अनुक्रमणिका

विभाग पहिला

विभाग दुसरा

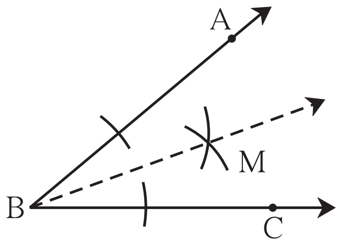
1 भौमितिक रचना — विभाग पहिला

1 भौमितिक रचना

जरा आठवूया.

- आपण मागील इयत्तांमध्ये रेषा, रेषाखंड, कोन, कोनदुभाजक इत्यादींचा अभ्यास केला आहे. आपण कोनाचे माप अंशांमध्ये मोजतो. $\angle ABC$ चे माप 40° असेल, तर ती माहिती आपण $m\angle ABC = 40^\circ$ अशी लिहितो.

कोनदुभाजक (Angle bisector)



शेजारी $\angle ABC$ ची आकृती दिली आहे.
कोनदुभाजक कोनाचे दोन समान भाग करतो.
किरण BM हा $\angle ABC$ चा दुभाजक आहे का ?

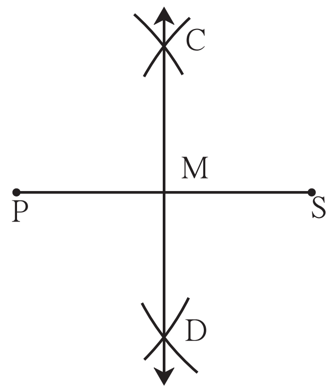
रेषाखंडाचा लंबदुभाजक (Perpendicular bisector of a line segment)

4 सेमी लांबीचा रेषाखंड PS काढा व त्याचा लंबदुभाजक काढा. त्याला रेषा CD हे नाव द्या.

- रेषा CD लंबदुभाजक आहे का, हे पडताळण्यासाठी काय कराल ?

  $m\angle CMS = \boxed{}^\circ$

- $l(PM) = l(SM)$ आहे का ?

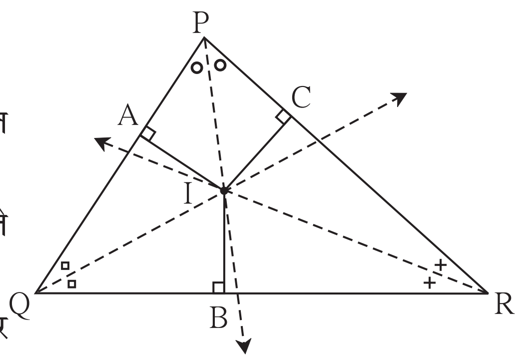


जाणून घेऊया.

त्रिकोणाच्या कोनांच्या दुभाजकांचा गुणधर्म

कृती

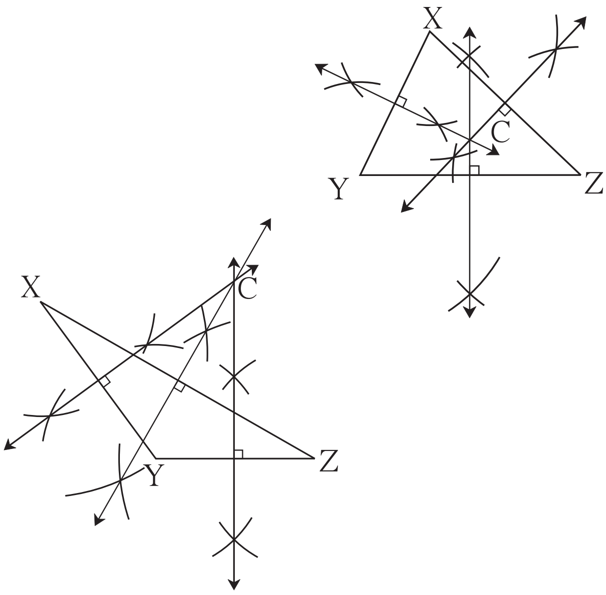
1. ΔPQR हा कोणताही त्रिकोण काढा.
2. कंपासच्या साहाय्याने त्रिकोणाचे तीनही कोन दुभागा. (दुभाजक पुरेसे मोठे नसल्यास ते वाढवून एकमेकांना छेदतील असे पाहा.)
3. हे तीनही कोनदुभाजक एकाच बिंदूतून जातात म्हणजेच ते **एकसंपाती** आहेत. त्या संपात बिंदूला I नाव द्या.
4. त्रिकोणात I पासून त्रिकोणाच्या बाजू PQ, QR व PR वर अनुक्रमे IA, IB, IC हे लंब काढा. या तीनही लंबांची लांबी मोजा. काय दिसते ? IA = IB = IC याचा अनुभव घ्या.



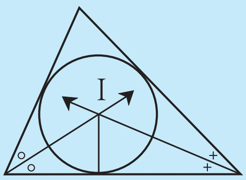
त्रिकोणाच्या बाजूंच्या लंबदुभाजकांचा गुणधर्म

कृती

1. पट्टीच्या साहाय्याने एक लघुकोन त्रिकोण व एक विशालकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक काढा.
2. प्रत्येक त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती आहेत हे अनुभवा.
3. त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक ज्या बिंदूत मिळतात, त्या बिंदूला C नाव द्या. C बिंदूपासून त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूंपर्यंतची अंतरे मोजा. काय दिसते ?
   CX = CY = CZ हे अनुभवा.
4. लंबदुभाजकांचा संपात बिंदू कोठे आहे याचे निरीक्षण करा.

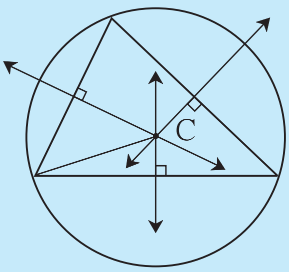


✸ अधिक माहितीसाठी



(1) त्रिकोणाचे कोनदुभाजक **एकसंपाती** (concurrent) असतात. त्यांच्या संपातबिंदूस **अंतर्मध्य** (incentre) म्हणतात. तो I या अक्षराने दर्शवला आहे.

(2) त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक **एकसंपाती** असतात. त्यांच्या संपात बिंदूस **परिमध्य** किंवा **परिकेंद्र** (circumcentre) म्हणतात. तो C या अक्षराने दर्शवला आहे.



सरावसंच 1

1. खाली दिलेल्या मापांचे रेषाखंड काढा व त्यांचे लंबदुभाजक काढा.
   (1) 5.3 सेमी (2) 6.7 सेमी (3) 3.8 सेमी
2. खाली दिलेल्या मापांचे कोन काढा व त्यांचे दुभाजक काढा.
   (1) 105° (2) 55° (3) 90°
3. एक विशालकोन त्रिकोण व एक काटकोन त्रिकोण काढा. प्रत्येक त्रिकोणातील कोनदुभाजकांचा संपात बिंदू काढा. प्रत्येक त्रिकोणातील संपात बिंदू कोठे आहे ?
4. एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याच्या भुजांचे लंबदुभाजक काढा. त्यांचा संपात बिंदू कोठे आहे ?

5*. मैथिली, शैला व अजय हे तिघे एका शहरात वेगवेगळ्या ठिकाणी राहत असून त्यांच्या घरांपासून समान अंतरावर खेळण्यांचे एक दुकान आहे. हे आकृतीच्या साहाय्याने दर्शवण्यासाठी कोणती भौमितिक रचना वापरावी ? स्पष्टीकरण द्या.

 जाणून घेऊया.

त्रिकोण रचना

कृती

काही कोनांची व भुजांची मापे दिली असता त्रिकोण काढता येतो का ते पाहा.

ΔABC असा काढा की $l(AB) = 4$ सेमी, $l(BC) = 3$ सेमी

- असा त्रिकोण काढता येईल का ?
- या अटी पाळणारे अनेक त्रिकोण काढता येतात. हे अनुभवा.
- या माहितीवरून एकमेव त्रिकोण काढता यावा अशी अपेक्षा असेल तर आणखी कोणती अट घालावी लागेल ?

कोणतीही इमारत बांधण्यापूर्वी त्या इमारतीची रचना सर्वप्रथम कागदावर काढली जाते. त्या इमारतीची छोटी प्रतिकृती बनवलेली सुद्धा तुम्ही पाहिली असेल. त्या रेखाटनाच्या आधारे इमारत बांधणे सोपे जाते. त्याचप्रमाणे कोणतीही भौमितिक रचना करण्यापूर्वी त्या रचनेची कच्ची आकृती काढून घेतल्यास दिलेली रचना करण्यास मदत होते. रचनेतील क्रियांचा क्रम ठरवता येतो.

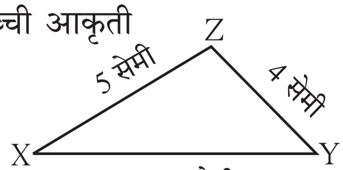
(I) त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदा. ΔXYZ असा काढा की $l(XY) = 6$ सेमी, $l(YZ) = 4$ सेमी, $l(XZ) = 5$ सेमी

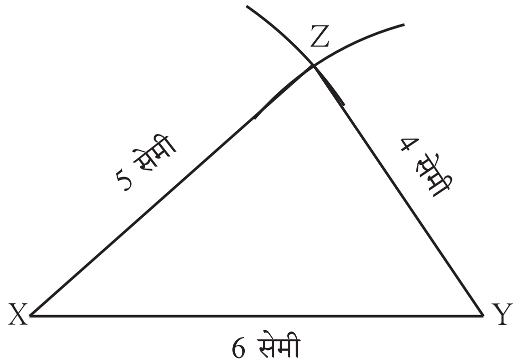
कच्ची आकृती काढताना दिलेली माहिती चटकन व शक्य तेवढ्या योग्य प्रमाणात दाखवूया. उदाहरणात बाजू XY सर्वांत मोठी आहे, म्हणून कच्च्या आकृतीतही ती तशीच असावी.

आकृती काढण्याच्या पायऱ्या.

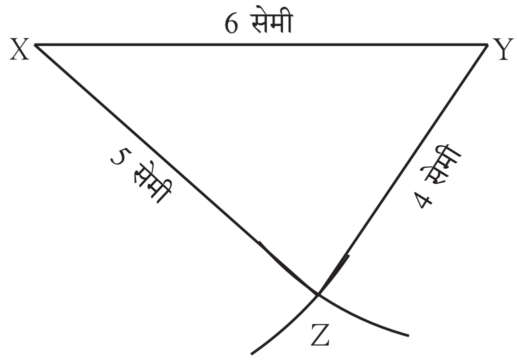
कच्ची आकृती



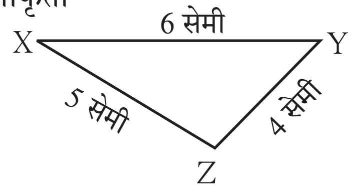
1. कच्च्या आकृतीप्रमाणे रेख XY हा 6 सेमी लांबीचा पाया घेतला आहे.
2. रेख XZ ची लांबी 5 सेमी असल्यामुळे कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घेऊन कंपासचे लोखंडी टोक X वर ठेवून रेख XY च्या एका बाजूला एक कंस काढला.
3. कंपासमध्ये 4 सेमी अंतर घेऊन कंपासचे लोखंडी टोक Y वर ठेवून आधी काढलेल्या कंसाला छेदणारा कंस काढला. छेदनबिंदूला Z नाव दिले. रेख XZ व रेख YZ काढले.



पायाच्या दुसऱ्या बाजूस कंस काढून तशीच त्रिकोण रचना करून दाखवली आहे.



कच्ची आकृती

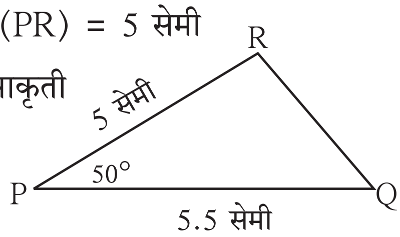


1. खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.
   (a) ΔABC मध्ये $l(AB) = 5.5$ सेमी, $l(BC) = 4.2$ सेमी, $l(AC) = 3.5$ सेमी
   (b) ΔSTU मध्ये $l(ST) = 7$ सेमी, $l(TU) = 4$ सेमी, $l(SU) = 5$ सेमी
   (c) ΔPQR मध्ये $l(PQ) = 6$ सेमी, $l(QR) = 3.8$ सेमी, $l(PR) = 4.5$ सेमी
2. पाया 5 सेमी व उरलेल्या प्रत्येक भुजेची लांबी 3.5 सेमी असलेला समद्विभुज त्रिकोण काढा.
3. बाजू 6.5 सेमी असलेल्या समभुज त्रिकोणाची रचना करा.
4. तुम्ही स्वत: बाजूंची लांबी घ्या व एक समभुज त्रिकोण, एक समद्विभुज त्रिकोण व एक विषमभुज त्रिकोण काढा.

(II) त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन दिला असता त्रिकोण काढणे.

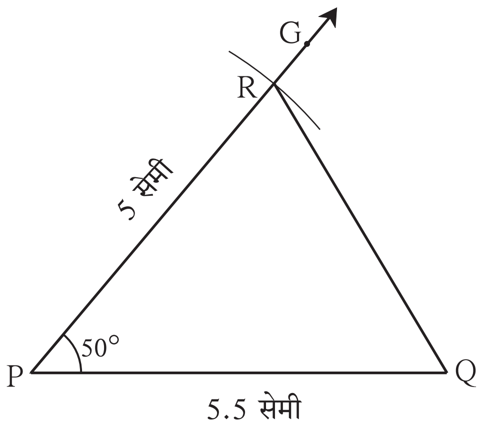
उदा. ΔPQR असा काढा की $l(PQ) = 5.5$ सेमी, $m\angle P = 50°$, $l(PR) = 5$ सेमी
(कच्ची आकृती काढून त्यामध्ये दिलेली माहिती दाखवली आहे. $\angle P$ लघुकोन आहे. तसा कच्च्या आकृतीतही काढला आहे.)

कच्ची आकृती



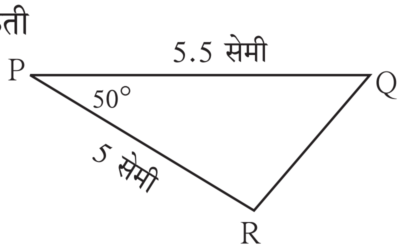
आकृती काढण्याच्या पायऱ्या

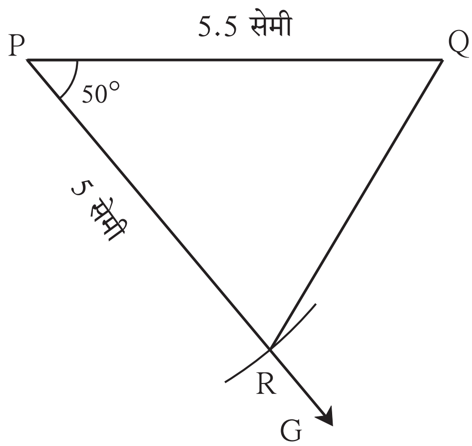
1. कच्च्या आकृतीप्रमाणे रेख PQ हा 5.5 सेमी लांबीचा पाया घेतला.
2. किरण PG असा काढला की $m\angle GPQ = 50°$
3. कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घ्या. कंपासचे लोखंडी टोक P वर ठेवून किरण PG वर कंस काढला. त्या छेदनबिंदूला R नाव दिले. बिंदू Q व बिंदू R जोडा. ΔPQR हा अपेक्षित त्रिकोण तयार झाला.



किरण PG हा रेख PQ च्या दुसऱ्या बाजूला देखील काढता येतो.
आता कच्ची आकृती पुढीलप्रमाणे काढू.
त्यानुसार ΔPQR काढला.

कच्ची आकृती





⊙ खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.

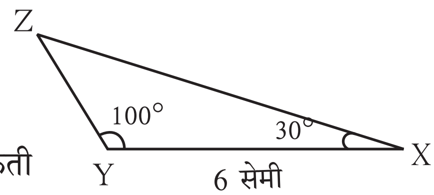
1. ΔMAT मध्ये $l(MA) = 5.2$ सेमी, $m\angle A = 80°$, $l(AT) = 6$ सेमी
2. ΔNTS मध्ये $m\angle T = 40°$, $l(NT) = l(TS) = 5$ सेमी
3. ΔFUN मध्ये $l(FU) = 5$ सेमी, $l(UN) = 4.6$ सेमी, $m\angle U = 110°$
4. ΔPRS मध्ये $l(RS) = 5.5$ सेमी, $l(RP) = 4.2$ सेमी, $m\angle R = 90°$

(III) दोन कोन आणि त्यांनी समाविष्ट केलेल्या बाजूंची लांबी दिली असता त्रिकोण काढणे.

