JEE ADVANCED PAPER-II

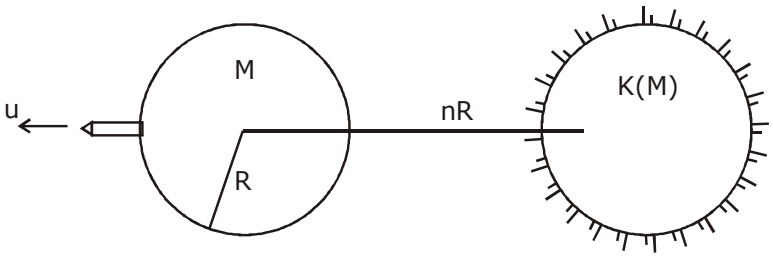
SOLUTIONS

PHYSICS

1. A rocket is launched normal to the surface of the Earth, away from the Sun, along the line joining the Sun and the Earth. The Sun is 3×10^5 times heavier than the Earth and is at a distance 2.5×10^4 times larger than the radius of the Earth. The escape velocity from Earth's gravitational field is $v_e = 11.2$ km s^{-1}. The minimum initial velocity (v_s) required for the rocket to be able to leave the Sun-Earth system is closest to
(Ignore the rotation and revolution of the Earth and the presence of any other planet)
(A) $v_s = 62$ km s^{-1} (B) $v_s = 22$ km s^{-1} (C) $v_s = 72$ km s^{-1} (D) $v_s = 42$ km s^{-1}

1. राकेट भूतल के अभिलम्बवत सूर्य एवं पथ्वी को जोड़ने वाली रेखा में सूर्य से दूर की तरफ (radially outward from the direction of the sun) प्रक्षेपित किया गया है। सूर्य पथ्वी से 3×10^5 गुना भारी है एवं पथ्वी की त्रिज्या से 2.5×10^4 गुनी दूरी पर स्थित है। पथ्वी के गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र के लिए पलायन गति (escape velocity) $v_e = 11.2$ km s^{-1} हैं। राकेट को सूर्य एवं पथ्वी निकाय (Sun Earth system) के गुरूत्वाकर्षण से मुक्त होने के लिए कम से कम प्रारंभिक वेग (v_s) का निकटतम मान है–
(पथ्वी की चक्रीय गति और परिभ्रमण तथा किसी अन्य ग्रह की उपस्थिति की उपेक्षा करें।)
(A) $v_s = 62$ km s^{-1} (B) $v_s = 22$ km s^{-1} (C) $v_s = 72$ km s^{-1} (D) $v_s = 42$ km s^{-1}

1. **D**



$\sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2;\ \frac{1}{2}m(v_e^2) = \frac{GMm}{R}$

$\frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{R} - \frac{G(KM)m}{2(nR)} = 0$

$\frac{1}{2}u^2 = \frac{GM}{R} + \frac{KGM}{nR}$

$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(v_e)^2 + \frac{1}{2}\frac{3\times10^5}{2.5\times10^4}(v_e)^2$

$= (11.2)^2 + 12\,(11.2)^2$

$= 13\,(11.2)^2 \Rightarrow u = \sqrt{13} \times 11.2 = 42$

2. A person measures the depth of a well by measuring the time intgerval between dropping a stone and receiving the sound of impact with the bottom of the well. The error in his measurement of time is $\delta T = 0.01$ seconds and he measures the depth of the well to be $L = 20$ meters. Take the acceleration due to gravity $g = 10$ ms^{-2} and the velocityof sound is 300 ms^{-1}. Then the fractional error in the measurement, $\delta L/L$, is closest to
(A) 5% (B) 1% (C) 3% (D) 0.2%

2. एक व्यक्ति एक पत्थर को कुऐं में गिराते समय और कुऐं की तली में संघट से उत्पन्न ध्वनि के समय अंतराल का मापन करके कुऐं की गहराई का पता लगाता है। यह समायांतराल के मापन में त्रुटि $\delta T = 0.01$ सेकेंड एवं कुऐं की गहराई $L = 20$ m मापता है। गुरूत्वाकर्षण त्वरण $g = 10\ ms^{-2}$ एवं ध्वनि गति $300\ ms^{-1}$ दी गई है। $\delta L/L$ के मापन में निकटतम आशिक त्रुटि (fractional error) है–

(A) 5% (B) 1% (C) 3% (D) 0.2%

2. **B**

$$t = \frac{t}{v} + \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

$$dt = \frac{dL}{300} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{10}} \times \frac{1}{\sqrt{L}}\ dl$$

$$dt = \frac{dL}{300} + \frac{0.22}{\sqrt{20}}\ (dl)$$

$$0.01 = \frac{dl}{300} + 0.05\ dl$$

$$3 = 16\ dl$$

$$dl = \frac{3}{16}$$

$$\frac{dl}{20} \times 100 = 0.95\%$$

3. Consider an expanding sphere of instataneous radius R whose total mass remains constant. The expansion is such that the instantaneous density ρ remains uniform throughout the volume. The rate of fractional change in density $\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)$ is constant. The velocity v of any point on the surface of the expanding sphere is proportional to

(A) R (B) $\frac{1}{R}$ (C) $R^{2/3}$ (D) R^3

3. एक प्रसारी गोले (expanding sphere) की तात्क्षणिक (instataneous) त्रिज्या R एवं द्रव्यमान M अचर रहते है। प्रसार के दौरान इसका तात्क्षणिक घनत्व ρ पूरे आयतन में एकसमान रहता है एवं आंशिक घनत्व की दर $\left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\right)$ अचर (constant) है। इस प्रसारी गोले के पष्ठ पर एक बिन्दु का वेग v निम्न के समानुपाती होगा –

(A) R (B) $\frac{1}{R}$ (C) $R^{2/3}$ (D) R^3

3. **A**

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho$$

$$\Rightarrow \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = M$$

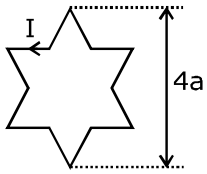
$$\Rightarrow \rho R^3 = K$$

$$\rho\left(3R^2\frac{dR}{dt}\right) + R^3\frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$3R^2\frac{dR}{dt} = -R^3\frac{d\rho}{dt} \times \frac{1}{\rho}$$

$$\frac{dR}{dt} \propto R$$

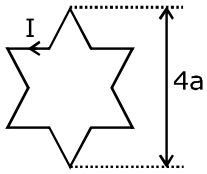
4. A symmetric star shaped conducting wire loop is carrying a steady state current I as shown in the figure. The distance between the diametrically opposite vertices of the star is 4a. The magnitude of the magnetic field at the center of the loop is



(A) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}3[2-\sqrt{3}]$ (B) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}6[\sqrt{3}-1]$

(C) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}3[\sqrt{3}-1]$ (D) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}6[\sqrt{3}+1]$

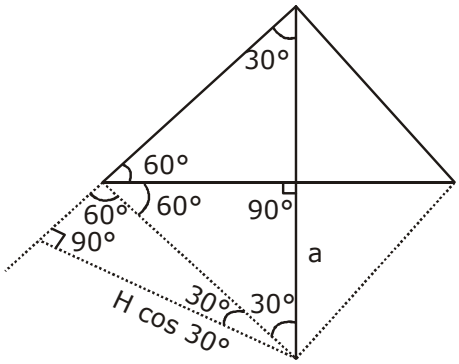
4. जैसे कि चित्रित किया गया है, एक सम्मित तारे (symmetric star) के आकार के चालक में अपरिवर्तित धारा I बह रही है। यहाँ विपरीत शीर्षो (diametrically opposite vertices) के बीच की दूरी 4a है। चालक के केन्द्र पर चुम्बकीय क्षेत्र का मान होगा –



(A) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}3[2-\sqrt{3}]$ (B) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}6[\sqrt{3}-1]$

(C) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}3[\sqrt{3}-1]$ (D) $\frac{\mu_0 I}{4\pi a}6[\sqrt{3}+1]$

4. B



H cos 30° = a

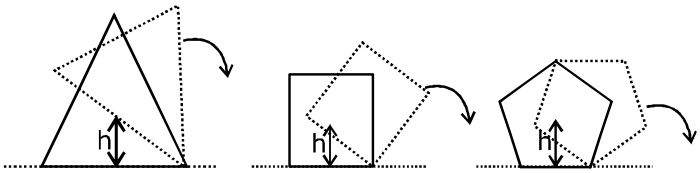
$H = \frac{a}{\cos 30^\circ}$

$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi H \cos 30^\circ}$ [sin 30° – sin 60°]

$B = \frac{\mu_0 i \times 12}{4\pi \times a}\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi a}\ 6\left(1 - \sqrt{3}\right)$

5. Consider regular polygons with number of sides n = 3, 4, 5 ..... as shown in the figure, The center of mass of all the polygons is at height h from the ground. They roll on a horizontal surface about the leading vertex without slipping and sliding as depicted,. The maximum increase in height of the locus of the center of mass for each polygton is Δ. Then Δ depends on n and h as



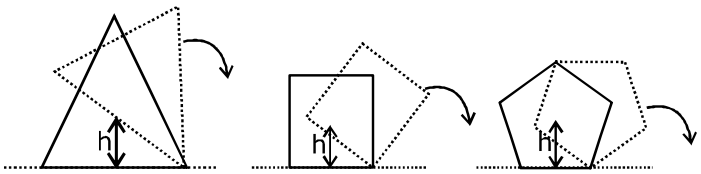
(A) $\Delta = h\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(B) $\Delta = h\tan^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

(C) $\Delta = h\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right)$

(D) $\Delta = h\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

5. चित्र द्वारा दर्शाये समबहुभुजों की भुजाओं की संख्या n = 3, 4, 5 ..... है। सभी बहुभुजों का संहति केन्द्र (center of mass) अनुभूमिक तल से h ऊँचाई पर है। ये बिना फिसले क्षितिज तल पर प्रतिगामी शीर्ष (leading vertex) के चारों ओर घूर्णन कर अग्रसरित हो रहे है। प्रत्येक बहुभुज के संहति केन्द्र के रेखापथ (locus) की ऊँचाई की अधिकतम वद्धि Δ है। तब Δ की h और n पर निर्भरता निम्न में से दी जाएगी–



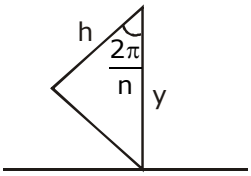
(A) $\Delta = h\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(B) $\Delta = h\tan^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

(C) $\Delta = h\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} - 1\right)$

(D) $\Delta = h\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

5. **C**

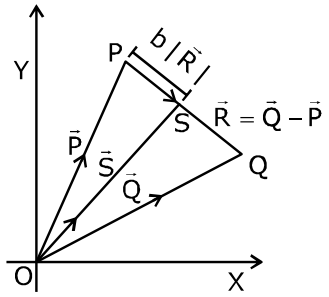


$$y\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = h$$

$\Delta = y - h$

$$= h\left[\frac{1}{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)} - 1\right]$$

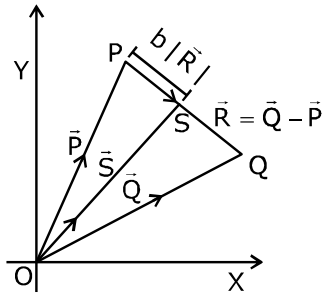
6. Three vectors $\vec{P},\vec{Q}$ and $\vec{R}$ are shown in the figure. Let S be any point on the vector $\vec{R}$. The distance between the points P and S is $b|\vec{R}|$. The general relation among vectors $\vec{P},\vec{Q}$ and $\vec{S}$ is -



(A) $\vec{S}=(1-b)\vec{P}+b\vec{Q}$ (B) $\vec{S}=(b-1)\vec{P}+b\vec{Q}$

(C) $\vec{S}=(1-b)\vec{P}+b^2\vec{Q}$ (D) $\vec{S}=(1-b^2)\vec{P}+b\vec{Q}$

6. तीन वेक्टर $\vec{P},\vec{Q}$ एवं $\vec{R}$ चित्र द्वारा दर्शाए गए है। वेक्टर $\vec{R}$ पर एक बिन्दु S दर्शाया गया है। बिन्दु P एवं बिन्दु S के बीच की दूरी $b|\vec{R}|$ है। $\vec{P},\vec{Q}$ एवं $\vec{S}$ वेक्टरों के बीच सम्बन्ध है –



(A) $\vec{S}=(1-b)\vec{P}+b\vec{Q}$ (B) $\vec{S}=(b-1)\vec{P}+b\vec{Q}$

(C) $\vec{S}=(1-b)\vec{P}+b^2\vec{Q}$ (D) $\vec{S}=(1-b^2)\vec{P}+b\vec{Q}$

6. **A**

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{bR}$

$= b\,(\vec{Q}-\vec{P}) = \vec{S}-\vec{P}$

$\vec{S} = b\vec{Q} - b\vec{P} + \vec{P}$

$= (1 - b)\,\vec{P} + b\vec{Q}$

7. A photoelectric material having work-function ϕ_0 is illuminated with light of wavelength $\lambda \left(\lambda < \frac{hc}{\phi_0} \right)$.

