अनुक्रमणिका

विभाग 1

विभाग 2

1 परिमेय व अपरिमेय संख्या

जरा आठवूया.

आपण नैसर्गिक संख्या समूह, पूर्ण संख्या समूह, पूर्णांक संख्या समूह आणि परिमेय संख्या समूह यांची ओळख करून घेतली.

नैसर्गिक संख्या समूह	पूर्ण संख्या समूह	पूर्णांक संख्या समूह
1,2,3,4,...	0,1,2,3,4, ...	...,−4,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3,...

परिमेय संख्या समूह

$\frac{-25}{3}$, $\frac{10}{-7}$, −4, 0, 3, 8, $\frac{32}{3}$, $\frac{67}{5}$, इत्यादी

परिमेय संख्या समूह : $\frac{m}{n}$ या रूपातील संख्यांना परिमेय संख्या म्हणतात. येथे m व n हे पूर्णांक असतात परंतु n हा शून्य नसतो.

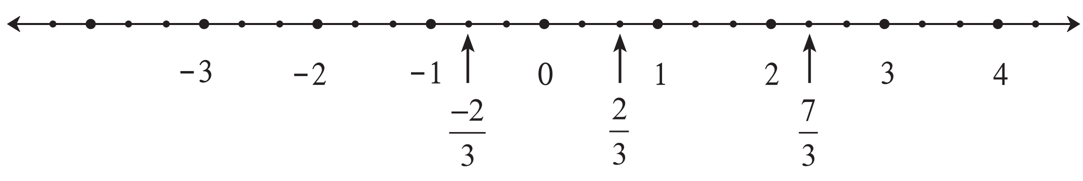
दोन परिमेय संख्यांच्या दरम्यान असंख्य परिमेय संख्या असतात, हे आपण पाहिले आहे.

जाणून घेऊया.

संख्यारेषेवर परिमेय संख्या दाखवणे (To show rational numbers on a number line)

$\frac{7}{3}$, 2, $\frac{-2}{3}$ या संख्या संख्यारेषेवर कशा दाखवायच्या हे पाहू.

प्रथम एक संख्यारेषा काढू.



- 2 ही परिमेय संख्या पूर्णांकही आहे. ती संख्यारेषेवर दाखवू.
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$, म्हणून शून्याच्या उजवीकडील प्रत्येक एककाचे तीन समान भाग करू. शून्यापासूनचा सातवा बिंदू $\frac{7}{3}$ ही संख्या दाखवेल; किंवा $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, म्हणून 2 या संख्येच्या पुढील $\frac{1}{3}$ एकक अंतरावरील

बिंदू $\frac{7}{3}$ ही संख्या दाखवेल.

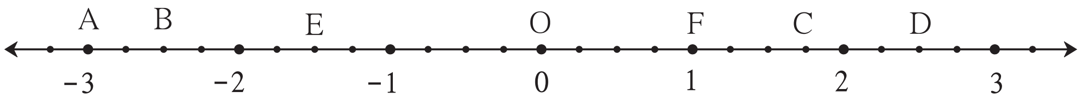
- संख्यारेषेवर $-\frac{2}{3}$ ही संख्या दाखवण्यासाठी, आधी $\frac{2}{3}$ ही संख्या दाखवून 0 च्या डाव्या बाजूला तेवढ्याच अंतरावर $-\frac{2}{3}$ ही संख्या दाखवता येईल.

सरावसंच 1.1

1. संख्यारेषेवर पुढील परिमेय संख्या दाखवा. प्रत्येक उदाहरणासाठी वेगळी संख्यारेषा काढा.

(1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}$ (3) $-\frac{5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, -\frac{17}{10}$

2. दिलेली संख्यारेषा पाहून विचारलेल्या प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



(1) B बिंदू हा कोणती परिमेय संख्या दर्शवतो ? (2) $1\frac{3}{4}$ ही संख्या कोणत्या बिंदूने दाखवली आहे ?

(3) 'D या बिंदूने $\frac{5}{2}$ ही परिमेय संख्या दाखवली आहे.' हे विधान सत्य की असत्य ते लिहा.

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांतील क्रमसंबंध (लहानमोठेपणा) (Comparison of rational numbers)

संख्यारेषेवर संख्यांच्या प्रत्येक जोडीमध्ये, डावीकडील संख्या उजव्या बाजूच्या संख्येपेक्षा लहान असते हे आपल्याला माहीत आहे. तसेच परिमेय संख्येचा अंश व छेद यांना एकाच शून्येतर संख्येने गुणले तर संख्या तीच राहते किंवा तिची किंमत बदलत नाही, म्हणजे $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, $(k \neq 0)$.

उदा. (1) $\frac{5}{4}$ व $\frac{2}{3}$ यांचा लहानमोठेपणा ठरवा. <, =, > यांपैकी योग्य चिन्हाचा उपयोग करून लिहा.

उकल : $\frac{5}{4} = \frac{5\times3}{4\times3} = \frac{15}{12}$ $\qquad \frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12}$

$\frac{15}{12} > \frac{8}{12}$ $\qquad \therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

उदा. (2) $\frac{-7}{9}, \frac{4}{5}$ या परिमेय संख्यांची तुलना करा.

उकल : ऋण संख्या नेहमी धन संख्येपेक्षा लहान असते. म्हणून $-\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$.

दोन ऋण संख्यांची तुलना करण्यासाठी

a, b या धन संख्या असून जर $a < b$, तर $-a > -b$ याचा अनुभव घेऊ.

$$\left.\begin{array}{l} 2 < 3 \text{ पण } -2 > -3 \\ \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ पण } \frac{-5}{4} > \frac{-7}{4} \end{array}\right\} \text{यांचा संख्यारेषेवर पडताळा घ्या.}$$

उदा. (3) $\frac{-7}{3}, \frac{-5}{2}$ यांची तुलना करा.

उकल : प्रथम $\frac{7}{3}$ आणि $\frac{5}{2}$ यांची तुलना करू.

$$\frac{7}{3} = \frac{7\times2}{3\times2} = \frac{14}{6}, \quad \frac{5}{2} = \frac{5\times3}{2\times3} = \frac{15}{6} \quad \text{व} \quad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2} \qquad \therefore \frac{-7}{3} > \frac{-5}{2}$$

उदा. (4) $\frac{3}{5}$ व $\frac{6}{10}$ या परिमेय संख्या आहेत. त्यांची तुलना करा.

उकल : $\frac{3}{5} = \frac{3\times2}{5\times2} = \frac{6}{10} \qquad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

परिमेय संख्यांची तुलना करताना खालील नियम उपयोगी पडतात.

$\frac{a}{b}$ व $\frac{c}{d}$ या परिमेय संख्यांमध्ये जर b आणि d धन असतील तर, आणि

(1) जर $a \times d < b \times c$ तर $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

(2) जर $a \times d = b \times c$ तर $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

(3) जर $a \times d > b \times c$ तर $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

सरावसंच 1.2

1. खालील संख्यांमधील लहानमोठेपणा ठरवा.

(1) $-7, -2$ (2) $0, \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7}, 0$ (4) $\frac{-5}{4}, \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29}, \frac{141}{29}$

(6) $-\frac{17}{20}, \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12}, \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8}, \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15}, \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11}, \frac{-3}{4}$

जाणून घेऊया.

परिमेय संख्यांचे दशांश रूप (Decimal representation of rational numbers)

परिमेय संख्येच्या अंशाला छेदाने भागताना दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग केला तर त्या संख्येचे दशांशरूप मिळते. उदाहरणार्थ, $\frac{7}{4}$ =1.75, येथे 7 ला 4 ने भागल्यावर बाकी शून्य आली. भागाकाराची क्रिया पूर्ण झाली.

परिमेय संख्यांच्या अशा दशांशरूपाला खंडित दशांशरूप म्हणतात.

आपल्याला माहीत आहे की प्रत्येक परिमेय संख्या अखंड आवर्ती दशांश रूपात लिहिता येते.

उदाहरणार्थ, (1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $\frac{-5}{3} = -1.666... = \quad 1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

तसेच $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ याप्रमाणे शून्याचा उपयोग करून खंडित रूपही अखंड आवर्ती दशांश रूपात लिहिता येते.

सरावसंच 1.3

1. खालील परिमेय संख्या दशांश रूपात लिहा.

(1) $\frac{9}{37}$ (2) $\frac{18}{42}$ (3) $\frac{9}{14}$ (4) $\frac{-103}{5}$ (5) $-\frac{11}{13}$

जाणून घेऊया.

अपरिमेय संख्या (Irrational numbers)

परिमेय संख्यांच्या व्यतिरिक्त आणखी अनेक संख्या संख्यारेषेवर असतात. त्या परिमेय नसतात, म्हणजेच अपरिमेय असतात. $\sqrt{2}$ ही अशी एक अपरिमेय संख्या आहे.

आपण $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवू.

- संख्यारेषेवर A हा बिंदू 1 ही संख्या दाखवतो. संख्यारेषेला बिंदू A मधून रेषा l लंब काढा.

  रेषा l वर बिंदू P असा घ्या, की OA = AP = 1 एकक असेल.
- रेख OP काढा. Δ OAP हा काटकोन त्रिकोण तयार झाला.

पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

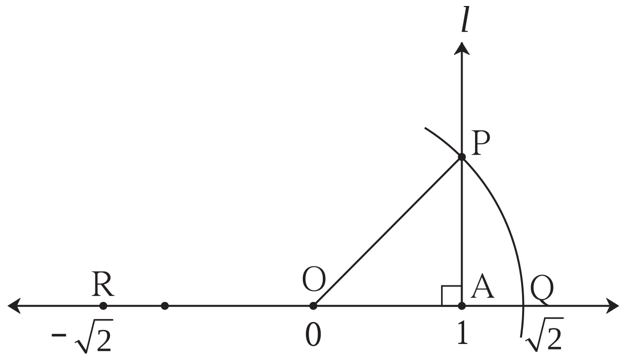
$OP^2 = OA^2 + AP^2$

$= 1^2 + 1^2 = 1+1 = 2$

$OP^2 = 2$

$\therefore OP = \sqrt{2}$ ...(दोन्ही बाजूंची वर्गमुळे घेऊन)

- आता O केंद्र व OP एवढी त्रिज्या घेऊन एक कंस काढा. तो कंस संख्यारेषेला जेथे छेदतो त्या बिंदूला Q नाव द्या. OQ हे अंतरही $\sqrt{2}$ आहे.



म्हणजे $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर Q या बिंदूने दर्शवली आहे.

OQ एवढेच अंतर कंपासमध्ये घेऊन O च्या डावीकडे R हा बिंदू स्थापन केला तर त्या बिंदूने दर्शवलेली संख्या $-\sqrt{2}$ असेल.

$\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे हे आपण पुढील इयत्तेत सिद्ध करू. अपरिमेय संख्येचे दशांशरूप अखंड आणि अनावर्ती असते हेही आपण पुढील इयत्तेत पाहू.

लक्षात घ्या की –

मागील इयत्तेत आपण π ही संख्या परिमेय नाही हे शिकलो आहोत. म्हणजेच ती संख्या अपरिमेय संख्या आहे. आपण व्यवहारात सोयीसाठी π च्या खूप जवळची किंमत $\frac{22}{7}$ किंवा 3.14 ही π साठी घेतो. परंतु $\frac{22}{7}$ व 3.14 या संख्या परिमेय आहेत.

ज्या संख्या संख्यारेषेवर बिंदूंनी दाखवता येतात त्या संख्यांना वास्तव संख्या म्हणतात. सर्व परिमेय संख्या संख्यारेषेवर दाखवता येतात हे आपण पाहिले आहे. म्हणून सर्व परिमेय संख्या वास्तव संख्या आहेत. तसेच असंख्य अपरिमेय संख्या देखील वास्तव संख्या आहेत.

$\sqrt{2}$ ही संख्या अपरिमेय आहे. $3\sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ इत्यादी सर्व संख्या अपरिमेय आहेत हे ध्यानात घ्या. कारण जर $3\sqrt{2}$ संख्या परिमेय असेल तर $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ ही देखील परिमेय संख्या असायला हवी, पण ते सत्य नाही.