उदा. ΔXYZ असा काढा की $l(YX) = 6$ सेमी, $m\angle ZXY = 30°$, $m\angle XYZ = 100°$

$\angle XYZ$ हा विशालकोन आहे.

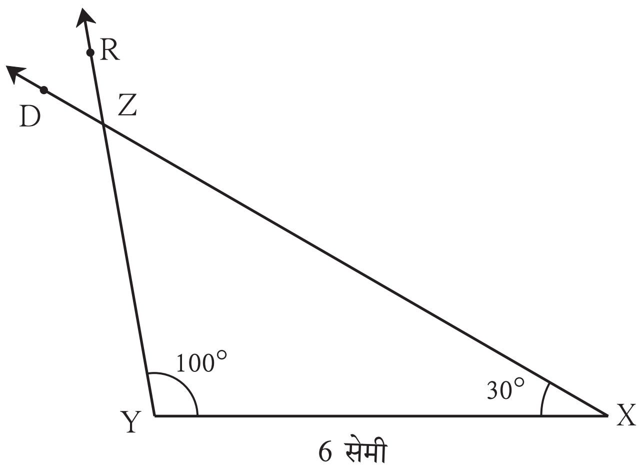
तसे कच्च्या आकृतीतही दाखवले आहे.

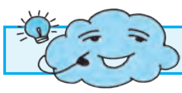


कच्ची आकृती

आकृती काढण्याच्या पायऱ्या

1. कच्च्या आकृतीप्रमाणे रेख YX हा 6 सेमी पाया घेतला.
2. किरण YR हा असा काढला की $m\angle XYR = 100°$
3. रेख XY च्या ज्या बाजूला बिंदू R आहे, त्याच बाजूला किरण XD असा काढला, की $m\angle YXD = 30°$. YR व XD या किरणांच्या छेदनबिंदूला Z नाव दिले. ΔXYZ हा अपेक्षित त्रिकोण तयार झाला.
4. पायाच्या दुसऱ्या बाजूला देखील असाच त्रिकोण काढता येतो हे अनुभवा.





जरा डोके चालवा.

उदा. ΔABC मध्ये $m\angle A = 60°$, $m\angle B = 40°$ व $l(AC) = 6$ सेमी आहे. तर तुम्ही ΔABC काढू शकता का ? त्रिकोण काढण्यासाठी आणखी कोणती माहिती अपेक्षित आहे ? ती माहिती मिळवण्यासाठी कोणता गुणधर्म वापरता येईल ? कच्ची आकृती काढून ठरवा.

त्रिकोणातील तीनही कोनांच्या मापांच्या बेरजेचा गुणधर्म आठवा. हा गुणधर्म वापरून रेख AC ला समाविष्ट करणारे $\angle A$ व $\angle C$ यांची मापे मिळतील का ?

सरावसंच 4

⊙ खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.

1. ΔSAT, मध्ये $l(AT) = 6.4$ सेमी, $m\angle A = 45^\circ$, $m\angle T = 105^\circ$
2. ΔMNP, मध्ये $l(NP) = 5.2$ सेमी, $m\angle N = 70^\circ$, $m\angle P = 40^\circ$
3. ΔEFG, मध्ये $l(EG) = 6$ सेमी, $m\angle F = 65^\circ$, $m\angle G = 45^\circ$
4. ΔXYZ, मध्ये $l(XY) = 7.3$ सेमी, $m\angle X = 34^\circ$, $m\angle Y = 95^\circ$

(IV) कर्ण व एका बाजूची लांबी दिली असता काटकोन त्रिकोण काढणे.

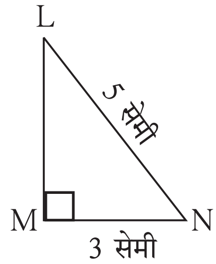
त्रिकोणात एक कोन काटकोन असेल तर तो त्रिकोण काटकोन त्रिकोण असतो हे आपल्याला माहीत आहे. अशा त्रिकोणात **काटकोनासमोरील भुजा म्हणजे कर्ण** होय.

उदा. ΔLMN असा काढा की $m\angle LMN = 90^\circ$, कर्ण = 5 सेमी, $l(MN) = 3$ सेमी

दिलेल्या माहितीवरून, कच्ची आकृती काढा.

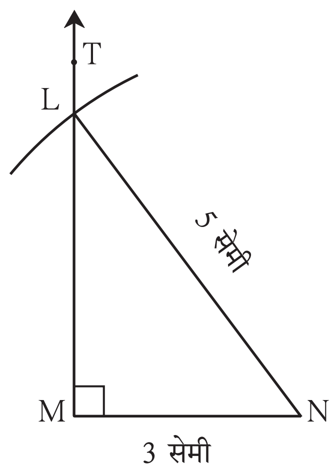
$m\angle LMN = 90^\circ$ म्हणून अंदाजे काटकोन त्रिकोण काढला व काटकोनाची खूण दाखवली आहे. म्हणजेच दिलेली माहिती कच्च्या आकृतीत दाखवली.

कच्ची आकृती



आकृती काढण्याच्या पायऱ्या

1. कच्च्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेख MN हा पाया 3 सेमी लांबीचा काढला.
2. रेख MN च्या बिंदू M पाशी 90° मापाचा कोन करणारा किरण MT काढला.
3. कंपासमध्ये 5 सेमी अंतर घेऊन कंपासचे लोखंडी टोक बिंदू N वर ठेवून किरण MT ला छेदणारा कंस काढला. छेदनबिंदूस L नाव दिले. ΔLMN तयार झाला.
4. पायाच्या दुसऱ्या बाजूला देखील अशीच आकृती काढता येते, हे लक्षात घ्या.



सरावसंच 5

खाली दिलेल्या मापांवरून त्रिकोण काढा.

1. ΔMAN, मध्ये $m\angle MAN = 90^\circ$, $l(AN) = 8$ सेमी, $l(MN) = 10$ सेमी.
2. काटकोन त्रिकोण STU मध्ये कर्ण SU = 5 सेमी व $l(ST) = 4$ सेमी.
3. ΔABC मध्ये $l(AC) = 7.5$ सेमी, $m\angle ABC = 90^\circ$, $l(BC) = 5.5$ सेमी.
4. ΔPQR मध्ये $l(PQ) = 4.5$ सेमी, $l(PR) = 11.7$ सेमी, $m\angle PQR = 90^\circ$.
5. विद्यार्थ्यांनी त्रिकोण रचनांसाठी वेगवेगळी उदाहरणे तयार करून सराव करावा.

कृती

पुढील माहितीप्रमाणे त्रिकोण काढण्याचा प्रयत्न करा.

1. ΔABC मध्ये $m\angle A = 85^\circ$, $m\angle B = 115^\circ$ $l(AB) = 5$ सेमी
2. ΔPQR मध्ये $l(QR) = 2$ सेमी, $l(PQ) = 4$ सेमी, $l(PR) = 2$ सेमी

वरील दोन्ही त्रिकोण तुम्ही काढू शकलात का ? काढू शकत नसाल तर त्यामागील कारण शोधा.

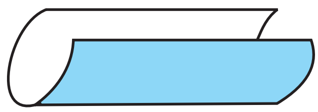
✸ अधिक माहितीसाठी कृती

उदा. ΔABC असा काढा की, $l(BC) = 8$ सेमी, $l(CA) = 6$ सेमी, $m\angle ABC = 40^\circ$. BC या 8 सेमी लांबीच्या पायावर 40° चा कोन करणारा किरण काढा. त्यावर $l(AC) = 6$ सेमी येईल असे A साठी दोन बिंदू मिळतात, हे कंपासच्या साहाय्याने अनुभवा. म्हणजेच दिलेल्या मापांचे दोन वेगळ्या आकारांचे त्रिकोण मिळतात. त्रिकोणाचे तीनही कोन दिले असतील व एकही बाजू दिली नसेल तर त्रिकोण काढता येईल का ? असे किती त्रिकोण काढता येतील ?

जाणून घेऊया.

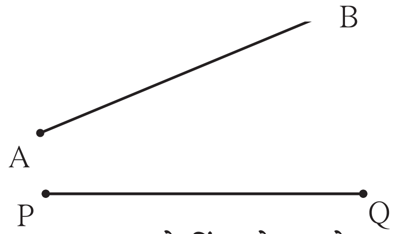
रेषाखंडांची एकरूपता (Congruence of segments)

कृती I एक आयताकृती कागद घ्या. या कागदाच्या समोरासमोरील बाजू जुळवा. त्या तंतोतंत जुळतात हे अनुभवा.



कृती II पट्टीच्या साहाय्याने रेख AB ची लांबी मोजा आणि रेख PQ ची लांबी मोजा व लिहा.

$l(AB) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $l(PQ) = \ldots\ldots\ldots\ldots$



रेख AB व रेख PQ या रेषाखंडांची लांबी समान आहे ना ? त्या रेषा उचलून एकमेकींवर ठेवता येत नाहीत. एक पारदर्शक कागद AB वर ठेवून त्या कागदावर AB रेषाखंड बिंदूंच्या नावांसह गिरवा. पारदर्शक कागदावर मिळालेला नवा रेषाखंड PQ वर ठेवून तपासा. A बिंदू P वर ठेवल्यास B बिंदू Q वर पडू शकतो हे अनुभवा. यावरून रेख AB ही रेख PQ शी **एकरूप** आहे हे समजते.

यावरून असा निष्कर्ष निघतो की दोन रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड तंतोतंत जुळतात म्हणजेच ते **एकरूप** आहेत, असे म्हणतात. रेषाखंड AB व रेषाखंड PQ हे एकरूप असतील तर ते रेख AB $\cong$ रेख PQ असे लिहितात.

हे मला समजले.

- जर दिलेल्या रेषाखंडांची लांबी समान असेल तर ते रेषाखंड एकरूप असतात.

❁ जर रेख AB $\cong$ रेख PQ म्हणजेच रेख PQ $\cong$ रेख AB.

❁ जर रेख AB $\cong$ रेख PQ, रेख PQ $\cong$ रेख MN तर रेख AB $\cong$ रेख MN हे लक्षात घ्या.

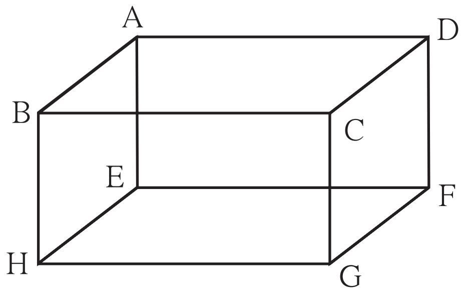
म्हणजेच एक रेषाखंड दुसऱ्याशी व दुसरा तिसऱ्याशी एकरूप असेल तर पहिला रेषाखंड तिसऱ्याशी देखील एकरूप असतो.

कृती I

कोणतेही एक खोके घ्या. त्याच्या प्रत्येक कडेची लांबी मोजा. कोणत्या कडा एकरूप आहेत ते पाहा.

कृती II

खाली दिलेल्या आकारावरून एकरूप रेषाखंडांच्या जोड्या लिहा.



(1) रेख AB ≅ रेख DC

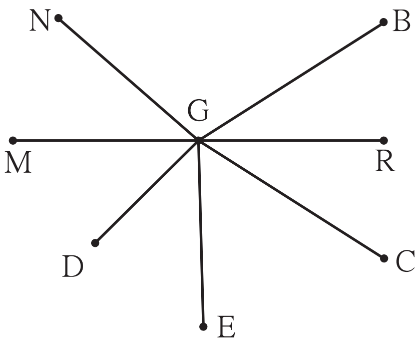
(2) रेख AE ≅ रेख BH

(3) रेख EF ≅ रेख ....

(4) रेख DF ≅ रेख ....

सरावसंच 6

1. खालील आकृतीमधील एकरूप रेषाखंडांच्या जोड्या लिहा. (कर्कटकाचा वापर करून त्या शोधा.)



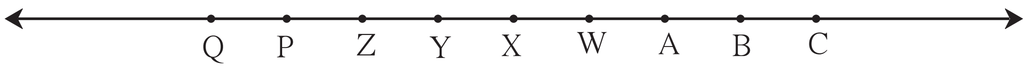
(i) ....

(ii) ....

(iii) ....

(iv) ....

2. खालील रेषेवर लगतच्या कोणत्याही दोन बिंदूंमध्ये समान अंतर आहे. त्यावरून रिकाम्या जागा भरा.



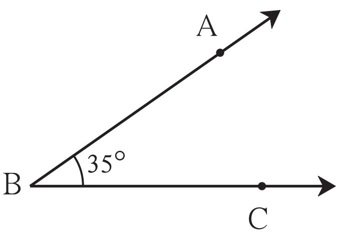
(i) रेख AB ≅ रेख ....   (ii) रेख AP ≅ रेख ....   (iii) रेख AC ≅ रेख ....

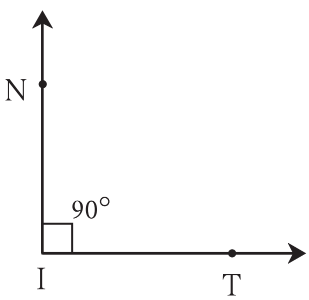
(iv) रेख .... ≅ रेख BY   (v) रेख .... ≅ रेख YQ   (vi) रेख BW ≅ रेख ....

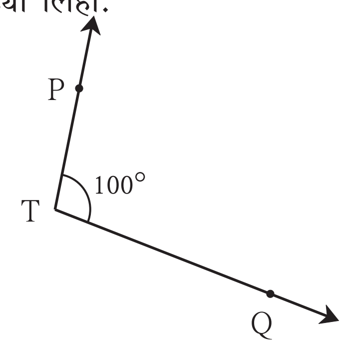
जाणून घेऊया.

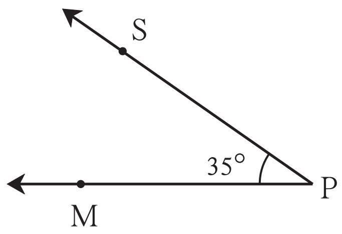
कोनांची एकरूपता (Congruence of angles)

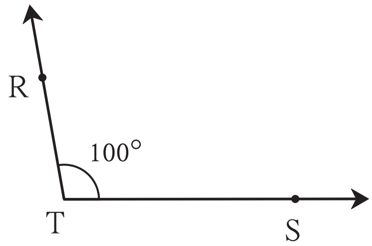
पुढे दिलेल्या कोनांचे निरीक्षण करून समान मापे असणाऱ्या कोनांच्या जोड्या लिहा.

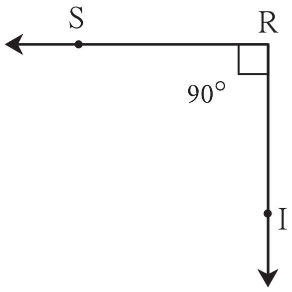




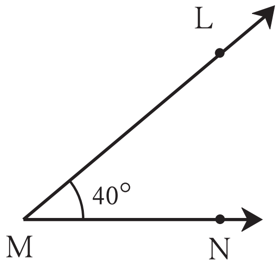


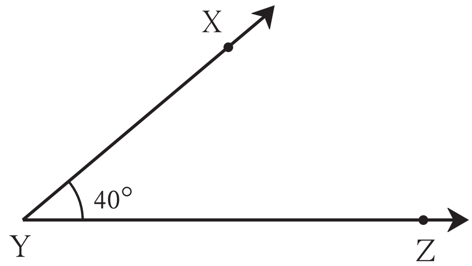






कृती





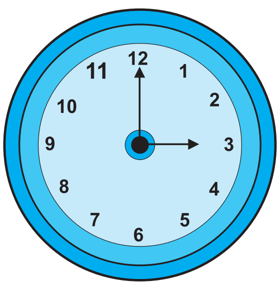
आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 40° चे $\angle LMN$ व $\angle XYZ$ हे दोन कोन काढा. एक पारदर्शक कागद $\angle LMN$ वर ठेवून बिंदूंच्या नावांसह कोनाच्या भुजा गिरवा. पारदर्शक कागद उचलून मिळालेला कोन $\angle XYZ$ वर ठेवा. बिंदू M बिंदू Y वर, किरण MN किरण YZ वर ठेवून किरण ML हा किरण YX वर पडतो हे अनुभवा. यावरून समान मापांचे कोन एकरूप असतात हे समजते. कोनांची एकरूपता भुजांच्या लांबीवर अवलंबून नसते. कोनांची एकरूपता कोनांच्या मापांवर अवलंबून असते. $\angle LMN$ व $\angle XYZ$ एकरूप आहेत हे
$\angle LMN \cong \angle XYZ$ असे लिहितात.

हे मला समजले.

- ज्या कोनांची मापे समान असतात, ते कोन एकरूप असतात.