The fastest photoelectron has a de Broglie wavelength λ_d. A change in wavelength of the incident light by $\Delta\lambda$ results in a change $\Delta\lambda_d$ in λ_d. Then the ratio $\Delta\lambda_d/\Delta\lambda$ is proportional to

(A) λ_d^3 / λ (B) λ_d^3 / λ^2 (C) λ_d^2 / λ^2 (D) λ_d / λ

7. प्रकाश विद्युत पदार्थ (photo electric material) जिसका कार्य फलन (work-function) ϕ_0 है, तरंग–दैर्ध्य $\lambda \left(\lambda < \frac{hc}{\phi_0} \right)$

के प्रकाश से प्रदीप्त किया गया है। द्रुत प्रकाश इलेक्ट्रान की डी ब्रोगली (de Broglie) तरंग–दैर्ध्य λ_d है। आपतित प्रकाश (incident light) की तरंग–दैर्ध्य में $\Delta\lambda$ के परिवर्तन से λ_d के मान में $\Delta\lambda_d$ का परिवर्तन होता है। तब $\Delta\lambda_d/\Delta\lambda$ का अनुपात समानुपाती होगा –

(A) λ_d^3 / λ (B) λ_d^3 / λ^2 (C) λ_d^2 / λ^2 (D) λ_d / λ

7. **B**

$$\frac{1}{2} mv^2 = KE = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$$

$$p = mv = \frac{h}{\lambda_d} \Rightarrow v = \frac{h}{m\lambda_d}$$

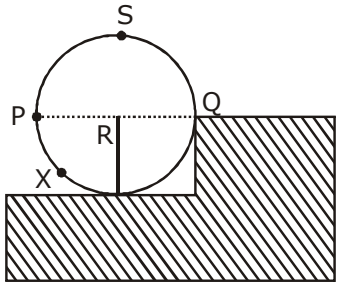
$$\frac{1}{2} m \frac{h^2}{m^2\lambda_d^2} = \frac{hc}{\lambda} - \phi_0$$

$$\frac{C_1}{I_d^2} = \frac{C_2}{\lambda} - \phi_0$$

$$\frac{-2C_1}{(\lambda_d)^3} (\Delta\lambda_d) = - \frac{C_2(\Delta\lambda)}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta\lambda_d}{\Delta\lambda} = \frac{(\lambda_d)^3}{\lambda^2}$$

8. A wheel of radius R and mass M is placed at the bottom of a fixed step of height R as shown in the figure. A constant force is continuously applied on the surface of the wheel so that it just clims the step without slipping. Consider the torque τ about an axis normal to the plane of the paper passing through the point Q. Which of the following options is/are correct?



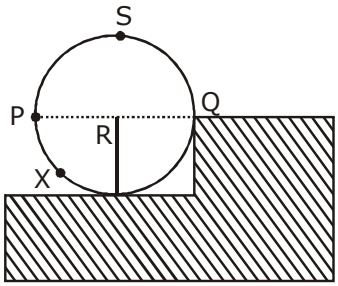
(A) If the force is applied at point P tangentially then τ decreases continuously as the wheel climbs.

(B) If the force is applied tangentially at point S then $\tau \neq 0$ but the wheel never climbs the step.

(C) If the force is applied normal to the circumference at point P then τ is zero.

(D) If the force is applied normal to the circumeference at point X then τ is constant.

एक त्रिज्या R एवं द्रव्यमान M का पहिया (wheel) एक R ऊँचाई वाले दृढ़ सोपान (step) के तल पर रखा है। (जैसे चित्र में दिखाया गया है) पहिये को सोपान पर चढ़ाने मात्र के लिये एक अचर बल पहिये के पष्ठ पर सतत (continuous constant force) कार्यरत है। कागज के पष्ठ से अभिलम्ब दिशा में (perpendicular to the plane of the paper) बिन्दु Q से जाने वाली अक्ष के सापेक्ष बलआघूर्ण τ मानिये। निम्न में से कौन(सा) से प्रकथन सही है?



(A) यदि बिन्दु P पर स्पर्शीय बल (tangentially force) लगाया जाय तब जैसे पहिया सोपान पर चढ़ेगा वैसे τ सतत घटेगा।

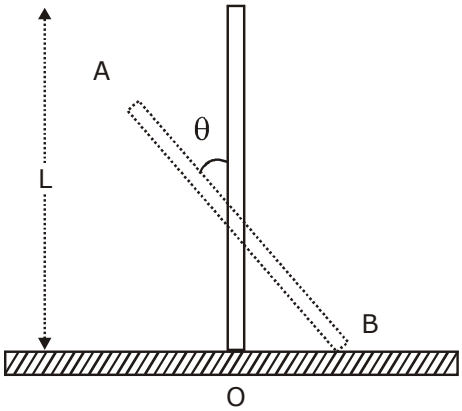
(B) यदि बिन्दु S पर स्पर्शीय बल लगाया जाय तब $\tau \neq 0$ है किन्तु पहिया सोपान पर कभी भी नहीं चढ़ेगा।

(C) यदि बिन्दु P पर पहिये की परिधि से अभिलम्ब दिशा में बल लगाया जाय तब τ शून्य रहेगा।

(D) यदि बिन्दु X पर पहिये की परिधि से अभिलम्ब दिशा (normal direction) में बल लगाया जाय तब τ अचर रहेगा।

Sol. C, D

9. A right uniform bar AB of length L is slipping from its vertical position on a frictionless floor (as shown in the figure.) At some instant of time, the angle made by the bar with the vertical is θ. Which of the following statements about its motion is/are correct?



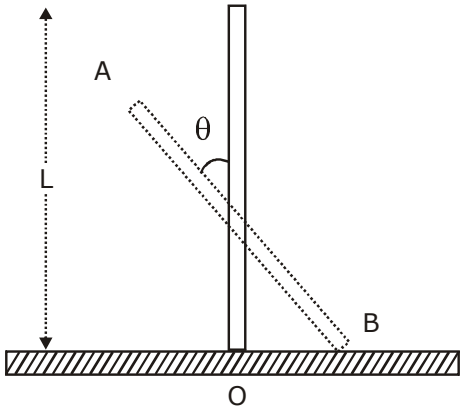
(A) When the bar makes an angle θ with the vertical, the displacement of its midpoint from the initial posiiton is proportional to $(1-\cos\theta)$

(B) The midpoint of the bar will fal vertically downward

(C) Instantaneous torque about the point in contact with the floor is proportional to $\sin\theta$

(D) The trajectory of the point A is a parabola

एक L लम्बाई का दढ़ दण्ड (rigid bar) AB अपनी ऊर्ध्वाधर स्थिति से घर्षणहीन अनुभूमिक तल (frictionless horizontal surface) पर चित्रानुसार फिसल रहा है। समय के किसी क्षण पर दंड़ द्वारा ऊर्ध्वाधर से बनाया कोण θ हैं। निम्न में से कौन सा (से) प्रकथन सही है/हैं?



(A) जब दंड ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाता है तब दंड के मध्य बिन्दु का विस्थापन उसके आरंम्भिक स्थिति से $(1-\cos\theta)$ के समानुपाती है।

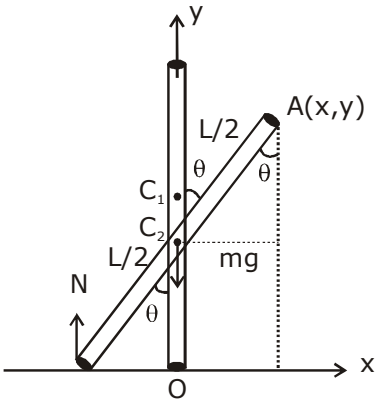
(B) दंड का मध्य बिन्दु ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर (vertically downward) गिरेगा।

(C) दंड़ और भूतल के स्पर्श बिन्दु के चारों तरफ तात्क्षणिक बलाघूर्ण (Instantaneous torque) $\sin\theta$ के समानुपाती है

(D) बिंदु A का प्रपथ परवलयिक (parabolic path) है।

9. A,B,C

Centre of mass will fall vertically downwards as N & mg are in vertical direction



Displacement of com = $\frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos\theta$

$= \frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$

$\tau_B = mg\frac{L}{2}\sin\theta$

$x = \frac{L}{2}\sin\theta$

& $y = L\cos\theta$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{L^2} = 1$$

10. The instantaneous voltages at three terminals marked X, Y and Z are given by

$V_x = V_0 \sin \omega t$,

$V_Y = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ and

$V_Z = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$

An ideal voltmeter is configured to read rms value of the potential difference between its terminals. It is connected between points X and Y and then between Y and Z. The reading(s) of the voltmeter will be

(A) independent of the choice of the two terminals

(B) $V_{xy}^{rms} = V_0$ **(C)** $V_{yz}^{rms} = V_0\sqrt{\frac{1}{2}}$ **(D)** $V_{xy}^{rms} = V_0\sqrt{\frac{3}{2}}$

10. तीन टर्मिनलों के बिन्दुओं X, Y एवं Z के तात्क्षणिक वोल्टता (instantaneous voltage) दी गई है

$V_x = V_0 \sin \omega t$,

$V_Y = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$ और

$V_Z = V_0 \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$

एक आदर्श वोल्टमापी (ideal voltmeter) दो बिन्दुओं के विभवान्तर का आर एम एस (root mean square, V^{rms}) मान देता है। यह वोल्टमापी बिन्दु X एवं Y से जोड़ा जाता है फिर Y एवं Z से जोड़ा जाता है। इस वोल्टमापी का मापन होगा/होगें।

(A) किसी भी दो बिन्दुओं के चयन पर निर्भर नहीं करता

(B) $V_{xy}^{rms} = V_0$ **(C)** $V_{yz}^{rms} = V_0\sqrt{\frac{1}{2}}$ **(D)** $V_{xy}^{rms} = V_0\sqrt{\frac{3}{2}}$

10. A,D

$v_{xy} = v_y - v_x$

$$= v_0\left[\sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\omega t\right]$$

$$= v_0\left[2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$\sqrt{3}\ v_0 \cos(\omega t + \pi/3)$

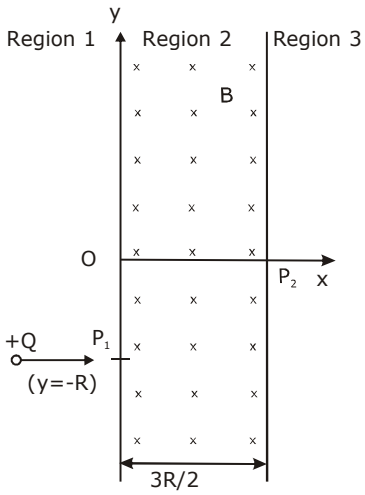
$v_{xy,\ RMS} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ v_0$

$v_{yz} = v_z - v_y$

$= v_0 \left[\sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = v_0\ [2\cos(\omega t + \pi)\sin(\pi/3)]$

$\sqrt{3}\ v_0 \cos(\omega t + \pi)$

11. A uniform magnetic field B exists in the region between x = 0 and $x = \frac{3R}{2}$ (region 2 in the figure) pointing normally into the plane of the paper. A particle with charge +Q and momentum p directed along x-axis enters region 2 from region 1 at point P_1 (y=–R). Which of the following option(s) is/are correct?



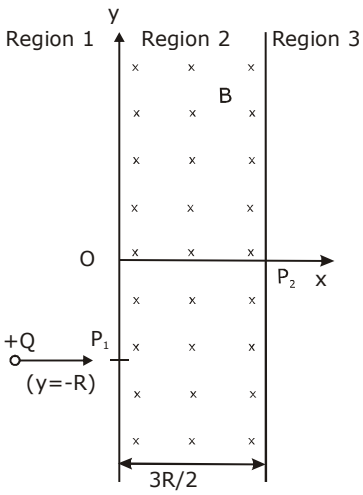
(A) For $B > \frac{2P}{3QR}$, the particle will re-enter region 1

(B) For $B = \frac{8}{13}\frac{P}{QR}$, the particle will enter region 3 through the point P_2 on x-axis

(C) For a fixed B, particles of same charge Q and same velocity v, the distance between the point P_1 and the point of re-entry into region 1 is inversely proportional to the mass of the particle.

(D) When the particle re-enters region 1 through the longest possible path in region2, the magnitude of the change in its linear momentum between point P_1 and the farthest point from y-axis is $P/\sqrt{2}$.

11. एक समान चुम्बकीय क्षेत्र (uniform magnetic field) B कागज के तल के अभिलम्ब दिशा में x = 0 एवं $x = \frac{3R}{2}$ के बीच के क्षेत्र (चित्र में region 2) में सर्वत्र (जैसे कि चित्र में दिखाया है), उपस्थित है। एक कण जिसका आवेश +Q एवं संवेग p है, वह x-अक्ष के अनुदिश क्षेत्र 2 में बिन्दु P_1 (y=–R) पर प्रवेश करता है। निम्न में से कौन सा (से) कथन सही है/हैं?