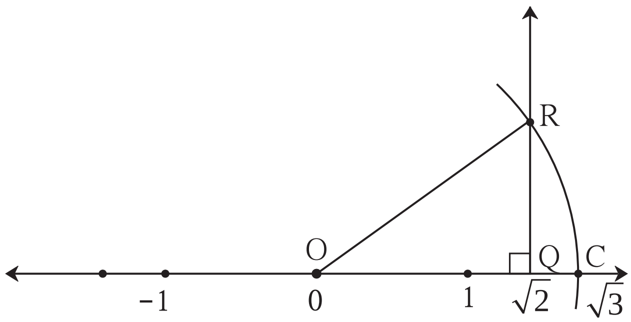
परिमेय संख्या संख्यारेषेवर कशा दाखवायच्या हे आपण पाहिले. तसेच $\sqrt{2}$ ही अपरिमेय संख्या आपण संख्यारेषेवर दाखवली. त्याप्रमाणे $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ . . . अशा अपरिमेय संख्याही आपण संख्यारेषेवर दाखवू शकतो.

सरावसंच 1.4

1. $\sqrt{2}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवली आहे. त्या आधारे $\sqrt{3}$ ही संख्या संख्यारेषेवर दाखवण्यासाठी खाली कृतीच्या पायऱ्या दिलेल्या आहेत. त्या पायऱ्यांमधील रिकाम्या जागा योग्य रीतीने भरा आणि कृती पूर्ण करा.

कृती :

- संख्यारेषेवर Q हा बिंदू ...... ही संख्या दर्शवतो.
- Q बिंदूपाशी एक लंबरेषा काढली आहे. त्या रेषेवर 1 एकक लांबी दर्शवणारा बिंदू R आहे.
- OR जोडल्यामुळे Δ ORQ हा काटकोन त्रिकोण मिळतो.



- l (OQ) = $\sqrt{2}$, l(QR) = 1

$\therefore$ पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$$
$$= \boxed{}^2 + \boxed{}^2 = \boxed{} + \boxed{}$$
$$= \boxed{} \qquad \therefore l(OR) = \boxed{}$$

OR एवढे अंतर घेऊन काढलेला कंस संख्यारेषेला जेथे छेदतो, त्या बिंदूला C हे नाव देऊ. C हा बिंदू $\sqrt{3}$ ही संख्या दाखवतो.

2. संख्यारेषेवर $\sqrt{5}$ ही संख्या दाखवा.

3★. संख्यारेषेवर $\sqrt{7}$ ही संख्या दाखवा.

उत्तरसूची

सरावसंच 1.1

2. (1) $\frac{-10}{4}$ (2) C (3) सत्य

सरावसंच 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$

(6) $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

सरावसंच 1.3

(1) $0.\overline{243}$ (2) $0.\overline{428571}$ (3) $0.6\overline{428571}$ (4) -20.6

(5) $-0.8\overline{46153}$

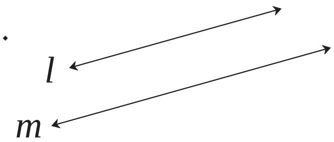
CA9TZ7

2 समांतर रेषा व छेदिका

जरा आठवूया.

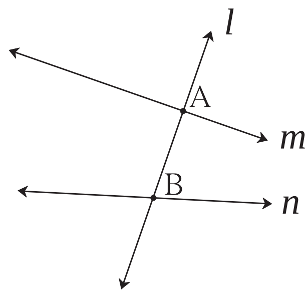
एकाच प्रतलात असणाऱ्या आणि एकमेकींना न छेदणाऱ्या रेषांना समांतर रेषा म्हणतात.

'रेषा l व रेषा m या समांतर रेषा आहेत,' हे 'रेषा $l \parallel$ रेषा m' असे लिहितात.



जाणून घेऊया.

छेदिका (Transversal)

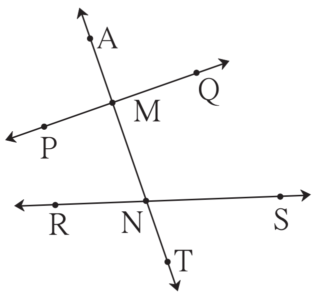


शेजारील आकृतीत रेषा m व रेषा n यांना रेषा l ही अनुक्रमे बिंदू A व बिंदू B या दोन भिन्न बिंदूंमध्ये छेदते. रेषा m व रेषा n यांची रेषा l ही छेदिका आहे.

जर एखादी रेषा दिलेल्या दोन रेषांना दोन भिन्न बिंदूंत छेदत असेल, तर त्या रेषेला त्या दोन रेषांची छेदिका म्हणतात.

छेदिकेमुळे होणारे कोन (Angles made by transversal)

सोबतच्या आकृतीत छेदिकेमुळे छेदन बिंदू M जवळ चार आणि छेदन बिंदू N जवळ चार असे एकूण 8 कोन झालेले दिसतात. आठही कोनांपैकी प्रत्येक कोनाची एक भुजा छेदिकेवर आहे व दुसरी भुजा दोनपैकी एका रेषेवर आहे. याचा उपयोग करून कोनांच्या जोड्या ठरवल्या आहेत. त्या जोड्यांचा अभ्यास करूया.



- **संगत कोन** (Corresponding angles)

ज्या जोडीतील कोनांच्या छेदिकेवरील भुजा एकच दिशा दर्शवतात व छेदिकेवर नसलेल्या भुजा छेदिकेच्या एकाच बाजूस असतात, ती जोडी संगत कोनांची असते.

- **आंतरकोन** (Interior angles)

ज्या जोडीतील कोन दिलेल्या दोन रेषांच्या आतील बाजूस आहेत व छेदिकेच्या एकाच बाजूस आहेत, ती जोडी आंतरकोनांची जोडी असते.

वरील आकृतीतील संगतकोनांच्या जोड्या –

(i) $\angle$AMP व $\angle$MNR

(ii) $\angle$PMN व $\angle$RNT

(iii) $\angle$AMQ व $\angle$MNS

(iv) $\angle$QMN व $\angle$SNT

वरील आकृतीतील आंतरकोनांच्या जोड्या –

(i) $\angle$PMN व $\angle$MNR

(ii) $\angle$QMN व $\angle$MNS

• व्युत्क्रम कोन (Alternate angles)

ज्या जोडीतील कोन छेदिकेच्या विरुद्ध बाजूस असतात आणि छेदिकेवर असलेल्या भुजा विरुद्ध दिशा दर्शवतात, ती जोडी व्युत्क्रम कोनांची जोडी असते.

आकृतीत दोन जोड्या आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या तर दोन जोड्या बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या आहेत.

आंतरव्युत्क्रम कोन (रेषांच्या आतील बाजूस असलेले कोन)	बाह्यव्युत्क्रम कोन (रेषांच्या बाहेरील बाजूस असलेले कोन)
(i) $\angle$PMN व $\angle$MNS	(i) $\angle$AMP व $\angle$TNS
(ii) $\angle$QMN व $\angle$RNM	(ii) $\angle$AMQ व $\angle$RNT

सरावसंच 2.1

1. सोबतची आकृती पाहा. आकृतीत कोनांची नावे एका अक्षराने दाखवली आहेत. त्या आधारे रिकाम्या चौकटी भरा.

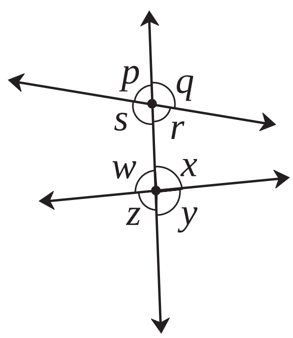
संगत कोनांच्या जोड्या.

(1) $\angle p$ व $\square$ (2) $\angle q$ व $\square$

(3) $\angle r$ व $\square$ (4) $\angle s$ व $\square$

आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या.

(5) $\angle s$ व $\square$ (6) $\angle w$ व $\square$



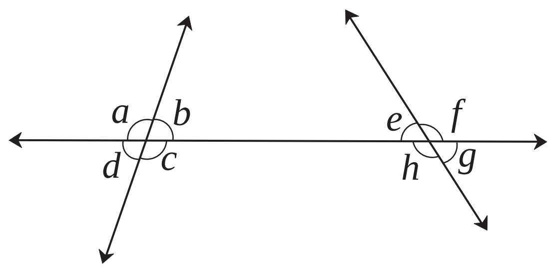
2. शेजारील आकृतीत दाखवलेले कोन पाहा.

खालील जोड्या दर्शवणारे कोन लिहा.

(1) आंतरव्युत्क्रम कोन

(2) संगतकोन

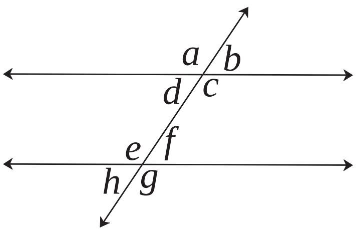
(3) आंतरकोन



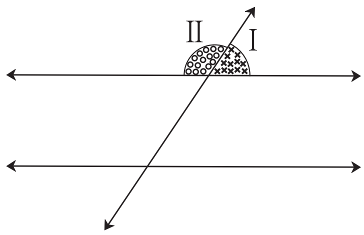
जाणून घेऊया.

समांतर रेषा व छेदिका यांच्यामुळे होणारे कोन व त्यांचे गुणधर्म
(Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

कृती (I) : एका वहीच्या कागदावर आकृती (A) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे दोन समांतर रेषा काढा व त्यांची एक छेदिका काढा. ट्रेसपेपरच्या साहाय्याने त्याच आकृतीची एक प्रत एका कोऱ्या कागदावर काढा. आकृती (B) मध्ये दाखवल्याप्रमाणे भाग I व भाग II हे वेगवेगळ्या रंगाने रंगवा. हे दोन भाग कात्रीने कापा.



(A)



(B)

भाग I व भाग II ने दर्शवलेले कोन रेषीय जोडीत आहेत हे लक्षात घ्या. आता भाग I व भाग II हे आकृती A मधील आठ कोनांपैकी प्रत्येक कोनावर ठेवून पाहा.

कोणकोणत्या कोनांशी भाग I तंतोतंत जुळतो ?

कोणकोणत्या कोनांशी भाग II तंतोतंत जुळतो ?

असे दिसेल की, $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$, कारण हे कोन भाग I शी जुळतात.

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$, कारण हे कोन भाग II शी जुळतात.

(1) $\angle a \cong \angle e$, $\angle b \cong \angle f$, $\angle c \cong \angle g$, $\angle d \cong \angle h$

(या संगत कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(2) $\angle d \cong \angle f$ आणि $\angle e \cong \angle c$ (या आंतरव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(3) $\angle a \cong \angle g$ आणि $\angle b \cong \angle h$ (या बाह्यव्युत्क्रम कोनांच्या जोड्या आहेत.)

(4) $m\angle d + m\angle e = 180^\circ$ आणि $m\angle c + m\angle f = 180^\circ$

(या आंतरकोनांच्या जोड्या आहेत.)

चला, चर्चा करूया.

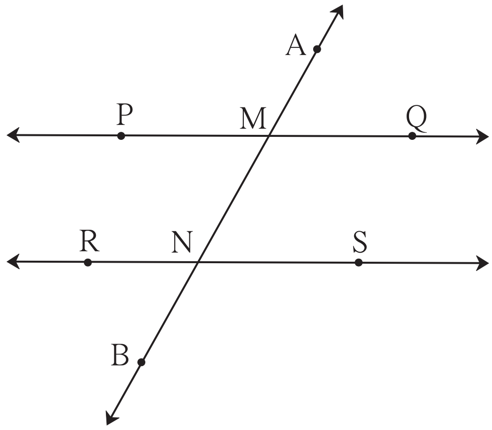
दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर आठ कोन तयार होतात.

या आठ कोनांपैकी एका कोनाचे माप दिले असेल, तर इतर सात कोनांची मापे काढता येतील का ?

जाणून घेऊया.

(1) संगत कोनांचा गुणधर्म (Property of corresponding angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या संगत कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन एकमेकांशी एकरूप असतात.
शेजारील आकृतीत रेषा PQ || रेषा RS.
रेषा AB ही त्यांची छेदिका आहे.



संगत कोन

$\angle AMP \cong \angle MNR$ $\quad$ $\angle PMN \cong \angle RNB$

$\angle AMQ \cong \angle MNS$ $\quad$ $\angle QMN \cong \angle SNB$

(2) व्युत्क्रम कोनांचा गुणधर्म (Property of alternate angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या व्युत्क्रम कोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन परस्परांशी एकरूप असतात.

आंतरव्युत्क्रम कोन	बाह्यव्युत्क्रम कोन
$\angle PMN \cong \angle MNS$	$\angle AMP \cong \angle SNB$
$\angle QMN \cong \angle MNR$	$\angle AMQ \cong \angle RNB$

(3) आंतरकोनांचा गुणधर्म (Property of interior angles)

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते.