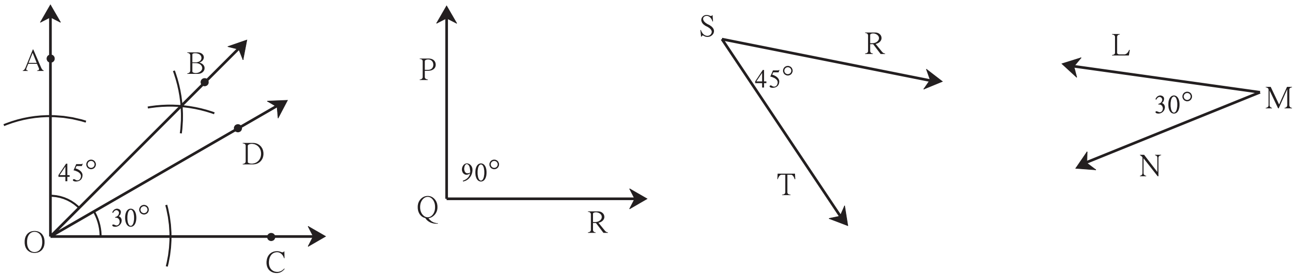
- जर $\angle LMN \cong \angle XYZ$ तर $\angle XYZ \cong \angle LMN$
- जर $\angle LMN \cong \angle ABC$ आणि $\angle ABC \cong \angle XYZ$ तर $\angle LMN \cong \angle XYZ$

चला, चर्चा करूया.



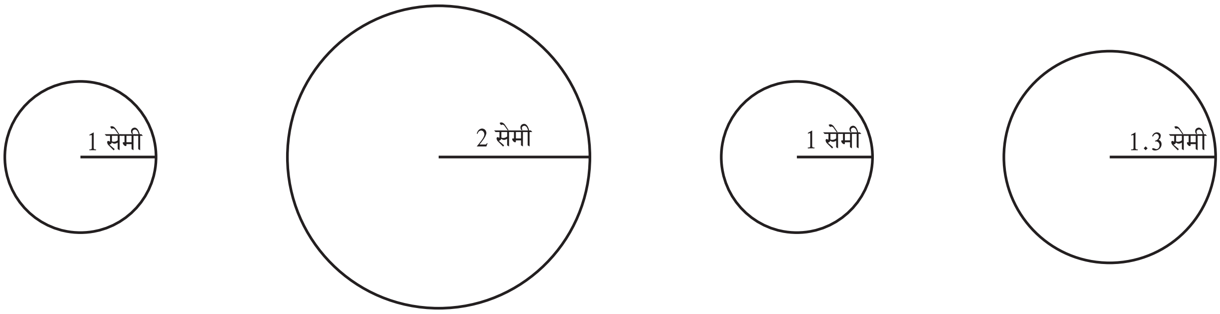
- घड्याळात किती वाजले आहेत ? ☐
- दोन काट्यांमध्ये किती अंश मापाचा कोन झाला आहे ? ☐
- या कोनाशी एकरूप कोन घड्याळाच्या काट्यांमध्ये आणखी किती वाजता असतो ? ☐

⦿ खाली काही कोन दिले आहेत. त्यांतील एकरूप कोनांच्या जोड्या एकरूपतेचे चिन्ह वापरून लिहा.



जाणून घेऊया.

वर्तुळांची एकरूपता (Congruence of circles)



(a) (b) (c) (d)

कृती I वरील आकृतीतील वर्तुळांचे निरीक्षण करा.

वरीलप्रमाणे 1 सेमी, 2 सेमी, 1 सेमी, 1.3 सेमी त्रिज्येची वर्तुळे कागदावर काढा व त्या वर्तुळाकार चकत्या कापा. या चकत्या एकमेकींवर ठेवून कोणत्या चकत्या एकमेकींशी तंतोतंत जुळतात हे तपासा.

निरीक्षणे : 1. आकृती (a) व (c) मधील वर्तुळे एकमेकांशी जुळणारी आहेत.

2. आकृती (b) व (c) मधील वर्तुळे तसेच, आकृती (a) व आकृती (d) मधील वर्तुळे एकमेकांशी जुळणारी नाहीत.

जी वर्तुळे एकमेकांशी तंतोतंत जुळतात त्यांना **एकरूप वर्तुळे** म्हणतात.

कृती II वेगवेगळ्या आकारांच्या पण समान जाडीच्या बांगड्या आणून त्यातील कोणत्या बांगड्या एकरूप आहेत ते शोधा.

कृती III व्यवहारात तुम्हांला एकरूप वर्तुळे कोठे दिसतात ते शोधा.

कृती IV घरातील वर्तुळाकार कडा असलेल्या ताटल्या किंवा वाट्या घ्या. त्यांच्या कडा एकमेकींशी जुळवून कोणत्या कडा एकमेकींशी एकरूप आहेत ते पाहा.

हे मला समजले.

- ज्या वर्तुळांच्या त्रिज्या समान असतात, ती वर्तुळे एकरूप असतात.

ICT Tools or Links

Geogebra Software मधील Construction tools चा वापर करून त्रिकोण व वर्तुळे काढा.

2 पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार व भागाकार

जरा आठवूया.

- मागील इयत्तेत आपण पूर्णांकांची बेरीज व वजाबाकी करायला शिकलो आहोत. त्याचा उपयोग करून खालील रिकाम्या जागा भरा.

(1) $5 + 7 = \boxed{\quad}$ (2) $10 + (-5) = \boxed{\quad}$ (3) $-4 + 3 = \boxed{\quad}$

(4) $(-7) + (-2) = \boxed{\quad}$ (5) $(+8) - (+3) = \boxed{\quad}$ (6) $(+8) - (-3) = \boxed{\quad}$

- खालील प्रत्येक क्रियेचे उत्तर 3 येईल अशा प्रकारे रिकाम्या कंसांत योग्य संख्या लिहा.

$(-6) + (\quad)$ $4 - (\quad)$ $7 + (\quad)$

3

$(-5) - (\quad)$ $-8 + (\quad)$ $9 - (\quad)$

जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार

मयूरी शाळेतून घरी जाताना तिची सायकल पंक्चर झाली. पंक्चर काढण्यासाठी तिच्याकडे पुरेसे पैसे नव्हते. तेव्हा तिला सुशांत, स्नेहल आणि कल्पनाने प्रत्येकी पाच रुपये उसने दिल्याने तिच्याजवळ 15 रुपये उसने गोळा झाले व तिच्या सायकलची दुरुस्ती झाली. आपण उसने रुपये किंवा कर्ज '–' (ऋण) चिन्हाने दाखवतो म्हणजे मयूरीवर 15 रुपयांचे कर्ज होते किंवा तिच्याजवळ – 15 रुपये होते.

येथे आपण $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ हे जाणून घेतले.

यावरून $(-5) \times 3 = 3 \times (-5) = -15$ हे ध्यानात येते.

दुसऱ्या दिवशी मयूरीने आईकडून 15 रुपये आणून प्रत्येकाचे पैसे परत केले व कर्ज फेडले किंवा कमी केले. कर्ज काढून टाकणे म्हणजे पैसे मिळवणे हे समजून $-(-15) = +15$ हे लक्षात घ्या.

आपण पूर्ण संख्यांचे गुणाकार व भागाकार शिकलो आहोत. या क्रिया करण्यासाठी पाढे देखील तयार केले आहेत. आता पूर्णांक संख्यांचे गुणाकार अभ्यासू म्हणजेच ऋण संख्या, धन संख्या व शून्य मिळून जो समूह आहे त्यातील संख्यांचे गुणाकार पाहू.

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3)$ ही बेरीज म्हणजेच (-3) ही संख्या 4 वेळा घेऊन केलेली बेरीज होय. ती -12 येते. ही बेरीज आपण $(-3) \times 4 = -12$ अशी लिहू शकतो. त्याचप्रकारे $(-5) \times 6 = -30$, $(-7) \times 2 = -14$, $8 \times (-7) = -56$

आता (-4) चा पाढा तयार करू.

$(-4) \times 0 = 0$
$(-4) \times 1 = -4$
$(-4) \times 2 = -8$
$(-4) \times 3 = -12$

यातील आकृतिबंधाचे निरीक्षण करा. येथे (-4) चा गुणक एका एककाने वाढला की गुणाकार 4 ने कमी झालेला दिसतो.

हाच आकृतिबंध ठेवून (-4) हा पाढा वरच्या बाजूला गुणक कमी करून वाढवला, तर तो असा होईल.

$(-4) \times (-2) = 8$
$(-4) \times (-1) = 4$
$(-4) \times 0 = 0$

(-4) चा गुणक एका एककाने कमी झाला, की गुणाकार 4 ने वाढतो हे ध्यानात घ्या.

खालील सारणीत (-5) चा पाढा दिला आहे. सारणीतील (-6) व (-7) चे पाढे पूर्ण करा.

$(-5) \times (-3) = 15$	$(-6) \times (-3) =$	$(-7) \times (-3) =$
$(-5) \times (-2) = 10$	$(-6) \times (-2) =$	$(-7) \times (-2) =$
$(-5) \times (-1) = 5$	$(-6) \times (-1) =$	$(-7) \times (-1) =$
$(-5) \times 0 = 0$	$(-6) \times 0 =$	$(-7) \times 0 =$
$(-5) \times 1 = -5$	$(-6) \times 1 =$	$(-7) \times 1 =$
$(-5) \times 2 = -10$	$(-6) \times 2 =$	$(-7) \times 2 =$
$(-5) \times 3 = -15$	$(-6) \times 3 =$	$(-7) \times 3 =$
$(-5) \times 4 = -20$	$(-6) \times 4 =$	$(-7) \times 4 =$

हे मला समजले.

- दोन धन पूर्णांकांचा गुणाकार धन पूर्णांक येतो.
- एक धन पूर्णांक व एक ऋण पूर्णांक यांचा गुणाकार ऋण पूर्णांक येतो.
- दोन ऋण पूर्णांकांचा गुणाकार धन पूर्णांक येतो.

(धन संख्या) × (धन संख्या) = (धन संख्या)
(धन संख्या) × (ऋण संख्या) = (ऋण संख्या)
(ऋण संख्या) × (धन संख्या) = (ऋण संख्या)
(ऋण संख्या) × (ऋण संख्या) = (धन संख्या)

सरावसंच 8

⊙ गुणाकार करा.

(i) $(-5) \times (-7)$ (ii) $(-9) \times (6)$ (iii) $(9) \times (-4)$ (iv) $(8) \times (-7)$

(v) $(-124) \times (-1)$ (vi) $(-12) \times (-7)$ (vii) $(-63) \times (-7)$ (viii) $(-7) \times (15)$

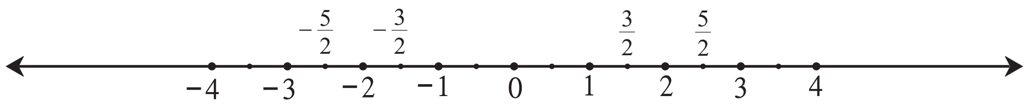
जाणून घेऊया.

पूर्णांक संख्यांचा भागाकार

एका धन पूर्णांकाला दुसऱ्या धन पूर्णांकाने भागण्याची क्रिया आपल्याला माहीत आहे. असा भागाकार पूर्ण संख्या किंवा अपूर्णांक असतो, हेही आपण जाणतो.

जसे, $6 \div 2 = \frac{6}{2} = 3$, $5 \div 3 = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

संख्यारेषेवर शून्याच्या डावीकडे आपण ऋण पूर्णांक संख्या दाखवू शकतो. त्याचप्रमाणे त्यांचे भागही दाखवू शकतो.



येथे $-\frac{5}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ या संख्या, संख्यारेषेवर दाखवल्या आहेत.

$\left(\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ या परस्पर विरुद्ध संख्यांच्या जोड्या आहेत हे ध्यानात घ्या.

म्हणजेच $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0$, $\frac{3}{2} + \frac{(\ 3)}{2} = 0$, $-\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$

विरुद्ध संख्यांच्या जोडीला बेरीज व्यस्त संख्यांची जोडी असेही म्हणतात.

$(-1) \times (-1) = 1$ हे आपण पाहिले आहे. या समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंना (-1) ने भागले तर $(-1) = \frac{1}{(\ 1)}$ हे समीकरण मिळते. म्हणून $\frac{1}{(\ 1)}$ हा भागाकार म्हणजे (-1) आहे हे जाणून घ्या.

यावरून $6 \times (-1) = 6 \times \frac{1}{(\ 1)} = \frac{6}{(\ 1)}$ हे समजते.

धन पूर्णांकाला ऋण पूर्णांकाने भागणे

$$\frac{7}{-2} = \frac{7\times1}{(\ 1)\times2} = 7 \times \frac{1}{(\ 1)} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times (-1) \times \frac{1}{2} = \frac{(7)\times(\ 1)}{2} = \frac{-7}{2}$$

ऋण पूर्णांकाला ऋण पूर्णांकाने भागणे

$$\frac{-13}{-2} = \frac{(\ 1)\times13}{(\ 1)\times2} = \frac{(\ 1)}{(\ 1)}\times13\times\frac{1}{2} = (\ 1)\times\frac{(\ 1)}{1}\times\frac{13}{2} \quad 1\times\frac{13}{2} \quad \frac{13}{2}$$

याचप्रमाणे $\frac{-25}{-4} = \frac{25}{4}$, $\frac{-18}{-2} = \frac{18}{2} = 9$ इत्यादी पडताळून पाहा.

यावरून ऋण पूर्णांकांचा भागाकार समजतो.

एका पूर्णांक संख्येला दुसऱ्या शून्येतर पूर्णांक संख्येने भागले की मिळणारा भागाकार लिहिताना छेद हा धन पूर्णांक संख्या असावा हा संकेत आहे, म्हणून $\frac{7}{-2} = \frac{-7}{2}$, $\frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$ असे लिहितात.

हे मला समजले.

पूर्णांक संख्यांच्या भागाकाराचे नियम गुणाकाराच्या नियमांसारखे आहेत.

- दोन धन पूर्णांक संख्यांचा भागाकार, धन संख्या येते.
- दोन ऋण पूर्णांक संख्यांचा भागाकार, धन संख्या येते.
- धन पूर्णांक व ऋण पूर्णांक यांचा भागाकार, नेहमी ऋण संख्या येते.

सरावसंच 9

1. खालील उदाहरणे सोडवा.

   (i) (− 96) ÷ 16 (ii) 98 ÷ (− 28) (iii) (− 51) ÷ 68 (iv) 38 ÷ (− 57)

   (v) (− 85) ÷ 20 (vi) (−150) ÷ (− 25) (vii) 100 ÷ 60 (viii) 9 ÷ (− 54)

   (ix) 78 ÷ 65 (x) (− 5) ÷ (− 315)

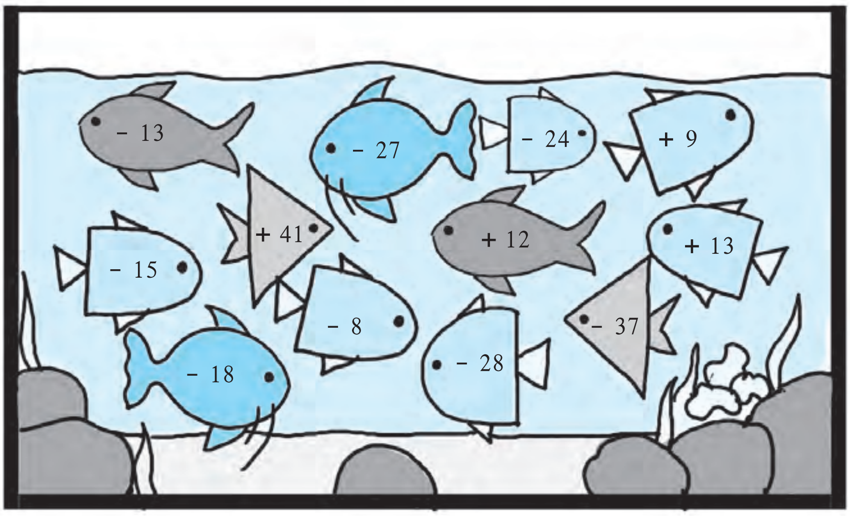
2*. ज्यांचे उत्तर $\frac{24}{5}$ येईल असे पूर्णांकांचे तीन भागाकार तयार करा.

3*. ज्यांचे उत्तर $\frac{-5}{7}$ येईल असे पूर्णांकांचे तीन भागाकार तयार करा.

4. खाली एका तलावात काही संख्या धारण केलेले मासे आहेत. कोणत्याही 4 जोड्या घेऊन त्यांतील संख्यांचे गुणाकार करा. तसेच चार वेगळ्या जोड्या घेऊन त्यांतील संख्यांचा भागाकार करा.

उदाहरणार्थ

1. $(-13) \times (-15) = 195$ 2. $(-24) \div 9 = \frac{24}{9}$ $\frac{8}{3}$



3 मसावि–लसावि

जरा आठवूया.