(A) $B > \frac{2P}{3QR}$ के लिए, कण क्षेत्र 1 (region 1) में पुनः प्रवेश करेगा।

(B) $B = \frac{8}{13}\frac{P}{QR}$ के लिए कण क्षेत्र 3 (region 3) में x-अक्ष पर बिन्दु P_2 से प्रवेश करेगा।

(C) नियत B के लिए एकसमान आवेश Q एवं एक समान वेग v वाले कणों के लिए बिन्दु P_1 एवं क्षेत्र 1 (region 1) में पुनः प्रवेश बिन्दु की दूरी का अंतर कणों के द्रव्यमान के व्युत्क्रमानुपाती है।

(D) जब कण सबसे लम्बे सम्भवपथ से क्षेत्र 2 (region 2) से क्षेत्र 1 (region 1) से पुनः प्रवेश करता है, तब बिन्दु P_1 और y-अक्षस` स बस` दूबिन्दु के लिए रेखिाक स`वेग के परिमाणमें बदलाव P/ 2 है।

11. A,B

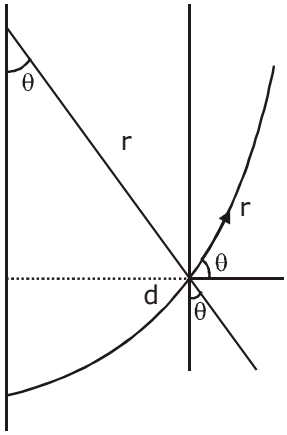
To, enter in region (i)

$r < \frac{mv}{qB}$ $\quad \frac{mv}{qB} < \frac{3R}{2}$

$r < \frac{p}{qB} \Rightarrow \quad \frac{3R}{2} < \frac{P}{qB}$

$\Rightarrow \quad \frac{qB}{P} < \frac{2}{3R}$

$\Rightarrow \quad B < \frac{2P}{3qR}$



$\frac{mv}{qB} < \frac{3R}{2}$

$\frac{Bq}{P} > \frac{2}{3R}$

$B > \frac{2P}{3qR}$

$\sin\theta = \frac{d}{r}$

$\sin\theta = \frac{3R/2 \times qB}{mv}$

$= \frac{3R}{2P} \times q\left(\frac{8}{13}\frac{P}{qR}\right) = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$

$r\,(1-\text{Cos}\,\phi) = R$

$1 - \text{Cos}\,\phi = \frac{R}{r}$

$1 - \text{Cos}\,\phi = \frac{RqB}{P}$

$1 - \text{Cos}\,\phi = \frac{qR}{P} \times \frac{8}{13}\frac{P}{QR}$

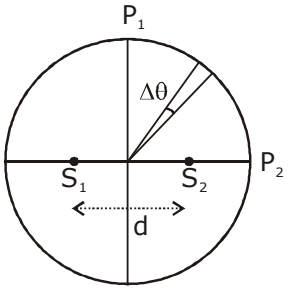
$1 - \text{Cos}\,\phi = \frac{8}{13}$

$\text{Cos}\,\phi = 1 - \frac{8}{13}$

$\text{Cos}\,\phi = \frac{5}{13}$

$\phi = \theta$

12. Two coherent monochromatic point sources S_1 and S_2 of wavelength λ = 600 nm are placed symmetrically on either side of the center of the circle as shown. The sources are separated by a distance d = 1.8mm. This arrangement produces interference fringes visible as alternate bright and dark spots on the circumference of the circle. The angular separation between two consecutive bright spots is $\Delta\theta$.Which of the following options is/are correct?



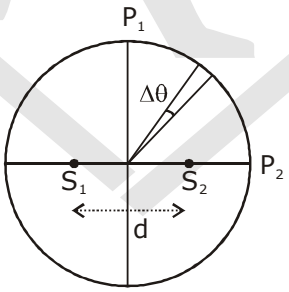
(A) The angular separation between two consecutive bright spots decreases as we move from P_1 to P_2 along the first quadrant

(B) At P_2 the order of the fringe will be maximum

(C) A dark spot will be formed at the point P_2.

(D) The total number of fringes produced between P_1 and P_2 in the first quadrant is close to 3000.

12. दो कलासंबध एकवर्णी (coherent monochromatic) बिंदु स्त्रोत S_1 एवं S_2, जिनकी तरंग दैर्ध्य λ = 600 nm है एक वत्त के केंद्र के दोनों और सममित अवस्था में स्थित है (जैसे चित्र में दिखाया गया है)। स्त्रोत S_1 एवं S_2 के बीच की दूरी d = 1.8 mm है। इस व्यवस्था द्वारा व्यतिकिरण फ्रिन्जें (interference fringes) प्रतिवर्ती दीप्त एवं अदीप्त चित्तियों (spots) के रूप में एक वत्त की परिधि पर दिखती है। $\Delta\theta$ दो क्रमागत दीप्त चित्तियों के बीच की कोणीय दूरी (angular separation between two consecutive bright spots) है। निम्न में से कौन सा (से) प्रकथन सही है/हैं?



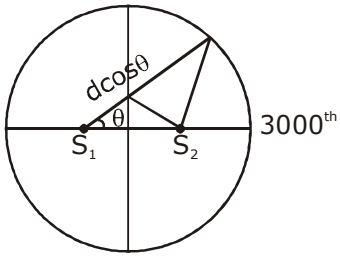
(A) प्रथम वत्तपाद में P_1 से P_2 तक जाने में दो क्रमागत दीप्त चित्तीयों के बीच की कोणीय दूरी घटती है।

(B) P_2 पर फ्रिन्जों का क्रम उच्चतम होगा।

(C) P_2 पर एक अदीप्त बिन्दु बनेगा।

(D) P_1 एवं P_2 के बीच के प्रथम वत्तपाद (first quadrant) में कुल करीब 3000 फ्रिन्जें बनेगी।

12. B,D



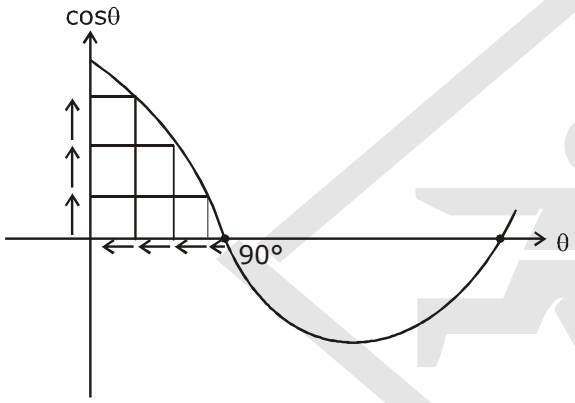
$d \cos\theta = n\lambda$

$\cos\theta = \frac{n\lambda}{d}$

for n = 0

$\theta = 90°$

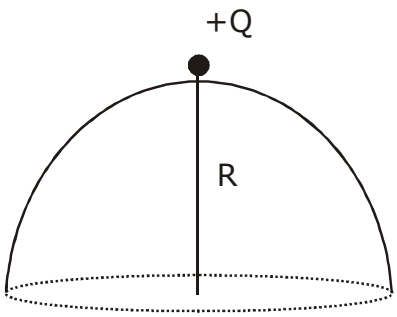
As $\cos\theta$ varies by same value, we can see that reperation between values of θ increases.



At p_2 $\quad d\cos\theta = n\lambda \Rightarrow d = n\lambda$

$n = \frac{d}{\lambda} = 3000$ (max order) bright frigne

13. A point charge +Q is placed just outside an imaginary hemispherical surface of radius R as shown in the figure. Which of the following statements is/are correct?



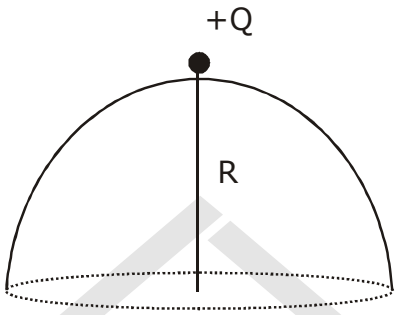
(A) The circumference of the flat surface is an equipotential

(B) The component of the electric field normal to the flat surface is constant over the surface.

(C) Total flux through the curved and the flat surfaces is $\frac{Q}{\varepsilon_0}$

(D) The electric flux passing through the curved surface of the hemisphere is $-\frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

13. धनात्मक बिन्दु आवेश +Q एक काल्पनिक अर्धगोलीय पष्ठ जिसकी त्रिज्या R है, के बाहर रखा है (जैसा कि चित्र में दिखाया गया है)। निम्न में से कौन सा (से) प्रकथन सही है/हैं?



(A) समतल पष्ठ की परिधि एक समविभव पष्ठ (equipotential surface) है।

(B) विद्युत क्षेत्र का समतल पष्ठ से अभिलम्बित घटक पूरे पष्ठ पर अचल रहेगा।

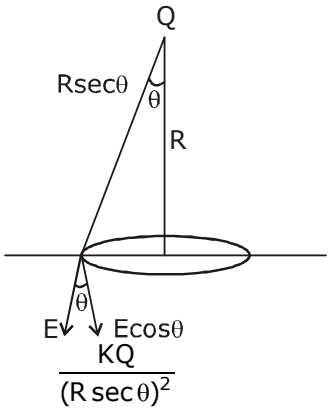
(C) वक्रित एवं समतल पष्ठ से गुजरने वाला कुल फ्लक्स $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ है।

(D) अर्धगोलीय वक्रित पष्ठ से गुजरने वाले विद्युत फ्लक्स (electric flux) का मान $-\frac{Q}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ है।

13. A,D

(A) As distance of energy point is same from the charge

(B) $E = \frac{KQ}{(R\sec\theta)^2}$



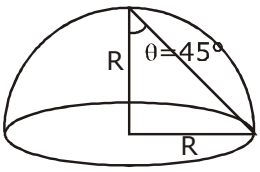
Now, component $\perp$ to the flat surface,

$E_1 = E \cos\theta$

$= \frac{KQ}{(R\sec\theta)^2} \cos\theta = \frac{KQ}{R^2} \cos^3\theta$

Total flux = $\frac{q_{en}}{\varepsilon_0} = 0$ (as $q_{en} = 0$)

Flux through flat surface



$\omega = 2\pi (1 - \cos\theta)$

$\omega = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

So, flux through flat surface,

$\phi_1 = \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0} \times \omega$

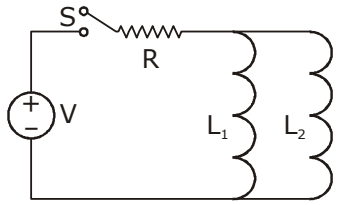
$\phi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \left[2\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

$\phi_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\therefore$ flux through curved surface

$\phi_2 = -\frac{Q}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $[\phi_1 + \phi_2 = 0]$

14. A source of constant voltage V is connected to a resistance R and two ideal inductors L_1 and L_2 through a switch S as shown. There is no mutual inductance between the two inductors. The switch S is intially open. At t = 0, the switch is closed and current begins to flow. Which of the following options is/are correct?



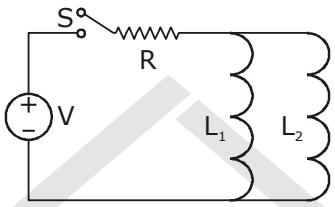
(A) At t = 0, the current through the resistance R is $\frac{V}{R}$

(B) The ratio of the currents through L_1 and L_2 is fixed at all tmes (t>0)

(C) After a long time, the current through L_2 will be $\frac{V}{R}\frac{L_1}{L_1+L_2}$

(D) After a long time, the current through L_1 will be $\frac{V}{R}\frac{L_2}{L_1+L_2}$

14. दो आदर्श प्रेरक (ideal inductor) L_1 एवं L_2 और एक प्रतिरोध (resistance) R को एक अचल वोल्टता V के स्त्रोत से एक स्विच S द्वारा जोड़ा जाता है (जैसा चित्र में दिखाया गया है)। L_1 एवं L_2 के बीच अन्योन्य प्रेरकत्व (mutual inductance) नहीं है। प्रारम्भ में स्विच S खुला है। समय t = 0 पर स्विच बंद किया जाता है और धारा बहनी शुरू होती है। निम्न में से कौन सा (से) प्रकथन सही है/हैं?



(A) t = 0 पर प्रतिरोध R में प्रवाहित धारा $\frac{V}{R}$

(B) L_1 एवं L_2 में प्रवाहित धारा का अनुपात हर समय (t>0) नियत रहता है।

(C) दीर्घकाल के बाद L_2 में प्रवाहित धारा $\frac{V}{R}\frac{L_1}{L_1+L_2}$ होगी।

(D) दीर्घकाल के बाद L_1 में प्रवाहित धारा $\frac{V}{R}\frac{L_2}{L_1+L_2}$ होगी।

14. B,C,D

$V - i R - L_1\left(\frac{di_1}{dt}\right) = 0$

Also, $V - i R - L_2\left(\frac{di_2}{dt}\right) = 0$

from above $L_1\left(\frac{di_1}{dt}\right) = L_2\left(\frac{di_2}{dt}\right)$

$L_1\int_0^{i_1} di_1 = L_2\int_0^{i_2} di_2$

$L_1 i_1 = L_2 i_2$

$\frac{i_1}{i_2} = \frac{L_2}{L_1}$ (fixed)

$i_1 + i_2 = \frac{V}{R}$ ....(i)

Also, $L_1 i_1 = L_2 i_2$ ....(ii)

$i_1 = \frac{V}{R}\left(\frac{L_2}{L_1 + L_2}\right)$

$i_2 = \frac{V}{R}\left(\frac{L_1}{L_1 + L_2}\right)$

SECTION - 3

PARGRAPH - I

Consider a simple RC circuit as shown in figure 1.

Process-1: In the circuit the switch S is closed at t = 0 and the capcitor is fully charged to voltage V_0 (i.e., charging continues for time T >> RC). In the process some dissipation (E_D) occurs across the resistance R. The amount of energy finally stored in the fully charged capacitor is E_C.

Process-2: In a different process the voltage is first set set to $\frac{v_0}{3}$ and maintained for a charging time T >> RC. Then the voltage is raised to $\frac{2v_0}{3}$ without discharging the capacitor and again maintained for a time T >> RC. The process is repeated one more time by raising the voltage to V_0 and the capacitor is charged to the same final voltage V_0 as in process 1.