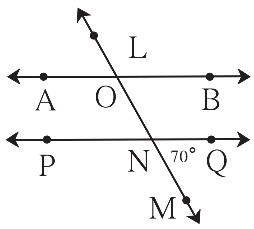
आंतरकोन

$m\angle PMN + m\angle MNR = 180^\circ$

$m\angle QMN + m\angle MNS = 180^\circ$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) शेजारील आकृतीत रेषा AB || रेषा PQ व रेषा LM ही छेदिका आहे. $m\angle MNQ = 70^\circ$, तर $\angle AON$ चे माप काढा.



उकल :

रीत I

$m\angle MNQ = m\angle ONP = 70^\circ$ .....(विरुद्ध कोन)

$m\angle AON + m\angle ONP = 180^\circ$ ....(आंतरकोन)

$\therefore\ m\angle AON = 180^\circ - m\angle ONP$

$= 180^\circ - 70^\circ$

$= 110^\circ$

रीत II

$m\angle MNQ = 70^\circ$

$\therefore\ m\angle NOB = 70^\circ$ ....(संगतकोन)

$m\angle AON + m\angle NOB = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON + 70^\circ = 180^\circ$

$\therefore\ m\angle AON = 110^\circ$

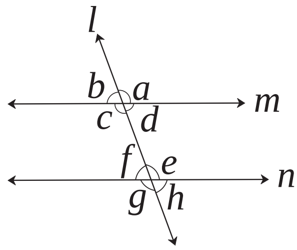
(आणखी वेगळा विचार करूनही वरील प्रश्न सोडवता येईल.)

उदा. (2) शेजारील आकृतीत रेषा $m \parallel$ रेषा n

रेषा l ही छेदिका आहे.

जर $m\angle b = (x + 15)^\circ$ आणि

$m\angle e = (2x + 15)^\circ$ तर x ची किंमत काढा.



उकल : $\angle b \cong \angle f$ .... (संगत कोन) $\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ$ .... (रेषीय जोडीतील कोन)

समीकरणात किमती घालून,

$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ$ $\therefore 3x + 30 = 180^\circ$

$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ$ .... (दोन्ही बाजूंतून 30 वजा करून)

$x = \dfrac{150^\circ}{3}$ .... (दोन्ही बाजूंना 3 ने भागून)

$\therefore x = 50^\circ$

हे मला समजले.

दोन समांतर रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणाऱ्या कोनांपैकी

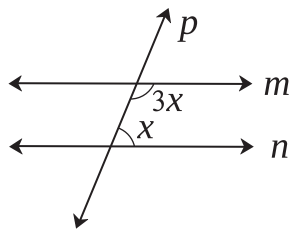
- संगत कोनांच्या जोडीतील कोन एकरूप असतात.
- व्युत्क्रम कोनांच्या जोडीतील कोन एकरूप असतात.
- आंतरकोनांच्या प्रत्येक जोडीतील कोन परस्परांचे पूरक असतात.

सरावसंच 2.2

1. योग्य पर्याय निवडा.

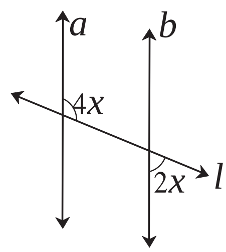
(1) शेजारील आकृतीत जर रेषा $m \parallel$ रेषा n असेल आणि रेषा p ही त्यांची छेदिका असेल तर x ची किंमत किती ?

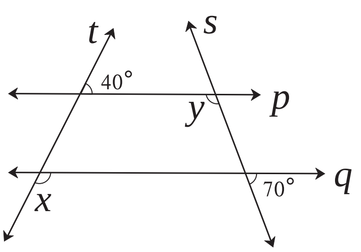
(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°



(2) शेजारील आकृतीत जर रेषा $a \parallel$ रेषा b आणि रेषा l ही त्यांची छेदिका असेल तर x ची किंमत किती?

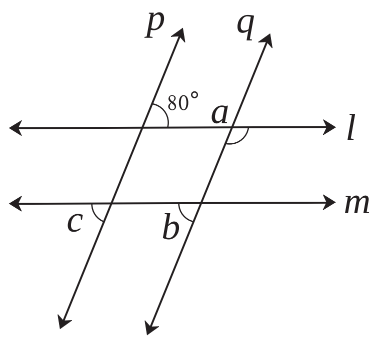
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°



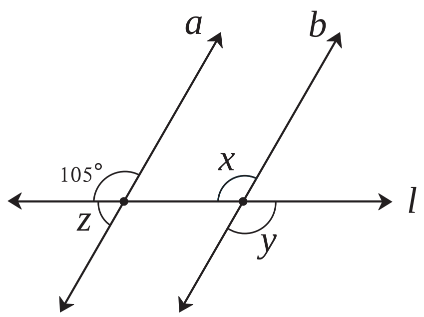


2. सोबतच्या आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा q आहे. रेषा t व रेषा s या छेदिका आहेत. दिलेल्या मापांवरून $\angle x$ व $\angle y$ ची मापे काढा.

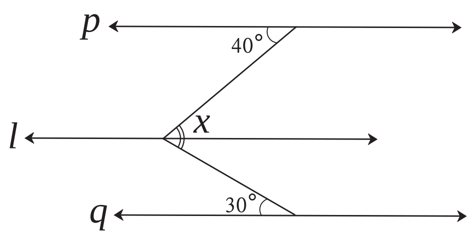
3. सोबतच्या आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा q आहे. रेषा $l \parallel$ रेषा m आहे. दिलेल्या कोनाच्या मापांवरून $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ची मापे काढा. कारणे लिहा.



4★. सोबतच्या आकृतीत, रेषा $a \parallel$ रेषा b. रेषा l ही छेदिका आहे. दिलेल्या कोनांच्या मापांवरून $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ यांची मापे काढा.



5★. शेजारील आकृतीत रेषा $p \parallel$ रेषा $l \parallel$ रेषा q तर दिलेल्या मापांवरून $\angle x$ चे माप काढा.



अधिक माहितीसाठी :

दोन एकप्रतलीय रेषांना एका छेदिकेने छेदल्यावर होणारी

- संगत कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
- व्युत्क्रम कोनांची एक जोडी एकरूप असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.
- आंतरकोनांची एक जोडी पूरक असेल तर त्या रेषा समांतर असतात.

दिलेल्या रेषेला समांतर रेषा काढणे (To draw a line parallel to the given line)

रचना (I) : दिलेल्या रेषेला रेषेबाहेरील बिंदूतून गुण्याच्या साहाय्याने समांतर रेषा काढणे.

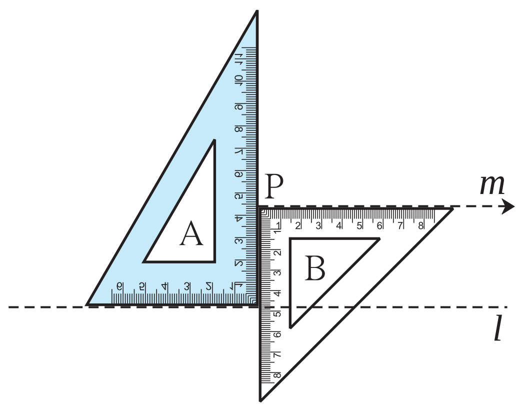
रीत I : रचनेच्या पायऱ्या

(1) रेषा l काढा. (2) रेषा l च्या बाहेर बिंदू P घ्या.

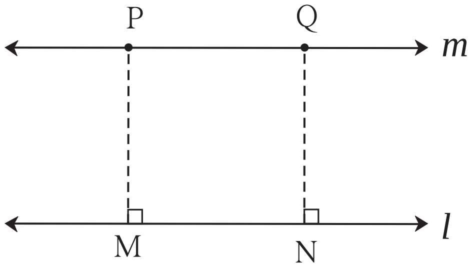
(3)आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे दोन गुण्ये चिकटवून ठेवा. गुण्या A व B धरून ठेवा. गुण्या B ची कड बिंदू P वर आहे त्या कडेवर रेषा काढा.

(4) त्या रेषेला m नाव द्या.

(5) रेषा m ही रेषा l ला समांतर आहे.



रीत II : रचनेच्या पायऱ्या



(1) रेषा l काढा. त्या रेषेच्या बाहेर बिंदू P घ्या.

(2) बिंदू P मधून रेषा l वर रेख PM हा लंब काढा.

(3) रेषा l वर N हा एक वेगळा बिंदू घ्या.

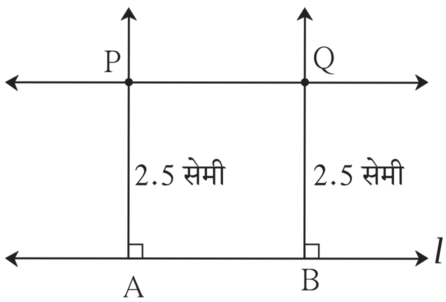
(4) बिंदू N मधून रेख NQ हा रेषा l ला लंब काढा.

NQ = MP घ्या.

(5) बिंदू P व Q मधून जाणारी रेषा m काढा. ही रेषा l ला समांतर आहे.

रचना (II) : दिलेल्या रेषेला दिलेल्या अंतरावर समांतर रेषा काढणे.

रीत : रेषा l ला 2.5 सेमी अंतरावर समांतर रेषा काढा.



रचनेच्या पायऱ्या :

(1) रेषा l काढा. (2) रेषा l वर A, B असे दोन बिंदू घ्या.

(3) बिंदू A व बिंदू B मधून रेषा l ला लंब रेषा काढा.

(4) त्या रेषांवर, बिंदू A आणि बिंदू B पासून 2.5 सेमी अंतरावर बिंदू P आणि बिंदू Q घ्या.

(5) रेषा PQ काढा. (6) रेषा PQ ही रेषा l ला 2.5 सेमी अंतरावर समांतर असलेली रेषा आहे.

सरावसंच 2.3

1. रेषा l काढा. त्या रेषेबाहेर बिंदू A घ्या. बिंदू A मधून जाणारी आणि रेषा l ला समांतर असणारी रेषा काढा.
2. रेषा l काढा. त्या रेषेबाहेर बिंदू T घ्या. बिंदू T मधून जाणारी आणि रेषा l ला समांतर असणारी रेषा काढा.
3. रेषा m आणि त्या रेषेला 4 सेमी अंतरावर समांतर असणारी रेषा n काढा.

उत्तरसूची

सरावसंच 2.1 **1.** (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

2. (1) $\angle c$ व $\angle e$, $\angle b$ व $\angle h$ (2) $\angle a$ व $\angle e$, $\angle b$ व $\angle f$, $\angle c$ व $\angle g$, $\angle d$ व $\angle h$

(3) $\angle c$ व $\angle h$, $\angle b$ व $\angle e$.

सरावसंच 2.2 **1.** (1) C (2) D **2.** $\angle x = 140°$, $\angle y = 110°$

3. $\angle a = 100°$, $\angle b = 80°$, $\angle c = 80°$

4. $\angle x = 105°$, $\angle y = 105°$, $\angle z = 75°$

5. $\angle x = 70°$

CAIQ1U

3 घातांक व घनमूळ

जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण घातांकांचा व त्यांच्या नियमांचा अभ्यास केला आहे.

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ही गुणाकार रूपातील संख्या थोडक्यात आपण 2^5 अशी लिहितो.
  येथे 2 हा पाया व 5 हा घातांक आहे. 2^5 ही घातांकित संख्या आहे.
- घातांकाचे नियम : m व n या पूर्णांक संख्या असतील, तर

  (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (iii) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (iv) $a^0 = 1$

  (v) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (vi) $(a^m)^n = a^{mn}$ (vii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \frac{a^m}{b^m}$ (viii) $\left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \left(\frac{b}{a}\right)^m$
- घातांकांचे नियम वापरून खालील उदाहरणांतील चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

  (i) $3^5 \times 3^2 = 3^{\square}$ (ii) $3^7 \div 3^9 = 3^{\square}$ (iii) $(3^4)^5 = 3^{\square}$

  (iv) $5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}}$ (v) $5^0 = \square$ (vi) $5^1 = \square$

  (vii) $(5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square}$ (viii) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3}$ (ix) $\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$

जाणून घेऊया.

घातांक परिमेय असलेल्या संख्यांचा अर्थ (The number with rational index)

(I) संख्येचा घातांक $\frac{1}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल अशा संख्यांचा अर्थ.

संख्येचा घातांक $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल तर त्या संख्येचा अर्थ पाहू.

एखाद्या संख्येचा वर्ग दाखवण्यासाठी तिचा घातांक 2 लिहितात आणि संख्येचे वर्गमूळ दाखवण्यासाठी तिचा घातांक $\frac{1}{2}$ लिहितात.

