec{B} = B_0\hat{y}$
(IV) प्रोटोन $\vec{v} = 2\frac{E_0}{B_0}\hat{x}$ से	(iv) $\vec{E} = E_0\hat{x}$	(S) $\vec{B} = B_0\hat{z}$

13. In which case will the particle move in a straight line with constant velocity ?

(A) (IV) (i) (S) (B) (III) (ii) (R) (C) (II) (iii) (S) (D) (III) (iii) (P)

13. किस स्थिति में कण अचल गति से सीधी रेखा में चलन करता है ?

(A) (IV) (i) (S) (B) (III) (ii) (R) (C) (II) (iii) (S) (D) (III) (iii) (P)

Sol. **C**

Electron (II) $\vec{v} = \frac{E_0}{B_0}\hat{y}$ (III) $\vec{E} = -E_0\hat{x}$ (S) $\vec{B} = B_0\hat{z}$

Electric force on electron is along +x-axis $F_E = -e\ (-E_0\hat{x}) = eE_0\hat{x}$ & magnetic force on electron,

$F_M = -e\ (\vec{v} \times \vec{B})$

$= -e\left(\frac{E_0}{B_0}\right) B_0\ (\hat{y} \times \hat{z}) = -eE_0\hat{x}$

14. In which case will the particle describe a helical path with axis along the positive z-direction ?
(A) (IV) (i) (S) (B) (II) (ii) (R) (C) (III) (iii) (P) (D) (IV) (ii) (R)

14. किस स्थिति में कण +z-अक्ष अनुदिश कुण्डलिनी पथ (helical path along positive z-axis) का अनुसरण करेगा ?
(A) (IV) (i) (S) (B) (II) (ii) (R) (C) (III) (iii) (P) (D) (IV) (ii) (R)

Sol. **A**

(IV) Proton $\vec{v} = 2\frac{E_0}{B_0}\hat{x}$ (i) $\vec{E} = E_0\hat{z}$ (S) $\vec{B} = B_0\hat{z}$

$\vec{F}_E = e\vec{E} = eE_0\hat{z}$

& $\vec{F}_M = e(\vec{v} \times \vec{B}) = e\left(\frac{2E_0}{B_0}\right) B_0\ (\hat{x} \times \hat{z})$

Initial magnetic force = $-2eE_0\ \hat{j}$

15. In which case would the particle move in a straight line along the negative direction of y-axis (i.e., move along - $\hat{y}$) ?
(A) (III) (ii) (R) (B) (IV) (ii) (S) (C) (III) (ii) (P) (D) (II) (iii) (Q)

15. किस स्थिति में कण सीधी रेखा में ऋणात्मक y-अक्ष (negative y-axis) की दिशा में चलेगा ?
(A) (III) (ii) (R) (B) (IV) (ii) (S) (C) (III) (ii) (P) (D) (II) (iii) (Q)

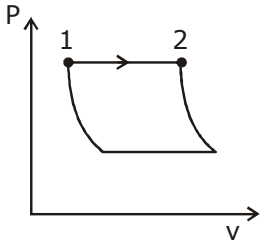
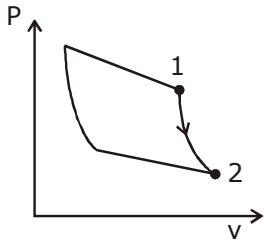
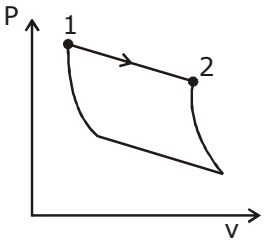
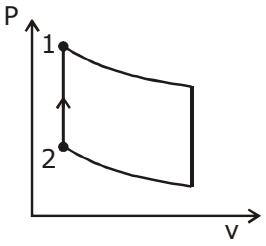
Sol. **A**

Electric force along -y aixs
& magnetic force is zero.
Initial value = 0. So particle will move along -y-axis

Paragraph - II

An ideal gas is undergoing a cyclic thermodynamic process in different ways as shown in the corresponding P - V diagrams in column 3 of the table. Consider only the path from state 1 to state 2. W denotes the corresponding work done on the system. The equations and plots in the table have standard notations as used in thermodynamic processes. Here γ is the ratio of heat capacities at constant pressure and constant volume. The number of moles in the gas is n.

एक आदर्श गैस (ideal gas) विभिन्न चक्रीय उष्मपातिक प्रक्रमो से गुजरता है। यह निम्न कॉलम 3 में P - V आरेख द्वारा दर्शाया गया है। केवल स्थिति 1 से स्थिति 2 जानेवाले पथ की ओर ध्यार दें। इस पथपर निकाय पर हुआ कार्य W है (work done on the system)। यहाँ γ नियत दाब एवं नियत आयतन उष्मा–धारिताओ का अनुपात है (ratio of the heat capacities)। गैस के मोलो (moles) की संख्या n है।

column-1	**column-2**	**column- 3**
(I) $W_{1\to2} = \frac{1}{\gamma-1}(P_2V_2 - P_1V_2)$	(i) समतापीय (Isothermal)	(P) 
(II) $W_{1\to2} = -PV_2 + PV_1$	(ii) समआयतनिक (Isochoric)	(Q) 
(III) $W_{1\to2} = 0$	(iii) समदाबीय (Isobaric)	(R) 
(IV) $W_{1\to2} = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$	(iv) रूधोष्म (Adiabatic)	(S) 

16. Which of the following options is the only correct representation of a process in which $\Delta U = \Delta Q - P\Delta V$?
(A) (II) (iii) (P) (B) (II) (iii) (S) (C) (III) (iii) (P) (D) (III) (iv) (R)

16. निम्न दिए विकल्पो में कौनसा संयोजन $\Delta U = \Delta Q - P\Delta V$ प्रक्रिया का अकेले सही प्रतिनिधित्व करता है ?
(A) (II) (iii) (P) (B) (II) (iii) (S) (C) (III) (iii) (P) (D) (III) (iv) (R)

Sol. A

17. Which one of the following options is the correct combination ?
(A) (II) (iv) (P) (B) (IV) (ii) (S) (C) (II) (iv) (R) (D) (III) (ii) (S)

17. निम्न विकल्पो में कौनसा संयोजन सही है ?
(A) (II) (iv) (P) (B) (IV) (ii) (S) (C) (II) (iv) (R) (D) (III) (ii) (S)

Sol. D

18. Which one of the following options correctly represents a thermodynamic process that is used as a correction in the determination of the speed of sound in an ideal gas ?
(A) (III) (iv) (R) (B) (I) (ii) (Q) (C) (IV) (ii) (R) (D) (I) (iv) (Q)

18. निम्न विकल्पो में से कौनसा संयोजन आदर्श गेस में ध्वनि की गति की माप के संशोधन में प्रयुक्त ऊष्मागतिक प्रक्रिया को सही दर्शाता है ?
(A) (III) (iv) (R) (B) (I) (ii) (Q) (C) (IV) (ii) (R) (D) (I) (iv) (Q)

Sol. D

CHEMISTRY

19. An ideal gas is expanded from (p_1,V_1, T_1) to (p_2, V_2, T_2) under different conditions. The correct statement (s) among the following is (are)

(A) The work done by the gas is less when it is expanded reversibly from V_1 to V_2 under adiabatic conditions as compared to that when expanded reversibly from V_1 to V_2under isothermal conditions

(B) The change in internal energy of the gas is (i) zero, if it is expanded reversibly with $T_1 = T_2$, and (ii) positive, if it is expanded reversibly under adiabatic conditions with $T_1 \neq T_2$

(C) If the expansion is carried out freely, it is simultaneously both isothermal as well as adiabatic

(D) The work done on the gas is maximum when it is compressed irreversibly from (p_2, V_2) to (p_1, V_1) against constant pressure p_1

19. एक आदर्श गैस को (p_1,V_1, T_1) से (p_2, V_2, T_2) तक विभिन्न अवस्थाओं के अधीन फैलाया गया ह। निम्नलिखित विकल्पों में से सही कथन है/हैं ?