- सर्वांत लहान मूळ संख्या (prime number) कोणती ?
- 1 ते 50 या संख्यांमध्ये किती मूळसंख्या आहेत ? त्यांची यादी करा.
- खालील संख्यांपैकी ज्या संख्या मूळसंख्या आहेत, त्या संख्यांभोवती वर्तुळ करा.

  17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97

  सहमूळ संख्या (coprime numbers) : ज्या दोन संख्यांचा सामाईक विभाजक फक्त 1 हाच असतो, त्या संख्या एकमेकींच्या **सहमूळ संख्या** आहेत असे म्हणतात. सहमूळ संख्यांना **सापेक्ष मूळ संख्या** (relatively prime numbers) असेही म्हणतात.

जसे : 10 व 21 या संख्या सहमूळ संख्या आहेत. कारण 10 चे विभाजक : 1, 2, 5, 10 आणि 21 चे विभाजक 1, 3, 7, 21. या दोनही संख्यांच्या विभाजकांमध्ये 1 हा एकमेव सामाईक विभाजक आहे. (3, 8) ; (4, 9); (21, 22) ; (22, 23) ; (23, 24) या काही सहमूळ संख्या आहेत. दोन क्रमवार संख्या सहमूळ असतात याचा पडताळा घ्या.

जाणून घेऊया.

जोडमूळ संख्या (Twin prime numbers)

ज्या दोन मूळ संख्यांतील फरक 2 आहे, त्या दोन मूळ संख्यांना जोडमूळ संख्या असे म्हणतात.

जसे : (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) इत्यादी.

सरावसंच 10

1. जी संख्या मूळ नाही आणि संयुक्तही नाही, अशी संख्या कोणती आहे ?
2. पुढील जोड्यांपैकी सहमूळ संख्यांच्या जोड्या ओळखा.

   (i) 8, 14 (ii) 4, 5 (iii) 17, 19 (iv) 27, 15
3. 25 ते 100 पर्यंतच्या सर्व मूळ संख्यांची यादी करा. त्या किती आहेत ते लिहा.
4. 51 ते 100 पर्यंतच्या सर्व जोडमूळ संख्या लिहा.
5. 1 ते 50 मधील सहमूळ संख्यांच्या 5 जोड्या लिहा.
6. मूळ संख्यांपैकी समसंख्या कोणत्या ?

जाणून घेऊया.

संख्येचे मूळ अवयव पाडणे (Prime factorisation of a number)

संख्यांचा लसावि व मसावि काढण्यासाठी युक्लिडचा एक सोपा व महत्त्वाचा नियम अनेकदा वापरला जातो. "**कोणतीही संयुक्त संख्या ही मूळ संख्यांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिता येते**" हा तो नियम आहे.

संख्यांचे मूळ अवयव कसे पाडायचे ते पाहू.

उदा. 24 ही संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहा.

मूळ अवयव काढण्याची पद्धत

उभी मांडणी

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

आडवी मांडणी

$24 = 2 \times 12$

$= 2 \times 2 \times 6$ ...12 चे अवयव पाडले आहेत.

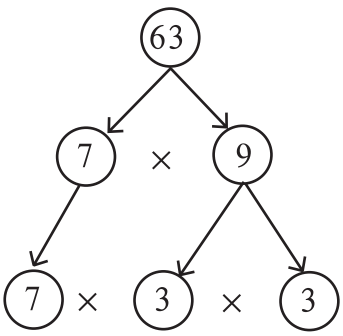
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ...6 चे अवयव पाडले आहेत.

2 व 3 हे मूळ अवयव आहेत.

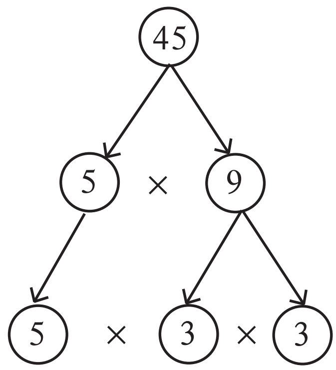
लक्षात ठेवा :

दिलेली संख्या तिच्या मूळ अवयवांच्या गुणाकाराच्या रूपात लिहिणे म्हणजे त्या संख्येचे मूळ अवयव पाडणे होय.

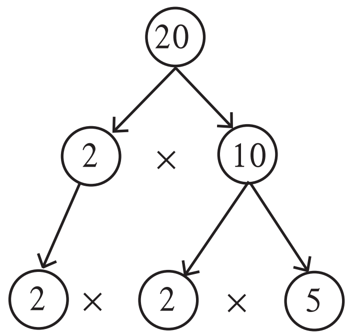
उदा. खाली दिलेल्या संख्या मूळ अवयवांच्या गुणाकार रूपात लिहा.



$63 = 7 \times 3 \times 3$



$45 = 5 \times 3 \times 3$



$20 = 2 \times 2 \times 5$

उदा. 117 चे मूळ अवयव पाडा.

3	117
3	39
13	13
	1

$117 = 13 \times 9$

$= 13 \times 3 \times 3$

$117 = 3 \times 3 \times 13$

उदा. 250 चे मूळ अवयव पाडा.

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$250 = 2 \times 125$

$= 2 \times 5 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

उदा. 40 चे मूळ अवयव पाडा.

उभी मांडणी

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

आडवी मांडणी

$$40 = 10 \times 4 = 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$40 = 8 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

सरावसंच 11

⊙ खालील संख्यांचे मूळ अवयव पाडा.

(i) 32 (ii) 57 (iii) 23 (iv) 150 (v) 216

(vi) 208 (vii) 765 (viii) 342 (ix) 377 (x) 559

जरा आठवूया.

महत्तम सामाईक विभाजक (मसावि)

[Greatest Common Divisor, (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

आपण धन पूर्णांक संख्यांचे मसावि आणि लसावि अभ्यासले आहेत. आता त्यांचा आणखी थोडा अभ्यास करू. दिलेल्या संख्यांचा मसावि म्हणजे त्या संख्यांचा सर्वांत मोठा सामाईक विभाजक असतो.

- खालील प्रत्येक उदाहरणात संख्यांचे सर्व विभाजक लिहा व मसावि काढा.

(i) 28, 42 (ii) 51, 27 (iii) 25, 15, 35

जाणून घेऊया.

मूळ अवयव पद्धती : मूळ अवयव पाडून संख्यांचा मसावि काढणे सोपे जाते.

उदा. मूळ अवयव पद्धतीने 24 व 32 यांचा मसावि काढा.

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$$24 = 4 \times 6 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3$$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$32 = 8 \times 4 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2$$

प्रत्येक संख्येमध्ये 2 हा सामाईक अवयव 3 वेळा येतो म्हणून मसावि $= 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदा. 195, 312 व 546 यांचा मसावि काढा.

$195 = 5 \times 39$
$= 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 39$
$= 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 2 \times 273$
$= 2 \times 3 \times 91$
$= 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

प्रत्येक संख्येमध्ये 3 व 13 हे सामाईक अवयव एकेकदा आले आहेत.

$\therefore$ मसावि $= 3 \times 13 = 39$

उदा. 10, 15 व 12 यांचा मसावि काढा.

$10 = 2 \times 5$ $\quad$ $15 = 3 \times 5$ $\quad$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

या संख्यांमध्ये कोणतीही मूळ संख्या सामाईक विभाजक नाही. 1 हा एकच सामाईक विभाजक आहे.

म्हणून मसावि $= 1$

उदा. 60, 12 व 36 यांचा मसावि काढा.

$60 = 4 \times 15$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$12 = 2 \times 6$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$

$36 = 3 \times 12$
$= 3 \times 3 \times 4$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

हे उदाहरण उभ्या मांडणीने करू. एकाच वेळी सर्व संख्या लिहून मूळ अवयव काढू.

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

$\therefore$ मसावि $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

लक्षात घ्या, की 12 हा 36 व 60 चा विभाजक आहे.

हे मला समजले.

- दिलेल्या संख्यांपैकी एक संख्या इतर संख्यांची विभाजक असेल तर ती संख्या त्या दिलेल्या संख्यांचा मसावि असते.
- दिलेल्या संख्यांसाठी एकही मूळ संख्या सामाईक अवयव नसेल, तर त्या संख्यांचा मसावि 1 असतो कारण 1 हा त्यांचा एकमेव सामाईक विभाजक असतो.

✻ अधिक माहितीसाठी

दोन क्रमागत सम संख्यांचा मसावि 2 असतो आणि दोन क्रमागत विषम संख्यांचा मसावि 1 असतो.
हे नियम विविध उदाहरणे घेऊन पडताळून पाहा.

मसावि काढण्याची भागाकार पद्धत

उदा. 144 आणि 252 चा मसावि काढा.

```
144)252( 1
   -144
   108)144( 1
      -108
       36)108(3
         -108
          000
```

(1) मोठ्या संख्येला लहान संख्येने भागा.

(2) या भागाकारात मिळणाऱ्या बाकीने आधीच्या भाजकाला भागा.

(3) पायरी 2 मध्ये भागाकाराने मिळणाऱ्या बाकीने पायरी 2 मधील भाजकाला भागा व बाकी काढा.

(4) याप्रमाणे बाकी शून्य मिळेपर्यंत क्रिया करा.
ज्या भागाकारात बाकी शून्य मिळाली त्या भागाकारातील भाजक हा आधी दिलेल्या संख्यांचा मसावि आहे.

$\therefore$ 144 व 252 यांचा मसावि = 36

उदा. $\frac{209}{247}$ या संख्येला संक्षिप्त रूप द्या.

संक्षिप्त रूप देण्यासाठी दोन्ही संख्यांचा सामाईक अवयव शोधू. यासाठी 247 व 209 यांचा मसावि भागाकार पद्धतीने काढू.

```
209)247 ( 1
   -209
    38)209 (5
      -190
       19)38(2
         -38
          00
```

येथे 19 हा मसावि आहे म्हणजे अंशस्थानी व छेदस्थानी असणाऱ्या संख्यांना 19 ने भाग जाईल.

$$\therefore \quad \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$$

सरावसंच 12

1. मसावि काढा.

(i) 25, 40 (ii) 56, 32 (iii) 40, 60, 75 (iv) 16, 27

(v) 18, 32, 48 (vi) 105, 154 (vii) 42, 45, 48 (viii) 57, 75, 102

(ix) 56, 57 (x) 777, 315, 588

2. भागाकार पद्धतीने मसावि काढा व संक्षिप्त रूप द्या.

(i) $\frac{275}{525}$ (ii) $\frac{76}{133}$ (iii) $\frac{161}{69}$

जरा आठवूया.

लघुतम सामाईक विभाज्य (लसावि) [Least common multiple (LCM)]

दिलेल्या संख्यांचा लसावि म्हणजे त्यांपैकी प्रत्येक संख्येने विभाज्य अशी लहानांत लहान संख्या असते.

- खाली दिलेल्या संख्यांचे पाढे लिहा व त्यांचे लसावि काढा.

(i) 6, 7 (ii) 8, 12 (iii) 5, 6, 15

जाणून घेऊया.

उदा. 60 व 48 यांचा लसावि काढा.

प्रत्येक संख्येचे मूळ अवयव पाहू.

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\qquad\qquad$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

वरील गुणाकारांत येणारी प्रत्येक मूळ संख्या पाहू.

2 ही संख्या जास्तीत जास्त 4 वेळा आली आहे. (48 च्या अवयवामध्ये)

3 ही संख्या जास्तीत जास्त 1 वेळा आली आहे. (60 च्या अवयवामध्ये)

5 ही संख्या जास्तीत जास्त 1 वेळा आली आहे. (60 च्या अवयवामध्ये)

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 24 = 240$

उदा. 18, 30 व 50 यांचा लसावि काढूया.

$18 = 2 \times 9$ $= 2 \times 3 \times 3$	$30 = 2 \times 15$ $= 2 \times 3 \times 5$	$50 = 2 \times 25$ $= 2 \times 5 \times 5$

वर दिलेल्या गुणाकारात 2, 3 व 5 या मूळ संख्या येतात.

2 ही संख्या जास्तीत जास्त $\square$ वेळा, 3 ही संख्या जास्तीत जास्त $\square$ वेळा व 5 ही संख्या जास्तीत जास्त $\square$ वेळा आली आहे.

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450$ $\qquad$ $\therefore$ 18, 30, 50 यांचा लसावि 450 आहे.

उदा. 16, 28 व 40 यांचा लसावि काढा.

उभी मांडणी

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- विभाज्यतेच्या कसोट्या वापरून सर्व संख्यांना भाग जाणाऱ्या संख्या शोधा व तिने दिलेल्या संख्यांना भागा. भागाकाराने मिळालेल्या संख्यांसाठी हीच क्रिया शक्य तेवढ्या वेळा करा.
- आता मिळालेल्या संख्यांपैकी कमीत कमी दोन संख्यांची विभाजक असलेली संख्या शोधून तिने ज्यांना भाग जातो त्या संख्यांना भागा. ज्या संख्येला भाग जात नाही, ती तशीच ठेवा. हीच क्रिया शक्य तेवढ्या वेळा करा.
- 1 शिवाय इतर कोणताही साधारण अवयव नसल्यास भागाकार थांबवा.
- डाव्या स्तंभातील संख्यांचा गुणाकार करा. त्याला सर्वांत खालच्या आडव्या ओळीतील संख्यांनी गुणा.

$\therefore$ लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$

उदा. 18 व 30 यांचा लसावि व मसावि काढा. त्यांचा गुणाकार व दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार यांची तुलना करा.

2	18	30
3	9	15
	3	5

मसावि $= 2 \times 3 = 6$

लसावि $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

मसावि $\times$ लसावि $= 6 \times 90 = 540$

दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार $= 18 \times 30 = 540$

दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार $=$ मसावि $\times$ लसावि

यावरून असे दिसते की दोन संख्यांचा गुणाकार त्या दोन संख्यांचा मसावि व लसावि यांच्या गुणाकाराएवढा असतो. या विधानाचा पडताळा खालील संख्यांच्या जोड्यांसाठी घ्या.

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

उदा . 15, 45 व 105 यांचा लसावि व मसावि काढा.

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

$15 = \underline{3} \times \underline{5}$

$45 = \underline{3} \times 3 \times \underline{5}$

$105 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7$

मसावि $= 3 \times 5 = 15$

लसावि $= 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

उदा. दोन अंकी दोन संख्यांचा गुणाकार 1280 आहे आणि त्यांचा मसावि 4 आहे, तर त्यांचा लसावि काढा.

मसावि $\times$ लसावि = दिलेल्या संख्यांचा गुणाकार

$4 \times$ लसावि $= 1280$

$\therefore$ लसावि $= \dfrac{1280}{4} = 320$

सरावसंच 13

1. लसावि काढा.

   (i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86
   (vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81
   (x) 18, 36, 27

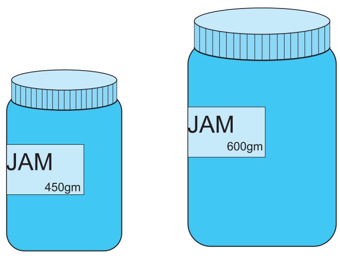
2. खाली दिलेल्या संख्यांचा मसावि आणि लसावि काढा. त्यांचा गुणाकार हा दिलेल्या दोन संख्यांच्या गुणाकाराएवढा असतो याचा पडताळा घ्या.

   (i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

लसावि व मसावि यांचा उपयोग

उदा. दुकानात 450 ग्रॅम जॅमची लहान बाटली 96 रुपयांना आहे व त्याच जॅमची 600 ग्रॅम वजनाची मोठी बाटली 124 रुपयांना आहे, तर कोणती बाटली खरेदी करणे जास्त फायदेशीर आहे ?

उकल : आपण एकमान पद्धत शिकलो आहोत. त्याप्रमाणे प्रत्येक बाटलीतील 1 ग्रॅम जॅमची किंमत काढून तुलना करू शकतो. पण लहान सामाईक अवयव घेण्यापेक्षा मोठा सामाईक अवयव घेतल्यास आकडेमोड सोपी होते.



450 व 600 चा मसावि 150 आहे याचा वापर करू.

$450 = 150 \times 3,$ $\qquad 600 = 150 \times 4$

$\therefore$ लहान बाटलीतील 150 ग्रॅम जॅमची किंमत $\frac{96}{3}$ = 32 रुपये

मोठ्या बाटलीतील 150 ग्रॅम जॅमची किंमत $\frac{124}{4}$ = 31 रुपये

$\therefore$ 600 ग्रॅम जॅमची बाटली खरेदी करणे जास्त फायदेशीर आहे.

उदा. बेरीज करा. $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$

रीत 1 : बेरीज करण्यासाठी अपूर्णांकांचे छेद समान करू.