उदाहरणार्थ, 25 चे वर्गमूळ $\sqrt{\ }$ हे करणी चिन्ह वापरून आपण $\sqrt{25}$ असे लिहितो. घातांक वापरून ती संख्या $25^{\frac{1}{2}}$ अशी लिहितात. म्हणजे $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$.

साधारणपणे a या संख्येचा वर्ग a^2 असा लिहितात तर a चे वर्गमूळ $\sqrt[2]{a}$ असे किंवा $\sqrt{a}$ किंवा $a^{\frac{1}{2}}$ असे लिहितात.

याचप्रमाणे a या संख्येचा घन a^3 असा लिहितात तर a चे घनमूळ $\sqrt[3]{a}$ असे किंवा $a^{\frac{1}{3}}$ असे लिहितात.

जसे, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

$\therefore$ 64 चे घनमूळ $\sqrt[3]{64}$ किंवा $(64)^{\frac{1}{3}}$ असे लिहितात. लक्षात घ्या की, $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$. म्हणजे 3 चा 5 वा घात 243 आहे.

याउलट 243 चे पाचवे मूळ हे $(243)^{\frac{1}{5}}$ असे किंवा $\sqrt[5]{243}$ असे लिहितात. $\therefore$ $(243)^{\frac{1}{5}} = 3$

सामान्यपणे a चे n वे मूळ $a^{\frac{1}{n}}$ असे लिहितात.

उदाहरणार्थ, (i) $128^{\frac{1}{7}} = 128$ चे 7 वे मूळ, (ii) $900^{\frac{1}{12}} = 900$ चे 12 वे मूळ, इत्यादी.

लक्षात घ्या की $10^{\frac{1}{5}} = x$ ही संख्या असेल तर $x^5 = 10$.

सरावसंच 3.1

1. घातांक वापरून पुढील संख्या लिहा.

(1) 13 चे पाचवे मूळ (2) 9 चे सहावे मूळ (3) 256 चे वर्गमूळ

(4) 17 चे घनमूळ (5) 100 चे आठवे मूळ (6) 30 चे सातवे मूळ

2. खालील घातांकित संख्या कोणत्या संख्येचे कितवे मूळ आहे ते लिहा.

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$ (2) $49^{\frac{1}{2}}$ (3) $(15)^{\frac{1}{5}}$ (4) $(512)^{\frac{1}{9}}$ (5) $100^{\frac{1}{19}}$ (6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(II) संख्येचा घातांक $\frac{m}{n}$ या रूपातील परिमेय संख्या असेल, अशा संख्यांचा अर्थ.

आपल्याला माहीत आहे की $8^2 = 64$,

64 चे घनमूळ = $(64)^{\frac{1}{3}}$ $(8^2)^{\frac{1}{3}}$ 4

$\therefore$ 8 च्या वर्गाचे घनमूळ $= 4$ .... (I)

तसेच, 8 चे घनमूळ = $8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore$ 8 च्या घनमुळाचा वर्ग $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ ....(II)

(I) व (II) वरून

8 च्या वर्गाचे घनमूळ = 8 च्या घनमुळाचा वर्ग; म्हणजेच, $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ हे लक्षात येते.

घातांक पूर्णांक संख्या असतानाचे घातांकांचे जे नियम आहेत, तेच नियम घातांक परिमेय असणाऱ्या संख्यांसाठी आहेत. $\therefore$ $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$ हा नियम वापरून $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$

यावरून $8^{\frac{2}{3}}$ या संख्येचा अर्थ दोन प्रकारे लावता येतो.

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}}$ = 8 च्या वर्गाचे घनमूळ. (ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ = 8 च्या घनमुळाचा वर्ग.

त्याचप्रमाणे $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^4\right)^{\frac{1}{5}}$ म्हणजे '27 च्या चौथ्या घाताचे पाचवे मूळ',

आणि $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ म्हणजे '27 च्या पाचव्या मुळाचा चौथा घात' असे दोन अर्थ होतात.

सामान्यपणे $a^{\frac{m}{n}}$ या संख्येचा अर्थ दोन प्रकारे व्यक्त करता येतो.

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ म्हणजे a च्या m व्या घाताचे n वे मूळ किंवा

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ म्हणजे a च्या n व्या मुळाचा m वा घात.

सरावसंच 3.2

1. खालील सारणी पूर्ण करा.

क्र.	संख्या	कितव्या मुळाचा कितवा घात	कितव्या घाताचे कितवे मूळ
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225 च्या वर्गमुळाचा घन	225 च्या घनाचे वर्गमूळ
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

2. परिमेय घातांक रूपात व्यक्त करा.

(1) 121 च्या पाचव्या घाताचे वर्गमूळ

(2) 324 च्या चौथ्या मुळाचा घन

(3) 264 च्या वर्गाचे पाचवे मूळ

(4) 3 च्या घनमुळाचा घन

जरा आठवूया.

- $4 \times 4 = 16$ म्हणजेच $4^2 = 16$, तसेच $(-4) \times (-4)$ म्हणजेच $(-4)^2 = 16$ यावरून 16 या संख्येला एक धन आणि दुसरे ऋण, अशी दोन वर्गमुळे आहेत. संकेतानुसार 16 चे धन वर्गमूळ $\sqrt{16}$ असे, तर 16 चे ऋण वर्गमूळ $-\sqrt{16}$ असे दर्शवतात. $\sqrt{16} = 4$ आणि $-\sqrt{16} = -4$.
- प्रत्येक धन संख्येला दोन वर्गमुळे असतात.
- शून्य या संख्येचे वर्गमूळ शून्यच असते.

जाणून घेऊया.

घन व घनमूळ (Cube and Cube Root)

एखादी संख्या तीन वेळा घेऊन गुणाकार केल्यास येणारा गुणाकार हा त्या संख्येचा घन असतो.

उदाहरणार्थ, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$. म्हणजे 216 ही संख्या 6 चा घन आहे.

परिमेय संख्यांचा घन करणे.

उदा. (1) 17 चा घन करा.

$17^3 = 17 \times 17 \times 17$

$= 4913$

उदा. (2) (-6) चा घन करा.

$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

$= -216$

उदा. (3) $\left(\frac{2}{5}\right)$ चा घन करा.

$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right) \times \left(\frac{2}{5}\right)$

$= -\frac{8}{125}$

उदा. (4) (1.2) चा घन करा.

$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2$

$= 1.728$

उदा. (5) (0.02) चा घन करा.

$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02$

$= 0.000008$

जरा डोके चालवा

उदा (1) मध्ये 17 ही धन संख्या आहे. त्या संख्येचा घन 4913 हाही धन आहे.

उदा (2) मध्ये -6 या संख्येचा घन -216 आहे. आणखी काही धन व ऋण संख्या घेऊन त्यांचे घन करून पाहा. त्यावरून संख्येचे चिन्ह आणि त्या संख्येच्या घनाचे चिन्ह यांत कोणता संबंध आढळतो हे शोधा.

उदा (4) व (5) मध्ये दिलेल्या संख्यांतील दशांश चिन्हानंतर येणाऱ्या अंकांची संख्या आणि त्या संख्यांच्या घनामध्ये येणाऱ्या दशांश चिन्हानंतरच्या अंकांची संख्या यांमध्ये कोणता संबंध आढळतो ?

घनमूळ काढणे

दिलेल्या संख्येचे मूळ अवयव पद्धतीने वर्गमूळ कसे काढायचे हे आपण पाहिले आहे. त्याच पद्धतीने आपण घनमूळ काढू.

उदा. (1) 216 चे घनमूळ काढा.

उकल : प्रथम 216 चे मूळ अवयव पाडू. $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 व 2 हे अवयव प्रत्येकी 3 वेळा आले आहेत. म्हणून ते एकेकदा घेऊन पुढीलप्रमाणे गट पाडू.

$\therefore\ 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) \quad = (3 \times 2)^3 = 6^3$

$\therefore\ \sqrt[3]{216} = 6$ म्हणजेच $(216)^{\frac{1}{3}} = 6$

उदा. (2) -1331 चे घनमूळ काढा.

उकल : -1331 चे घनमूळ काढण्यासाठी प्रथम 1331 चे मूळ अवयव काढू.

$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$

$-1331 = (-11) \times (-11) \times (-11)$
$= (-11)^3$

$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$

उदा.(4) $\sqrt[3]{0.125}$ काढा.

उकल : $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}}$

$= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \quad \cdots \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad \frac{a^m}{b^m}$

$= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \quad \cdots \left(a^m\right)^{\frac{1}{m}} \quad a$

$= \frac{5}{10} \quad = 0.5$

उदा.(3) 1728 चे घनमूळ काढा.

उकल : $1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3$ .... $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12$ (लक्षात घ्या की, -1728 चे घनमूळ -12 येते.)

सरावसंच 3.3

1. खालील संख्यांची घनमुळे काढा.

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. घनमूळ काढा. (1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. जर $\sqrt[3]{729} = 9$ तर $\sqrt[3]{0.000729}$ = किती ?

उत्तरसूची

सरावसंच 3.1 (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 चे चौथे मूळ (2) 49 चे वर्गमूळ (3) 15 चे पाचवे मूळ
(4) 512 चे नववे मूळ (5) 100 चे एकोणीसावे मूळ (6) 6 चे सातवे मूळ

सरावसंच 3.2 1. (2) 45 च्या पाचव्या मुळाचा चौथा घात, 45 च्या चौथ्या घाताचे पाचवे मूळ
(3) 81 च्या सातव्या मुळाचा सहावा घात, 81 च्या सहाव्या घाताचे सातवे मूळ
(4) 100 च्या दहाव्या मुळाचा चौथा घात, 100 च्या चौथ्या घाताचे दहावे मूळ
(5) 21 च्या सातव्या मुळाचा तिसरा घात, 21 च्या तिसऱ्या घाताचे सातवे मूळ

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{3}}$

सरावसंच 3.3 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14 (6) 32

2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ 3. 0.09

CASL3H

4 त्रिकोणाचे शिरोलंब व मध्यगा

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण त्रिकोणाच्या कोनांचे दुभाजक एकसंपाती असतात व त्रिकोणाच्या बाजूंचे लंबदुभाजक एकसंपाती असतात यांचा अभ्यास केला आहे. त्यांच्या संपात बिंदूस अनुक्रमे अंतर्मध्य व परिमध्य म्हणतात हेही आपल्याला माहीत आहे.

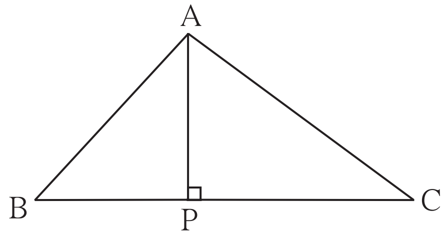
कृती :

एक रेषा काढा. रेषेबाहेर कोणताही एक बिंदू घ्या. गुण्याच्या साहाय्याने त्या बिंदूमधून रेषेवर लंब काढा.

जाणून घेऊया.

शिरोलंब (Altitude)

त्रिकोणाच्या शिरोबिंदूतून त्याच्या समोरील बाजूवर काढलेल्या लंब रेषाखंडास त्या त्रिकोणाचा शिरोलंब म्हणतात. Δ ABC मध्ये रेख AP हा पाया BC वरील शिरोलंब आहे.



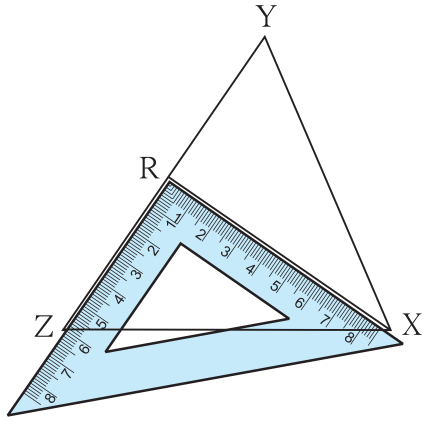
त्रिकोणाचे शिरोलंब काढणे :

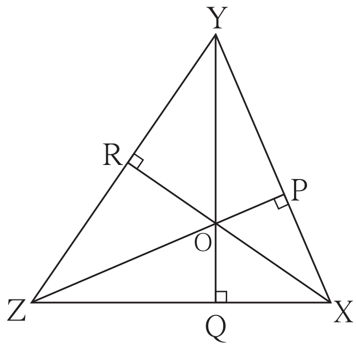
1. Δ XYZ हा कोणताही त्रिकोण काढा.
2. पाया YZ च्या समोरील X या शिरोबिंदूतून गुण्याच्या साहाय्याने लंब काढा. तो YZ ला जेथे छेदतो त्या बिंदूला R नाव द्या. रेख XR हा पाया YZ वरील शिरोलंब आहे.
3. रेख XZ हा पाया विचारात घ्या. त्याच्या समोरील शिरोबिंदू Y मधून रेख XZ वर लंब टाका. रेख YQ $\perp$ रेख XZ.
4. रेख XY हा पाया विचारात घ्या. त्याच्या समोरील शिरोबिंदू Z मधून रेख XY वर लंब टाका. रेख ZP $\perp$ रेख XY.