These two processes are depicted in figure 2

एक साधारण RC परिपथ को देखिये, जैसा चित्र 1 (figure 1) में दर्शाया गया है।

प्रक्रम -1 (Process-1): t = 0, पर स्विच S द्वारा परिपथ पूर्ण किया जाता है एवं संधारित्र पूर्ण रूप से वोल्टता V_0 से आवेशित हो जाता है। (T >> RC समय तक आवेषण चलता रहता है)। इस प्रक्रम में प्रतिरोध R के द्वारा कुछ विद्युत उर्जा क्षय (energy dissipated), E_0 होती है। पूर्ण रूप से आवेशित संधारित्र में संचित उर्जा (stored energy in a charged capacitor) का मान E_C है।

प्रक्रम-2 (Process-2): एक अलग प्रक्रम में पहले $\frac{v_0}{3}$ वोल्टता को आवेशित समय T >> RC के लिए अनुरक्षित किया जाता है। तब बिना संधारित्र आवेश विसर्जन के, समय को T >> RC के लिए अनुरक्षित करके वोल्टता को $\frac{2v_0}{3}$ तक बढ़ाया जाता है। वोल्टता को V_0 तक बढ़ाने के लिए यह प्रक्रम एक और बार दोहराया जाता है। संधारित्र को अंतिम वोल्टता V_0 (जैसा कि प्रक्रम 1 में है) तक आवेशित किया जाता है।

ये दोनो प्रक्रम चित्र 2 (figure 2) में दिखाए गए है।

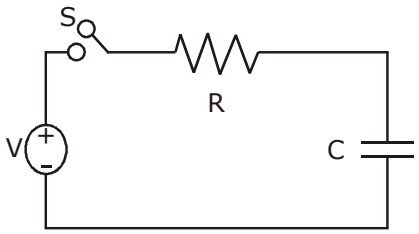


Figure 1

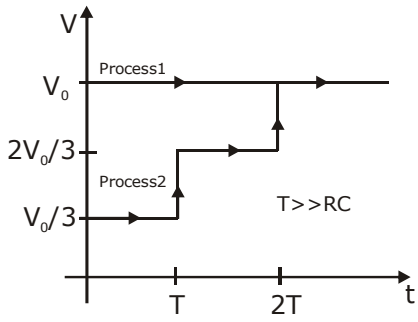


Figure 2

15. In process 2, total energy dissipated across the resistance E_D is -

(A) $E_D = 3\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$ (B) $E_D = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$ (C) $E_D = 3\,CV_0^2$ (D) $E_D = \frac{1}{2}\,CV_0^2$

15. प्रक्रम 2 के दौरान प्रतिरोध के द्वारा कुल क्षय उर्जा E_D है –

(A) $E_D = 3\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$ (B) $E_D = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}CV_0^2\right)$ (C) $E_D = 3\,CV_0^2$ (D) $E_D = \frac{1}{2}\,CV_0^2$

15. **B**

Total energy dissipated

$$E_D = E_1 + E_2 + E_3 = \left(\frac{1}{2}c\left(\frac{v_0}{3}\right)^2\right)\times 3 = \frac{1}{3}\,CV_0^2$$

16. In process 1, the energy stored in the capacitor E_C and heat dissipated across resistance E_D are related by -

(A) $E_C = E_D$ (B) $E_C = E_D \ln 2$ (C) $E_C = 2E_D$ (D) $E_C = \frac{1}{2}\,E_D$

16. प्रक्रम 1 में संधारित्र में संचित उर्जा E_C और प्रतिरोध R द्वारा उर्जा क्षय E_D में संबंध है –

(A) $E_C = E_D$ (B) $E_C = E_D \ln 2$ (C) $E_C = 2E_D$ (D) $E_C = \frac{1}{2}\,E_D$

16. **A**

Energy stored in capacitor,

$$E_C = \frac{1}{2}\,CV^2$$

Energy dissipated in the resistance,
$E_D = E_C$ (by theory)

Paragraph - 2

One twirls a circular ring (of mass M and radius R) near the tip of one's finger as shown in figure 1. In the process the finger never loses contact with the inner rim of the ring. The finger traces out the surface of a cone, shown by the dotted line. The radius of the path traced out by the point where the ring and the finger is in contact is r. The finger rotates with an angular velocity ω_0. The rotating ring rolls without slipping on the outside of a smaller circle described by the point where the ring and the finger is in contact (Figure2). The coefficient of friction between the ring and the finger is μ and the acceleration due to gravity is g.

एक वत्ताकार वलय (circular ring) (द्रव्यमान M एवं त्रिज्या R) एक उंगली के परितः धुतघूर्णन करता है (जैसा चित्र 1 (figure 1) में दर्शाया गया है) इस प्रक्रम में उंगली वलय के अंतरिक पष्ठ से हमेशा स्पर्श करती है। उंगली एक शंकु (cone) के पष्ठ का अनुरेखिय पथ का अनुसरण करती है, जैसे की बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है। उंगली एवं वलय के स्पर्श बिंदु के अनुरेखिय पथ की त्रिज्या r है। उंगली कोणीय वेग ω_0 से घूर्णन कर रही है। वलय r त्रिज्या वाले वत्त के बाहरी पष्ठ पर फिसलन रहित घूर्णन (rolls without slipping) करता है। जैसा चित्र 2 (figure 2) में वलय एवं उंगली के स्पर्श बिन्दु द्वारा दर्शाया गया है। वलय एवं उंगली के बीच घर्षण गुणांक (coefficient of friction) μ, एवं गुरूत्वीय त्वरण g है।

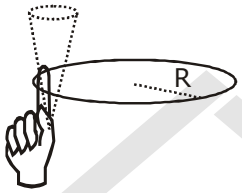


Figure 1

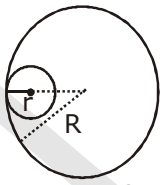


Figure 2

17. The minimum value of ω_0 below which the ring will drop down is -

(A) $\sqrt{\frac{3g}{2\mu(R-r)}}$ (B) $\sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{2\mu(R-r)}}$ (D) $\sqrt{\frac{2g}{\mu(R-r)}}$

17. न्यूनतम ω_0 जिसके कम होते ही वलय गिर जायेगा, वह है

(A) $\sqrt{\frac{3g}{2\mu(R-r)}}$ (B) $\sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$ (C) $\sqrt{\frac{g}{2\mu(R-r)}}$ (D) $\sqrt{\frac{2g}{\mu(R-r)}}$

17. **B**

$\mu N = mg$ ....(i)

& $N = m(R-r)\omega^2$ ....(ii)

from (i)

$\mu\, m(R-r)\omega^2 = mg$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu(R-r)}}$

18. The total kinetic energy of the ring is

(A) $M\omega_0^2(R-r)^2$ (B) $\frac{1}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (C) $\frac{3}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (D) $M\omega_0^2R^2$

18. वलय की कुल गतिज उर्जा है

(A) $M\omega_0^2(R-r)^2$ (B) $\frac{1}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (C) $\frac{3}{2}M\omega_0^2(R-r)^2$ (D) $M\omega_0^2R^2$

19. The standard state Gibbs free energies of formation of C (Graphite) and C(diamond) at T = 298 K are

$\Delta_f G^0$[C(graphite)] = 0 kJ mol^{-1}

$\Delta_f G^0$[C(diamond)] = 2.9 kJ mol^{-1}

The standard state means that the pressure should be 1 bar, and substance should be pure at a given temperature. The conversion of graphite [C(graphite)] to diamond [C(diamond)] reduces its volume by 2×10^{-6} m^3 mol^{-1}. If C(graphite) is converted to C(diamond) isothermally at T = 298 K, the pressure at which C(graphite) is in equilibrium with C(diamond), is

[Useful information : 1 J = 1 kg m^2s^{-2}; 1 Pa = 1 kg m^{-1} s^{-2}; 1 bar = 10^5 Pa]

(A) 29001 bar (B) 58001 bar (C) 14501 bar (D) 1450 bar

19. C (ग्रेफाइट), C(हीरा) बनने की T = 298 K पर मानक अवस्थाा गिब की मुक्त ऊर्जा :

$\Delta_f G^0$[C(ग्रेफाइट)] = 0 kJ mol^{-1}

$\Delta_f G^0$[C(हीरा)] = 2.9 kJ mol^{-1}

मानक अवस्था का मतलब है कि दिए गये तापमान पर दाब 1 bar होना चाहिए और पदार्थ शद्ध होना चाहिए। C (ग्रेफाइट) का C (हीरा) में परिवर्तन इसके आयतन को 2×10^{-6} m^3 mol^{-1} घटाता है। यदि C(ग्रेफाइट) का C(हीरा) में समतापी परिवर्तन किया जाये तो वह दाब जिस पर C (ग्रेफाइट), C (हीरा) के साथ साम्यावस्था में है, है :

[उपयोगी सूचना : 1 J = 1 kg m^2s^{-2}; 1 Pa = 1 kg m^{-1} s^{-2}; 1 bar = 10^5 Pa]

(A) 29001 bar (B) 58001 bar (C) 14501 bar (D) 1450 bar

Sol. **C**

At equilibrium

$G_{graphite} = D_{Diamond}$

$G°_{graphite} + V_{graphite} \cdot dp = G°_{Diamond} + V_{Diamond} \cdot dp$

$(G°_{Diamond} - G°_{graphite}) = (V_{graphite} - V_{Diamond})\, dp$

$2900J = 2 \times 10^{-6}m^3 \times (P_f - P_i)$

$$P_f - P_i = \frac{29}{2} \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$P_f - P_i = \frac{29}{2} \times 10^8 \times 10^{-5}$$

$$= \frac{29000}{2} \text{ bar}$$

$$P_f = 1 + \frac{29000}{2} = 14501 \text{ bar}$$

20. Which of the following combination will produce H_2 gas ?

(A) Cu metal and conc. HNO_3

(B) Zn metal and NaOH(aq)

(C) Au metal and NaCNI(aq) in the presence of air

(D) Fe metal and conc. HNO_3

20. निम्नलिखित में से कौनसा संयोज H_2 गैस उत्पादित करेगा ?

(A) Cu धातु एवं सान्द्र HNO_3

(B) Zn धातु एवं NaOH(जलीय)

(C) Au धातु एवं NaCN(जलीय) वायु की उपस्थिति में

(D) Fe धातु एवं सान्द्र HNO_3

Sol. **B**

$Zn + 2NaOH \longrightarrow Na_2ZnO_2 + H_2$

21. For the following cell,

$Zn(s)|ZnSO_4(aq)||\ CuSO_4(aq)|Cu(s)$

When the concentration of Zn^{2+} is 10 times the concentration of Cu^{2+}, the expression for ΔG(in J mol^{-1}) is

[F is faraday constant; R is gas constant; T is temperature; E^0 (cell) = 1.1V]

(A) 2303RT – 2.2F (B) –2.2F (C) 2.303RT + 1.1F (D) 1.1F

21. निम्नलिखित सैल के लिए,

$Zn(s)|ZnSO_4(aq)||\ CuSO_4(aq)|Cu(s)$

जब Zn^{2+} की सान्द्रता Cu^{2+} की सान्द्रता से 10 गुना है तो ΔG(in J mol^{-1}) के लिए व्यंजक (expression) हैं। [F फैराडे नियतांक है; R गैस नियतांक; T तापमान और सैल के लिए E^0 का मान 1.1V है।]

(A) 2303RT – 2.2F (B) –2.2F (C) 2.303RT + 1.1F (D) 1.1F

Sol. **A**

$Zn(s) + Cu^{+2}_{eq} \longrightarrow Cu(s)$

x 10x

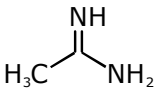
$\Delta G = -2\ F\ (1.1) + RT\ ln\ (10)$

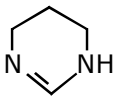
$= -2.2\ F + 2.303\ RT$

22. The order of basicity among the following compounds is

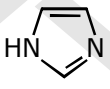
(I)

(II)

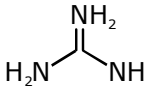




(III)



(IV)



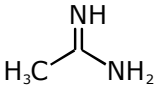
(A) IV > II > III > I (B) II > I > IV > III

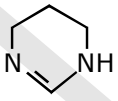
(C) I > IV > III > II (D) IV > I > II > III

22. निम्नलिखित यौगिकों में क्षारकता का क्रम है :–

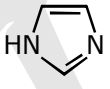
(I)

(II)

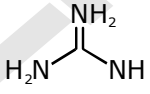




(III)



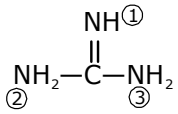
(IV)



(A) IV > II > III > I (B) II > I > IV > III

(C) I > IV > III > II (D) IV > I > II > III

Sol. **D**

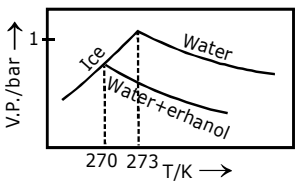


The electron density (1) N is very large because due to resonance electrondensity↑

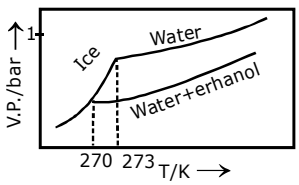
23. Pure water freezes at 273 K and 1 bar. The addition of 34.5 g of ethanol to 500 g of water changes the freezing point of the solution. Use the freezing point depression constant of water as 2 K kg mol^{-1}. The figures shown below represent plots of vapour pressure (V.P.) versus temperature (T). [Molecular weight of ethanol is 46 mol^{-1}]

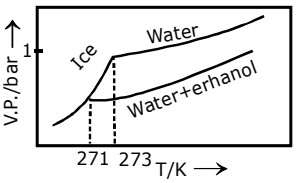
Among the following, the option representing change in the freezing point is

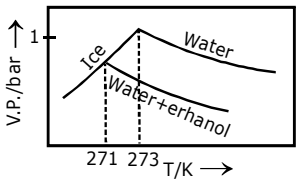
(A)



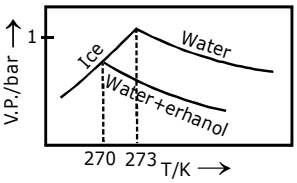
(B)

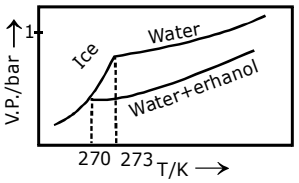


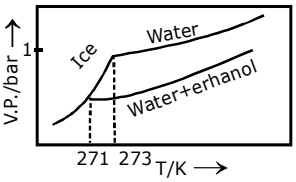
(C) 

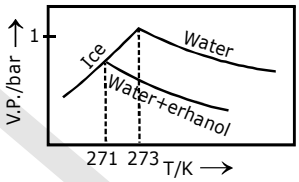
(D) 