(A) जब V_1 से V_2 तक रुद्धोष्म अवस्था के अधीन इसका उत्क्रमणीय (reversibly) फैलाव किया जाये तो गैस द्वारा किया गया कार्य V_1 से V_2 तक समतापी (isothermal) अवस्थाओं के अधीन उत्क्रमणीय फैलाव में किये गये कार्य की तुलना में कम है।

(B) गैस की आंतरिक ऊर्जा में बदलाव (i) शून्य है यदि इसे $T_1 = T_2$ के साथ फैलाव उत्क्रमणीय (revesible) तरीके से किया जाए और (ii) धनात्मक है। यदि इसे $T_1 \neq T_2$ के साथ रुद्धोष्म (adiabatic) परिस्थितियों के अधीन उत्क्रमणीय (reversible) फैलाव किया जाये।

(C) यदि फैलाव मुक्त रूप से किया जाये तो यह साथ–साथ दोनों समतापी (isothermal) एवं रुद्धोष्म (adiabatic) है।

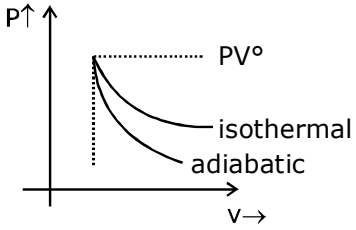
(D) जब इसे अनुत्क्रमणीय तरीके से (irreversibly) (p_2, V_2) से (p_1, V_1) तक स्थिर दाब p_1 के विरूद्ध दबाया जाता है तो गैस के ऊपर किया गयाा कार्य अधिकतम होता है।

Sol. **A, C, D**

$P_1V_1T_1$ $\quad$ P_2V_2, T_2

(A)

$|W_{isothermal}| > |W_{adiabatic}|$



(B) (i) zero $\quad T_1 = T_2 = T$ = constant. $\quad \Delta E = nc_v \Delta T = 0$

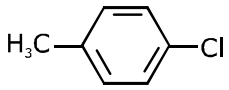
(ii) positive $\quad T_1 \neq T_2$ $\quad$ (During adiabatic expansion internal energy decrease)

(C) $\quad P_{ext} = 0$ isothermal $\rightarrow \Delta E = 0$ $\quad \therefore q = 0$

$\quad W = 0$ adiabatic $\rightarrow q = 0$ $\quad \therefore \Delta E = 0$

(D)

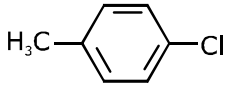
20. The IUPAC name(s) of the following compound is(are)



(A) 4-methylchlorobenzene $\quad$ (B) 4-chlorotoluene

(C) 1-chloro-4-methylbenzene $\quad$ (D) 1-methyl-4-chlorobenzene

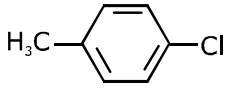
20. निम्नलिखित यौगिक का (के) आई.यू.पी.ऐ.सी. (IUPAC) नाम है :



(A) 4-मैथिलक्लोरोबेंजीन $\quad$ (B) 4-क्लोरोटोलुइन

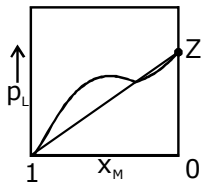
(C) 1-क्लोरो-4-मैथिल बेंजीन $\quad$ (D) 1-मैथिल-4-क्लोरोबेंजीन

Sol. **B, C**



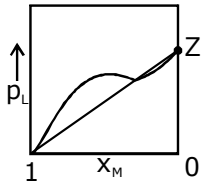
1-chloro-4-methylbenzene & 4-chlorotoulene

21. For a solution formed by mixing liquids L and M, the vapour pressure of L plotted against the mole fraction of M in solution is shown in the following figure. Here x_1 and x_M represent mole fraction of L and M, respectively, in the solution. The correct statement(s) applicable to this system is(are)



(A) The point Z represents vapour pressure of pure liquid M and Raoult's law is obeyed from $x_L = 0$ to $x_L = 1$
(B) Attractive intermolecular interactions between L–L in pure liquid L and M-M in pure liquid M are stronger than those between L–M when mixed in solution
(C) The point Z represents vapour pressure of pure liquid M and Raoult's law is obeyed when $x_L \to 0$
(D) The point Z represents vapour pressure of pure liquid L and Raoult's law is obeyed when $x_L \to 1$

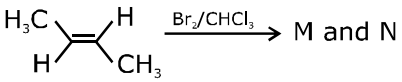
21. L और M द्रवों के मिश्रण द्वारा बनाये एक विलयन में द्रव M के ग्राम अणुक भिन्न (mole fraction) के विरूद्ध द्रव L के वाष्प दाब को चित्र में दिखाया गया है, यहां x_1 तथा x_M के क्रमशः ग्राम अणुक भिन्नों को निरूपित करते है। इस निकाय का(के) उपयुक्त सही कथन है(हैं)

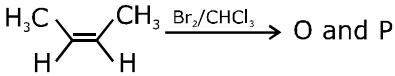


(A) बिंदु Z क्रमशः द्रव M के वाष्पदाब को निरूपित करता है और $x_L = 0$ से $x_L = 1$ तक राउल्ट का नियम (Raoult's Law) का पालन होता है
(B) शुद्ध द्रव L में L-L के बीच में और शुद्ध M में M-M के बीच में अंतरा–अणुक क्रियाएं L-M के बीच में अंतरा अणुक क्रियाओं से प्रबल है जब उन्हे विलयन में मिश्रित किया जाता है।
(C) बिन्दु Z शुद्ध द्रव M के वाष्प दाब को निरूपित करता है और जब $x_L \to 0$ तो राउल्ट का नियम (Raoult's law) का पालन होता है।
(D) बिन्दु Z शुद्ध द्रव L के वाष्प दाब को निरूपित करता है और जब $x_L \to 1$ तो राउल्ट का नियम (Raoult's law) का पालन होता है।

Sol. B,D

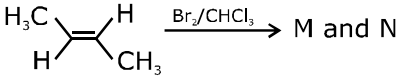
22. The correct statement(s) for the following addition reaction is (are)

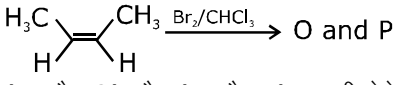
(i)  M and N

(ii)  O and P

(A) (M and O) and (N and P) are two pairs of enantiomers
(B) Bromination proceeds through trans-addition in both the reactions
(C) O and P are identical molecules
(D) (M and O) and (N and P) are two pairs of diastereomers

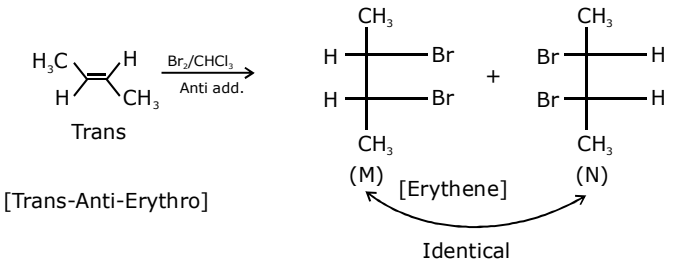
22. निम्नलिखित संकलन अभिक्रियाओं (addition reaction) के लिए सही कथन है / हैं ?