उकल : $\frac{17}{28}+\frac{11}{35} = \frac{17\times35+11\times28}{28\times35} = \frac{595+308}{28\times35} = \frac{903}{28\times35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

रीत 2: बेरीज करण्यासाठी 28 व 35 यांचा लसावि काढू.

उकल : लसावि = $7 \times 4 \times 5 = 140$

$$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times5}{28\times5} + \frac{11\times4}{35\times4} = \frac{85+44}{140} = \frac{129}{140}$$

छेदांचा गुणाकार करण्याऐवजी लसावि घेतल्यामुळे आपली आकडेमोड किती सोपी झाली बरे !

उदा. एका संख्येला अनुक्रमे 8, 10, 12, 14 या संख्यांनी भागले असता प्रत्येक वेळी बाकी 3 उरते, तर अशी लहानांत लहान संख्या कोणती आहे ?

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

उकल : भाज्य संख्या शोधण्यासाठी दिलेल्या भाजकांचा लसावि काढू.

लसावि = $2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 = 840$

त्या लसाविमध्ये प्रत्येक वेळी मिळणारी बाकी मिळवू.

ती संख्या = लसावि + बाकी = 840 + 3 = 843

उदा. 16,20,80 या संख्यांचा लसावि काढा.

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

उकल : $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$

लसावि = $4 \times 4 \times 5 = 80$

येथे एक गंमत दिसली का ? 80 ही दिलेल्या संख्यांपैकी एक आहे आणि 16 व 20 या दिलेल्या इतर संख्या तिच्या विभाजक आहेत.

लक्षात ठेवा :

दिलेल्या संख्यांपैकी सर्वांत मोठ्या संख्येच्या इतर संख्या विभाजक असतात त्या वेळी ती मोठी संख्या दिलेल्या संख्यांचा लसावि असते.

वरील नियम पडताळण्यासाठी (18,90) (35,140,70) हे संख्यासमूह तपासा.

उदा. श्रेयस, शलाका आणि स्नेहल एका वर्तुळाकार धावपट्टीच्या एका ठिकाणावरून एकाच वेळी पळण्यास सुरुवात करतात व अनुक्रमे 16, 24 व 18 मिनिटांत एक फेरी पूर्ण करतात, तर ते तिघेही कमीत कमी किती वेळानंतर सुरुवातीच्या ठिकाणावर एकाच वेळी येतील ?

उकल: ज्या वेळेनंतर ते एकत्र येतील, ती वेळ 16, 24, व 18 यांच्या पटीत असेल. ती कमीत कमी किती असेल ते शोधण्यासाठी लसावि काढू.

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $\quad$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $\quad$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

लसावि $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

144 मिनिटांनी किंवा 2 तास 24 मिनिटांनी ते एकत्र येतील.

सरावसंच 14

1. योग्य पर्याय निवडा.

   (i) 120 व 150 यांचा मसावि .... आहे.

   (1) 30 (2) 45 (3) 20 (4) 120

   (ii) खालीलपैकी .... या संख्यांचा मसावि 1 नाही.

   (1) 13, 17 (2) 29, 20 (3) 40, 20 (4) 14, 15

2. मसावि व लसावि काढा.

   (i) 14, 28 (ii) 32, 16 (iii) 17, 102, 170 (iv) 23, 69 (v) 21, 49, 84

3. लसावि काढा.

   (i) 36, 42 (ii) 15, 25, 30 (iii) 18, 42, 48 (iv) 4, 12, 20 (v) 24, 40, 80, 120

4. एका संख्येला 8, 9, 10, 15, 20 या संख्यांनी भागले असता प्रत्येक वेळी 5 बाकी उरते, तर अशी लहानांत लहान संख्या लिहा.

5. $\frac{348}{319}$, $\frac{221}{247}$, $\frac{437}{551}$ या अपूर्णांकांना संक्षिप्त रूप द्या.

6. दोन संख्यांचा लसावि व मसावि अनुक्रमे 432 व 72 आहे. दोन संख्यांपैकी एक संख्या 216 असेल तर दुसरी संख्या काढा.

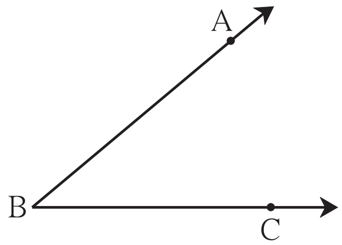
7. दोन अंकी दोन संख्यांचा गुणाकार 765 आहे आणि त्यांचा मसावि 3 आहे, तर त्यांचा लसावि काढा.

8. एका विक्रेत्याजवळ 392 मीटर, 308 मीटर, 490 मीटर लांबीच्या प्लॅस्टिकच्या दोऱ्यांची तीन गुंडाळी आहेत. दोरी उरणार नाही अशाप्रकारे त्या तीनही गुंडाळ्यांतील दोरीचे सारख्या लांबीचे तुकडे पाडले, तर प्रत्येक तुकडा जास्तीत जास्त किती लांबीचा झाला असेल ?

9*. दोन क्रमागत सम संख्यांचा लसावि 180 आहे, तर त्या संख्या कोणत्या ?

4 कोन व कोनांच्या जोड्या

जरा आठवूया.

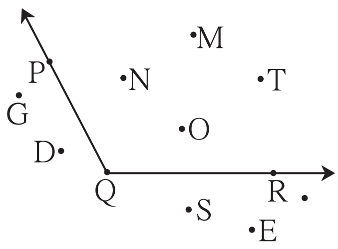


- शेजारील कोनाचे नाव लिहा. ....
- कोनाच्या शिरोबिंदूचे नाव लिहा. ....
- कोनाच्या भुजांची नावे लिहा. ....
- भुजांवर दाखवलेल्या बिंदूंची नावे लिहा. ....

जाणून घेऊया.

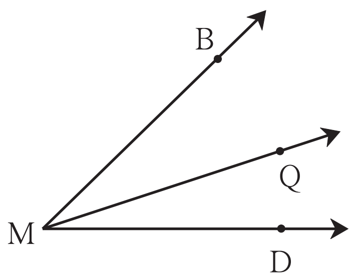
कोनाचा अंतर्भाग व बाह्यभाग

शेजारील आकृतीमध्ये प्रतलातील कोनाच्या भुजांवरील बिंदूंव्यतिरिक्त असलेले बिंदू N, बिंदू M, बिंदू T यांसारख्या बिंदूंचा समूह म्हणजे $\angle PQR$ चा **अंतर्भाग** होय. (Interior of an angle)



प्रतलातील जे बिंदू कोनाच्या भुजांवर नाहीत व कोनाच्या अंतर्भागात नाहीत अशा बिंदू G, बिंदू D, बिंदू E यांसारख्या बिंदूंचा समूह म्हणजे $\angle PQR$ चा **बाह्यभाग** होय. (Exterior of an angle)

संलग्न कोन (लगतचे कोन) (Adjacent angles)



शेजारच्या आकृतीतील कोन पाहा. $\angle BMQ$ व $\angle QMD$ या कोनांची किरण MQ ही एक भुजा सामाईक आहे आणि M हा शिरोबिंदू सामाईक आहे. या कोनांच्या अंतर्भागात एकही बिंदू सामाईक नाही. ते एकमेकांचे शेजारी आहेत. अशा कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

संलग्न कोनांची एक भुजा सामाईक असून उरलेल्या दोन भुजा सामाईक भुजेच्या विरुद्ध बाजूंना असतात आणि त्यांचा शिरोबिंदू सामाईक असतो. संलग्न कोनांचे अंतर्भाग विभिन्न असतात.

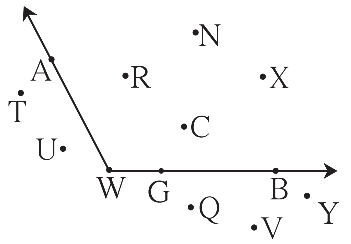
वरील आकृतीत $\angle BMD$ व $\angle BMQ$ या कोनांचीही MB ही भुजा सामाईक आहे. पण ते संलग्न कोन नाहीत, कारण त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न नाहीत.

हे मला समजले.

- ज्या दोन कोनांचा शिरोबिंदू सामाईक असतो, एक भुजा सामाईक असते व त्यांचे अंतर्भाग विभिन्न असतात, त्या कोनांना संलग्न कोन म्हणतात.

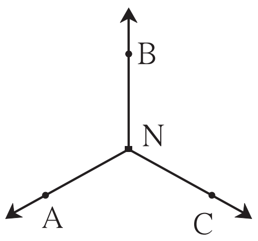
सरावसंच 15

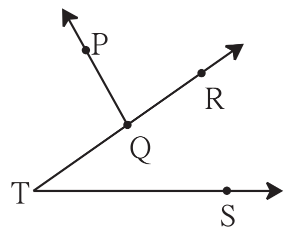
1. आकृतीचे निरीक्षण करा व $\angle AWB$ साठी पुढील सारणी पूर्ण करा.



अंतर्भागातील बिंदूंची नावे	
बाह्यभागातील बिंदूंची नावे	
कोनाच्या भुजांवरील बिंदूंची नावे	

2. खालील आकृत्यांमधील संलग्न कोनांच्या जोड्या लिहा.

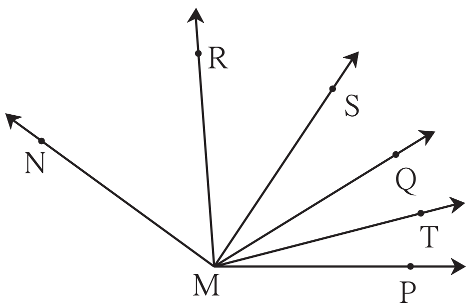




3. कोनांच्या खालील जोड्या संलग्न आहेत का ?
संलग्न नसल्यास कारण लिहा.

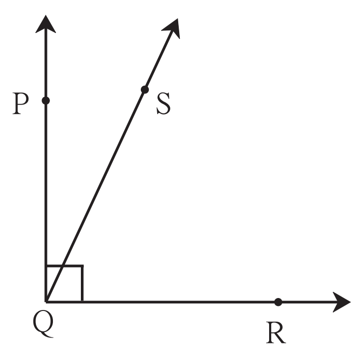
(i) $\angle PMQ$ व $\angle RMQ$ (ii) $\angle RMQ$ व $\angle SMR$

(iii) $\angle RMS$ व $\angle RMT$ (iv) $\angle SMT$ व $\angle RMS$



जाणून घेऊया.

कोटिकोन (Complementary angles)

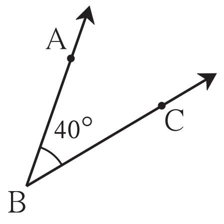


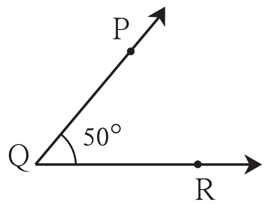
- $\angle PQR$ हा एक काटकोन काढा.
- त्याच्या अंतर्भागात S हा कोणताही बिंदू घ्या.
- किरण QS काढा.
- $\angle PQS$ व $\angle SQR$ यांच्या मापांची बेरीज करा.
- बेरीज किती येईल ?

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 90° असते ते कोन परस्परांचे कोटिकोन आहेत, असे म्हणतात.

येथे $\angle PQS$ व $\angle SQR$ हे परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

उदा. आकृतीतील कोनांचे निरीक्षण करा व चौकटींत योग्य ती संख्या लिहा.





$m\angle ABC = \boxed{}^\circ$

$m\angle PQR = \boxed{}^\circ$

$m\angle ABC + m\angle PQR = \boxed{}^\circ$

$\angle ABC$ व $\angle PQR$ यांच्या मापांची बेरीज 90° म्हणून ते परस्परांचे कोटिकोन आहेत.

उदा. 70° मापाच्या कोनाच्या कोटिकोनाचे माप किती ?

उकल : दिलेल्या कोनाच्या कोटिकोनाचे माप x मानू.

$70 + x = 90$

$\therefore\ 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20^\circ$

70° मापाच्या कोटिकोनाचे माप 20° आहे.

उदा. $(a + 15)^\circ$ व $(2a)^\circ$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

उकल : $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

$\therefore\ a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$

आणि $2a = 2 \times 25 = 50^\circ$

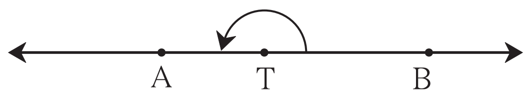
सरावसंच 16

1. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांच्या कोटिकोनांची मापे लिहा.

   (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°

2. $(y - 20)^\circ$ आणि $(y + 30)^\circ$ हे एकमेकांचे कोटिकोन आहेत, तर प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

जरा आठवूया.

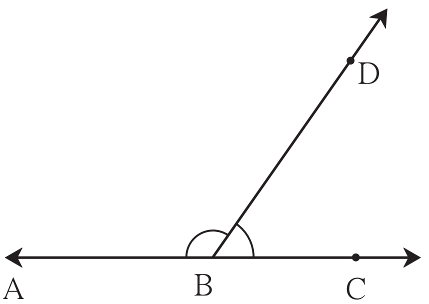


रेषा AB वर T हा एक बिंदू आहे.

- $\angle ATB$ या कोनाचा प्रकार कोणता ?
- त्याचे माप किती ?

जाणून घेऊया.

पूरक कोन (Supplementary angles)

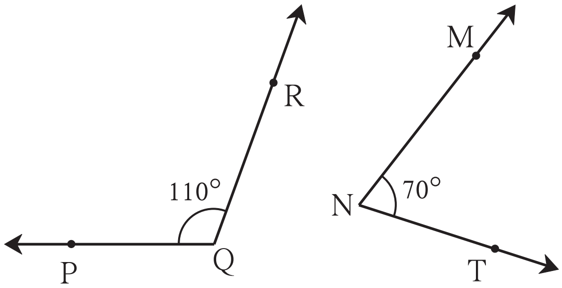


- शेजारील आकृतीत AC ही एक रेषा दिली आहे. रेषेवरील B बिंदूपासून BD हा किरण काढला आहे. येथे किती कोन आहेत ?
- $m\angle ABD = \boxed{}^\circ$, $m\angle DBC = \boxed{}^\circ$
- $m\angle ABD + m\angle DBC = \boxed{}^\circ$

ज्या दोन कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते, त्या दोन कोनांना परस्परांचे पूरक कोन असे म्हणतात.

येथे $\angle ABD$ व $\angle DBC$ हे परस्परांचे पूरक कोन आहेत.

उदा. खालील आकृतीतील कोनांचे निरीक्षण करा व चौकटींत योग्य ती संख्या लिहा.



- $m\angle PQR$ = $\boxed{}$ ° $m\angle MNT$ = $\boxed{}$ °
- $m\angle PQR + m\angle MNT$ = $\boxed{}$ °

$\angle PQR$ व $\angle MNT$ हे परस्परांचे पूरक कोन आहेत.

उदा. 135° मापाच्या पूरक कोनाचे माप काढा.

उकल : पूरक कोनाचे माप p° मानू.

पूरक कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

$135 + p = 180$

$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$

$\therefore \quad p = 45$

$\therefore$ 135° मापाच्या पूरक कोनाचे माप 45° आहे.

उदा. $(a + 30)^\circ$ व $(2a)^\circ$ हे एकमेकांचे पूरक कोन आहेत तर प्रत्येक कोनाचे माप किती ?

उकल : $a + 30 + 2a = 180$

$\therefore 3a = 180 - 30$

$\therefore 3a = 150$

$\therefore a = 50$

$\therefore \ a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$

$\therefore \ 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$

$\therefore$ त्या कोनाची मापे 80° व 100° आहेत.

सरावसंच 17

1. खाली दिलेल्या कोनांच्या पूरक कोनांची मापे लिहा.
   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°
2. खाली काही कोनांची मापे दिली आहेत. त्यांतून जोड्या जुळवून पूरक कोनांच्या आणि कोटिकोनांच्या जोड्या तयार करा.

   $m\angle B = 60^\circ$ $m\angle N = 30^\circ$ $m\angle Y = 90^\circ$ $m\angle J = 150^\circ$

   $m\angle D = 75^\circ$ $m\angle E = 0^\circ$ $m\angle F = 15^\circ$ $m\angle G = 120^\circ$

3. ΔXYZ मध्ये $m\angle Y = 90^\circ$, $\angle X$ व $\angle Z$ या कोनांमधील परस्पर संबंध लिहा.
4. कोटिकोनांच्या जोडीतील कोनांच्या मापांतील फरक 40° असेल तर त्या कोनांची मापे काढा.
5. □PTNM हा आयत आहे. या आकृतीतील पूरक कोनांच्या जोड्या लिहा.

6*. जर $m\angle A = 70^\circ$ तर $\angle A$ च्या कोटिकोनाच्या पूरक कोनाचे माप किती ?

7. $\angle A$ व $\angle B$ परस्परांचे पूरक कोन आहेत आणि $m\angle B = (x + 20)^\circ$, तर $m\angle A$ किती ?