23. शुद्ध जल 273 K और 1 bar पर हिमीभूत (freezes) होता है। 34.5 g एथेनॉल को 500 g पानी में डालने पर विलयन का हिमांक बदल जाता है। जल का हिमांक अवनमन स्थिरांक (freezing point depression constant) 2 K kg mol^{-1} ले। नीचे दिखाए चित्र वाष्प दाब (V.P.) को तापमान (T) के विरूद्ध आलेखों को निरूपित करते हैं। निम्नलिखित में से विकल्प जो हिमांक में बदलाव को निरूपित करता है, हैं [एथेनॉल का आणविक भार 46 mol^{-1}]

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Sol. **B**

$\Delta T_f = i\, k_f \times m$

$= 1 \times 2 \times \frac{n_{ethanol}}{W_{H_2O}} \times 1000$

$= 2 \times \frac{34.5}{46 \times 500} \times 1000$

$= \frac{34.5 \times 2}{23} = \frac{69}{23} = 3$

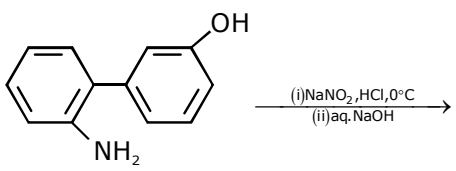
24. The order of the oxidation state of the phosphorus atom in H_3PO_2, H_3PO_4, H_3PO_3, and H_4P_2O is:-
(A) $H_3PO_4 > H_3PO_2 > H_3PO_3 > H_4P_2O_6$ (B) $H_3PO_2 > H_3PO_3 > H_4P_2O_6 > H_3PO_4$
(C) $H_3PO_3 > H_3PO_2 > H_3PO_4 > H_4P_2O_6$ (D) $H_3PO_4 > H_4P_2O_6 > H_3PO_3 > H_3PO_2$

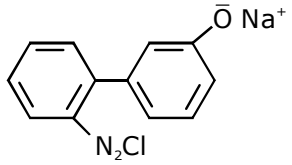
24. H_3PO_2, H_3PO_4, H_3PO_3, और H_4P_2O में फोस्फोरस परमाणु ऑक्सीकरण अवस्था का क्रम है:–
(A) $H_3PO_4 > H_3PO_2 > H_3PO_3 > H_4P_2O_6$ (B) $H_3PO_2 > H_3PO_3 > H_4P_2O_6 > H_3PO_4$
(C) $H_3PO_3 > H_3PO_2 > H_3PO_4 > H_4P_2O_6$ (D) $H_3PO_4 > H_4P_2O_6 > H_3PO_3 > H_3PO_2$

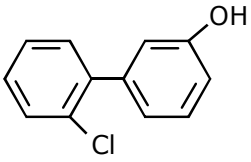
Sol. **D**

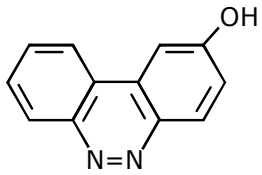
$\overset{+5}{H_3PO_4} > \overset{+4}{H_4P_2}O_6 > \overset{+3}{H_3PO_3} > \overset{+1}{H_3PO_2}$

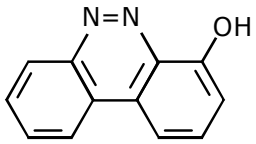
25. The major product of the following reaction is



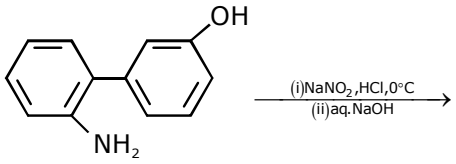
(A) 

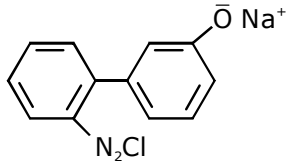
(B) 

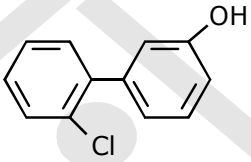
(C) 

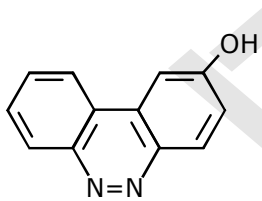
(D) 

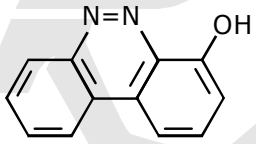
25. निम्नलिखित अभिक्रिया का मुख्य उत्पाद है :–



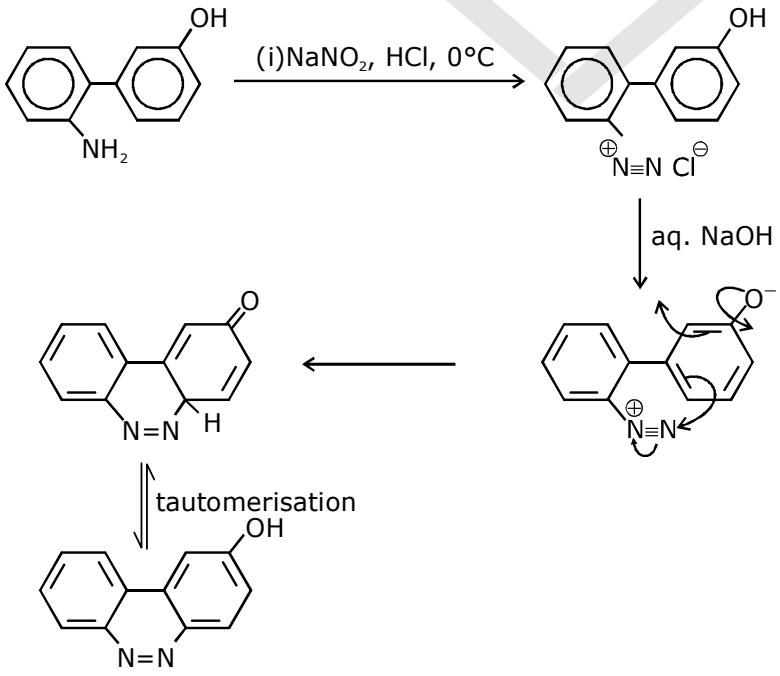
(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Sol. C



26. The correct statement(s) about surface properties is(are)
(A) Cloud is an emulsion type of colloid in which liquid is dispersed phase and gas is dispersion medium
(B) The critical temperature of ethane and nitrogen are 563K and 126 K, respectively. The adsorption of ethane will be more than that of nitrogen on same amount of activated charcoal at a given temperature.
(C) Adsorption is accompanied by decrease in enthalpy and decrease in entropy of the system
(D) Brownian motion of colloidal particles does not depend on the size of the particle but depends on viscosity of the solution.

26. पष्ठ गुणों (surface properties) के बारे में सही कथन है(हैं)
(A) बादल एक इमल्शन प्रकार का कोलाइड है जिसमें द्रव परिक्षिप्त प्रावस्था (dispersed phase) है और गैस परिक्षेपण माध्यम (dispersion medium) है।
(B) एथेन और नाइट्रोजन के क्रांतिक तापमान (Critical temperatures) क्रमशः 563 K और 126 K है। एक दिये गये तापमान पर सक्रियित चारकोल की समान मात्रा पर एथेन का अवशोषण नाइट्रोजन की अपेक्षा अधिक होगा।
(C) अधिशोषण (Adsorption), निकाय की एन्ट्रॉपी घटने और एन्थेल्पी घटने के साथ होता है।
(D) कोलाइडी कणों की ब्राऊनी गति कणों के साइज पर निर्भर नहीं होती परन्तु विलयन की श्यानता (viscosity) पर निर्भर करती है।

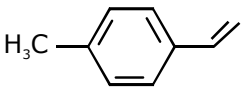
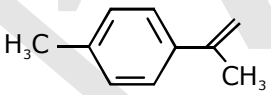
Sol. B, C
Theoritical

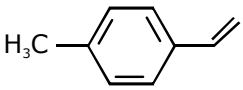
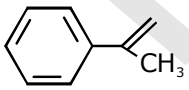
27. Compounds P and R upon ozonolysis produce Q and S, respectively. The molecular formula of Q and S is C_8H_8O. Q undergoes cannizzaro reaction but not haloform reaction, whereas S undergoes haloform reaction but not cannizzaro reaction.

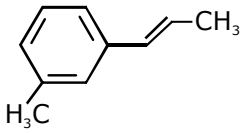
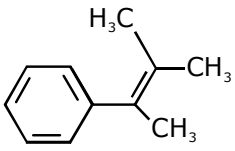
(i) R $\xrightarrow[(ii)Zn/H_2O]{(i)O_3/CH_2Cl_2}$ Q (C_8H_8O)

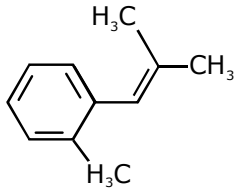
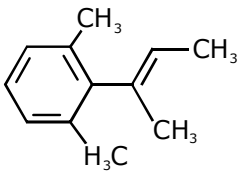
(ii) R $\xrightarrow[(ii)Zn/H_2O]{(i)O_3/CH_2Cl_2}$ S (C_8H_8O)

The option(s) with suitable combination of P and R, respectively, is(are)

(A)  and 

(B)  and 

(C)  and 

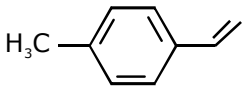
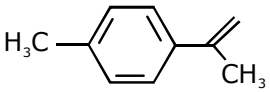
(D)  and 

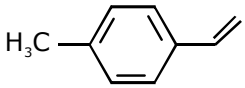
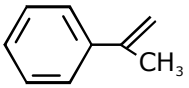
27. यौगिक P और R के ओजोनीकरण (ozonolysis) करने पर क्रमशः Q और S, उत्पन्न होते है। उत्पाद Q और S का आण्विक सूत्र C_8H_8O है। Q की कैनिजारों अभिक्रिया (cannizzaro reaction) होती है परन्तु हालोफोर्म अभिक्रिया (haloform reaction) नहीं होती, जबकि S की हालोफोर्म अभिक्रिया होती है परन्तु कैनिजारो अभिक्रिया नहीं होती ।

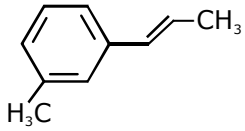
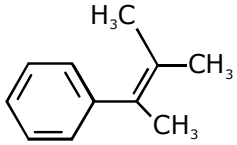
(i) R $\xrightarrow[(ii)Zn/H_2O]{(i)O_3/CH_2Cl_2}$ Q
(C_8H_8O)

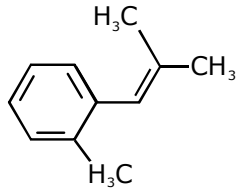
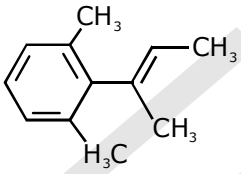
(ii) R $\xrightarrow[(ii)Zn/H_2O]{(i)O_3/CH_2Cl_2}$ S
(C_8H_8O)

P और R के उचित संयोजन वाला विकल्प क्रमशः है(है)

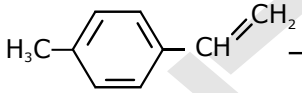
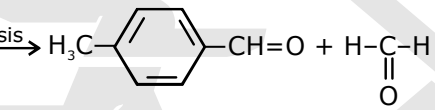
(A)  और 

(B)  और 

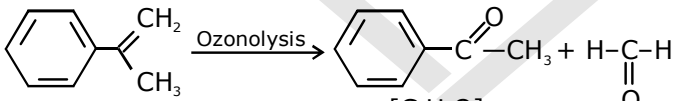
(C)  और 

(D)  और 

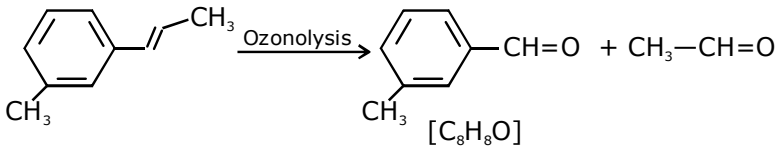
27. B, C

(B)  Ozonolysis 
(C_8H_8O)

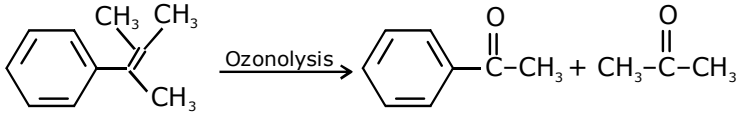
It gives cannizaro rx^n but not haloform rx^n


$[C_8H_8O]$

It gives haloform but not Cannizaro rx^n.