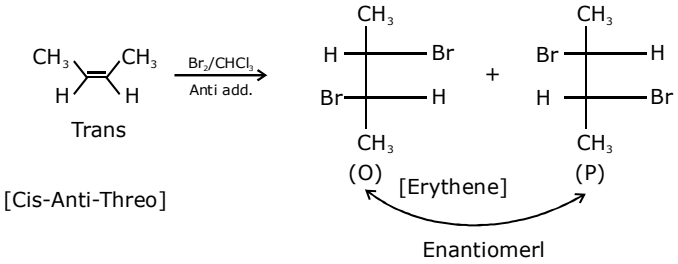
(i)  M and N

(ii)  O and P

(A) (M और O) और (N और P) एनन्टीओमेरो (enantiomers) के दो युगल है।
(B) दोनों अभिक्रियाओं में ब्रोमिनिकरण ट्रांस संकलन द्वारा बढ़ता है।
(C) O और P समरूप अणु है।
(D) (M और O) और (N और P) आईस्टीरिओमेरों (diastereomers)के दो युगल है।

Sol. B, D



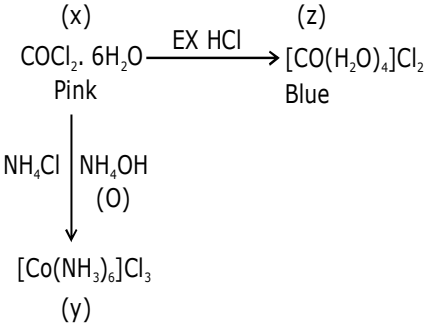


Ans. (B) Anti addition takes place.
(D) (M and O) and (N and P) are two pairs of diasteromers

23. Addition of excess aqueous ammonia to a pink coloured aqueous solution of $MCl_2.6H_2O$ (X) and NH_4Cl gives an octahedral complex Y in the pressure of air. In aqueous solution, complex Y behaves as 1 : 3 electrolyte. The reaction of X with excess HCl at room temperature results in the formation of a blue coloured compelx Z. The calculated spin only magnetic moment of X and Z is 3.87 B.M., whereas it is zero for complex Y.
Among the following options, which statement(s) is(are) correct ?
(A) The hybridization of the central metal ion in Y id d^2sp^3
(B) Addition of silver nitrate to Y gives only two equivalents of silver chloride
(C) When X and Z are in equilbrium at 0°C, the coloured of the solution is pink
(D) Z is a tetrahedral complex

23. एक गुलाबी रंग वाले $MCl_2.6H_2O$ (X) और NH_4Cl के जलीय विलयन अमोनिया के मिलाने पर, वायु की उपस्थिति में एक अष्टफलकीय संकर (octahedral complex) Y देता है। जलीय विलयन में संकर Y, 1 : 3 विद्युत अपघट्य (electrolyte) की तरह व्यवहार करता है। सामान्य ताप पर अधिक्य HCl के साथ X की अभिक्रिया के परिणामस्वरूप एक नीले रंग का संकर Z बनता है। X और Z का परिकलित प्रचकरण मात्र चुम्बकीय आघूर्ण (spin only magnetic moment) 3.87 B.M. है, जबकि यह संकर Y के लिए शून्य है। निम्न में से कौनसा/से विकल्प सही है/हैं ?
(A) Y में केन्द्रीय धातु आयन का संकरण (hybridization) d^2sp^3 है।
(B) Y में सिल्वर नाइट्रेट मिलाने पर सिल्वर क्लोराइड के केवल दो समतुल्य मिलाते हैं।
(C) जब 0°C पर X और Z साम्यावस्था में हैं तो विलयन का रंग गुलाबी है।
(D) Z एक चतुष्फलकीय (tetrahedral) संकर है।

Sol. A, C, D
Cobalt salts are pink in anhydrous & blue in hydated form.



24. The Correct statement(s) about the oxaacids, $HClO_4$ and HClO, is (are)

(A) The central atom in both $HClO_4$ and HClO is sp^3 hybridized

(B) $HClO_4$ is formed in the reaction between Cl_2 and H_2O

(C) The conjugate base of $HClO_4$ is weaker base than H_2O

(D) $HClO_4$ is more acidic than HClO because of the resonance stabilization of its anion

24. $HClO_4$ और HClO के बारे में सही कथन है(हैं)

(A) $HClO_4$ तथा HClO दोनो में केन्द्रीय परमाणु sp^3 संकरित है।

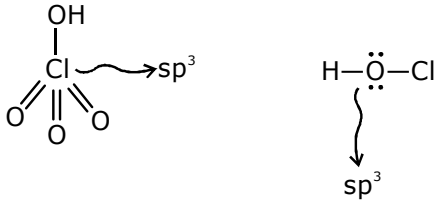
(B) Cl_2 की H_2O के साथ अभिक्रिया होने पर $HClO_4$ बनाता है।

(C) $HClO_4$ का संयुग्मी क्षार (Conjugate base) H_2O से दुर्बल क्षार है।

(D) ऋणायन के अनुनाद स्थिरीकरण (Resonance stabilization) के फलस्वरूप $HClO_4$, HClO से अधिक अम्लीय है।

Sol. **A, C, D**

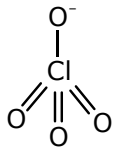
(A)



(C) $HClO_4 + H_2O \longrightarrow ClO_4^- + H_3\overset{+}{O}$

strong acid | weak acid and strong base | weak base (Resonance stable) More stable | Strong acid

(D)



25. The colour of the X_2, molecules of group 17 elements changes gradually from yellow to violet down the group. This is due to

(A) Decrease in π^*-σ^* gap down the group

(B) Decrease in ionization enrgy down the group

(C) The physical state of X_2 at room temperature changes from gas to solid down the group

(D) decrease in HOMO-LUMO gap down the group

25. समूह 17 के तत्वों के X_2 अणुओं का रंग इनके वर्ग में नीचे जाने पर पीले रंग से धीरे–धीरे बैंगनी रंग में बदलता है। यह निम्न में से किसके फलस्वरूप है ?

(A) वर्ग में नीचे जाने पर π^*-σ^* का अंतर घटता है

(B) वर्ग में नीचे जाने पर आयनन ऊर्जा घटती है।

(C) सामान्य ताप पर वर्ग में नीचे जाने पर X_2 की भौतिक अवस्था गैस से ठोस में बदलती है।

(D) वर्ग में नीचे जाने पर HOMO-LUMO का अंतर घटता है।

Sol. **A, D**

According to M.O.T

26. The sum of the number of lone pairs of electrons on each central atom in the following species is

$[TeBr_6]^{2-}$, $[BrF_2]^+$, SNF_3, and $[XeF_3]^-$

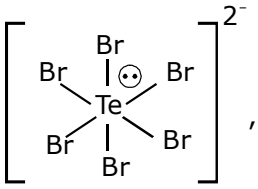
(A) Atomic numbers: 7, F = 9, S = 16, Br = 35, Te = 52, Xe= 54)

26. निम्नलिखित वर्ग (Species) में प्रत्येक केन्द्रीय परमाणु पर एकाकी इलेक्ट्रॉन युग्मों की संख्या का योग है :–

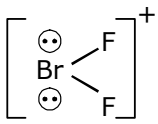
$[TeBr_6]^{2-}$, $[BrF_2]^+$, SNF_3, and $[XeF_3]^-$

(A) परमाणु संख्या: 7, F = 9, S = 16, Br = 35, Te = 52, Xe= 54)