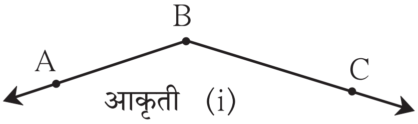
चला, चर्चा करूया.

खालील विधानांची चर्चा करा. विधान बरोबर असल्यास त्याचे उदाहरण द्या. विधान चूक असल्यास कारण सांगा.

- दोन लघुकोन परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- दोन काटकोन परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- एक लघुकोन व एक विशालकोन हे परस्परांचे कोटिकोन असू शकतात.
- दोन लघुकोन परस्परांचे पूरक कोन असू शकतात.
- दोन काटकोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.
- एक लघुकोन व एक विशालकोन परस्परांचे पूरक कोन असू शकतात.

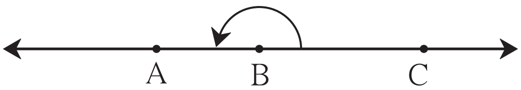
जाणून घेऊया.

विरुद्ध किरण (Opposite rays)



आकृती (i)

शेजारील आकृतीतील किरणांची नावे सांगा.
किरणांच्या आरंभबिंदूचे नाव सांगा.
आकृती (i) मधील कोनाचे नाव लिहा.



आकृती (ii)

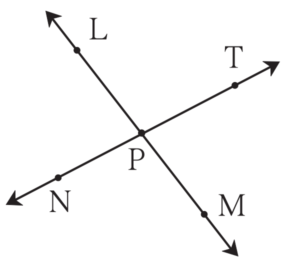
शेजारील आकृती (ii) मधील कोनाचे नाव लिहा.
आकृतीतील B हा आरंभबिंदू असलेल्या किरणांची नावे लिहा.

आकृती (i) मध्ये किरण BC व किरण BA मिळून एक विशालकोन होतो तर आकृती (ii) मध्ये किरण BC व किरण BA मिळून सरळकोन होतो व एक सरळ रेषा मिळते. येथे किरण BC व किरण BA हे एकमेकांचे विरुद्ध किरण आहेत.

हे मला समजले.

- ज्या दोन किरणांचा आरंभबिंदू सामाईक असतो व त्या किरणांनी एक रेषा तयार होते, त्या किरणांना परस्परांचे विरुद्ध किरण म्हणतात.

सरावसंच 18

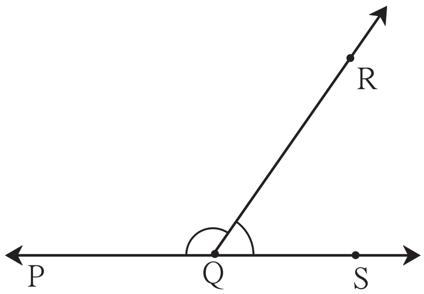


1. शेजारील आकृतीतील विरुद्ध किरणांची नावे लिहा.

2. किरण PM व किरण PT हे विरुद्ध किरण आहेत का ? सकारण लिहा.

जाणून घेऊया.

रेषीय जोडीतील कोन (Angles in linear pair)



- शेजारील आकृतीतील कोनांची नावे लिहा.
- कोनांची जोडी कोणत्या प्रकारची आहे ?
- कोनांच्या असामाईक भुजा कोणत्या आहेत ?
- $m\angle PQR = \boxed{}^\circ$
- $m\angle RQS = \boxed{}^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle RQS = 180^\circ$

आकृतीतील $\angle PQR$ व $\angle RQS$ हे संलग्न कोन आहेत तसेच ते पूरक कोन आहेत. त्यांच्या असामाईक भुजा हे परस्परांचे विरुद्ध किरण आहेत, म्हणजेच त्या भुजांनी एक रेषा तयार होते. हे दोन कोन रेषीय जोडीत आहेत असे म्हणतात. **रेषीय जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.**

हे मला समजले.

- ज्या दोन कोनांची एक भुजा सामाईक असते व असामाईक भुजांनी सरळ रेषा तयार होते, त्यांना रेषीय जोडीतील कोन म्हणतात. रेषीय जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक कोन असतात.

उपक्रम : स्ट्रॉ किंवा सरळ काड्या घेऊन अभ्यासलेल्या कोनांच्या जोड्या तयार करा.

सरावसंच 19

खाली दिलेल्या वर्णनाप्रमाणे कोनांच्या जोड्या काढा. काढता येत नसल्यास कारण लिहा.

(i) संलग्न नसलेले कोटिकोन

(ii) पूरक नसलेले रेषीय जोडीतील कोन

(iii) रेषीय जोडीत नसलेले पूरक कोन

(iv) रेषीय जोडीत नसलेले संलग्न कोन

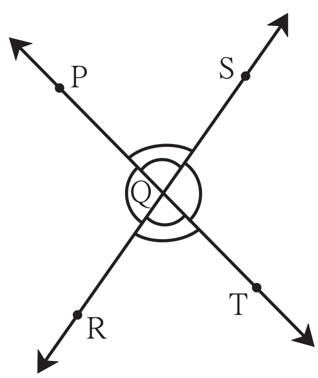
(v) जे कोटिकोनही नाहीत व संलग्न कोनही नाहीत

(vi) कोटिकोन असलेले रेषीय जोडीतील कोन

जाणून घेऊया.

विरुद्ध कोन (Vertically opposite angles)

शेजारील आकृतीत रेषा PT व रेषा RS या परस्परांना Q बिंदूत छेदतात. चार कोन तयार झाले आहेत. $\angle PQR$ हा किरण QP व किरण QR यांनी तयार झाला आहे. QP व QR या किरणांचे विरुद्ध किरण अनुक्रमे QT व QS आहेत. त्या विरुद्ध किरणांनी तयार झालेला कोन $\angle SQT$ आहे म्हणून $\angle SQT$ हा $\angle PQR$ चा विरुद्ध कोन आहे असे म्हणतात.



हे मला समजले.

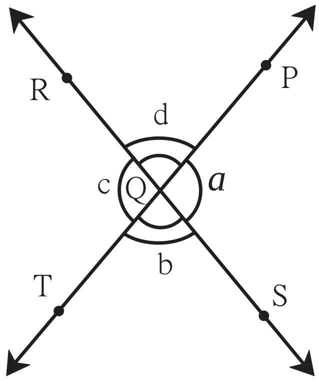
- ज्या दोन किरणांनी कोन तयार झाला, त्याच्या विरुद्ध किरणांनी तयार झालेला कोन पहिल्या कोनाचा विरुद्ध कोन असतो.

जाणून घेऊया.

विरुद्ध कोनांचा गुणधर्म

- दिलेल्या आकृतीतील $\angle PQS$ चा विरुद्ध कोन कोणता ?

आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = \mathrm{b}$, $m\angle TQR = \mathrm{c}$, $m\angle PQR = \mathrm{d}$ असे मानू.



$\angle PQS$ व $\angle SQT$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore a + \mathrm{b} = 180^\circ$

तसेच $m\angle SQT$ व $m\angle TQR$ हे रेषीय जोडीतील कोन आहेत.

$\therefore \mathrm{b} + \mathrm{c} = 180^\circ$

$\therefore a + \mathrm{b} = \mathrm{b} + \mathrm{c}$

$\therefore a = \mathrm{c}$ . . . . (दोन्ही बाजूंमधून b वजा करून)

$\therefore \angle PQS$ व $\angle TQR$ यांची मापे समान आहेत म्हणजेच ते कोन एकरूप आहेत.

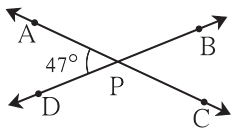
त्याचप्रमाणे $m\angle PQR = m\angle SQT$ म्हणजेच $\angle PQR$ व $\angle SQT$ एकरूप आहेत.

हे मला समजले.

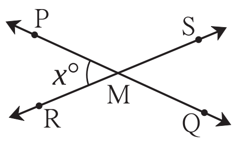
- दोन रेषांनी एकमेकींना छेदले असता होणाऱ्या परस्पर विरुद्ध कोनांची मापे समान असतात.

सरावसंच 20

1. रेषा AC व रेषा BD परस्परांना P या बिंदूत छेदतात. $m\angle APD = 47^\circ$ $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ यांची मापे लिहा.

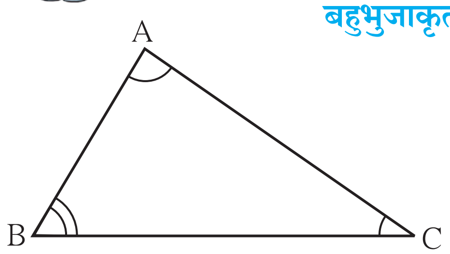


2. रेषा PQ व रेषा RS परस्परांना M बिंदूत छेदतात. $m\angle PMR = x^\circ$ $\angle PMS$, $\angle SMQ$ व $\angle QMR$ यांची मापे लिहा.



जाणून घेऊया.

बहुभुजाकृतीचे आंतरकोन (Interior angles of a polygon)

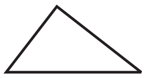
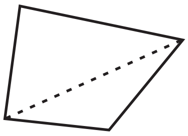
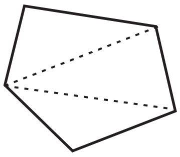
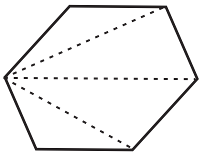
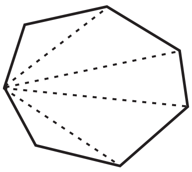


त्रिकोणाचे आंतरकोन

ΔABC चे $\angle A$, $\angle B$ व $\angle C$ हे आंतरकोन आहेत.

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \boxed{}^\circ$

खालील सारणीचे निरीक्षण करा व निष्कर्ष काढा.

बाजूंची संख्या	बहुभुजाकृतीचे नाव	बहुभुजाकृती	त्रिकोणांची संख्या	आंतरकोनांची बेरीज
3	त्रिकोण		1	$180^\circ \times 1 = \square$
4	चौकोन		2	$180^\circ \times 2 = \square$
5	पंचकोन		3	$180^\circ \times 3 = \square$
6	षट्कोन		4	$180^\circ \times \square = \square$
7	सप्तकोन		5	
8	अष्टकोन		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n बाजू असलेली आकृती		(n - 2)	$180^\circ \times (n - 2)$

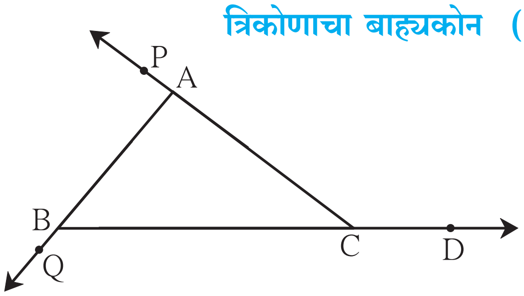
लक्षात घ्या की, बहुभुजाकृतीत वरीलप्रमाणे तयार झालेल्या त्रिकोणांची संख्या ही त्या बहुभुजाकृतीच्या बाजूंच्या संख्येपेक्षा दोनने कमी असते.

हे मला समजले.

- n बाजू असलेल्या बहुभुजाकृतीच्या आंतरकोनांच्या मापांची बेरीज = $180^\circ \times (n - 2)$

जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचा बाह्यकोन (Exterior angle of a triangle)



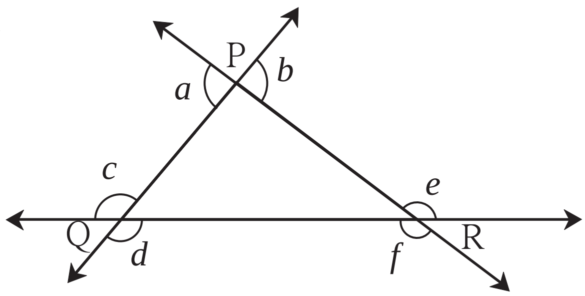
ΔABC ची बाजू BC आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे वाढवली, तर $\angle ACD$ हा नवा कोन त्रिकोणाबाहेर तयार होतो.

$\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle ACD$ व $\angle ACB$ ही रेषीय जोडीतील कोनांची जोडी आहे. $\angle PAB$ व $\angle QBC$ हेही ΔABC चे बाह्यकोन आहेत.

हे मला समजले.

- त्रिकोणाची एक बाजू वाढवल्यावर जो कोन त्रिकोणाच्या लगतच्या आंतरकोनाशी रेषीय जोडी करतो, त्या कोनाला त्रिकोणाचा बाह्यकोन म्हणतात.

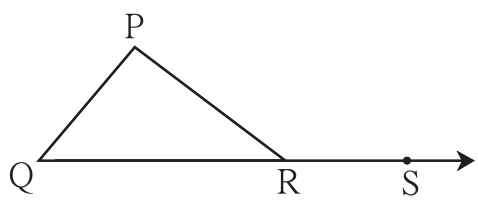
उदा. शेजारील आकृतीमध्ये त्रिकोणाचे बाह्यकोन दाखवले आहेत. a, b, c, d, e, f हे ΔPQR चे बाह्यकोन आहेत. प्रत्येक त्रिकोणाला याप्रमाणे सहा बाह्यकोन असतात.



जाणून घेऊया.

बाह्यकोनाचा गुणधर्म

शेजारील आकृतीत $\angle PRS$ हा ΔPQR चा एक बाह्यकोन आहे. $\angle PRQ$ हा त्याचा लगतचा आंतरकोन आहे. इतर दोन आंतरकोन म्हणजे $\angle P$ व $\angle Q$ हे $\angle PRS$ पासून लांब म्हणजेच दूर आहेत. $\angle P$ व $\angle Q$ यांना $\angle PRS$ चे दूरस्थ आंतरकोन म्हणतात.



$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \boxed{}^\circ$ ....(त्रिकोणाच्या तिन्ही कोनांची बेरीज)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \boxed{}^\circ$ ....(रेषीय जोडीतील कोन)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

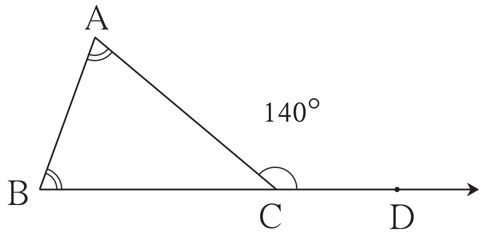
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ ($m\angle PRQ$ दोन्ही बाजूंतून वजा करून)

हे मला समजले.

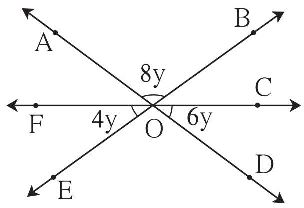
- त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाचे माप हे त्या कोनाच्या दूरस्थ आंतरकोनांच्या मापांच्या बेरजेएवढे असते.

सरावसंच 21

1. $\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. जर $m\angle ACD = 140°$ तर $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे काढा.



2. शेजारील आकृतीतील कोनांची मापे पाहून त्यावरून उरलेल्या तीनही कोनांची मापे लिहा.



3*. ΔABC या समद्विभुज त्रिकोणात $\angle A$ व $\angle B$ यांची मापे समान आहेत. $\angle ACD$ हा ΔABC चा बाह्यकोन आहे. $\angle ACB$ व $\angle ACD$ ची मापे अनुक्रमे $(3x - 17)°$ व $(8x + 10)°$ आहेत, तर $\angle ACB$ व $\angle ACD$ यांची मापे काढा. तसेच $\angle A$ व $\angle B$ यांचीही मापे काढा.

ICT Tools or Links

- Geogebra च्या साहाय्याने एकच आरंभबिंदू असणारे दोन किरण काढा. Move Option चा उपयोग करून किरणाचे भ्रमण करा. एका विशिष्ट स्थितीत ते विरुद्ध किरण तयार होतात याचा पडताळा घ्या.
- रेषीय जोडीचे कोन तयार करा. सामाईक भुजा move करून वेगवेगळ्या रेषीय जोडीतील कोनांच्या जोड्या अनुभवा.
- Geogebra मधील Polygon Tools चा उपयोग करून विविध बहुभुजाकृती काढा व त्यांच्या आंतरकोनांच्या मापांच्या गुणधर्माचा पडताळा घ्या.

❑❑❑

5 परिमेय संख्या व त्यांवरील क्रिया

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्या (Rational numbers)

मागील इयत्तांमध्ये आपण 1, 2, 3, 4, ... या मोजसंख्या म्हणजेच नैसर्गिक संख्या अभ्यासल्या आहेत. नैसर्गिक संख्या, शून्य आणि नैसर्गिक संख्यांच्या विरुद्ध संख्या मिळून तयार झालेला पूर्णांक संख्या समूह आपल्याला माहीत आहे. तसेच $\frac{7}{11}, \frac{2}{5}, \frac{1}{7}$ असे अपूर्णांकही आपल्याला परिचित आहेत. पूर्णांक संख्या व अपूर्णांक संख्या अशा सर्व संख्यांना सामावणारा एखादा संख्या समूह आहे का ? याचा विचार करू.