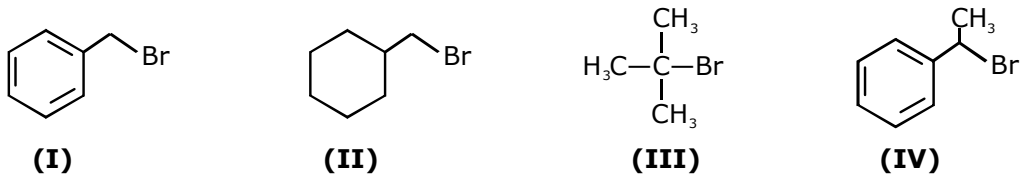
(C) 
$[C_8H_8O]$

It gives Cannizaro rx^n but not haloform rx^n


$[C_8H_8O]$

It gives haloform rx^n but not Cannizaro rx^n

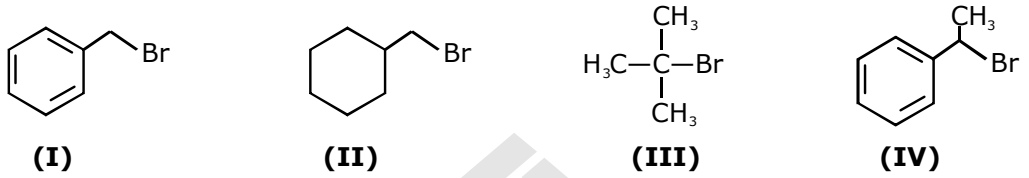
28. For the following compounds, the correct statement(s) with respect to nucleophilic substitution reactions is (are)



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

(A) I and II follow S_N2 mechanism
(B) Compound IV undergoes iniversion of configuration
(C) The order of reactivity for I, III and IV is : IV > I > III
(D) I and III follows S_N1 mechanism

28. न्युक्लिओफिलिक प्रतिस्थापन अभिक्रियाओं (nucleophilic substitution reactions) के सन्दर्भ में निम्नलिखित यौगिकों के लिए सही कथन है(हैं)



(I) **(II)** **(III)** **(IV)**

(A) I और II S_N2 क्रियाविधि का अनुसरण करते हैं।
(B) यौगिक IV के विन्यास (configuration) का प्रतीपन (inversion) होता है।
(C) I, III और IV के लिए अभिक्रियाशीलता का क्रम है : IV > I > III
(D) I और III S_N1 क्रियाविधि का अनुसरण करते हैं।

Sol. **A, D**

29. In a biomolecular reaction, the steric factor P was experimentally determined to be 4.5. The correct option(s) among the following is/are :

(A) Experimentally determined value of frequency factor is higher than that predicted by Arrhenius equation

(B) The value of frequency factor predicted by Arrhenius equation is higher than that determined experimentally

(C) The activation energy of the reaction is unaffected by the value of the steric factor

(D) Since P = 4.5, the reaction will not proceed unless an effective catalyst is used

29. एक द्विअणुक अभिक्रिया में त्रिविम विन्यासी घटक (steric factor) P का प्रायोगिक मान 4.5 निर्धारित किया गया। निम्नलिखित में से सही विकल्प है(हैं) :

(A) आवत्ति घटक (frequency factor) का प्रायोगिक मान आरहीनियस समीकरण द्वारा अनुमानित मान से ज्यादा है।

(B) आरहीनियस समीकरण द्वारा अनुमानित मान आवति घटक (frequency factor) के प्रायोगिक मान से ज्यादा है।

(C) त्रिविम विन्यासी घटक के मान से अभिक्रिया की सक्रियण ऊर्जा (activation energy) अप्रभावित रहती है।

(D) क्योंकि P = 4.5 है, जब तक प्रभावी उत्प्रेरक का उपयोग ना किया जाए, अभिक्रिया आगे नहीं बढ़ेगी

Sol. **B, C**

$$\text{Steric factor(P)} = \frac{(A/Z)\text{exp}}{(A/Z)\text{theo}}$$

A = frea. factor
Z = Collision freq.
usually P < 1
$\therefore A_{exp} < A_{theo.}$ Assuming 'Z' to be same
Here P > 1
$\therefore \quad A_{exp} > A_{theo}$

30. The option (s) with only amphoteric oxides is(are) :

(A) Cr_2O_3, BeO, SnO, SnO_2 (B) ZnO, Al_2O_3, PbO, PbO_2

(C) NO, B_2O_3, PbO, SnO_2 (D) Cr_2O_3, CrO, SnO, PbO

30. केवल उभयक्रमी (amphoteric) ऑक्साइडों वाला(वाले) विकल्प है(हैं) :

(A) Cr_2O_3, BeO, SnO, SnO_2 (B) ZnO, Al_2O_3, PbO, PbO_2

(C) NO, B_2O_3, PbO, SnO_2 (D) Cr_2O_3, CrO, SnO, PbO

Sol. A, B

31. Among the following, the correct statement(s) is(are) :

(A) $Al(CH3)_3$ has the three-centre two-electron bonds in its dimeric structure

(B) BH_3 has the three-centre two-electron bonds in its dimeric structure

(C) The Lewis acidity of BCl_3 is greater than that of $AlCl_3$

(D) $AlCl_3$ has the three-centre two-electron bonds in its dimeric structure

31. निम्नलिखित में से सही कथन है/ हैं :

(A) $Al(CH_3)_3$ की द्वितयी संरचना (dimeric structure) में त्रिकेन्द्र – दो इलेक्ट्रॉन आबंध है।

(B) BH_3 की द्वितयी संरचना (dimeric structure) में त्रिकेन्द्र – दो इलेक्ट्रॉन आबंध है।

(C) BCl_3 की लुईस अम्लता $AlCl_3$ से अधिक है।

(D) $AlCl_3$ की द्वितयी संरचना (dimeric structure) में त्रिकेन्द्र – दो इलेक्ट्रॉन आबंध है।

Sol. A, B, C

32. For a reaction taking place is a container in equilibrium with its surroundings, the effect of temperature on its equilibrium constant K in terms of change in entropy is described by

(A) With increase in temperature, the value of K for endothermic reaction increases because unfavourable change in entropy of the surroundings decreases

(B) With increase in temperature, the value of K for exothermic reaction decreases because favourable change in entropy of the surroundings decreases

(C) With increase in temperature, the value of K for exothermic reaction decreases because the entropy change of the system is positive

(D) With increase in temperature, the value of K for endothermic reaction increases because the entropy change of the system is negative

32. परिवेश (surroudings) के साथ साम्यावस्था में एक पात्र में हो रही एक अभिक्रिया के लिए, एन्ट्रॉपी में बदलाव के अनुसार इसके साम्यावस्था स्थिरांक K पर तापमान के प्रभाव का वर्णन ऐसे किया जाता है।

(A) तापमान बढ़ने के साथ, ऊष्माशोषी (endothermic) अभिक्रिया के लिए साम्यावस्था स्थिरांक K का मान बढ़ता है क्योंकि परिवेश की प्रतिकूल एंट्रॉपी में बदलाव घटता है

(B) तापमान बढ़ने के साथ, ऊष्माक्षेपी (exothermic) अभिक्रिया के साम्यावस्था स्थिरांक K का मान घटता है क्योंकि रिवेश की अनुकूल एंट्रॉपी में बदलाव घटता है।

(C) तापमान बढ़ने के साथ, ऊष्माक्षेपी (exothermic) के साम्यावस्था स्थिरांक K का मान घटता है क्योंकि निकाय की एंट्रॉपी में बदलाव धनात्मक है

(D) तापमान बढ़ने के साथ, ऊष्माक्षेपी (endothermic) अभिक्रिया के साम्यावस्था स्थिरांक K का मान घटताा है क्योंकि परिवेश की अनुकूल एंट्रॉपी में बदलाव घटता है।

Sol. A, B, C

Paragraph-1

Upon heating $KClO_3$ in the presence of catalytic amount of MnO_2, a gas W is formed. Excess amount of W reacts with white phosphorus to give X. The reaction of X with pure HNO_3 gives Y and Z.

अनुच्छेद-1

MnO_2 की उपस्थिति में $KClO_3$ का तापन करने पर एक गैस W की आधिक्य मात्र सफेद फास्फोरस के साथ अभिक्रिया करके X देती है। X की शुद्ध HNO_3 के साथ अभिक्रिया Y तथा Z देती है।

33. Y and Z are, respectively :

(A) N_2O_5 and HPO_3 (B) N_2O_3 and H_3PO_4 (C) N_2O_4 and H_3PO_3 (D) N_2O_4 and HPO_3

33. Y और Z क्रमशः है

(A) N_2O_5 और HPO_3 (B) N_2O_3 और H_3PO_4 (C) N_2O_4 और H_3PO_3 (D) N_2O_4 और HPO_3

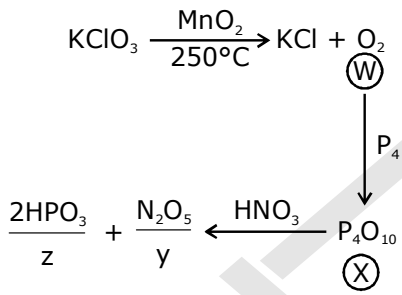
34. W and X are, respectively :

(A) O_2 and P_4O_6 (B) O_2 and P_4O_{10} (C) O_3 and P_4O_6 (D) O_3 and P_4O_{10}

34. W और X क्रमशः है

(A) O_2 और P_4O_6 (B) O_2 और P_4O_{10} (C) O_3 और P_4O_6 (D) O_3 और P_4O_{10}

Sol. 33 & 34.



33. A

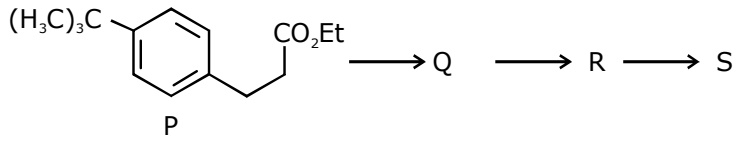
$[N_2O_5, HPO_3]$

34. B

$[O_2, P_4O_{10}]$

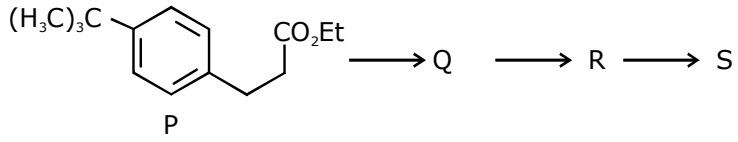
Paragraph-2

The reaction of compound P with CH_3MgBr (excess) in $(C_2H_5)_2O$ followed by addition of H_2O gives Q. The compound Q on treatment with H_2SO_4 at 0°C gives R. The reaction of R with CH_3COCl in the presence of anhydrous $AlCl_3$ in CH_2Cl_2 followed by treatment with H_2O produces compound S. [Et in compound P is ethyl group]



अनुच्छेद-2

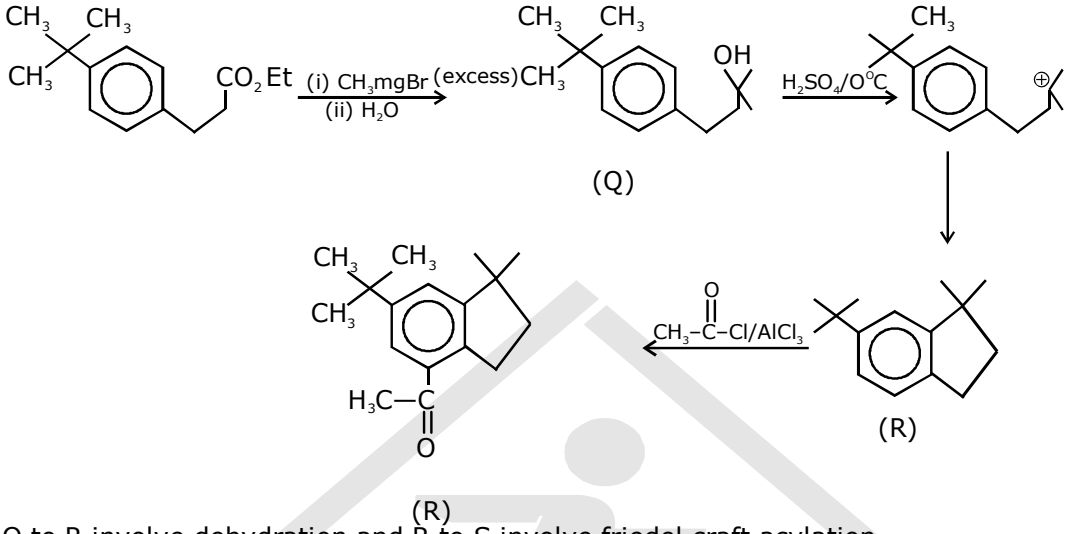
$(C_2H_5)_2O$ में यौगिक P की CH_3MgBr की अधिकता के साथ अभिक्रिया के उपरान्त जल डालने पर Q मिलता है। यौगिक Q, H_2SO_4 के साथ 0°C पर विवेचन करने पर R देता है। CH_2Cl_2 में R की निजलीय $AlCl_3$ की उपस्थिति में CH_3COCl के साथ अभिक्रिया के उपरान्त जल डालने पर यौगिक S उत्पन्न होता है। [यौगिक P में Et एथिल ग्रुप है]



35. The reaction, Q to R and R to S, are :
(A) Friedel-Crafts alkylation and Friedel-acylation
(B) Dehydration and Friedel-Crafts acylation
(C) Friedel-Crafts alkylation, dehydration and Friedel-Crafts acylation
(D) Aromatic sulfonation and Friedel-Crafts acylation

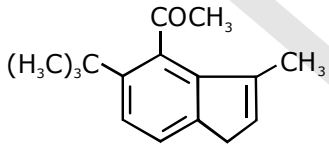
35. Q से R तथा R से S अभिक्रियाएं है :
(A) फ्रीडल–क्राफ्ट एल्किलीकरण और फ्रीडल–क्राफ्ट ऐसिलीकरण
(B) निर्जलीकरण और फ्रीडल–क्राफ्ट ऐसिलीकरण
(C) फ्रीडल–क्राफ्ट एल्किलीकरण, निर्जलीकरण और फ्रीडल–क्राफ्ट ऐसिलीकरण
(D) ऐरोमैटिक सल्फोनेसन और फ्रीडल–ऐसिलीकरण

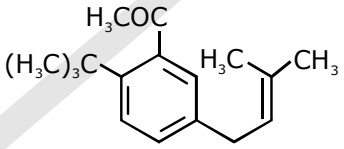
Sol. B

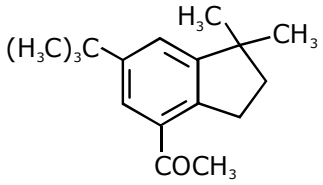


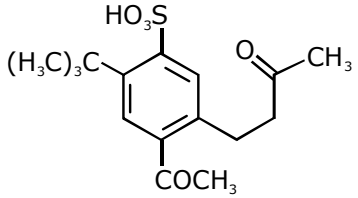
Q to R involve dehydration and R to S involve friedel craft acylation.