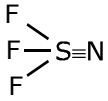
Sol. 6



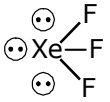
lone pair in C.A. is 1



lone pair = 2



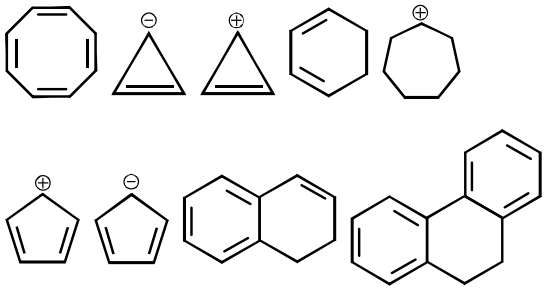
lone pair of electron = 0



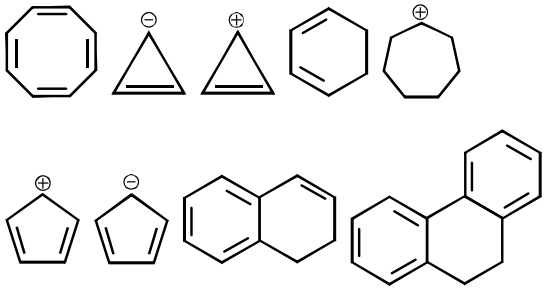
lone pair of electron = 3

Total sum is 0 + 1 + 2 + 3 = 6

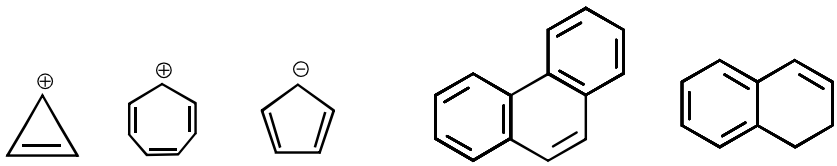
27. Among the following the number of aromatic compound(s) is



27. निम्नलिखित में से एरोमेटिक यौगिक (यौगिकों) की संख्या है :–



Sol. 5



Are Aromatic

28. Among H_2, He_2^+, Li_2, Be_2, B_2, C_2, N_2, O_2^- and F_2 the number of diamagnetic species is
(Atomic numbers: = 1, He = 2, Li=3, Be = 4, B = 5, C = 6, N = 7, O = 8, F = 9)

28. H_2, He_2^+, Li_2, Be_2, B_2, C_2, N_2, O_2^- और F_2 में प्रतिचुम्बकीय स्पीशीज (Diamagnetic species) की संख्या है:–
(परमाणु संख्या: = 1, He = 2, Li=3, Be = 4, B = 5, C = 6, N = 7, O = 8, F = 9)

Sol. 5 or 6

Diamagnetic species are

C_2, H_2, Li_2, N_2, F_2, Be_2 → (does not exist)

29. A crystalline solid of a pure substance has a face-centred cubic structure with a cell edge of 400 pm. If the density of the substance in the crystal is 8 g cm^{-3}, then the number of atoms present in 256 g of the crystal in $N\times10^{24}$. The value of N is

29. एक शुद्ध पदार्थ के एक क्रिस्टलीय ठोस की फलक–केन्द्रित घन (face-centred cubic) संरचना के साथ कोस्ठिका कोर (cell edge) की लम्बाई 400 pm है। यदि क्रिस्टल के पदार्थ का घनत्व 8 g cm^{-3} है, तो क्रिस्टल के 256 g में उपस्थित परमाणुओं की कुल संख्या $N\times10^{24}$ है। N का मान है :–

Sol. 2

FCC $a = 400$ pm

$$df_{Fcc} = \frac{z_{Fcc}\times GMM}{N_A\times a^3}$$

$$8g/ml = \frac{4\times GMM}{N_A\times 64\times 10^{-24}}$$

$$GMM = 128\times N_A\times 10^{-24}$$

$$= \frac{N_A}{128\times N_A\times 10^{-24}}\times 256$$

N = 2 Ans.

30. The conductance of a 0.0015 M aqueous solution of a weak monobasic acid was determined by using a conductivity cell consisting of platinized Pt electrodes. The distance between the electrodes is 120 cm with an area of cross section of 1 cm^2. The conductance of this solution was found to be 5×10^{-7} S. The pH of the solution is 4. The value of limiting molar conductivity (Λ_m^0) of this weak monobasic acid is aqueous solution is $Z\times10^2$ S cm^{-1}. The value of Z is

30. एक दुर्बन एकक्षारकीय अम्ल के 0.0015 M जलीय विलयन की चालकता (conductance) एक प्लाटिनिकत Pt (Platinized Pt) इलेक्ट्रॉड वाले चालकता सैल का उपयोग कर के निर्धारित की गयी। 1 cm^2 अनुप्रस्थ काट के क्षेत्रफल वाले इलेक्ट्रॉडो के बीच की दूरी 120 cm है। इस विलयन की चालकता का मान 5×10^{-7} S पाया गया। विलयन का pH 4 है। इस दुर्बल एकक्षारकीय अम्ल की जलीय विलयन में सीमान्त मोलर चालकता (limiting molar conductivity (Λ_m^0)) का मान $Z\times10^2$ S cm^{-1} है। Z का मान है।

Sol. 6

Concentration = 0.0015 M

[HA]

ℓ = 120 cm $\quad G = 5\times10^{-7}\ S = R\times A/\ell$

$A = 1\ cm^2$

$P^H = -\log(H^+) = -\log(0.0015\ \alpha) = 4$

$$\alpha = \frac{1}{15}$$

$$\lambda_M^C = \frac{K\times1000}{[HA]} = \frac{5\times10^{-7}\times120\times1000}{0.0015}\times10^4$$

$= 40$

$$\alpha = \frac{\lambda_M^C}{\lambda_M^\infty} = \frac{1}{15}$$

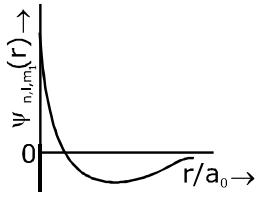
$\lambda_M^\infty = 600 = Z\times10^2\ sm^7$

Z = 6 Ans.

Paragraph :

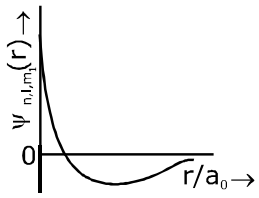
Using the information which is available in three columns of table given below, give answer of questions Q.31., Q.32 and Q.33.

Wave function ψ_{n,l,m_1} is a mathematical function, which value depends on spherical polar coordinates (r, θ, ϕ) and titrated from quantum numbers n, l and m_1. Here, r is distance from nucleus, θ is Colatitude and ϕ is azimuth. In mathematical functions which are given below table, Z is atomic number and a_0 is Bohr Radius.

Column 1	**Column 2**	**Column 3**
(I) 1s Orbital	(i) $\psi_{n,l,m_1} \propto \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$	(P) 
(II) 2s Orbital	(ii) a radial node	(Q) nucleus per probability density $\propto \frac{1}{a_0^3}$
(III) $2p_z$ Orbital	(iii) $\psi_{n,l,m_1} \propto \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}} re^{-\left(\frac{zr}{2a_0}\right)} \cos\theta$	(R) nucleus per probability density is maximum
(IV) $3d_{z^2}$ Orbital	(iv) xy- plane is node	(S) energy requires to excited a electron from level n = 2 to n = 4, is $\frac{27}{32}$ times to energy requires to excited a electron from level n = 2 to n = 6

नीचे दी गई टेबल के तीन कॉलमों में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढ़ंग से सुमेल कर प्रश्नों Q.31., Q.32 और Q.33 के उत्तर दीजिए–

तरंग फलन, ψ_{n,l,m_1} एक गणितीय फलन है जिसका मान इलेक्ट्रॉन के गोलीय ध्रुवीय निर्देशांक (r, θ, ϕ) पर निर्भर करता है और क्वांटम संख्या n, l और m_1 से अभिलक्षित होता है। यहाँ r नूक्लिअस से दूरी, θ कोटिशर (Colatitude) है, और ϕ दिन्गश (azimuth) है। टेबल में दिए गये गणितीय फलनों में Z परमाणु क्रमांक है और a_0 बोर त्रिज्या (Bohr Radius) है।

कॉलम 1	**कॉलम 2**	**कॉलम 3**
(I) 1s ऑर्बिटल	(i) $\psi_{n,l,m_1} \propto \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Zr}{a_0}}$	(P) 
(II) 2s ऑर्बिटल	(ii) एक त्रिज्यात्मक (radial) नोड	(Q) न्यूक्लिअस पर प्रायिकता घनत्व (Probability density) $\propto \frac{1}{a_0^3}$