$4 = \frac{12}{3}$, $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{2}$ याप्रमाणे सर्व पूर्णांक संख्या आपल्याला $\frac{m}{n}$ या रूपात लिहिता येतात हे आपल्याला माहीत आहे. जर m हा कोणताही पूर्णांक आणि n हा कोणताही शून्येतर पूर्णांक असेल तर $\frac{m}{n}$ या संख्येला परिमेय संख्या म्हणतात. अशा परिमेय संख्यांचा समूह वरील सर्व प्रकारच्या संख्यांना सामावून घेतो.

परिमेय संख्या $\frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{-17}{28}$, 2.17 इ.

पूर्णांक संख्या − 3, − 8, − 1 इ.

पूर्ण संख्या 0

नैसर्गिक संख्या

1, 2, 3, ...

खालील सारणी पूर्ण करा.

	-3	$\frac{3}{5}$	-17	$-\frac{5}{11}$	5
नैसर्गिक संख्या	×				✓
पूर्णांक संख्या	✓				
परिमेय संख्या	✓				

परिमेय संख्यांवरील क्रिया

परिमेय संख्या या अंश व छेद वापरून व्यवहारी अपूर्णांकाच्या रूपांत लिहिल्या जातात म्हणून परिमेय संख्यांवरील क्रिया या अपूर्णांकांवरील क्रियांप्रमाणे करतात.

(1) $\frac{5}{7} + \frac{9}{11} = \frac{55+63}{77} = \frac{118}{77}$

(2) $\frac{1}{7} - \frac{3}{4} = \frac{4-21}{28} = \frac{-17}{28}$

(3) $2\frac{1}{7} + 3\frac{8}{14} = \frac{15}{7} + \frac{50}{14}$

$= \frac{30}{14} + \frac{50}{14}$

$= \frac{80}{14} = \frac{40}{7}$

(4) $\frac{9}{13} \times \frac{4}{7} = \frac{9\times 4}{13\times 7} = \frac{36}{91}$

(5) $\frac{3}{5} \times \frac{(-4)}{5} = \frac{3\times(\ 4)}{5\times 5} = \frac{-12}{25}$

(6) $\frac{9}{13} \times \frac{26}{3} = \frac{3\times 2}{1} = \frac{6}{1}$

जरा आठवूया.

एखाद्या संख्येला दुसऱ्या संख्येने भागणे म्हणजे या संख्येला दुसऱ्या संख्येच्या गुणाकार व्यस्ताने गुणणे.

आपण पाहिले आहे की, $\frac{5}{6}$ व $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{11}$ व $\frac{11}{2}$ या गुणाकार व्यस्त संख्यांच्या जोड्या आहेत.

तसेच, $\left(\frac{5}{4}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right) = 1$; $\left(\frac{7}{2}\right) \times \left(\frac{2}{7}\right) = 1$ यावरून $\left(\frac{5}{4}\right)$ व $\left(\frac{4}{5}\right)$ आणि $\left(\frac{7}{2}\right)$ व $\left(\frac{2}{7}\right)$ या गुणाकार व्यस्त संख्यांच्या जोड्या आहेत. म्हणजेच $\frac{-5}{4}$ व $\frac{-4}{5}$ हे एकमेकांचे गुणाकार व्यस्त आहेत आणि $\frac{-7}{2}$ व $\frac{-2}{7}$ हेही परस्परांचे गुणाकार व्यस्त आहेत.

सांभाळा बरे!

उदा. $\frac{-11}{9}$ व $\frac{9}{11}$ यांचा गुणाकार -1 आहे म्हणून $\frac{-11}{9}$, $\frac{9}{11}$ ही गुणाकार व्यस्तांची जोडी **नाही**.

चला, चर्चा करूया.

आपण विविध संख्या समूहांची विशेषता पाहू. त्यासाठी गटात चर्चा करत पुढील सारणी पूर्ण करा. नैसर्गिक संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह आणि परिमेय संख्या समूह विचारात घेऊ. या प्रत्येक संख्या समूहासमोर बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या क्रिया केल्यामुळे मिळणारे निष्कर्ष (✓) किंवा (×) या खुणेने दाखवा. शून्याने भागाकार करता येत नाही हे ध्यानात घ्या.

- नैसर्गिक संख्यांची बेरीज केली तर उत्तर नेहमी नैसर्गिक संख्याच मिळते, म्हणून नैसर्गिक संख्या समूहाच्या पुढे बेरीज या चौकटीखाली (✓) अशी खूण करा.
- दोन नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी केली तर उत्तर नेहमी नैसर्गिक संख्या येते असे नाही.
  कारण $7 - 10 = -3$ अशी असंख्य उदाहरणे आहेत, म्हणून वजाबाकीच्या चौकटीखाली (×) अशी खूण करा. सारणीत (×) ही खूण आल्यास त्याचे कारण स्पष्ट करा. सोदाहरण (×) चे कारण देताना, असंख्य उदाहरणांपैकी एक पुरेसे आहे.

संख्या समूह	बेरीज	वजाबाकी	गुणाकार	भागाकार
नैसर्गिक संख्या	✓	× ($7 - 10 = -3$)	✓	× ($3 \div 5 = \frac{3}{5}$)
पूर्णांक संख्या				
परिमेय संख्या				

हे मला समजले.

- नैसर्गिक संख्या समूह हा बेरीज व गुणाकार या क्रियांसाठी पुरेसा आहे, पण वजाबाकी व भागाकार या क्रियांसाठी पुरेसा नाही, म्हणजेच दोन नैसर्गिक संख्यांची वजाबाकी व भागाकार नैसर्गिक संख्या असेलच असे नाही.
- पूर्णांक संख्या समूह बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार या क्रियांसाठी पुरेसा आहे, पण भागाकार या क्रियेसाठी पुरेसा नाही.
- परिमेय संख्या समूह हा बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या सर्व क्रियांसाठी पुरेसा आहे. मात्र शून्याने भागता येत नाही.

सरावसंच 22

1. खालील परिमेय संख्यांची बेरीज करा.

(i) $\frac{5}{36} + \frac{6}{42}$ (ii) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{11}{17} + \frac{13}{19}$ (iv) $2\frac{3}{11} + 1\frac{3}{77}$

2. खालील परिमेय संख्यांची वजाबाकी करा.

(i) $\frac{7}{11} - \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{13}{36} - \frac{2}{40}$ (iii) $1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6}$ (iv) $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$

3. खालील परिमेय संख्यांचा गुणाकार करा.

(i) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{12}{5} \times \frac{4}{15}$ (iii) $\frac{(\ \ 8)}{9} \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{0}{6} \times \frac{3}{4}$

4. गुणाकार व्यस्त संख्या लिहा.

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ (iii) $\frac{-17}{39}$ (iv) 7 (v) $-7\frac{1}{3}$

5. खालील परिमेय संख्यांचा भागाकार करा.

(i) $\frac{40}{12} \div \frac{10}{4}$ (ii) $\frac{-10}{11} \div \frac{-11}{10}$ (iii) $\frac{-7}{8} \div \frac{-3}{6}$ (iv) $\frac{2}{3} \div (-4)$

(v) $2\frac{1}{5} \div 5\frac{3}{6}$ (vi) $\frac{-5}{13} \div \frac{7}{26}$ (vii) $\frac{9}{11} \div (\ \ 8)$ (viii) $5 \div \frac{2}{5}$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांच्या दरम्यानच्या संख्या

- 2 ते 9 या नैसर्गिक संख्यांच्या दरम्यान किती नैसर्गिक संख्या आहेत ? त्या लिहा.
- – 4 ते 5 यांच्या दरम्यान कोणत्या पूर्णांक संख्या आहेत ? त्या लिहा.
- $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{4}$ यांच्या दरम्यान कोणत्या परिमेय संख्या असतील ?

उदा. $\frac{1}{2}$ व $\frac{4}{7}$ या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानच्या परिमेय संख्या शोधू. त्यासाठी या संख्यांना समच्छेद रूप देऊ.

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times7}{2\times7} = \frac{7}{14}, \qquad \frac{4}{7} = \frac{4\times2}{7\times2} = \frac{8}{14}$$

7 व 8 या लगतच्या नैसर्गिक संख्या आहेत. परंतु $\frac{7}{14}$ व $\frac{8}{14}$ या लगतच्या परिमेय संख्या आहेत का ? कोणत्याही परिमेय संख्येचा छेद मोठा करता येतो. त्याच पटीत त्याचा अंशही मोठा होतो.

$$\frac{7}{14} = \frac{70}{140}, \qquad \frac{8}{14} = \frac{80}{140}$$ . . . (अंशाला व छेदाला 10 ने गुणून)

आता $\frac{70}{140} < \frac{71}{140} \ldots\ldots < \frac{79}{140} < \frac{80}{140}$ येथे $\frac{7}{14}$ व $\frac{8}{14}$ च्या दरम्यान किती संख्या मिळाल्या ?

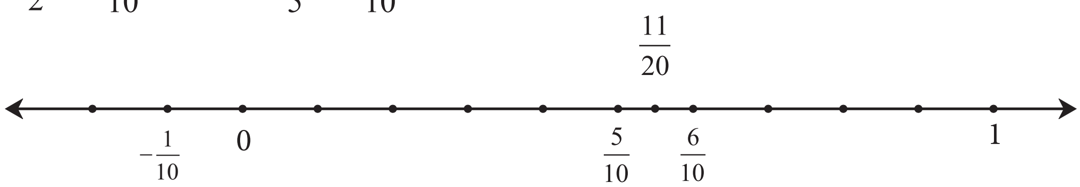
तसेच $\frac{7}{14} = \frac{700}{1400}$, $\frac{8}{14} = \frac{800}{1400}$ . . . (अंशाला व छेदाला 100 ने गुणून)

म्हणून $\frac{700}{1400} < \frac{701}{1400} \ldots\ldots < \frac{799}{1400} < \frac{800}{1400}$

यावरून परिमेय संख्यांचे रूपांतर अधिकाधिक मोठे छेद असणाऱ्या सममूल्य संख्यांमध्ये केले की, त्यांच्या दरम्यानच्या अधिकाधिक परिमेय संख्या व्यक्त करता येतात.

उदा. $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{5}$ या परिमेय संख्यांच्या दरम्यानच्या संख्या शोधणे. $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{5}$ या परिमेय संख्यांना प्रथम समच्छेद रूप देऊ.

जसे $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



संख्यारेषेवर $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$ या संख्या दर्शवणारे बिंदू आहेत. त्यांना जोडणाऱ्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू शोधू व तो बिंदू जी संख्या दाखवतो ती पाहू.

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right) = \frac{11}{20}$ आता हा बिंदू त्या रेषाखंडाचा मध्यबिंदू आहे.

कारण, $\frac{6}{10} - \frac{11}{20} = \frac{12-11}{20} = \frac{1}{20}$ तसेच $\frac{11}{20} - \frac{5}{10} = \frac{11-10}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ $\frac{5}{10}$ व $\frac{6}{10}$ यांच्या दरम्यान बरोबर मध्यावर $\frac{11}{20}$ ही संख्या आहे. म्हणजेच $\frac{1}{2}$ व $\frac{3}{5}$ यांच्या दरम्यान $\frac{11}{20}$ ही संख्या आहे. याच रीतीने $\frac{1}{2}$ व $\frac{11}{20}$ आणि $\frac{11}{20}$ व $\frac{3}{5}$ यांच्या दरम्यानच्या संख्या शोधता येतील.

हे मला समजले.

- दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असंख्य परिमेय संख्या असतात.

सरावसंच 23

⊙ खाली दिलेल्या दोन संख्यांच्या दरम्यानच्या तीन परिमेय संख्या लिहा.

(i) $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{7}{9}$, $-\frac{5}{9}$

(v) $\frac{-3}{4}$, $\frac{+5}{4}$ (vi) $\frac{7}{8}$, $\frac{-5}{3}$ (vii) $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{7}$ (viii) 0, $\frac{-3}{4}$

✸ अधिक माहितीसाठी

जर m ही पूर्णांक संख्या असेल तर $m + 1$ ही लगतची मोठी पूर्णांक संख्या असते. m व $m + 1$ यांच्या दरम्यान एकही पूर्णांक संख्या नसते. क्रमागत नसलेल्या कोणत्याही दोन पूर्णांक संख्यांच्या दरम्यानच्या पूर्णांक संख्या मोजता येतात हे अनुभवा; मात्र कोणत्याही दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असंख्य परिमेय संख्या असतात.

जरा आठवूया.

दशांश अपूर्णांकांचे गुणाकार व भागाकार कसे करायचे हे आपण पाहिले आहे.

$$\frac{35.1}{10} = 35.1 \times \frac{1}{10} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{351}{100} = 3.51$$

$$\frac{35.1}{100} = \frac{35.1}{1} \times \frac{1}{100} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{351}{1000}\right) = 0.351$$

$$35.1 \times 10 = \frac{351}{10} \times 10 = 351.0$$

$$35.1 \times 1000 = \frac{351}{10} \times 1000 = \left(\frac{351000}{10}\right) = 35100.0$$

यावरून लक्षात येते की, दशांश अपूर्णांकाला 100 ने भागणे म्हणजे दशांशचिन्ह 2 घरे डावीकडे नेणे, 1000 ने गुणणे म्हणजे दशांशचिन्ह तीन घरे उजवीकडे नेणे. असे भागाकार व गुणाकार करताना खालील नियम उपयोगी पडतात.

दशांश अपूर्णांकाच्या अपूर्णांकी भागानंतर कितीही शून्ये लिहिली किंवा पूर्णांक भागाच्या आधी कितीही शून्ये लिहिली तरीही दशांश अपूर्णांकांची किंमत बदलत नाही.

$$1.35 = \frac{135}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{13500}{10000} = 1.3500$$

$0.35 = \frac{35}{100} \times \frac{1000}{1000} = \frac{35000}{100000} = 0.35000$ इत्यादी.

$1.35 = 001.35$ याचा उपयोग कसा होतो ते पाहा.

$\frac{1.35}{100} = \frac{001.35}{100} = 0.0135$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांचे दशांशरूप (Decimal representation of rational numbers)

उदा. $\frac{7}{4}$ ही परिमेय संख्या दशांशरूपात लिहा.

$$
\begin{array}{r}
1.75 \\
4\overline{)7.000} \\
-\ 4 \\
\hline
30 \\
-\ 28 \\
\hline
20 \\
-\ 20 \\
\hline
00
\end{array}
$$

(1) 7 = 7.0 = 7.000 (अपूर्णांकी भागानंतर कितीही शून्ये देता येतात.)

(2) 7 ला 4 ने भागल्यावर 1 चा भाग लागला व बाकी 3 उरते. आता 1 या पूर्णांकानंतर दशांशचिन्ह लिहू. बाकी 3 च्या पुढे भाज्यातील 0 लिहून 30 ला 4 ने भागू. आता येणारा भागाकार हा अपूर्णांक भाग आहे म्हणून भागाकारात दशांशचिन्हानंतर 7 लिहू. आता भाज्यातील अजून एक 0 खाली घेऊन भागाकार पूर्ण करू.

या भागाकारात दशांश अपूर्णांकी भागानंतर लिहिलेल्या शून्यांचा उपयोग केला आहे.

उदा. $2\frac{1}{5}$ दशांशरूपात लिहा.

$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ याचे दशांशरूप तीन प्रकारांनी शोधू.

$\frac{1}{5}$ चे दशांशरूप काढू.

(I)

$$
\begin{array}{r}
0.2 \\
5\overline{)1.0} \\
-\ 0 \\
\hline
10 \\
-\ 10 \\
\hline
00
\end{array}
$$

$\frac{1}{5} = 0.2$

$\therefore\ 2\frac{1}{5} = 2.2$

(II)

$$
\begin{array}{r}
2.2 \\
5\overline{)11.000} \\
-\ 10 \\
\hline
010 \\
-\ 10 \\
\hline
00
\end{array}
$$

(III) $\frac{11}{5} = \frac{11 \times 2}{5 \times 2}$

$= \frac{22}{10}$

$= 2.2$

$\frac{11}{5} = 2.2$

उदा. $\frac{-5}{8}$ ही परिमेय संख्या दशांशरूपात लिहा.

$\frac{5}{8}$ चे दशांशरूप भागाकार करून 0.625 मिळते. $\therefore\ \frac{-5}{8} = -\ 0.625$

वरील सर्व उदाहरणांत बाकी शून्य आली आहे. भागाकाराची क्रिया पूर्ण झाली आहे. परिमेय संख्यांच्या अशा दशांशरूपाला खंडित दशांशरूप म्हणतात.