   रेख XR, रेख YQ, रेख ZP हे Δ XYZ शिरोलंब आहेत.

   हे तीनही शिरोलंब एकसंपाती आहेत हे लक्षात घ्या.

   या संपातबिंदूला त्रिकोणाचा शिरोलंबसंपात किंवा लंबसंपात असे म्हणतात. तो 'O' या अक्षराने दर्शवतात.

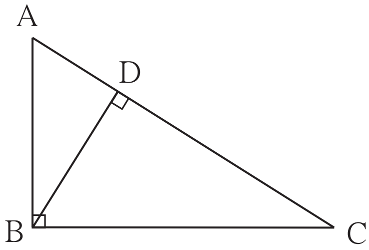




त्रिकोणाच्या लंबसंपात बिंदूचे स्थान :

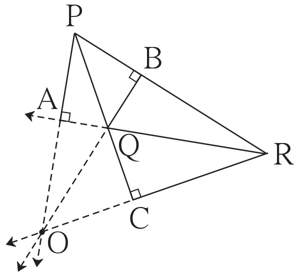
कृती I :

कोणताही एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याचे सर्व शिरोलंब काढा. ते कोणत्या बिंदूत मिळतात ते लिहा.



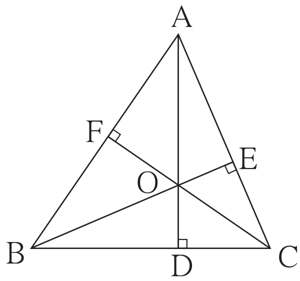
कृती II :

कोणताही एक विशालकोन त्रिकोण काढा. त्याचे तीनही शिरोलंब काढा. ते एकमेकांना मिळतात का? या शिरोलंबांना समाविष्ट करणाऱ्या रेषा काढा. त्या त्रिकोणाच्या बाह्यभागातील एकाच बिंदूतून जातात हे अनुभवा.



कृती III :

Δ ABC हा एक लघुकोन त्रिकोण काढा. त्याचे सर्व शिरोलंब काढा. लंबसंपाताचे स्थान कोठे आहे, हे पाहा.



हे मला समजले.

त्रिकोणाचे शिरोलंब एकाच बिंदूतून जातात म्हणजेच हे शिरोलंब एकसंपाती (Concurrent) असतात. त्यांच्या संपात बिंदूस लंबसंपात बिंदू (Orthocentre) म्हणतात. तो 'O' या अक्षराने दर्शवतात.

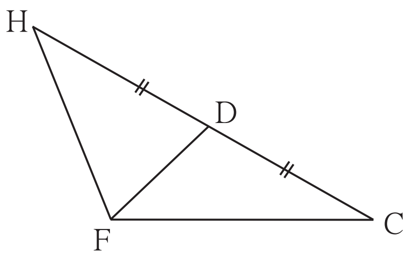
- काटकोन त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू हा काटकोन करणाऱ्या शिरोबिंदूवर असतो.
- विशालकोन त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू हा त्या त्रिकोणाच्या बाह्यभागात असतो.
- लघुकोन त्रिकोणाचा लंबसंपात बिंदू हा त्या त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असतो.

जाणून घेऊया.

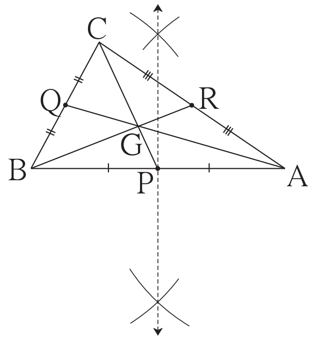
मध्यगा (Median)

त्रिकोणाचा शिरोबिंदू आणि समोरील बाजूचा मध्यबिंदू जोडणाऱ्या रेषाखंडास त्रिकोणाची मध्यगा म्हणतात.

Δ HCF मध्ये रेख FD ही पाया HC वरील मध्यगा आहे.



त्रिकोणाच्या मध्यगा काढणे :



1. Δ ABC काढा.
2. बाजू AB चा मध्यबिंदू मिळवा. त्याला P नाव द्या. रेख CP काढा.
3. बाजू BC चा मध्यबिंदू मिळवा. त्याला Q नाव द्या. रेख AQ काढा.
4. बाजू AC चा मध्यबिंदू मिळवा. त्याला R नाव द्या. रेख BR काढा.

Δ ABC च्या रेख PC, रेख QA, रेख BR या मध्यगा आहेत.

त्या एकसंपाती आहेत हे लक्षात घ्या. त्यांच्या संपातबिंदूला **मध्यगासंपात** म्हणतात. तो G या अक्षराने दाखवला जातो.

कृती IV : एक काटकोन त्रिकोण, एक विशालकोन त्रिकोण व एक लघुकोन त्रिकोण काढून त्यांच्या मध्यगा काढा. त्या मध्यगा एकसंपाती आहेत हे अनुभवा.

त्रिकोणाच्या मध्यगासंपातबिंदूचा गुणधर्म :

- Δ ABC हा कोणताही एक मोठा त्रिकोण काढा.
- Δ ABC च्या रेख AR, रेख BQ व रेख CP या मध्यगा काढा. संपातबिंदूला G नाव द्या.

आकृतीतील रेषाखंडांच्या लांबी मोजून सारणीतील रिकाम्या चौकटींत भरा.

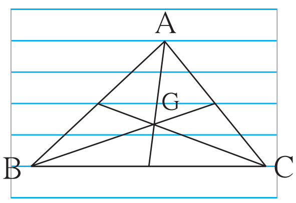
l(AG) = $\boxed{}$	l(GR) = $\boxed{}$	l(AG) : (GR) = $\boxed{\ :\ }$
l(BG) = $\boxed{}$	l(GQ) = $\boxed{}$	l(BG) : (GQ) = $\boxed{\ :\ }$
l(CG) = $\boxed{}$	l(GP) = $\boxed{}$	l(CG) : (GP) = $\boxed{\ :\ }$

ही सर्व गुणोत्तरे जवळपास 2:1 आहेत हे अनुभवा.

हे मला समजले.

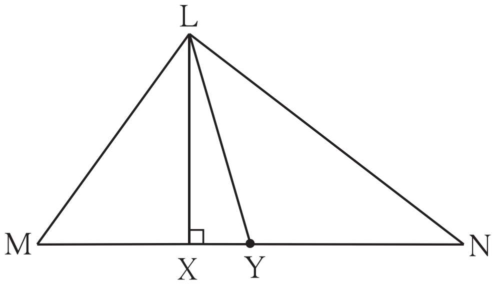
त्रिकोणाच्या मध्यगा एकसंपाती असतात. त्यांच्या संपातबिंदूस मध्यगासंपात (Centroid) म्हणतात. तो G या अक्षराने दर्शवला जातो. कोणत्याही त्रिकोणात G चे स्थान त्रिकोणाच्या अंतर्भागात असते. संपातबिंदूमुळे प्रत्येक मध्यगेचे 2:1 या गुणोत्तरात विभाजन होते.

चला, चर्चा करूया.



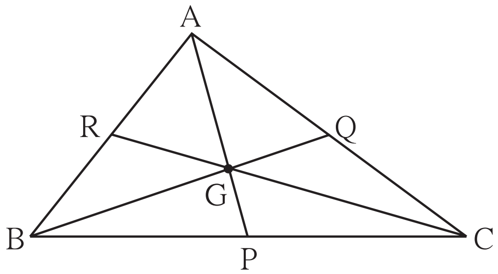
एका विद्यार्थ्याने वहीच्या कागदावरील पाच समांतर रेषा वापरून Δ ABC काढला व G हा मध्यगासंपात शोधला. तर त्याने ठरवलेले G चे स्थान बरोबर आहे हे कसे ठरवाल ?

सरावसंच 4.1

1. 

Δ LMN मध्ये ...... हा शिरोलंब आहे व ...... ही मध्यगा आहे. (रिकाम्या जागेत योग्य रेषाखंडांची नावे लिहा.)

2. Δ PQR एक लघुकोन त्रिकोण काढा व त्याचे तीनही शिरोलंब काढा. संपातबिंदूला 'O' नाव द्या.
3. Δ STV हा एक विशालकोन त्रिकोण काढा व त्याच्या मध्यगा काढून त्यांचा मध्यगासंपात दाखवा.
4. Δ LMN हा एक विशालकोन त्रिकोण काढा. त्याचे सर्व शिरोलंब काढा. संपातबिंदू O ने दाखवा.
5. Δ XYZ हा एक काटकोन त्रिकोण काढा. त्याच्या मध्यगा काढा व संपातबिंदू G ने दाखवा.
6. कोणताही एक समद्विभुज त्रिकोण काढा. त्याच्या सर्व मध्यगा व सर्व शिरोलंब काढा. त्यांच्या संपातबिंदूंबद्दलचे तुमचे निरीक्षण नोंदवा.
7. रिकाम्या जागा भरा.



Δ ABC चा G हा मध्यगा संपातबिंदू आहे.

(1) जर $l(RG) = 2.5$ तर $l(GC) =$ ......

(2) जर $l(BG) = 6$ तर $l(BQ) =$ ......

(3) जर $l(AP) = 6$ तर $l(AG) =$ ..... व $l(GP) =$ .....

हे करून पाहा.

(I) : कोणताही एक समभुज त्रिकोण काढा. त्या त्रिकोणाचा परिकेंद्र (C), अंतर्वर्तुळ केंद्र (I), मध्यगासंपात बिंदू (G) व शिरोलंबसंपात बिंदू (O) काढा. निरीक्षण नोंदवा.

(II): कोणताही एक समद्विभुज त्रिकोण काढा. त्याचा मध्यगासंपात बिंदू, शिरोलंबसंपात बिंदू, परिकेंद्र, अंतर्वर्तुळकेंद्र हे एकरेषीय आहेत हे पडताळून पाहा.

उत्तरसूची

सरावसंच 4.1

1. रेख LX आणि रेख LY   7. (1) 5, (2) 9, (3) 4, 2

CB2H55

5 विस्तार सूत्रे

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत, आपण पुढील विस्तार सूत्रांचा अभ्यास केला आहे.

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,

(iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

वरील विस्तार सूत्रांचा उपयोग करून खालील चौकटींत योग्य ते पद लिहा.

(i) $(x+2y)^2 = x^2 + \square + 4y^2$

(ii) $(2x-5y)^2 = \square - 20xy + \square$

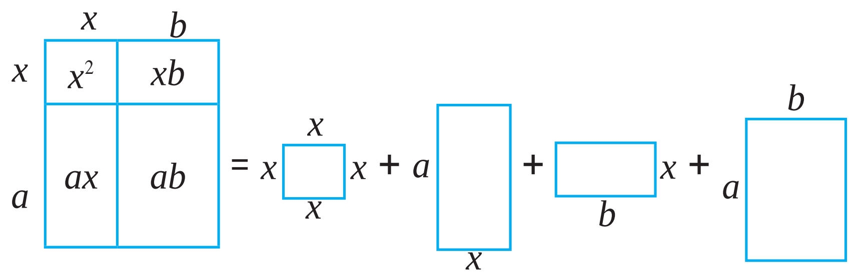
(iii) $(101)^2 = (100+1)^2 = \square + \square + 1^2 = \square$

(iv) $(98)^2 = (100-2)^2 = 10000 - \square + \square = \square$

(v) $(5m+3n)(5m-3n) = \square - \square = \square - \square$

जाणून घेऊया.

कृती : आयत व चौरस यांच्या क्षेत्रफळांच्या साहाय्याने $(x+a)(x+b)$ याचा विस्तार करा.



$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(I) $(x+a)(x+b)$ चा विस्तार (Expansion of $(x+a)(x+b)$)

$(x+a)$ व $(x+b)$ या एक पद समान असलेल्या द्विपदी आहेत. या द्विपदींचा गुणाकार करू.

$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b) = x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

$\therefore \boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$

विस्तार करा.

उदा. (1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

उदा. (2) $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

उदा. (3) $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (- 3b)]2a + [3b \times (-3b)]$

$= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

उदा. (4) $\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

उदा. (5) $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

सरावसंच 5.1

1. विस्तार करा.