(III) $2p_z$ ऑर्बिटल (iii) $\psi_{n,l,m_1} \propto \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{5}{2}} re^{-\left(\frac{zr}{2a_0}\right)} \cos\theta$ (R) न्यूक्लिअस पर प्रायिकता घनत्व (Probability density) अधिकतम है।

(IV) $3d_z^2$ ऑर्बिटल (iv) xy- समतल एक नोडीय है (S) इलेक्ट्रॉन को n = 2 अवस्था से n = 4 अवस्था तक उत्तेजित करने की ऊर्जा, इलेक्ट्रॉन को n = 2 अवस्था से n = 6 अवस्था तक उत्तेजित करने के लिये आवश्यक ऊर्जा से $\frac{27}{32}$ गुना है।

31. For He^+ ion, which of the followig option is incorrect ?
(A) (I) (i) (S) (B) (II) (ii) (Q) (C) (I) (iii) (R) (D) (I) (i) (R)

31. He^+ आयन के लिये निम्नलिखित विकल्पों में से केवल गलत (Incorrect) संयोजन है :–?
(A) (I) (i) (S) (B) (II) (ii) (Q) (C) (I) (iii) (R) (D) (I) (i) (R)

Sol. C

32. For orbital which are given in column 1, which of the following options has correct combination for any hydrogen like species :
(A) (II) (ii) (P) (B) (I) (ii) (S) (C) (IV) (iv) (R) (D) (III) (iii) (P)

32. कॉलम 1 में दिए गये ऑर्बिटल (Orbital) के लिये निम्नलिखित विकल्पों में से किसी भी हाइड्रोजन–समान स्पीशीज (Species) के लिये केवल सही संयोजन है :–
(A) (II) (ii) (P) (B) (III) (ii) (S) (C) (IV) (iv) (R) (D) (III) (iii) (P)

Sol. A

$$\frac{27}{3} \times 13.6 \times 2^2 \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{36}\right\} = 13.6 \times \left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right\}$$

$$\frac{27}{32} \times \frac{8}{36} = \frac{3}{16}$$

33. Which of the following options has correct combination for hydrogen atom ?
(A) (I) (i) (P) (B) (I) (iv) (R) (C) (II) (i) (Q) (D) (I) (i) (S)

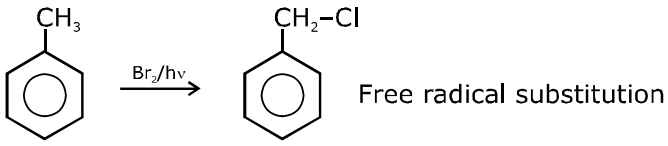
33. हाइड्रोजन परमाणु के लिये निम्नलिखित विकल्पों मे से केवल सही संयोजन है:–
(A) (I) (i) (P) (B) (I) (iv) (R) (C) (II) (i) (Q) (D) (I) (i) (S)

Sol. D

34. The only CORRECT combination in which the reaction proceeds through radical mechanism is
(A) (IV) (I) (Q) (B) (III) (II) (P) (C) (II) (iii) (R) (D) (I) (ii) (R)

34. निम्नलिखित विकल्पों में से केवल सही संयोजन जिसमें अभिक्रिया मूलक (radical) प्रक्रिया द्वारा बढ़ती है, हैं
(A) (IV) (I) (Q) (B) (III) (II) (P) (C) (II) (iii) (R) (D) (I) (ii) (R)

Sol. D



Free radical substitution

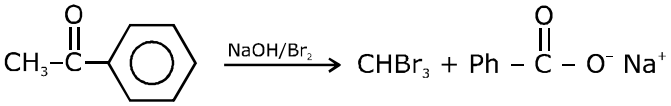
35. For the synthesis of benzoic acid, the only CORRECT combination is

(A) (II) (i) (S) (B) (I) (iv) (Q) (C) (IV) (ii) (P) (D) (III) (iv) (R)

35. बेन्जोईक अम्ल के संश्लेषण (Synthesis) के लिये निम्नलिखित विकल्पों में से केवल सही संयोजन है :–

(A) (II) (i) (S) (B) (I) (iv) (Q) (C) (IV) (ii) (P) (D) (III) (iv) (R)

Sol. **A**



Acetophenone

Haloform Reaction

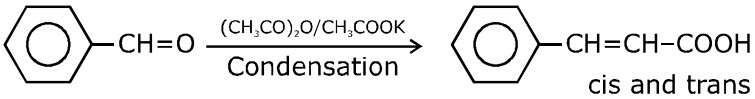
36. The only CORRECT combination that gives two different carboxylic acid is

(A) (IV) (iii) (Q) (B) (II) (iv) (R) (C) (I) (i) (S) (D) (III) (iii) (P)

36. निम्नलिखित विकल्पों में से केवल सही संयोजन जो कि दो भिन्न कार्बोक्सिलिक अम्ल देता है

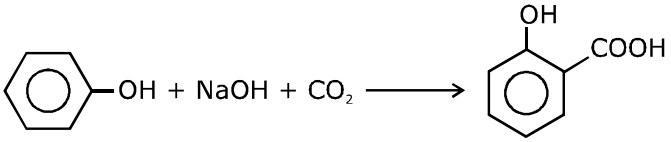
(A) (IV) (iii) (Q) (B) (II) (iv) (R) (C) (I) (i) (S) (D) (III) (iii) (P)

Sol. **D**



Benzaldehyde

(Perkin's reaction)



Kolbe-schmidt reaction

37. Let X and Y be two events such that $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ and $P(Y|X) = \frac{2}{5}$. Then

(A) $P(Y) = \frac{4}{15}$ (B) $P(X'|Y) = \frac{1}{2}$ (C) $P(X \cup Y) = \frac{2}{5}$ (D) $P(X \cap Y) = \frac{1}{5}$

37. माना कि X और Y इस प्रकार की दो घटनायें (events) है कि $P(X) = \frac{1}{3}$, $P(X|Y) = \frac{1}{2}$ और $P(Y|X) = \frac{2}{5}$ है। तब

(A) $P(Y) = \frac{4}{15}$ (B) $P(X'|Y) = \frac{1}{2}$ (C) $P(X \cup Y) = \frac{2}{5}$ (D) $P(X \cap Y) = \frac{1}{5}$

Sol. A, B

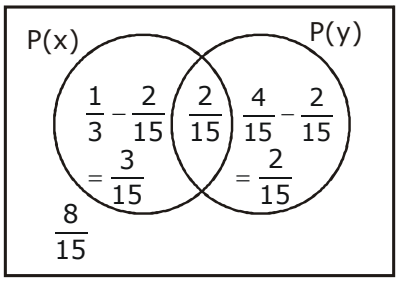
(A) $P(x) = \frac{1}{3}$ $P(X \mid Y) = \frac{1}{2}$ $P(Y \mid X) = \frac{2}{5}$

$$\frac{P(x \cap y)}{P(y)} = \frac{1}{2} \ \& \ \frac{P(x \cap y)}{P(x)} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \boxed{P(x \cap y) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}}$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{2}{15}}{P(y)} = \frac{1}{2} \qquad \therefore \quad \boxed{P(y) = \frac{4}{15}}$$

(B) $$P\left(\frac{x'}{y}\right) = \frac{P(x' \cap y)}{P(y)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{4}{15}} = \frac{1}{2}$$



(D) $P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15} = \frac{5+4-2}{15} = \frac{7}{15}$$

38. Let $f : R \to (0,1)$ be a continuous function. Then, which of the following functions (s) has(have) the value zero at some point in the interval (0,1) ?