उदा. काही परिमेय संख्यांचे दशांशरूप कसे वेगळे आहे ते पाहू.

(i) $\frac{5}{3}$ ही संख्या दशांशरूपात लिहा.

$$\begin{array}{r} 1.66 \\ 3\overline{)5.00} \\ -3 \\ \hline 2\,0 \\ -1\,8 \\ \hline 20 \\ -18 \\ \hline 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.666.......$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$

(ii) $\frac{2}{11}$ ही संख्या दशांशरूपात लिहा.

$$\begin{array}{r} 0.18 \\ 11\overline{)2.00} \\ -0 \\ \hline 20 \\ -11 \\ \hline 90 \\ -88 \\ \hline 20 \end{array}$$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.1818.......$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.\overline{18}$

(iii) $2\frac{1}{3}$ चे दशांशरूप काढा. $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$\begin{array}{r} 2.33 \\ 3\overline{)7.00} \\ -6 \\ \hline 1\,0 \\ -9 \\ \hline 10 \\ -9 \\ \hline 01 \end{array}$$

$2\frac{1}{3} = 2.33...$

$\therefore 2\frac{1}{3} = 2.\dot{3}$

(iv) $\frac{5}{6}$ चे दशांशरूप काढा.

$$\begin{array}{r} 0.833 \\ 6\overline{)50} \\ -48 \\ \hline 020 \\ -18 \\ \hline 020 \\ -18 \\ \hline 02 \end{array}$$

$\frac{5}{6} = 0.833...$

$\therefore \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

वरील सर्व उदाहरणांत भागाकाराची क्रिया पूर्ण होत नाही. **दशांशचिन्हाच्या उजवीकडे एक अंक अथवा काही अंकांचा समूह पुन्हा पुन्हा येतो, अशा अपूर्णांकाला आवर्ती दशांश अपूर्णांक म्हणतात.**

ज्या दशांश अपूर्णांकात दशांशचिन्हाच्या उजवीकडे एकच अंक पुन्हा पुन्हा येतो, त्यावर टिंब मांडतात जसे, $2\frac{1}{3} = 2.33... = 2.\dot{3}$ तसेच दशांशचिन्हाच्या उजवीकडे जो अंकांचा गट पुन्हा पुन्हा येतो, त्या गटावर आडवी रेघ देतात. जसे, $\frac{2}{11} = 0.1818........ = 0.\overline{18}$ आणि $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

हे मला समजले.

- काही परिमेय संख्यांचे दशांशरूप खंडित, तर काही परिमेय संख्यांचे दशांशरूप आवर्ती असते.

चला, चर्चा करूया.

- भागाकार न करता, कोणता छेद असणाऱ्या परिमेय संख्यांचे दशांश रुप खंडित असेल हे शोधा.

सरावसंच 24

⊙ खालील परिमेय संख्या दशांशरूपात लिहा.

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{-7}{8}$ (iii) $7\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{12}$ (v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{7}{9}$

चला, चर्चा करूया.

बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार व भागाकार या चिन्हांचा वापर करून लिहिलेली संख्यांची मांडणी म्हणजे पदावली असते.

$72 \div 6 + 2 \times 2$ ही पदावली सोडवून उत्तर काढा.

हौसाची रीत

$72 \div 6 + 2 \times 2$
$= 12 + 2 \times 2$
$= 12 + 4$
$= 16$

मंगरूची रीत

$72 \div 6 + 2 \times 2$
$= 12 + 2 \times 2$
$= 14 \times 2$
$= 28$

दोन्ही उत्तरे वेगवेगळी आली. कारण दोघांनी वेगवेगळ्या क्रमाने क्रिया केल्या. याप्रमाणे क्रियांचा क्रम वेगळा घेतला तर उत्तर वेगवेगळे येते. असे होऊ नये म्हणून क्रियांचा क्रम ठरवण्यासाठी काही नियम केले आहेत. ते नियम पाळले तर एकच उत्तर मिळते. ते नियम पाहू. कधी कधी जी क्रिया प्रथम करावी अशी अपेक्षा असते, त्या वेळी पदावलीत कंसाचा वापर करतात.

पदावली सोडवण्याचे नियम

(1) राशीत एकापेक्षा अधिक क्रिया असतील तर गुणाकार व भागाकार या क्रिया डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील त्या क्रमाने कराव्या.

(2) नंतर बेरीज व वजाबाकी या क्रिया, डावीकडून उजवीकडे ज्या क्रमाने आल्या असतील त्या क्रमाने कराव्या.

(3) कंसात एकापेक्षा जास्त क्रिया असतील तर, वरील दोन नियम पाळून त्या क्रिया आधी कराव्या.

वरील नियम वापरले की हौसाची रीत बरोबर आहे हे समजते. $\therefore 72 \div 6 + 2 \times 2 = 16$

खालील पदावली सोडवू.

उदा. $40 \times 10 \div 5 + 17$
$= 400 \div 5 + 17$
$= 80 + 17$
$= 97$

उदा. $80 \div (15 + 8 - 3) + 5$
$= 80 \div (23 - 3) + 5$
$= 80 \div 20 + 5$
$= 4 + 5$
$= 9$

उदा. $2 \times \{25 \times [(113 - 9) + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + 26]\}$

$= 2 \times \{25 \times 130\}$

$= 2 \times 3250$

$= 6500$

उदा. $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{4} - \frac{5}{21}$ (आधी गुणाकार)

$= \frac{3\times21 \quad 5\times4}{84}$ (नंतर वजाबाकी)

$= \frac{63-20}{84} = \frac{43}{84}$

लक्षात ठेवा :

क्रियांचा क्रम स्पष्ट होण्यासाठी एकापेक्षा जास्त वेळा कंसाचा उपयोग करावा लागतो. त्यासाठी साधा कंस ( ) , चौकटी कंस [ ], महिरपी कंस { } वापरले जातात.

कंस सोडवताना सर्वांत आतील कंसातील क्रिया आधी करतात. नंतर क्रमाने बाहेरच्या कंसातील क्रिया करतात.

सरावसंच 25

खालील पदावली सोडवा.

1. $50 \times 5 \div 2 + 24$
2. $(13 \times 4) \div 2 - 26$
3. $140 \div [(-11) \times (-3) - (-42) \div 14 - 1)]$
4. $\{(220 - 140) + [10 \times 9 + (-2 \times 5)]\} - 100$
5. $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} \div \frac{6}{4}$

उपक्रम : चौकटींतील अंकांचा व चिन्हांचा वापर करा व किंमत 112 येईल अशी पदावली तयार करा.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	$+ \quad \times$ $\div \quad -$

✼ अधिक माहितीसाठी

पदावली सोडवताना चिन्हांचा क्रम

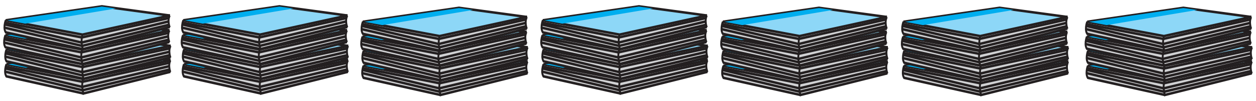
कं →	चे →	भा →	गु →	बे →	व
( )	$\times$	$\div$	$\times$	+	−
कंसातील क्रिया सर्व प्रथम	चा, ची, चे गुणाकार क्रिया उदा. 200 चे $\frac{1}{4}$ $= 200 \times \frac{1}{4}$	भागाकार	गुणाकार	बेरीज	वजाबाकी

6 घातांक

जरा आठवूया.

7 मुलांना प्रत्येकी 4 वह्यांचे वाटप केले.

एकूण वह्या $= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28$ वह्या



येथे बेरजेची क्रिया अनेक वेळा केली आहे.

एकाच संख्येची अनेक वेळा केलेली बेरीज ही गुणाकाराच्या रूपात मांडता येते.

एकूण वह्या $= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 \times 7 = 28$

जाणून घेऊया.

पाया व घातांक (Base and Index)

आता 2 ही संख्या अनेक वेळा घेऊन केलेल्या गुणाकाराची मांडणी थोडक्यात कशी करतात ते पाहू.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ येथे 8 वेळा 2 घेऊन गुणाकार केला आहे.

ही मांडणी थोडक्यात 2^8 अशी करतात. येथे 2^8 हे गुणाकाराचे घातांक रूप आहे.

यामध्ये 2 हा **पाया** व 8 हा **घातांक** आहे.

8 ⟵ घातांक

2 ⟵ पाया

उदा. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ येथे 5^4 ही घातांकित संख्या आहे.

5^4 या घातांक रूपातील संख्येत 5 ही संख्या 'पाया' आणि 4 ही संख्या 'घातांक' आहे.

यांचे वाचन '5 चा घातांक 4' किंवा '5 चा चौथा घात' असे करतात.

सामान्यपणे a ही कोणतीही संख्या असेल तर, $a \times a \times a \times \dots\dots\dots$ (m वेळा) $= a^m$

a^m चे वाचन 'a चा घातांक m' किंवा 'a चा m वा घात' असे करतात.

इथे m ही नैसर्गिक संख्या आहे.

$\therefore\ 5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ म्हणजे 5^4 या घातांकित संख्येची किंमत 625 आहे.

तसेच $\left[\frac{2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ म्हणजे $\left[\frac{2}{3}\right]^3$ ची किंमत $\frac{-8}{27}$ आहे.

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ हे ध्यानात घ्या. **कोणत्याही संख्येचा पहिला घात म्हणजे ती संख्याच असते.** संख्येचा घातांक 1 असेल तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे. जसे $5^1 = 5$, $a^1 = a$

सरावसंच 26

1. पुढील सारणी पूर्ण करा.

अ. क्र.	घातांकित संख्या	पाया	घातांक	गुणाकार रूप	किंमत
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3				
(iii)		(-8)	2		
(iv)				$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$				

2. किंमत काढा.

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

वर्ग व घन (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 चे वाचन 3 चा दुसरा घात किंवा 3 चा वर्ग असे करतात.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 चे वाचन 5 चा तिसरा घात किंवा 5 चा घन असे करतात.

लक्षात ठेवा :

कोणत्याही संख्येचा दुसरा घात म्हणजे त्या संख्येचा वर्ग होय.
कोणत्याही संख्येचा तिसरा घात म्हणजे त्या संख्येचा घन होय.

जाणून घेऊया.

पाया समान असलेल्या घातांकित संख्यांचा गुणाकार

उदा. $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

यावरून $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

उदा. $(-3)^2 \times (-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^5$

यावरून $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

उदा. $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{2}{5}\right)^5$

यावरून $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{2}{5}\right)^5$

हे मला समजले.

- जर a ही परिमेय संख्या असेल आणि m व n हे धन पूर्णांक असतील, तर $a^m \times a^n = a^{m+n}$

सरावसंच 27

सोपे रूप द्या.

(i) $7^4 \times 7^2$ (ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(\ \frac{3}{2}\right)^5 \times \left(\ \frac{3}{2}\right)^3$ (v) $a^{16} \times a^7$ (vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

जाणून घेऊया.

समान पाया असलेल्या घातांकित संख्यांचा भागाकार

उदा. $6^4 \div 6^2 = ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 6^2$$

$$\therefore\ 6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$$

उदा. $(-2)^5 \div (-2)^3 = ?$

$$\frac{(\ 2)^5}{(\ 2)^3} = \frac{(\ 2)\times(\ 2)\times(\ 2)\times(\ 2)\times(\ 2)}{(\ 2)\times(\ 2)\times(\ 2)}$$

$$= (-2)^2$$

$$\therefore\ (-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$$

हे मला समजले.

- जर a ही शून्येतर परिमेय संख्या, m व n हे धन पूर्णांक आणि $m > n$, असतील तर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a° चा अर्थ

$a \neq 0$ असेल तर

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ तसेच

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$\therefore\ \boxed{a^0 = 1}$

a^{-m} चा अर्थ

$$a^{-m} = a^{-m} \times 1$$

$$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$$

$$= \frac{a^{m+m}}{a^m}$$

$$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\therefore$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

तसेच $a \times \frac{1}{a} = 1$ म्हणजे $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore$ a^{-1} हा a चा गुणाकार व्यस्त आहे.

याप्रमाणे $\frac{5}{3}$ चा गुणाकार व्यस्त $\frac{3}{5}$ आहे.

$\therefore\ \boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{1} = \frac{3}{5}}$

उदा. $\left(\frac{4}{7}\right)^3$ ही घातांकित संख्या पाहू.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^3$$

हे मला समजले.

- यावरून जर, $a \neq 0$, $b \neq 0$, आणि m ही धन पूर्णांक संख्या असेल तर $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^m$.

खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करून कोणता नियम मिळतो ते पाहू.

उदा. $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\therefore\ 3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$$

उदा. $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$$

$$\therefore\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2\ 5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

हे मला समजले.

- जर a ही परिमेय संख्या असेल $a \neq 0$ आणि m व n या पूर्णांक संख्या असतील, तर $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

जाणून घेऊया.

पाया (-1) असेल आणि घातांक पूर्ण संख्या असेल तर काय होते ते पाहा.

$$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$$

$$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)} \times \underline{(-1)\times(-1)} \times (-1) = 1\times1\times(-1) = -1$$

m ही सम संख्या असेल तर $(-1)^m = 1$ आणि m ही विषम संख्या असेल तर $(-1)^m = -1$

सरावसंच 28

1. सोपे रूप द्या.

(i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. किंमत काढा.

(i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) $4^7 \div 4^5$

जाणून घेऊया.

दोन संख्यांच्या गुणाकाराचा व भागाकाराचा घात

खालील उदाहरणांचे निरीक्षण करून कोणता नियम मिळतो ते पाहू.

उदा. $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

उदा. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3}$

हे मला समजले.

जर a व b या शून्येतर परिमेय संख्या असतील आणि m ही पूर्णांक संख्या असेल तर

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(a^m)^n$ म्हणजे घातांकित संख्येचा घात

उदा. $(5^2)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2 \times 3}$

$= 5^6$

उदा. $(7^{\,2})^{5}$ $\frac{1}{(7^{\,2})^{5}}$

$\boxed{a^{\,m} \quad \frac{1}{a^m}}$

$= \frac{1}{7^{\,2} \times 7^{\,2} \times 7^{\,2} \times 7^{\,2} \times 7^{\,2}}$

$= \frac{1}{7^{(\ 2) \times 5}}$

$= \frac{1}{7^{\ 10}}$ 7^{10}

उदा. $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{2}\right)^{3}$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(\ 2)+(\ 2)+(\ 2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{6}$

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times$ .... n वेळा $= a^{m+m+m\cdots\cdots\cdots n \text{ वेळा}} = a^{m \times n}$

वरील उदाहरणांवरून हा नियम मिळतो.

हे मला समजले.

- जर a ही शून्येतर परिमेय संख्या व m आणि n या पूर्णांक संख्या असतील, तर $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$

लक्षात ठेवा :

जर a आणि b या शून्येतर परिमेय संख्या, m, n हे पूर्णांक असतील तर,

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{\;m}\quad \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

सरावसंच 29

1. सोपे रूप द्या.

(i) $\left[\left(\frac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $(3^4)^2$ (iii) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^3\right)^4$ (iv) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^3$ (v) $(6^5)^4$

(vi) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^5$ (viii) $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^3\right]^2$ (ix) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^3\right]^2$

2. खालील संख्या धन घातांक वापरून लिहा.

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ (iv) $(y)^{-4}$

गणित माझा सोबती : विज्ञानात, खगोलशास्त्रात

(1) दशमान पद्धतीत संख्या लिहिताना 10 च्या घातांकाचा विशेष उपयोग करता येतो. पृथ्वी व चंद्र यांतील अंतर 38,40,00,000 मीटर आहे. 10 चा घातांक वापरुन हे अंतर खालीलप्रमाणे लिहितात.

384 000 000 = 384×10^6

38 4000000 = 38.4×10^7

3 84000000 = 3.84×10^8 (प्रमाणित रूप)

(2) ऑक्सिजनच्या अणूचा व्यास मिमीमध्ये खाली दिला आहे.

0.0000000000000356 = 3.56×10^{-14}

(3) पुढील संख्या प्रमाणित रूपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

सूर्याचा व्यास 1400000000 मीटर आहे.

प्रकाशाचा वेग = 300000000 मीटर/सेकंद आहे.

(4) शेजारील आकृतीमध्ये Googol ही संख्या दर्शवली आहे ती 10 च्या घातांकाच्या रूपात लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

कोणतीही खूप मोठी अथवा खूप लहान संख्या लिहिताना एक अंकी पूर्णांक असलेली दशांश अपूर्णांकी संख्या व 10 चा योग्य घात यांचा गुणाकार करून लिहितात. याला त्या संख्येचे (Standard form) प्रमाणित रूप म्हणतात.

Googol

10000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000