36. The product S is :

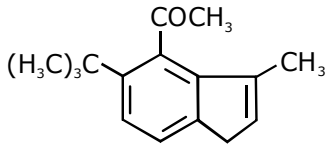
(A) 

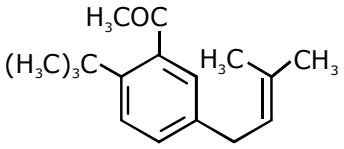
(B) 

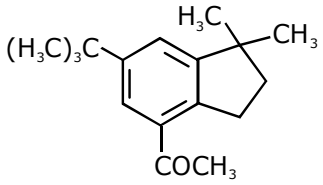
(C) 

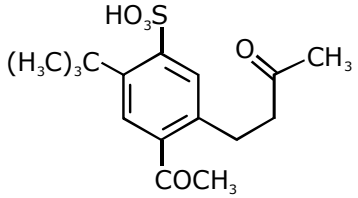
(D) 

36. उत्पाद S है :

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

Sol. C

[MATHEMATICS]

37. How many 3 × 3 matrices M with entries from {0,1,2} are there, for which the sum of the diagonal entries of M^TM is 5 ?

(A) 135 (B) 198 (C) 162 (D) 126

37. ऐसे कितने 3 × 3 आव्यूह M है जिनकी प्रविष्टियाँ (entries) {0,1,2} में है एवम् M^TM की विकर्णीय प्रविष्टियों (diagonal elements) का योग 5 है ?

(A) 135 (B) 198 (C) 162 (D) 126

Sol. **B**

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \qquad a_i \in \{0, 1, 2\}$$

$$M^TM = \begin{bmatrix} a_1 & a_4 & a_7 \\ a_2 & a_5 & a_8 \\ a_3 & a_6 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_7 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad d_{ij}(M^TM) = (a_1^2 + a_4^2 + a_7^2) + (a_2^2 + a_5^2 + a_8^2) + (a_3^2 + a_6^2 + a_9^2)$

$$5 = \sum_{i=1}^{9} a_i^2$$

where $a_i^2 \in \{0, 1, 4\}$

(I) $5a_i = 1,\ 4a_i = 0 \Rightarrow \frac{9!}{5!4!} = \frac{9\times8\times7\times6}{24} = 126$

(II) $1a_i = 1,\ 1a_i = 2,\ 7a_i = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{9!}{7!1!1!} = 9\times8 = 72$

Total = 72 + 126 = 198

38. Three randomly chosen nonnegative integers x,y and z are found to satisfy the equation x + y +z = 10. Then the probability that z is even, is

(A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{6}{11}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{36}{55}$

38. यह पाया गया है कि यादच्छिक (randomly) रूप से चयनित तीन अऋणात्मक पूर्णांक (nonnegative integers) x,y एवम् z समीकरण x + y +z = 10 को संतुष्ट करते है। तब z के सम (even) होने की प्रायिकता (probability) है।

(A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{6}{11}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{36}{55}$

Sol. **B**

x + y + z = 10

$$\frac{{}^{11}C_1 + {}^{9}C_1 + {}^{7}C_1 + {}^{5}C_1 + {}^{3}C_1 + 1}{{}^{12}C_2}$$

$$= \frac{36\times2}{12\times11} = \frac{6}{11}$$

39. The equation of the plane passing through the point (1,1,1) and perpendicular to the planes 2x + y – 2z = 5 and 3x – 6y – 2z = 7, is
(A) 14x + 2y – 15z = 1 (B) 14x – 2y + 15z = 27
(C) – 14x + 2y + 15z = 3 (D) 14x +2y + 15z = 31

39. समतलों 2x + y – 2z = 5 एवम् 3x – 6y – 2z = 7 के लम्बवत् और बिन्दु (1,1,1) से गुजरने वाले समतल का समीकरण है
(A) 14x + 2y – 15z = 1 (B) 14x – 2y + 15z = 27
(C) – 14x + 2y + 15z = 3 (D) 14x +2y + 15z = 31

Sol. **D**

$$\vec{n}_p = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix}$$

$\vec{n}_p = (-14, -2, -15)$

P : $-14(x - 1) - 2(y - 1) - 15(z - 1)$

P : $-14x - 2y - 15z + 31 = 0$

P : $14x + 2y + 15z = 31$

40. If y = y(x) satisfies the differential equation $8\sqrt{x}\left(\sqrt{9+\sqrt{x}}\right)dy = \left(\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}\right)^{-1} dx$, x > 0 and y(0) = $\sqrt{7}$, then y = (256) =
(A) 3 (B) 16 (C) 9 (D) 80

40. यदि y = y(x) अवकलनीय समीकरण (differential equation) $8\sqrt{x}\left(\sqrt{9+\sqrt{x}}\right)dy = \left(\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}\right)^{-1} dx$, x > 0 को संतुष्ट करता है एवम् y(0) = $\sqrt{7}$ है, तब y = (256) =
(A) 3 (B) 16 (C) 9 (D) 80

Sol. **A**

$$\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}} = t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}}} \times \frac{1}{2\sqrt{9+\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt$$

$\Rightarrow$ dy = dt

$y = t + \lambda$

$y = \sqrt{4+\sqrt{9+\sqrt{x}}} + \lambda$

$y(0) = \sqrt{7} + \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

$\Rightarrow$ $y(256) = \sqrt{4+\sqrt{9+16}}$

$= \sqrt{4+5}$

$= 3$

41. If f: R $\to$ R is a twice differentiable function such that f"(x) > 0 for all $x \in$ R, and $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, f(1) = 1, then

(A) f'(1) $\le$ 0 (B) $\frac{1}{2} \le f'(1) \le 1$ (C) f'(1) > 1 (D) $0 < f'(1) \le \frac{1}{2}$

41. यदि f: R $\to$ R एक इस प्रकार का द्विअवकलनीय (twice differentiable) फलन है कि सभी $x \in$ R के लिये f"(x) > 0, एवम् $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, f(1) = 1 है, तब

(A) f'(1) $\le$ 0 (B) $\frac{1}{2} \le f'(1) \le 1$ (C) f'(1) > 1 (D) $0 < f'(1) \le \frac{1}{2}$

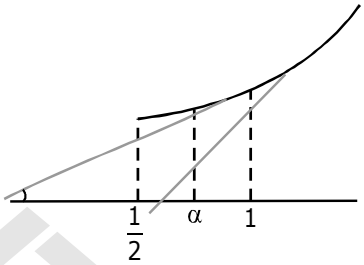
Sol. **C**

f"(x) > 0 $\forall$ x $\in$ R

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, f(1) = 1

f' $\uparrow$

LMVT



$$f'(\alpha) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} \qquad \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f'(\alpha) = 1 \ \forall \ \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$\Rightarrow$ f'(1) > 1

42. Let S ={1,2,3,.....9}. For k = 1,2,.....,5, let N_k be the number of subsets of S, each containing five elements out of which exactly k are odd. Then $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ =

(A) 126 (B) 252 (C) 210 (D) 125

42. माना कि S ={1,2,3,.....9} है। k = 1,2,.....,5 के लिये, माना N_k समुच्चय S के उन उपसमुच्चयों की सँख्या है जिनमे प्रत्येक उपसमुच्चय में 5 अवयव है एवम् इन अवयवों में विषम अवयवों की सँख्या k है। तब $N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5$ =

(A) 126 (B) 252 (C) 210 (D) 125

Sol. **A**

S : {1, 2, 3,..... 9} k = 1, 2, ... 5

$N_1 + N_2 + N_5 + N_4 + N_5$ =

N_1 $\to$ 5 element in which (4) is odd (5)

$N_1 = {}^4C_4 \times {}^5C_1 = 5$

N_2 $\to$ 3, even 2, odd

$N_2 = {}^5C_2 \times {}^4C_3 = 40$

N_3 = 2 even + 3 odd

$N_2 = {}^5C_3 \times {}^4C_2 = 60$

N_4 = 1 even + 4 odd

$N_2 = {}^4C_1 \cdot {}^5C_4 = 20$

N_5 = 5 odd

$N_5 = {}^5C_5 = 1$

$\boxed{\text{Total} = \Sigma Ni = 126}$

43. Let O be the origin and let PQR be an arbitrary triangle. The point S is such that $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OS}$ Then the triangle PQR has S as its

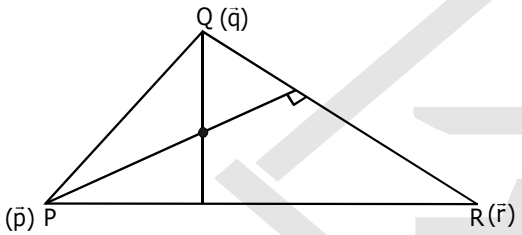
(A) circmcentre (B) Incentre (C) Centroid (D) orthocenter

43. माना कि O मूलबिन्दु (origin) है एवम् PQR एक स्वैच्छिक त्रिभुज (arbitrary triangle) है। बिन्दु S इस प्रकार है कि $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OS}$ तब बिन्दु S त्रिभुज PQR का है

(A) परिवतकेन्द्र (circmcentre) (B) अन्तः केन्द्र (Incentre)

(C) केन्द्रक (Centroid) (D) लम्बकेन्द्र(orthocentre)

Sol. D



$\vec{p}.\vec{q} + \vec{r}.\vec{s} = \vec{r}.\vec{p} + \vec{q}.\vec{s} = \vec{q}.\vec{r} + \vec{p}.\vec{s}$

(I) $\vec{p}.(\vec{q} - \vec{r}) + \vec{s}.(\vec{r} - \vec{q}) = 0$ $\qquad (p - \vec{s}).(\vec{q} - \vec{r}) = 0$

$\vec{p} - \vec{s} \perp \vec{q} - \vec{r}$

$\vec{p}.(\vec{q} - \vec{s}) + \vec{r}(\vec{s} - \vec{q}) = 0$

$(\vec{p} - \vec{r})(\vec{q} - \vec{s}) = 0$ } Orthocentre

$\vec{p} - \vec{r} \perp \vec{q} - \vec{s}$

44. If $I = \sum_{k=1}^{98} \int_k^{k+1} \frac{k+1}{x(x+1)} dx$, then

(A) $I < \frac{49}{50}$ (B) $I > \frac{49}{50}$ (C) $I < \log_e 99$ (D) $I > \log_e 99$

44. यदि $I = \sum_{k=1}^{98} \int_k^{k+1} \frac{k+1}{x(x+1)} dx$ तब

(A) $I < \frac{49}{50}$ (B) $I > \frac{49}{50}$ (C) $I < \log_e 99$ (D) $I > \log_e 99$

Sol. **B,C**

$$I = \sum_{k=1}^{98} \int_{k}^{k+1} \frac{(k+1)}{x(x+1)} dx$$

$$I = \sum_{k=1}^{98} (k+1) \left(\int_{k}^{k+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{98} (k+1) \left((\ell n x - \ell n(x+1) \right)_{k}^{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{98} (k+1) \left((\ell n(k+1) - \ell n(k+2) - \ell nk + \ell n(k+1) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{98} (k+1)(\ell n(k+1) - k.\ell nk) - \sum_{k=1}^{98} \left((k+1).\ell nk + 2 - k.\ell nk + 1 \right) + \sum_{k=1}^{98} \left(\ell nk(k+1) - \ell nk \right)$$

(Difference series)

$$\therefore I = (99\ \ell n\ 99) + (-99\ \ell n\ 100 + \ell n2) + (\ell n\ 99) = \ell n \left(\frac{2 \times (99)^{100}}{(100)^{99}} \right)$$

For option (B) :

Now Consider $(100)^{99} = (1 + 99)^{99}$

$$= {}^{99}C_0 + {}^{99}C_1(99) + {}^{99}C_2(99)^2 + ... + {}^{99}C_{97}(99)^{97} + \underbrace{{}^{99}C_{98}(99)^{98}}_{(value=(99)^{99})} + \underbrace{{}^{99}C_{99}(99)^{99}}_{(value=(99)^{99})}$$

$$\Rightarrow 100^{99} > 2.(99)^{99} \Rightarrow \frac{2 \times (99)^{99}}{(100)^{99}} < 1$$

$$\therefore \frac{2 \times (99)^{100}}{(100)^{99}} < 99 \text{ (on multiplying by 99)}$$

$$\Rightarrow I < \ell n99$$

For option (C) :

Since, $\sum_{k=1}^{98} \int_{k}^{k+1} \frac{k+1}{(x+1)^2} dx < \sum_{k=1}^{98} \int_{k}^{k+1} \frac{(k+1)dx}{x(x+1)}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{98} \left(\frac{1}{k+2} \right) < I$$

(on integration)

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{100}\right)}_{98\,\text{terms}} < I$$

$$\Rightarrow \frac{98}{100} < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{100} < I$$

$$\therefore I > \frac{49}{50}$$

Hence option (C) is correct.