(A) $e^x - \int_0^x f(t)\sin t\, dt$ (B) $f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$

(C) $x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)\cos t\, dt$ (D) $x^9 - f(x)$

38. माना कि $f : R \to (0,1)$ एक सतत फलन (continuous function) है। तब निम्न फलनों में से कौन से फलन(नों) का (के) मान अन्तराल (interval) (0,1) के किसी बिन्दु पर शून्य होगा ?

(A) $e^x - \int_0^x f(t)\sin t\, dt$ (B) $f(x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\, dt$

(C) $x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)\cos t\, dt$ (D) $x^9 - f(x)$

Sol. **C, D**

$f : R \to (0, 1)$

(A) range of e^x in (0, 1) is (1, e)

$\int_0^x f(x)\sin t\, dt$ will be less than 1

(B) always +ve

(C) $x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)\cos t\, dt$

at x = 0 $\quad x - \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} f(t)\cos t\, dt = 0$

at x = 1 $\quad 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} f(t)\cos t\, dt$

+ve

$\therefore$ will be zero in (0, 1)

(D) $x^9 - f(x)$ will be zero at $x \in (0, 1)$

39. Let a, b, x and y be real numbers such that $a - b = 1$ and $y \neq 0$. If the complex number $z = x + iy$ satisfies $\text{Im}\left(\frac{az+b}{z+1}\right) = y$, then which of the following is(are) possible value(s) fo x ?

(A) $1 - \sqrt{1+y^2}$ (B) $-1 - \sqrt{1-y^2}$ (C) $1 + \sqrt{1+y^2}$ (D) $-1 + \sqrt{1-y^2}$

39. माना कि a, b, x और y इस प्रकार की वास्तविक सँख्यायें (real numbers) है कि $a - b = 1$ और $y \neq 0$ है। यदि सम्मिश्र सँख्या (complex number) $z = x + iy$, $\text{Im}\left(\frac{az+b}{z+1}\right) = y$ को संतुष्ट करती है, तब निम्न में से कौन सा (से) x का (के) सम्भावित मान है(है) ?

(A) $1 - \sqrt{1+y^2}$ (B) $-1 - \sqrt{1-y^2}$ (C) $1 + \sqrt{1+y^2}$ (D) $-1 + \sqrt{1-y^2}$

Sol. **B,D**

$a - b = 1, \quad Im\left[\frac{ax+b+aiy}{x+1+iy}\right] = y$

$\Rightarrow \quad Im\left[\frac{(ax+b+aiy)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2}\right] = y$

$\Rightarrow \quad \frac{ay(x+1)-(ax+b)y}{(x+1)^2+y^2} = y$

$\Rightarrow \quad axy + ay - axy - by = y((x + 1)^2 + y^2)$

$\Rightarrow \quad (a - b)y = y((x + 1)^2 + y^2)$

$\Rightarrow \quad \boxed{1 = (x+1)^2 + y^2}$

$x + 1 = \pm \sqrt{1-y^2}$

$x = -1 \pm \sqrt{1-y^2}$

$\boxed{\begin{array}{l} x = -1+\sqrt{1-y^2} \\ x = -1-\sqrt{1-y^2} \end{array}}$

40. If $2x - y + 1 = 0$ is a tangent to the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$, then which of the following CANNOT be sides of a right angled triangle ?

(A) a, 4, 1 (B) 2a, 4, 1 (C) a, 4, 2 (D) 2a, 8, 1

40. यदि $2x - y + 1 = 0$ अतिपरवलय (hyperbola) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$ की स्पर्शरेखा (tangent) है तो निम्न में से कौन सी समकोणीय त्रिभुज (right angle triangle) की भुजायें नहीं हो सकती है(है) ?

(A) a, 4, 1 (B) 2a, 4, 1 (C) a, 4, 2 (D) 2a, 8, 1

Sol. **A,C,D**

$2x - y + 1 = 0 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$

$m = 2 \qquad$ tangent is

$\therefore \quad \sqrt{4a^2 - 16} = 1 \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

$4a^2 = 17 \qquad y = 2x \pm \sqrt{4a^2 - 16}$

$a^2 = \frac{17}{4} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{17}}{2} \qquad 2x - y = \pm\sqrt{4a^2 - 16}$

Now check option.

41. Let [x] be the greatest integer less than or equals to x. Then, at which of the following points (s) the function $f(x) = \cos(\pi(x + [x]))$ is discontinuous ?

(A) x = – 1 (B) x = 1 (C) x = 0 (D) x = 2

41. माना कि x से छोटा या x के समान सबसे बड़ा पूर्णांक (integer) [x] है। तब $f(x) = \cos(\pi(x + [x]))$. निम्न में से किन बिन्दु(ओं) पर असतत् (discontinuous) है ?

(A) $x = -1$ (B) $x = 1$ (C) $x = 0$ (D) $x = 2$

Sol. **A,B,D**

$f(x) = x\cos(\pi(x + [x]))$

$x = n$, $f(x) = n\cos(2n\pi) = n$

$f(n+) = n\cos\pi(2n + n) = n$

$f(n-) = n\cos(\pi(2n - 1)) = -n$

For $n = 0 \rightarrow$ limit

$n = -1, 1, 2 \rightarrow$ discontinuous

42. Which of the following is(are) NOT the square of a 3×3 matrix with real entries ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

42. निम्न में से कौन सा(से) वास्तविक सँख्याओं के 3×3 आव्यूह (matrix) का वर्ग नहीं है (है) ?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sol. **A,C**

From options square of the determinant value of matrices in option (A) and (C) is –1 which is not real so options (A) & (C)

43. If a chord, which is not a tangent, of the parabola $y^2 = 16x$ has the equation $2x + y = p$, and midpoint (h,k), then which of the following is (are) possible value (s) of p,h and k ?

(A) $p = -1, h = 1, k = -3$ (B) $p = 2, h = 3, k = -4$

(C) $p = -2, h = 2, k = -4$ (D) $p = 5, h = 4, k = -3$

43. यदि परवलय (parabola) $y^2 = 16x$ की एक जीवा (Chord), जो स्पर्शरेखा (tangent) नहीं है, का समीकरण $2x + y = p$ तथा मध्यबिन्दु (midpoint)(h,k) है, तो निम्न में से p,h एवम् k के सम्भावित मान है(है) ?

(A) $p = -1, h = 1, k = -3$ (B) $p = 2, h = 3, k = -4$

(C) $p = -2, h = 2, k = -4$ (D) $p = 5, h = 4, k = -3$

Sol. **B**

Eq of chord AB (with given middle point)

$T = S_1$

$yk - 8(x + h) = k^2 - 16h$

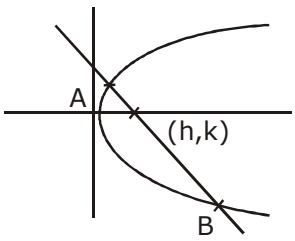
AB : $yk - 8x = k^2 - 8h$ ...(1)

Given eqⁿ AB : $y + 2x = p$ ...(2)

$(1) = (2) \Rightarrow \frac{k}{1} = \frac{-8}{2} = \frac{k^2 - 8h}{p}$

$\boxed{k = -4}$

$$\begin{vmatrix} k^2 - 8h = -4p \\ 16 - 8h = -4p \\ 4 - 2h = -p \end{vmatrix}$$



$\boxed{2h - p = 4}$

Chek option.