(1) $(a + 2)(a - 1)$ (2) $(m - 4)(m + 6)$ (3) $(p + 8)(p - 3)$

(4) $(13 + x)(13 - x)$ (5) $(3x + 4y)(3x + 5y)$ (6) $(9x - 5t)(9x + 3t)$

(7) $\left(m+\frac{2}{3}\right)\left(m \quad \frac{7}{3}\right)$ (8) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x \quad \frac{1}{x}\right)$ (9) $\left(\frac{1}{y}+4\right)\left(\frac{1}{y} \quad 9\right)$

जाणून घेऊया.

(II) $(a + b)^3$ चा विस्तार (Expansion of $(a + b)^3$)

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$\therefore \boxed{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$

या विस्तार सूत्राचा उपयोग करून सोडवलेली काही उदाहरणे अभ्यासू,

उदा. (1) $(x + 3)^3$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ येथे $a = x$ व $b = 3$ आहे.

$$\therefore\ (x+3)^3 = (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3$$
$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

उदा. (2) $(3x + 4y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3$
$$= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3$$
$$= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64\,y^3$$

उदा. (3) $\left(\frac{2m}{n}+\frac{n}{2m}\right)^3$ $\left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3$
$$\frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3}$$
$$\frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}$$

उदा. (4) $(41)^3 = (40+1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3$
$$= 64000 + 4800 + 120 + 1 \quad = 68921$$

सरावसंच 5.2

1. विस्तार करा.

(1) $(k+4)^3$ (2) $(7x+8y)^3$ (3) $(7+m)^3$ (4) $(52)^3$

(5) $(101)^3$ (6) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$ (7) $\left(2m+\frac{1}{5}\right)^3$ (8) $\left(\frac{5x}{y}+\frac{y}{5x}\right)^3$

कृती : a व b या सोईच्या बाजू असलेला प्रत्येकी एक घन तयार करा. लांबी व रुंदी a आणि उंची b अशा 3 इष्टिकाचिती तसेच लांबी व रुंदी b आणि उंची a अशा 3 इष्टिकाचिती तयार करा. या घनाकृती योग्य प्रकारे रचून $(a+b)$ बाजू असलेला घन तयार करा.

जाणून घेऊया.

(III) $(a-b)^3$ चा विस्तार (Expansion of $(a-b)^3$)

$$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a-b)(a-b)^2$$
$$= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2)$$
$$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$\therefore \quad \boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$

उदा. (1) विस्तार करा. $(x - 2)^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ येथे, $a = x$ व $b = 2$ घेऊन,

$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

उदा. (2) $(4p - 5q)^3$ याचा विस्तार करा.

$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$

$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$

उदा. (3) विस्तार सूत्राचा उपयोग करून 99 चा घन करा. $(99)^3 = (100 - 1)^3$

$(99)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$

$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$

उदा. (4) सोपे रूप द्या.

(i) $(p + q)^3 + (p - q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$

$= 2p^3 + 6pq^2$

(ii) $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$

$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$

$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$

$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$

$= 72x^2y + 54y^3$

हे मला समजले.

(i) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

(ii) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

सरावसंच 5.3

1. विस्तार करा.

(1) $(2m - 5)^3$ (2) $(4 - p)^3$ (3) $(7x - 9y)^3$ (4) $(58)^3$

(5) $(198)^3$ (6) $\left(2p \quad \frac{1}{2p}\right)^3$ (7) $\left(1 \quad \frac{1}{a}\right)^3$ (8) $\left(\frac{x}{3} \quad \frac{3}{x}\right)^3$

2. सरळरूप द्या.

(1) $(2a + b)^3 - (2a - b)^3$ (2) $(3r - 2k)^3 + (3r + 2k)^3$

(3) $(4a - 3)^3 - (4a + 3)^3$ (4) $(5x - 7y)^3 + (5x + 7y)^3$

जाणून घेऊया.

(IV) $(a + b + c)^2$ चा विस्तार [Expansion of $(a + b + c)^2$]

$$\begin{aligned}(a + b + c)^2 &= (a + b + c) \times (a + b + c)\\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c)\\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2\\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\end{aligned}$$

$\therefore$ $\boxed{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac}$ हे सूत्र मिळते.

उदा. (1) विस्तार करा $(p + q + 3)^2$

$= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3$

$= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p \quad = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9$

उदा. (2) वर्ग विस्ताराच्या पायऱ्यांतील चौकटींत योग्य पदे लिहा.

$(2p + 3m + 4n)^2$

$= (2p)^2 + (3m)^2 + \boxed{} + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \boxed{} \times 4n + 2 \times 2p \times \boxed{}$

$= \boxed{} + 9m^2 + \boxed{} + 12pm + \boxed{} + \boxed{}$

उदा. (3) सरळरूप द्या. $(l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2$

$= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln$

$= 2l^2 + 8m^2 + 2n^2 + 4ln$

सरावसंच 5.4

1. विस्तार करा. (1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$
(3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$

2. सरळरूप द्या. (1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$
(2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

उत्तरसूची

सरावसंच 5.1 (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$
(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$
(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (6) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

सरावसंच 5.2 (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$
(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301
(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$
(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

सरावसंच 5.3 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$
(3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$ (4) 1,95,112
(5) 77,62,392 (6) $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$
(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} \quad \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} \quad x + \frac{9}{x} \quad \frac{27}{x^3}$

2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$
(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

सरावसंच 5.4 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$
(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$
(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$
(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$

2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$
(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$

CBBD6S

6 बैजिक राशींचे अवयव

जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत आपण $ax + ay$ आणि $a^2 - b^2$ या रूपातील बैजिक राशींचे अवयव अभ्यासले आहेत.

उदाहरणार्थ, (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

जाणून घेऊया.

वर्ग त्रिपदीचे अवयव (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ या स्वरूपाच्या बैजिक राशीला वर्ग त्रिपदी म्हणतात.

आपल्याला हे माहीत आहे की $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore$ $x^2 + (a + b)x + ab$ चे $(x + a)$ व $(x + b)$ हे अवयव आहेत.

$x^2 + 5x + 6$ या वर्ग त्रिपदीचे अवयव काढण्यासाठी तिची तुलना $x^2 + (a + b)x + ab$ या त्रिपदीशी करून, $a + b = 5$ आणि $ab = 6$. म्हणून 6 चे असे अवयव पाडू की त्यांची बेरीज 5 येईल आणि त्रिपदी $x^2 + (a + b)x + ab$ या रूपात लिहून तिचे अवयव पाडू.

$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2$ .... $x^2 + (a + b)x + ab$

$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3}$ .... $(3 + 2)$ ला x ने गुणू. मिळालेल्या चार पदांचे दोन गट पाडू व अवयव मिळवू.

$= x(x + 3) + 2(x + 3)$ $\quad = (x + 3)(x + 2)$

दिलेल्या वर्गत्रिपदीचे अवयव पाडण्यासाठी खालील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) $2x^2 - 9x + 9$ चे अवयव पाडा.

उकल : वर्गपदाचा सहगुणक व स्थिरपदी यांचा गुणाकार करू येथे तो गुणाकार $2 \times 9 = 18$ आहे.

आता 18 चे असे अवयव पाडू की त्यांची बेरीज मधल्या पदाच्या सहगुणकाएवढी, म्हणजे -9 येईल.

$18 = (-6) \times (-3)$; $(-6) + (-3) = -9$

$-9x$ हे पद $-6x - 3x$ असे लिहू

$2x^2 - 9x + 9$

$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$

$= 2x\,\underline{(x - 3)} - 3\underline{(x - 3)}$

$= (x - 3)(2x - 3)$

$\therefore$ $2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$

उदा. (2) $2x^2 + 5x - 18$ चे अवयव पाडा.

उकल : $2x^2 + 5x - 18$ (−36: +9, −4)

$= \underline{2x^2 + 9x} \; \underline{-4x - 18}$

$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$

$= (2x + 9)(x - 2)$

उदा. (3) $x^2 - 10x + 21$ चे अवयव पाडा.

उकल : $x^2 - 10x + 21$ (+21: −7, −3)

$= \underline{x^2 - 7x} \; \underline{- 3x + 21}$

$= x(x - 7) - 3(x - 7)$

$= (x - 7)(x - 3)$

उदा. (4) $2y^2 - 4y - 30$ चे अवयव पाडा.

उकल : $2y^2 - 4y - 30$

$= 2(y^2 - 2y - 15)$ .... सर्व पदांमधून 2 हा सामाईक अवयव काढून

$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15})$ .... (−15: −5, +3)

$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$

$= 2(y - 5)(y + 3)$

सरावसंच 6.1

1. अवयव पाडा.

(1) $x^2 + 9x + 18$	(2) $x^2 - 10x + 9$	(3) $y^2 + 24y + 144$
(4) $5y^2 + 5y - 10$	(5) $p^2 - 2p - 35$	(6) $p^2 - 7p - 44$
(7) $m^2 - 23m + 120$	(8) $m^2 - 25m + 100$	(9) $3x^2 + 14x + 15$
(10) $2x^2 + x - 45$	(11) $20x^2 - 26x + 8$	(12) $44x^2 - x - 3$

जाणून घेऊया.

$a^3 + b^3$ चे अवयव (Factors of $a^3 + b^3$)

आपणांस माहीत आहे की, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

उजव्या बाजूकडील राशीतून $3ab$ सामाईक घेऊन या विस्तारसूत्राची मांडणी पुढीलप्रमाणेही करता येते.

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

आता, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$.......... बाजूंची अदलाबदल करून.

$\therefore\ a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$

$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$\therefore\ \boxed{\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}}$

दोन घनांच्या बेरजेच्या अवयवांच्या वरील सूत्राचा उपयोग करून काही उदाहरणे सोडवू.

उदा. (1) $x^3 + 27y^3 = x^3 + (3y)^3$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - x(3y) + (3y)^2]$$

$$= (x + 3y)\,[x^2 - 3xy + 9y^2]$$

उदा. (2) $8p^3 + 125q^3 = (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q)\,[(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2]$

$$= (2p + 5q)\,(4p^2 - 10pq + 25q^2)$$

उदा. (3) $m^3 + \frac{1}{64m^3} = m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left[m^2 \quad m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right]$

$$= \left(m + \frac{1}{4m}\right)\left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)$$

उदा. (4) $250p^3 + 432q^3 = 2(125p^3 + 216q^3)$

$$= 2\,[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)\,(25p^2 - 30pq + 36q^2)$$

सरावसंच 6.2

1. अवयव पाडा. (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$ (4) $2l^3 + 432m^3$

(5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$ (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

जाणून घेऊया.

$a^3 - b^3$ चे अवयव (Factors of $a^3 - b^3$)

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

आता, $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) = (a - b)^3$

$$\therefore \quad a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab\,(a - b)]$$

$$= (a - b)\,[(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b)\,(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \quad \boxed{\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}}$$

दोन घनांच्या वजाबाकीचे अवयव पाडण्याचे सूत्र वापरून काही राशींचे अवयव पाडू.

उदा. (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$\therefore\ x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$= (x - 2y)\ (x^2 + 2xy + 4y^2)$

उदा. (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 \quad = (3p - 5q)\ (9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (3) $54p^3 - 250q^3 = 2\,[27p^3 - 125q^3] = 2\,[(3p)^3 - (5q)^3]$

$= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

उदा. (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a \quad \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

उदा. (5) सोपे रूप द्या : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

उकल : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -\,3a^2b + 3ab^2$

उदा. (6) सोपे रूप द्या : $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

उकल : $a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$ या सूत्रावरून

$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

$= [(2x+3y)-(2x-3y)][(2x+3y)^2+(2x+3y)(2x-3y)+(2x-3y)^2]$

$= [2x + 3y - 2x + 3y]\ [4x^2+12xy+9y^2 + 4x^2-9y^2+4x^2-12xy+9y^2]$

$= 6y\ (12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$

हे मला समजले.

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)\ (a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)\ (a^2 + ab + b^2)$

सरावसंच 6.3

1. अवयव पाडा. (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. सोपे रूप द्या. (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

 जाणून घेऊया.

गुणोत्तरीय बैजिक राशी (Rational algebraic expressions)

A आणि B या दोन बैजिक राशी असतील तर $\frac{A}{B}$ या राशीला गुणोत्तरीय बैजिक राशी म्हणतात. गुणोत्तरीय बैजिक राशींना सोपे रूप देताना कराव्या लागणाऱ्या बेरीज वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार इत्यादी क्रिया, परिमेय संख्यांवरील क्रियांप्रमाणेच असतात. बैजिक राशींचे भागाकार करताना छेद किंवा भाजक शून्य असू शकत नाही हे ध्यानात घ्या.