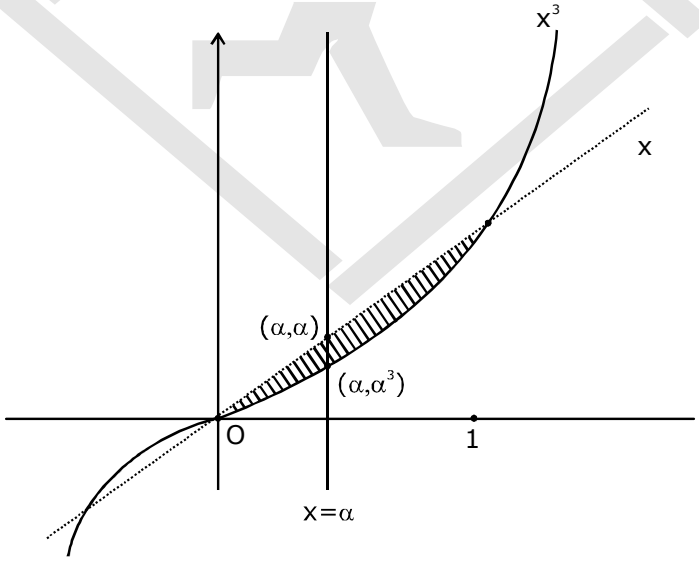
45. If the line $x = \alpha$ divides the area of region $R = \{(x,y) \in R^2 : x^3 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$ into two equal parts, then

(A) $\alpha^4 + 4\alpha^2 - 1 = 0$ (B) $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ (C) $2\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$ (D) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

45. यदि रेखा $x = \alpha$ क्षेत्र (region) $R = \{(x,y) \in R^2 : x^3 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$ के क्षेत्रफल को दो बराबर भागों में विभाजित करती है, तब

(A) $\alpha^4 + 4\alpha^2 - 1 = 0$ (B) $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$ (C) $2\alpha^4 - 4\alpha^2 + 1 = 0$ (D) $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Sol. C,D



$$\int_0^{\alpha}(x - x^3)dx = \frac{1}{2}\int_0^1(x - x^3)dx$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1$$

$$\left(\frac{2\alpha^2 - \alpha^4}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}$$

$2\alpha^2 - \alpha^4 = \frac{1}{2}$

$\boxed{4\alpha^2 - 2\alpha^4 = 1}$ $\quad t = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$

Check 'D' U $\quad t = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\alpha^2 = t$ $\quad \alpha^2 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \alpha^2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2t^2 - 4t + 1 = 0$ $\quad 1 > \alpha > \frac{1}{2}$

46. If $g(x) = \int_{\sin x}^{\sin(2x)} \sin^{-1}(t)\,dt$, then

(A) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ (B) $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ (C) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$ (D) $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$

46. यदि $g(x) = \int_{\sin x}^{\sin(2x)} \sin^{-1}(t)\,dt$, तब

(A) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ (B) $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$ (C) $g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$ (D) $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$

Sol. Bonus

47. If $f(x) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, then

(A) f(x) attains its maximum at x = 0
(B) f(x) attains its mininum at x = 0
(C) f'(x) = 0 at exactly three points in $(-\pi,\pi)$
(D) f'(x) = 0 at more than three points in $(-\pi, \pi)$

47. यदि $f(x) = \begin{vmatrix} \cos(2x) & \cos(2x) & \sin(2x) \\ -\cos x & \cos x & -\sin x \\ \sin x & \sin x & \cos x \end{vmatrix}$, तब

(A) x = 0 पर f(x) का अधिकतम (miximum) है।
(B) x = 0 पर f(x) का न्यूनतम (minimum) है।
(C) $(-\pi,\pi)$ में केवल तीन बिन्दुओं पर f'(x) = 0 है।
(D) $(-\pi, \pi)$ में तीन से अधिक बिन्दुओं पर f'(x) = 0 है।

Sol. A,D

f(x) = cos 2x[1] + cos 2x [cos 2x] + sin 2x [−sin 2x]
cos 2x = $\cos^2 x - \sin^2 x$
$f(x) = \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x) + \cos 2x$
$= 2\cos^2 2x + \cos 2x - 1$ (cos 2x = t)
$= 2t^2 + t - 1$

$f(x) = 2[t^2 + 1/2\ t] - \frac{1}{2}$

$= 2[(t + 1/4)^2 - 1/16] - \frac{1}{2}$

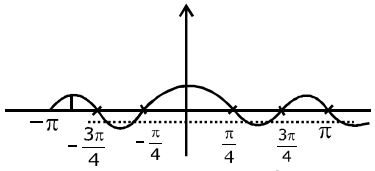
$= 2[(t + 1/4)^2] - 1/8 - 1/2$

$= 2(\cos 2x + 1/4)^2 - 5/8$ Max^m when $x = 0$

$f'(x) = -2\sin 2x - 4 \sin 2x = 0$

$= [\sin 2x + 2 (2 \sin 2x \cos 2x)] = 0$

$\sin 2x [1 + 4 \cos 2x] = 0$



$\sin 2x = 0$
$2x = 0, \pi, 2\pi$

$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$

4 solution

$\cos 2x = -1/4$
2 solution

48. Let α and β be non-zero real numbers such that $2(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha \cos\beta = 1$. then which of the following is/are true ?

(A) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$ (B) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$

(C) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$ (D) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$

48. माना कि α एवम् β इस प्रकार की अशून्य वास्तविक सँख्यायें (nonzero real numbers) है कि $2(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha \cos\beta = 1$ तब निम्न में से कौन सा (से) सत्य है (है) ?

(A) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$ (B) $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{3}\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$

(C) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$ (D) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = 0$

Sol. **A,B**

$2(\cos\beta - \cos\alpha) + \cos\alpha \cdot \cos\beta = 1$

$2\cos\beta + \cos\alpha\cos\beta - 2\cos\alpha = 1$

$2\cos\beta(2 + \cos\alpha) = 1 + 2\cos\alpha$

$$\cos\beta = \frac{1 + 2\cos\alpha}{2 + \cos\alpha} = \frac{1 + 2\left(\frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{3}}\right)}{2 + \frac{1 - \tan^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}+2-2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2+2\tan^2\frac{\alpha}{2}+1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{3-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{3+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}{1+\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\frac{1}{3}\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{1}{3}\tan^3\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{1}{3}\tan^2\frac{\alpha}{2}=\tan^2\frac{\beta}{2}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=3\tan^2\frac{\beta}{2}$$

$$\left(\tan\frac{\alpha}{2}-\sqrt{3}\tan\frac{\beta}{2}\right)\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\sqrt{3}\tan\frac{\beta}{2}\right)=0$$

49. Let $f(x)=\frac{1-x\left(1+|1-x|\right)}{|1-X|}\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ for $x\neq 1$. Then

(A) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ does not exist (B) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$ (D) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ does not exist

49. माना कि $x\neq 1$ के लिये, $f(x)=\frac{1-x\left(1+|1-x|\right)}{|1-X|}\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$ तब

(A) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ का अस्तित्व नही है (does not exist) (B) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=0$ (D) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है (does not exist)

Sol. B,D

$$f(x)=\frac{1-x(1+|1-x|)}{|1-x|}\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$x\to1^+$ $\lim\limits_{h\to0}\frac{1-(1+h)[1+h]}{(h)}\cos\left(\frac{1}{h}\right)$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{h\to0}\frac{-(h^2+2h)}{h}\cos\left(\frac{1}{h}\right)$

$\Rightarrow$ (2) × (−1, 1) does not exist

$x \to 1^-$ $\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1-(1-h)[1+h]}{(h)}\cos\left(\frac{1}{h}\right)$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-(1-h^2)}{(h)}\right)\cos\left(\frac{1}{h}\right)$$

$\Rightarrow \quad 0$

50. If $f:R \to R$ is a differentiable function such that $f'(x) > 2f(x)$ for all $x \in R$, and $f(0) = 1$, then

(A) $f'(x) < e^{2x}$ in $(0,\infty)$
(B) $f(x)$ is increasing in $(0,\infty)$
(C) $f(x)$ is decreasing in $(0,\infty)$
(D) $f(x) > e^{2x}$ in $(0,\infty)$

50. यदि $f:R \to R$ इस प्रकार का अवकलनीय (differentiable) फलन है कि सभी $x \in R$ के लिये $f'(x) > 2f(x)$, एवम् $f(0) = 1$ है, तब

(A) $(0,\infty)$ में $f'(x) < e^{2x}$
(B) $(0,\infty)$ में $f(x)$ वर्धमान (increasing) है।
(C) $(0,\infty)$ में $f(x)$ ह्रासमान (decreasing)हैं
(D) $(0,\infty)$ में $f(x) > e^{2x}$

Sol. B,D

$f : R \to R$

$f' > 2f$

$\frac{dy}{dx} - 2y > 0$ $\qquad$ LDE

If = $e^{\int -2dx} = e^{-2x}$

$e^{-2x}\left(\frac{dy}{dx}\right) - 2ye^{-2x} > 0$

$\frac{d(ye^{-2x})}{dx} > 0$

$H = ye^{-2x} \quad \Rightarrow \quad H' > 0$

$H(0) = 1 \qquad\qquad H \uparrow$

$H(x) = f(x)\, e^{-2x} > 0 \;\Rightarrow H$

$f(x) > 0 \quad \& \quad f(x)$ is inc.

$\ln f > 2x + \lambda$

$f(x) > e^{2x} . k$

$f(0) > k$

$1 > k$

$f(x) > e^{2x} \quad \Rightarrow 2e^{2x}.$

Paragraph 1

Let O be the origin, and $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ be three unit vectors in the directions of the sides $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{PQ}$, respectively, of a triangle PQR.

अनुच्छेद 1

माना कि O मूलबिन्दु (origin) है एवम् $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ क्रमशः त्रिभुज PQR की भुजायें $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{PQ}$, की दिशाओं में तीन एकक सदिश (unit vector) है।

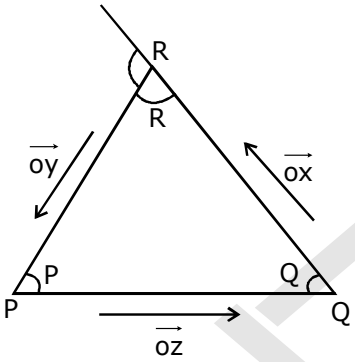
51. If the triangle PQR varies, then the minimum value of cos(p + Q) + cos(Q + R) + Cos(R +P) is

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $-\frac{5}{3}$ (D) $-\frac{3}{2}$

51. यदि त्रिभुज PQR परिवर्ती है (if the triangle PQR varies) , तब cos(p + Q) + cos(Q + R) + Cos(R +P) का नयूनतम मान (minimum value) है

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{5}{3}$ (C) $-\frac{5}{3}$ (D) $-\frac{3}{2}$

Sol.



51. D

$\Rightarrow \cos(\pi - R) + \cos(\pi - P) + \cos(\pi - Q)$

$\Rightarrow -[\cos P + \cos Q + \cos R]$

$\therefore \cos P + \cos Q + \cos R \le \frac{3}{2} \Rightarrow \min^m = -\frac{3}{2}$

52. $\left|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}\right|$ =

(A) sin(P + R) (B) sin(Q + R) (C) sin(P + Q) (D) sin2R

52. $\left|\overrightarrow{OX} \times \overrightarrow{OY}\right|$ =

(A) sin(P + R) (B) sin(Q + R) (C) sin(P + Q) (D) sin2R

Sol. C

$|\overrightarrow{ox} \times \overrightarrow{oy}| = |\overrightarrow{ox}|\,|\overrightarrow{oy}| \sin(180 - R)$

$|\overrightarrow{ox}|\,|\overrightarrow{oy}| \{\sin R\}$

$= (1)(1) \sin(\pi - (P + Q))$

$= \sin(P + Q)$

Paragraph 2

let p ,q be integers and let α, β be the roots of the equaion, $x^2 - x - 1 = 0$, where $\alpha \neq \beta$. For n = 0,1,2,....., Let $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$

FACT : If a and b are rational nubers and $a + b\sqrt{5} = 0$, then a = 0 = b.

अनुच्छेद 2

माना कि p ,q पूर्णांक है एवम् α, β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के मूल है, जहाँ $\alpha \neq \beta$ है। n = 0,1,2,....., के लिये माना कि $a_n = p\alpha^n + q\beta^n$ है।

तथ्य : यदि a एवम् b परिमेय सँख्याओं (rational nubers) है एवम् $a + b\sqrt{5} = 0$ है, तब a = 0 = b है।

53. If $a_4 = 28$, then p + 2q =

(A) 12 (B) 14 (C) 7 (D) 21

53. यदि $a_4 = 28$ है, तब p + 2q =

(A) 12 (B) 14 (C) 7 (D) 21

Sol. **A**

$a_4 = 28$

$a_4 = p\alpha^4 + q\beta^4 = 28$

$p(1+\sqrt{5})^4 + q(1-\sqrt{5})^4 = 28.2^4$

$p(6+2\sqrt{5})^2 + q(6-2\sqrt{5})^2 = 28.2^4$

$p(3+\sqrt{5})^2 + q(3-\sqrt{5})^2 = 28.2^2$

$p(9+5+6\sqrt{5}) + q(9+5-6\sqrt{5}) = 28.2^2$

$p(7+3\sqrt{5}) + q(7-3\sqrt{5}) = 56$

$7(p + q) + (p - q)\ 3\sqrt{5} = 56$

p + q = 8 | p − q = 0

p = 4, q = 4

$\Rightarrow$ p + 2q = 4 + 8 = 12

54. a_{12} =

(A) $a_{11} + 2a_{10}$ (B) $a_{11} - a_{10}$ (C) $2a_{11} + a_{10}$ (D) $a_{11} + a_{10}$

54. a_{12} =

(A) $a_{11} + 2a_{10}$ (B) $a_{11} - a_{10}$ (C) $2a_{11} + a_{10}$ (D) $a_{11} + a_{10}$

Sol. **D**

$x^2 - x - 1 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$a_0 = p + q$

$a_1 = p\alpha + q\beta$

$a_2 = p\alpha^2 + q\beta^2$

$a_2 = P(\alpha + 1) + q(\beta + 1)$

$a_2 = p\alpha + q\beta + (p + q)$

$a_2 = a_1 + a_0$

$a_3 = p\alpha^3 + q\beta^3$

$a_3 = p(\alpha^2 + \alpha) + q(\beta^2 + \beta)$

$a_3 = (p\alpha^2 + qb^2) + p\alpha + q\beta$

$a_3 = a_2 + a_1$

$\therefore a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$