44. For a real number α, if the system

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ of linear equations, has infinitely many solutions, then $1 + \alpha + \alpha^2 =$

44. वास्तविक संख्या (real number) α के लिये, यदि रैखिक समीकरण निकाय (system of linear equations)

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ के अनन्त हल (infinitely many solutions) है, तब $1 + \alpha + \alpha^2 =$

Sol. 1

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$1(1 - \alpha^2) - \alpha(\alpha - \alpha^3) + \alpha^2(\alpha^2 - \alpha^2) = 0$
$1 - \alpha^2 - \alpha^2 + \alpha^4 = 0$
$1 + \alpha^4 = 2\alpha^2$
$\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 = 0$
$(\alpha^2 - 1)^2 = 0$
$\alpha^2 = 1 \qquad \alpha = \pm 1$

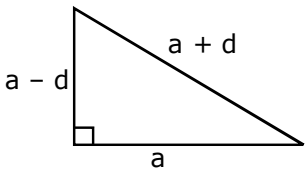
If $\boxed{\alpha = 1}$	$\boxed{\alpha = -1}$
$x + y + z = 1$	$x - y + z = 1$
$x + y + z = 1$	$x - y + z = 1$
$x + y + z = -1$	$-x + y - z = -1$
No solution	$x - y + z = 1$
	Infinite

Hence $1 + \alpha + \alpha^2 = 1$
Ans. $\alpha = -1$

45. The sides of a right angled triangle are in arithmetic progression. If the triangle has area 24, then what is the length of its smallest side ?

45. एक समकोणीय त्रिभुज (right angled triangle) की भुजायें समान्तर श्रेढ़ी (arithmetic progression) में है। यदि इसका क्षेत्रफल 24 है तब इसकी सबसे छोटी भुजा की लम्बाई क्या है ?

Sol. 6



$\frac{1}{2}$ a. (a – b) = 24
a(a – d) = 48 .....(1)
$a\left\{a - \frac{a}{4}\right\} = 48$

$(a - d)^2 + a^2 = a^2 + d^2$
$a^2 + d^2 - 2ad + a^2 = (a + d)^2$
$a^2 = 2ad$
$\boxed{a = 4d}$

$a \times \frac{39}{4} = 48$

$a^2 = \frac{48 \times 4}{3}$

$a^2 = 64$

$a = 8 \qquad \therefore d = 2$

Smallest side = 6

46. Let $f : R \to R$ be a differentiable function such that $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ and $f'(0) = 1$. if

$g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \ \operatorname{cosec} t \ f(t)\right] dt$ for $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, then $\lim_{x \to 0} g(x) =$

46. माना कि $f : R \to R$ इस प्रकार का अवकलनीय फलन (differentiable function) है कि $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$ एवम् $f'(0)$

$= 1$ है। यदि $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ के लिये $g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left[f'(t)\operatorname{cosec} t - \cot t \ \operatorname{cosec} t \ f(t)\right] dt$ है, तब $\lim_{x \to 0} g(x) =$

Sol. 2

$f(0) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3, f'(0) = 1.$

$g(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left[\underset{II}{f'(t)} \underset{I}{\operatorname{cosec} t} - \cot t . \operatorname{cosec} t . f(t) \right] dt$ using by parts

$= \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left[f(t) . \operatorname{cosec} t\right] dt + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cot t \operatorname{cosec} t f(t) dt - \int_x^{\frac{\pi}{2}} \cot t . \operatorname{cosec} t f(t) dt$

$= \left(f(t) \operatorname{cosec} t\right)\Big|_x^{\frac{\pi}{2}}$

$g(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right).1 - f(x) \operatorname{cosec} x$

$g(x) = 3 - f(x) \operatorname{cosec} x \Rightarrow \lim_{x \to 0} g(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} 3 - f(x).\operatorname{cosec} x$

$\Rightarrow 3 - \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$ Apply L-Hospital rule

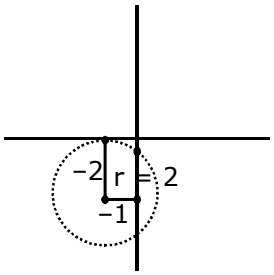
$\Rightarrow 3 - \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{\cos x} = 3 - \frac{1}{\cos 0} = 3 - 1 = 2$

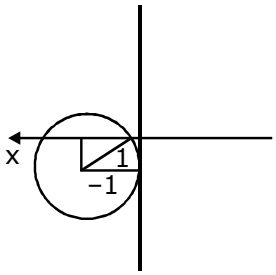
47. For how many values of p, the circle $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ and the coordinate axes have exactly three common points ?

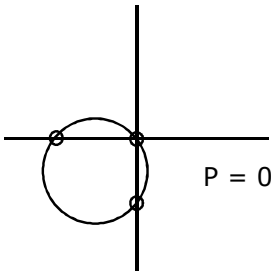
47. p के कितने मानों के लिये वत्त (circle) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - p = 0$ एवम् निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) में केवल तीन बिन्दु उभयनिष्ठ (common) है ?

Sol. **2**

Centre(–1, –2) $\qquad$ $r = \sqrt{5+P} = 2$







$\sqrt{1^2 + 2^2 + P} = 2$ $\qquad$ circle passes 3 points

$\therefore P = -1$

$\Rightarrow f^2 - c > 0$

$\Rightarrow 4 - 1 > 0 = 3$

$\sqrt{5+P} = 1$

$P = -4$

$\Rightarrow g^2 - c > 0$

$\Rightarrow 1 - 4 > 0 \times$

48. Words of length 10 are formed using the letters A,B,C,D,E,F,G,H,I,J. Let x be the number of such words where no letter is repeated ; and let y be the number of such words where exactly one letter is repeated twice and no other letter is repeated. Then, $\frac{y}{9x} =$

48. अक्षरों A,B,C,D,E,F,G,H,I,J से 10 लम्बाई के शब्द बनाये जाते है। माना कि x इस तरह के उन शब्दों की सँख्या है जिनमें किसी भी अक्षर की पुनरावत्ति नहीं होती है, तथा y इस तरह के उन शब्दों की सँख्या है जिन में केवल एक अक्षर की पुनरावत्ति दो बार होती है व किसी अन्य अक्षर की पुनरावत्ति नहीं होती है। तब $\frac{y}{9x} =$

Sol. **5**

A,B,C,D,E,F,G,H,I,J $\Rightarrow$ 10 letter

x = 10!

y = when exactly 1 letter is repacted twice.

$^{10}C_9 \times \underline{|8} \times 2$

x					x				

$^{10}C_1 \times {}^{10}C_2 \times 1 \times \underline{|8} = \frac{\underline{|10}}{2} = 50\underline{|9}$

$\Rightarrow \frac{y}{9x} = \frac{50\underline{|9}}{\underline{|10}} = 5$

Answer 49, 50, and 51 by appropriately matching the information given in the three columns of thee following table

Column 1,2 and 3 contain conics, equation of tangent to the conics and point of contact, respectively

Column 1	**Column 2**	**Column 3**
(I) $x^2 + y^2 = a^2$	(i) $my = m^2x + a$	(P) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(II) $x^2 + a^2y^2 = a^2$	(ii) $y = mx + a\sqrt{m^2+1}$	(Q) $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2+1}}\right)$
(III) $y^2 = 4ax$	(iii) $y = mx + \sqrt{a^2m^2-1}$	(R) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2m^2+1}}\right)$
(IV) $x^2 - a^2y^2 = a^2$	(iv) $y = mx + \sqrt{a^2m^2+1}$	(S) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2-1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2m^2-1}}\right)$

49. For $a = \sqrt{2}$, if a tangent is drawn to a suitable conic (Column 1) at the point of contact (–1, 1), then which of the following options is the only CORRECT combination for obtaining its equation ?

(A) (I) (ii) (Q) (B) (I) (i) (P) (C) (III) (i) (P) (D) (II) (ii) (Q)

50. The tangent to a suitable conic (Column 1) at $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ if found to be $\sqrt{3}x + 2y = 4$, then which of the following options is the only CORRECT combination ?

(A) (IV) (iv) (S) (B) (II) (iv) (R) (C) (IV) (iii) (S) (D) (II) (iii) (R)

51. If a tangent to a suitable conic (Column 1) is found to be $y = x + 8$ and its point of contact is (8, 16), then which of the following options is the only CORRECT combination ?