उदा. (1) सरळ रूप द्या. $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

उकल : $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12}\times\frac{a-4}{a^2-4}$

$$=\frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)}\times\frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$$

$$=\frac{1}{a-2}$$

उदा. (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

उकल : $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16}\times\frac{14x-8}{x+2}$

$$=\frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)}\times\frac{2(7x-4)}{(x+2)}$$

$$=2$$

उदा. (3) सरळ रूप द्या. $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

उकल : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}=\frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}=\frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$

सरावसंच 6.4

1. सोपे रूप द्या.

(1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2}\times\frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7}\times\frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$

(4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)}\times\frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12}\div\frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$

(7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3}\div\frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3}\times\frac{1+x+x^2}{1+x}$

सरावसंच 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$

(4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$

(7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$

(10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

सरावसंच 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$

(3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$

(5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y+\frac{1}{2y}\right)\left(y^2 \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4y^2}\right)$

(7) $\left(a+\frac{2}{a}\right)\left(a^2 \quad 2+\frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1+\frac{q}{5}\right)\left(1 \quad \frac{q}{5}+\frac{q^2}{25}\right)$

सरावसंच 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$

(3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$

(5) $\left(2p \quad \frac{3}{p}\right)\left(4p^2+6+\frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$

(7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a \quad \frac{2}{b}\right)\left(a^2+\frac{2a}{b}+\frac{4}{b^2}\right)$

2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$

(4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

सरावसंच 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2+6xy+9y^2}{2x+3y}$

(4) 1 (5) $\frac{(x \quad 1)(x \quad 2)(x+2)}{(x \quad 3)^2(x \quad 4)}$

(6) $\frac{x \quad 2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1 \quad x}{1+x}$

CBK98F

7 चलन

जरा आठवूया.

एक डझन वह्यांची किंमत 240 रुपये असेल तर 3 वह्यांची किंमत किती ? 9 वह्यांची किंमत किती ? 24 वह्यांची किंमत किती ? 50 वह्यांची किंमत किती ? हे काढण्यासाठी खालील सारणी पूर्ण करा.

वह्यांची संख्या (x)	12	3	9	24	50	1
किंमत (रुपये) (y)	240	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{20}$

वरील सारणीवरून असे दिसते की प्रत्येक जोडीत वह्यांची संख्या (x) आणि त्यांची किंमत (y) यांचे गुणोत्तर $\frac{1}{20}$ आहे. ते स्थिर आहे. वह्यांची संख्या व त्यांची किंमत समप्रमाणात आहेत. अशा उदाहरणात दोनपैकी एक संख्या वाढली तर दुसरी त्याच प्रमाणात वाढते.

जाणून घेऊया.

समचलन (Direct variation)

x आणि y समप्रमाणात आहेत हेच विधान x आणि y समचलनात आहेत किंवा x आणि y यांच्यामधे समचलन आहे असे लिहिता येते. तसेच हे विधान चिन्हाचा वापर करून $x \propto y$ असे लिहिता येते.

[α(अल्फा) हे, चलन याअर्थी वापरले जाणारे ग्रीक अक्षर आहे.]

$x \propto y$ हे समीकरणाच्या रूपात $x = \text{k}y$ असे लिहितात; येथे k स्थिरपद आहे.

$x = \text{k}y$ किंवा $\frac{x}{y} = \text{k}$ ही मांडणी चलनाचे समीकरण आहे. k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

खालील विधाने चलनाचे चिन्ह वापरून कशी लिहिली आहेत, हे पाहा.

(i) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ त्याच्या त्रिज्येच्या वर्गाशी समप्रमाणात असते.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = A, त्रिज्या = r ही चले घेऊन वरील विधान $A \propto r^2$ असे लिहिता येते.

(ii) द्रवाचा दाब (p) हा त्या द्रवाच्या खोलीशी (d) समचलनात असतो, हे विधान $p \propto d$ असे लिहितात.

समचलनाच्या चिन्हांकित मांडणीतील सर्व संकल्पना समजण्यासाठी पुढील उदाहरणे अभ्यासा.

उदा. (1) x हे y शी समचलनात आहे, $x = 5$ असताना $y = 30$, तर चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

उकल : x हे y शी समचलनात आहे, म्हणजेच $x \alpha y$

$\therefore x = ky$ .... k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

$x = 5$ तेव्हा $y = 30$ हे दिले आहे.

$\therefore 5 = k \times 30 \therefore k = \frac{1}{6}$ (चलनाचा स्थिरांक)

यावरून $x = ky$ म्हणजेच $x = \frac{y}{6}$ किंवा $y = 6x$ हे समीकरण मिळते.

उदा. (2) शेंगदाण्यांची किंमत त्यांच्या वजनाच्या समप्रमाणात आहे. 5 किग्रॅ शेंगदाण्यांची किंमत ₹ 450 असेल, तर 1 क्विंटल शेंगदाण्यांची किंमत काढा. (1 क्विंटल = 100 किग्रॅ)

उकल : शेंगदाण्यांची किंमत x आणि शेंगदाण्यांचे वजन y मानू.

x व y हे समचलनात आहे हे दिले आहे. म्हणजेच $x \alpha y$ म्हणून $x = ky$

परंतु $x = 450$ असताना $y = 5$ हे दिले आहे, यावरून k काढू.

$x = ky$ $\therefore 450 = 5k$ $\therefore k = 90$ (चलनाचा स्थिरांक)

चलनाचे समीकरण $x = 90y$.

$\therefore y = 100$ असताना $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 क्विंटल शेंगदाण्यांची किंमत 9000 रुपये होईल.

सरावसंच 7.1

1. चलनाचे चिन्ह वापरून लिहा.

(1) वर्तुळाचा परीघ (c) त्याच्या त्रिज्येशी (r) समप्रमाणात असतो.

(2) मोटारमध्ये भरलेले पेट्रोल (l) व तिने कापलेले अंतर (d)समचलनात असतात.

2. सफरचंदांची किंमत व सफरचंदांची संख्या यांत समचलन आहे. यावरून खालील सारणी पूर्ण करा.

सफरचंदांची संख्या (x)	1	4	. . .	12	. . .
सफरचंदांची किंमत (y)	8	32	56	. . .	160

3. जर $m \alpha n$ आणि $m = 154$ असताना $n = 7$, तर $n = 14$ असताना m ची किंमत काढा.

4. n हे m शी समचलनात आहे, तर पुढील सारणी पूर्ण करा.

m	3	5	6.5	. . .	1.25
n	12	20	. . .	28	. . .

5. y हे x च्या वर्गमुळाच्या समचलनात बदलते आणि जेव्हा $x = 16$ तेव्हा $y = 24$ तर, चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

6. सोयाबीनचे पीक काढण्यासाठी 4 मजुरांना ₹ 1000 मजुरी द्यावी लागते. जर मजुरीची रक्कम आणि मजुरांची संख्या समचलनात असतील तर 17 मजुरांना किती मजुरी द्यावी लागेल ?

जरा आठवूया.

कवायतीसाठी मुलांच्या रांगा केल्या. प्रत्येक रांगेतील मुलांची संख्या व रांगांची संख्या खालीलप्रमाणे आहे.

रांगेतील मुलांची संख्या	40	10	24	12	$\boxed{8}$
रांगाची संख्या	6	24	$\boxed{10}$	$\boxed{20}$	30

वरील सारणीवरून असे दिसते की, प्रत्येक जोडीत रांगेतील मुलांची संख्या व एकूण रांगांची संख्या यांचा गुणाकार 240 आहे. म्हणजेच हा गुणाकार स्थिर आहे प्रत्येक रांगेतील मुलांची संख्या आणि रांगांची संख्या या व्यस्तप्रमाणात आहेत.

जेव्हा दोन संख्यापैकी एक संख्या वाढली की दुसरी त्याच प्रमाणात कमी होते तेव्हा त्या दोन संख्या व्यस्त प्रमाणात असतात. उदाहणार्थ एक संख्या दुप्पट झाली की दुसरी निमपट होते.

जाणून घेऊया.

व्यस्त चलन (Inverse variation)

x आणि y या संख्या व्यस्त प्रमाणात आहेत हेच विधान x आणि y व्यस्त चलनात आहेत, असे लिहितात. x आणि y व्यस्त चलनात असतील तर $x \times y$ हे स्थिरपद असते. त्याला k मानून उदाहरणे सोडवणे सोपे जाते.

x आणि y व्यस्त चलनात आहेत हे $x \propto \frac{1}{y}$ असे दर्शवतात.

$x \propto \frac{1}{y}$ म्हणजेच $x = \frac{k}{y}$ किंवा $x \times y = \mathrm{k}$ ही मांडणी चलनाचे समीकरण आहे. k हा चलनाचा स्थिरांक आहे.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जर a हे b शी व्यस्त चलनात असेल तर खालील सारणी पूर्ण करा.

a	6	12	15	. . .
b	20	. . .	. . .	4
$a \times b$	120	120	. . .	. . .

उकल : (i) $a \propto \frac{1}{b}$ म्हणजेच $a \times b = \mathrm{k}$

$a = 6$ तेव्हा $b = 20$ $\therefore \mathrm{k} = 6 \times 20 = 120$ (चलनाचा स्थिरांक)

(ii) $a = 12$ तेव्हा $b = ?$	(iii) $a = 15$ तेव्हा $b = ?$	(iv) $b = 4$ तेव्हा $a = ?$
$a \times b = 120$	$a \times b = 120$	$a \times b = 120$
$\therefore 12 \times b = 120$	$\therefore 15 \times b = 120$	$\therefore a \times 4 = 120$
$\therefore \quad b = 10$	$\therefore \quad b = 8$	$\therefore \quad a = 30$

उदा. (2) $f \ \alpha \ \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ तेव्हा $f = 18$

तर (i) $d = 10$ असताना f ची किंमत काढा. (ii) $f = 50$ असताना d काढा.

उकल : $f \ \alpha \ \frac{1}{d^2}$ $\quad \therefore f \times d^2 = k$, $\quad d = 5$ तेव्हा $f = 18$ यावरून k काढू.

$18 \times 5^2 = k \quad \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (चलनाचा स्थिरांक)

(i) $d = 10$ तर $f = ?$	(ii) $f = 50$, $d = ?$
$f \times d^2 = 450$	$f \times d^2 = 450$
$\therefore f \times 10^2 = 450$	$\therefore 50 \times d^2 = 450$
$\therefore f \times 100 = 450$	$\therefore \quad d^2 = 9$
$\therefore \quad f = 4.5$	$\therefore \quad d = 3$ किंवा $d = -3$

सरावसंच 7.2

1 . एक काम पूर्ण करण्यासाठी लावलेल्या मजुरांची संख्या आणि काम पूर्ण होण्यासाठी लागणारे दिवस यांची माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ती सारणी पूर्ण करा.

मजुरांची संख्या	30	20		10	
दिवस	6	9	12		36

2. प्रत्येक उदाहरणात चलनाचा स्थिरांक काढा व चलनाचे समीकरण लिहा.

(1) $p \ \alpha \ \frac{1}{q}$; $p = 15$ तेव्हा $q = 4$ $\qquad$ (2) $z \ \alpha \ \frac{1}{w}$; जेव्हा $z = 2.5$ तेव्हा $w = 24$

(3) $s \ \alpha \ \frac{1}{t^2}$; जेव्हा $s = 4$ तेव्हा $t = 5$ $\qquad$ (4) $x \ \alpha \ \frac{1}{\sqrt{y}}$; जेव्हा $x = 15$ तेव्हा $y = 9$

3. सफरचंदांच्या राशीतील सर्व सफरचंदे पेट्यांत भरायची आहेत.प्रत्येक पेटीत 24 सफरचंदे ठेवली तर ती भरण्यासाठी 27 पेट्या लागतात. जर प्रत्येक पेटीत 36 सफरचंदे ठेवली तर किती पेट्या लागतील ?

4. खालील विधाने चलनाचे चिन्ह वापरून लिहा.

(1) ध्वनीची तरंगलांबी (l) आणि वारंवारता (f) यांमध्ये व्यस्त चलन असते.

(2) दिव्याच्या प्रकाशाची तीव्रता (I) आणि दिवा व पडदा यांमधील अंतराचा (d) वर्ग यांमध्ये व्यस्त चलन असते.

5. $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ आणि $x = 40$ असताना $y = 16$, तर $x = 10$ तेव्हा y किती ?

6. x आणि y या राशींमध्ये व्यस्त चलन आहे. $x = 15$ तेव्हा $y = 10$ असते, $x = 20$ असताना $y =$ किती ?