(A) (III) (i) (P) (B) (I) (Ii) (Q) (C) (II) (iv) (R) (D) (III) (ii) (Q)

नीचे दी गयी टेबल के तीन कॉलामें में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढंग से सुमेल कर प्रश्नों 49,50 एवं 51 के उत्तर दीजिये।

कॉलम 1,2 तथा 3 में क्रमशः कॉनिक (conic), कॉनिक पर स्पर्शरेखा (tangent) का समीकरण तथा स्पर्शबिनदु (point) of contact) दिये गये है।

कॉलम 1	**कॉलम 2**	**कॉलम 3**
(I) $x^2 + y^2 = a^2$	(i) $my = m^2x + a$	(P) $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$
(II) $x^2 + a^2y^2 = a^2$	(ii) $y = mx + a\sqrt{m^2+1}$	(Q) $\left(\frac{-ma}{\sqrt{m^2+1}}, \frac{a}{\sqrt{m^2+1}}\right)$
(III) $y^2 = 4ax$	(iii) $y = mx + \sqrt{a^2m^2-1}$	(R) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{a^2m^2+1}}\right)$
(IV) $x^2 - a^2y^2 = a^2$	(iv) $y = mx + \sqrt{a^2m^2+1}$	(S) $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2-1}}, \frac{-1}{\sqrt{a^2m^2-1}}\right)$

49. $a = \sqrt{2}$ के लिये उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) पर एक स्पर्शरेखा खींची जाती है जिसका स्पर्शबिन्दु (–1, 1) तब निम्न में से कौन सा विकल्प इस स्पर्शरेखा का समीकरण प्राप्त करने का केवल सही संयोजन है

(A) (I) (ii) (Q) (B) (I) (i) (P) (C) (III) (i) (P) (D) (II) (ii) (Q)

50. यदि उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) के बिन्दु $(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ पर स्पर्शरेखा $\sqrt{3}x + 2y = 4$ है, तब निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ,

(A) (IV) (iv) (S) (B) (II) (iv) (R) (C) (IV) (iii) (S) (D) (II) (iii) (R)

51. यदि उपयुक्त कॉनिक (कॉलम 1) के स्पर्शबिन्दु (8,16) पर स्पर्शरेखा $y = x + 8$ है, तब निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ,

(A) (III) (i) (P) (B) (I) (Ii) (Q) (C) (II) (iv) (R) (D) (III) (ii) (Q)

Sol. I, (ii), Q

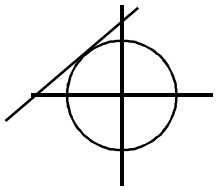
II, (iv), R

III, (i), P

IV, (III), S

49. **A**

$a = \sqrt{2}$



(I) $x^2 + y^2 = 2$

P : (–1, 1)

T : $y - x = 2$

(II) $x^2 + 2y^2 = 2$

P (–1, 1) No tangent

(III) $y^2 = 4\sqrt{2}x$ No tangent

(IV) $x^2 - 2y^2 = 2$ No tangent

50. **B**

T : POC

$3x + 2y = 4$ $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2$

$\boxed{m = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\boxed{a = 2}$, $\boxed{m_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$

51. **A**

$y = x + 8$ (8, 16)

$\boxed{m = 1}$

$a = 8$

Answer 49, 50, and 51 by appropriately matching the information given in the three columns of thee following table

Let $f(x) = x + \log_e x - x\log_x,\ x \in (0,\infty)$

* Column 1 contains information about zeros of f(x), f'(x) and f"(x)
* Column 2 contains information about the limiting behavior of f(x), f'(x) and f"(x) at infinity.
* Column 3 contains information about increasing / decreasing nature of f(x) and f'(x)

Column 1	**Column 2**	**Column 3**
(I) $f(x) = 0$ for some $x \in (1, e^2)$	(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$	(P) f is increasing in (0, 1)
(II) $f'(x) = 0$ for some $x \in (1, e)$	(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	(Q) f is decreasing in (e, e^2)
(III) $f'(x) = 0$ for some $x \in (0, 1)$	(iii) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$	(R) f' is increasing in (0, 1)
(IV) $f''(x) = 0$ for some $x \in (1, e)$	(iv) $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$	(S) f' is decreasing in (e, e^2)

52. Which of the following options is the only INCORRECT combination ?
(A) (I) (iii) (P) (B) (II) (iv) (Q) (C) (II) (iii) (P) (D) (III) (i) (R)

53. Which of the following options is the only CORRECT combination ?
(A) (I) (ii) (R) (B) (III) (iv) (P) (C) (II) (iii) (S) (D) (IV) (i) (S)

54. Which of the following options is the only CORRECT combination ?
(A) (III) (iii) (R) (B) (IV) (iv) (S) (C) (II) (ii) (Q) (D) (I) (i) (P)

नीचे दी गयी टेबल के तीन कॉलमों में उपलब्ध सूचना का उपयुक्त ढंग से सुमेल कर प्रश्नों 52,53 एवं 54 के उत्तर दीजिये।

माना कि $f(x) = x + \log_e x - x\log_x,\ x \in (0,\infty)$ है।

* कॉलम 1 में f(x), f'(x) एवम् f"(x) के शून्यों की सूचना दी गई है।
* कॉलम 2 में f(x), f'(x) एवम् f"(x) के अनन्त की तरफ सीमा पर व्यवहार (limiting behaviour at infinity) की सूचना दी गई है।
* कॉलम 3 में f(x) एवम् f'(x) के वर्धमान / ह्रासमान (increasing/ decreasing) होने की प्रकृति (nature) की सूचना दी गई है।

कॉलम 1	**कॉलम 2**	**कॉलम 3**
(I) $f(x) = 0$ किसी $x \in (1, e^2)$ के लिये	(i) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$	(P) f में (0, 1) वर्धमान है
(II) $f'(x) = 0$ किसी $x \in (1, e)$ के लिये	(ii) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$	(Q) f में (e, e^2) ह्रासमान है
(III) $f'(x) = 0$ किसी $x \in (0, 1)$ के लिये	(iii) $\lim_{x\to\infty} f'(x) = -\infty$	(R) f' में (0, 1) वर्धमान है
(IV) $f''(x) = 0$ किसी $x \in (1, e)$ के लिये	(iv) $\lim_{x\to\infty} f''(x) = 0$	(S) f' में (e, e^2) ह्रासमान है।

52. निम्न में से कौन सा विकल्प केवल गलत संयोजन (only INCORRECT combination) है ?
(A) (I) (iii) (P) (B) (II) (iv) (Q) (C) (II) (iii) (P) (D) (III) (i) (R)

53. निम्न में से कौन सा विकल्प सही संयोजन है ?
(A) (I) (ii) (R) (B) (III) (iv) (P) (C) (II) (iii) (S) (D) (IV) (i) (S)

54. निम्न में से कौन सा विकल्प केवल सही संयोजन है ?
(A) (III) (iii) (R) (B) (IV) (iv) (S) (C) (II) (ii) (Q) (D) (I) (i) (P)

Sol.

Column 1	**Column 2**	**Column 3**
(I) Correct	(i) Incorrect	(P) Correct
(II) Correct	(ii) Correct	(Q) Correct
(III) Incorrect	(iii) Correct	(R) Incorrect
(IV) Incorrect	(iv) Correct	(S) Correct

52. D 53. C 54. C

For $f = x + \ln x - x\ln x$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to -\infty$

(ii) $f(1).f(e^2) < 0$

For $f' = \frac{1}{x} - \ln x$

(i) $f'(1).f'(e) < 0$

(ii) $f'(0).f'(1) > 0$

(iii) $\lim\limits_{\to\infty} f'(x) \to -\infty$

For $f'' = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x}$

$f'' < 0 \Rightarrow f' \downarrow$

$\lim\limits_{x\to\infty} f'' = \boxed{0}$

(iii) $f \downarrow (0, \alpha)$ $1 < \alpha < e$

$f \uparrow (\alpha, \infty)$