जाणून घेऊया.

काळ, काम, वेग (Time, work, speed)

एखादे बांधकाम पूर्ण करण्यासाठी नेमलेल्या मजुरांची संख्या व त्यांना काम करण्यास लागलेला वेळ, यांच्याशी संबंधित उदाहरणे व्यस्त चलनाची असतात. तसेच व्यस्त चलनाची काही उदाहरणे वाहनांचा वेग व त्यांना ठरावीक अंतर कापण्यास लागणारा वेळ याच्याशी संबंधित असतात. अशा उदाहरणांना काळ-काम-वेग यांच्याशी संबंधित उदाहरणे म्हणतात.

चलनाच्या चिन्हाचा उपयोग करून या प्रकारची उदाहरणे कशी सोडवतात ते पाहू.

उदा. (1) एका शेतातील शेंगा काढण्याचे काम 15 स्त्रिया 8 दिवसांत पूर्ण करतात. तेच काम 6 दिवसांत पूर्ण करायचे असल्यास किती स्त्रिया कामावर असाव्या ?

उकल : काम पूर्ण होण्यास लागणारे दिवस आणि काम करणाऱ्या स्त्रियांची संख्या यांत व्यस्त चलन असते. दिवसांची संख्या d आणि स्त्रियांची संख्या n मानू.

$d \propto \frac{1}{n}$ $\quad \therefore d \times n = \mathrm{k}$ $\quad$ (k हा स्थिरांक)

जेव्हा $n = 15$, तेव्हा $d = 8$ $\quad \therefore \mathrm{k} = d \times n = 15 \times 8 = 120$ (चलनाचा स्थिरांक)

आता $d = 6$ असताना n किती हे काढू.

$d \times n = 120$

$\therefore d \times n = 120 \quad \therefore 6 \times n = 120, \quad \therefore n = 20$

$\therefore$ काम 6 दिवसांत पूर्ण करण्यासाठी 20 स्त्रिया कामावर असाव्या.

उदा. (2) एका वाहनाचा सरासरी वेग ताशी 48 किमी असताना काही अंतर जाण्यासाठी 6 तास लागतात, तर वेग ताशी 72 किमी असताना तेवढेच अंतर जाण्यासाठी किती वेळ लागेल ?

उकल : वाहनाचा वेग s मानू ; लागणारा वेळ t मानू. वेग व वेळ यांत व्यस्त चलन आहे.

$s \propto \frac{1}{t}$ $\therefore s \times t = k$ (k हा स्थिरांक)

$k = s \times t = 48 \times 6 = 288$ (चलनाचा स्थिरांक) आता $s = 72$ असेल तर t काढू.

$s \times t = 288$ $\therefore 72 \times t = 288$ $\therefore t = \frac{288}{72} = 4$

$\therefore$ वेग ताशी 72 किमी असताना तेवढेच अंतर जाण्यासाठी 4 तास लगतील.

सरावसंच 7.3

1. खालीलपैकी कोणती उदाहरणे व्यस्त चलनाची आहेत ?
   (1) मजुरांची संख्या व त्यांना काम पूर्ण करण्यासाठी लागणारा वेळ.
   (2) हौद भरण्यासाठी असलेल्या एकसारख्या नळांची संख्या व हौद भरण्यासाठी लागणारा वेळ.
   (3) वाहनात भरलेले पेट्रोल व त्याची किंमत
   (4) वर्तुळाचे क्षेत्रफळ व त्या वर्तुळाची त्रिज्या
2. जर 15 मजुरांना एक भिंत बांधण्यास 48 तास लागतात, तर 30 तासांत ते काम पूर्ण करण्यासाठी किती मजूर लागतील ?
3. पिशवीत दूध भरण्याच्या यंत्राद्वारे 3 मिनिटांत अर्ध्या लीटरच्या 120 पिशव्या भरल्या जातात, तर 1800 पिशव्या भरण्यासाठी किती वेळ लागेल ?
4. एका कारचा सरासरी वेग 60 किमी/तास असताना काही अंतर जाण्यास 8 तास लागतात, जर तेच अंतर साडेसात तासांत कापावयाचे असेल कारचा सरासरी वेग किती वाढवावा ?

उत्तरसूची

सरावसंच 7.1 1. (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ 2. x अनुक्रमे 7 व 20, $y = 96$ 3. 308
4. $m = 7$, n अनुक्रमे 26 व 5 5. $k = 6$, $y = 6\sqrt{x}$ 6. ₹ 4250

सरावसंच 7.2 1. मजुरांची संख्या अनुक्रमे 15 व 5, दिवस = 18 2. (1) $k = 60$, $pq = 60$
(2) $k = 60$, $zw = 60$ (3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$
3. 18 पेट्या 4. (1) $l \propto \frac{1}{f}$ (2) $I \propto \frac{1}{d^2}$ 5. $y = 256$ 6. $y = 7\ 5$

सरावसंच 7.3 1. व्यस्त चलन (1), (2) 2. 24 मजूर 3. 45 मिनिटे
4. 4 किमी/तास

CBU5A3

8 चौकोन रचना व चौकोनाचे प्रकार

जरा आठवूया.

- दिलेल्या मापांनुसार त्रिकोणांच्या रचना करा.

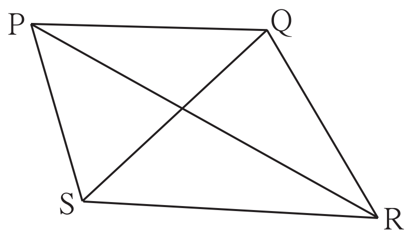
(1) Δ ABC : l (AB) = 5 सेमी, l (BC) = 5.5 सेमी, l (AC) = 6 सेमी

(2) Δ DEF : $m \angle$ D = 35°, $m \angle$ F = 100°, l (DF) = 4.8 सेमी

(3) Δ MNP : l (MP) = 6.2 सेमी, l (NP) = 4.5 सेमी, $m \angle$ P = 75°

(4) Δ XYZ : $m \angle$ Y = 90°, l (XY) = 4.2 सेमी, l (XZ) = 7 सेमी

- कोणत्याही चौकोनाचे चार कोन, चार बाजू आणि दोन कर्ण असे एकूण दहा घटक असतात.



जाणून घेऊया.

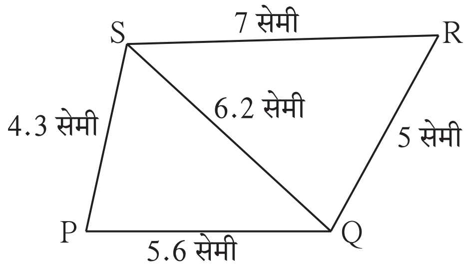
चौकोन रचना (Construction of a quadrilateral)

चौकोनाच्या दहा घटकांपैकी विशिष्ट पाच घटकांची मापे माहीत असतील तर त्या चौकोनाची रचना करता येते. **या रचनांचा आधार त्रिकोण रचना हाच असतो,** हे पुढील उदाहरणांतून समजून घ्या.

(I) चौकोनाच्या चार बाजू आणि एक कर्ण दिला असता चौकोनाची रचना करणे.

उदा. $\square$ PQRS असा काढा की, l(PQ) = 5.6 सेमी , l(QR) = 5 सेमी, l (PS) = 4.3 सेमी, l (RS) = 7 सेमी, l (QS) = 6.2 सेमी

उकल : प्रथम कच्ची आकृती काढू. आकृतीत चौकोनाच्या दिलेल्या घटकांची माहिती दाखवू. आकृतीवरून सहज दिसते, की Δ SPQ च्या आणि Δ SRQ च्या सर्व बाजूंची लांबी

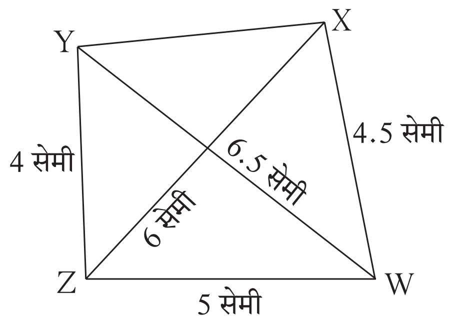


आपल्याला माहीत आहे. त्यानुसार Δ SPQ आणि Δ SRQ काढले की दिलेली मापे असणारा $\square$ PQRS मिळेल. ह्या चौकोनाची रचना तुम्ही स्वतः करा.

(II) चौकोनाच्या तीन बाजू आणि दोन कर्ण दिले असता चौकोन रचना करणे.

उदा. □ WXYZ असा काढा की, l (YZ) = 4 सेमी, l (ZX) = 6 सेमी, l (WX) = 4.5 सेमी, l (ZW) = 5 सेमी, l (YW) = 6.5 सेमी.

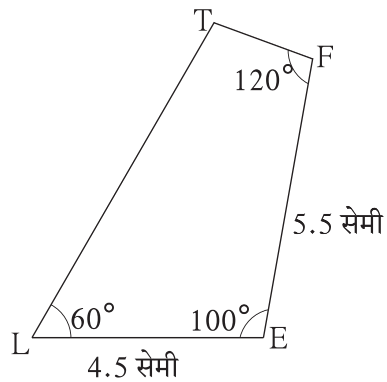
उकल : कच्ची आकृती काढू. दिलेली माहिती आकृतीत दाखवू. आकृतीवरून दिसते, की Δ WXZ च्या आणि Δ WZY च्या सर्व बाजूंची लांबी आपल्याला मिळाली आहे. त्यांनुसार Δ WXZ आणि Δ WZY काढू. नंतर रेख XY काढला की आपल्याला दिलेली मापे असणारा □ WXYZ मिळेल. ह्या चौकोनाची रचना तुम्ही करा.



(III) चौकोनाच्या लगतच्या दोन बाजू व कोणतेही तीन कोन दिले असता चौकोन रचना करणे.

उदा. □ LEFT असा काढा की, l (EL) = 4.5 सेमी, l (EF) = 5.5 सेमी, $m\angle L = 60°$, $m\angle E = 100°$, $m\angle F = 120°$

उकल : कच्ची आकृती काढून त्या आकृतीत दिलेली माहिती दर्शवू. आकृतीवरून लक्षात येते की 4.5 सेमी लांबीचा रेख LE काढला आणि बिंदू E पाशी 100° मापाचा कोन करणारा रेख EF काढल्यावर चौकोनाचे L, E व F हे तीन बिंदू मिळतील. बिंदू L पाशी 60° मापाचा कोन करणारा आणि बिंदू F पाशी 120° मापाचा कोन करणारा किरण काढू. त्यांचा छेदनबिंदू हाच बिंदू T असेल. ह्या चौकोनाची रचना तुम्ही करा.

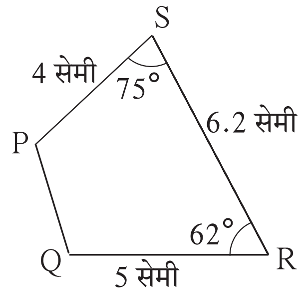


(IV) चौकोनाच्या तीन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट केलेले कोन दिले असता चौकोनाची रचना करणे.

उदा. □ PQRS असा काढा की, l (QR) = 5 सेमी, l (RS) = 6.2 सेमी, l (SP) = 4 सेमी, $m\angle R = 62°$, $m\angle S = 75°$

उकल : चौकोनाची कच्ची आकृती काढून त्या आकृतीत दिलेली माहिती दाखवू.

त्यावरून लक्षात येते की दिलेल्या लांबीचा रेख QR काढून बिंदू R पाशी 62° मापाचा कोन करणारा



रेख RS काढला, की चौकोनाचे Q, R व S हे बिंदू मिळतील. रेख RS शी 75° मापाचा कोन करणारा रेख SP काढला की P बिंदू 4 सेमी अंतरावर मिळेल. रेख PQ काढला की दिलेली मापे असणारा □ PQRS मिळेल. या चौकोनाची रचना आता तुम्ही करू शकाल.

सरावसंच 8.1

1. खालील मापे दिली असता चौकोनांच्या रचना करा.

(1) □ MORE मध्ये $l(\text{MO}) = 5.8$ सेमी, $l(\text{OR}) = 4.4$ सेमी, $m\angle \text{M} = 58^\circ$, $m\angle \text{O} = 105^\circ$, $m\angle \text{R} = 90^\circ$.

(2) □ DEFG असा काढा की $l(\text{DE}) = 4.5$ सेमी, $l(\text{EF}) = 6.5$ सेमी, $l(\text{DG}) = 5.5$ सेमी, $l(\text{DF}) = 7.2$ सेमी, $l(\text{EG}) = 7.8$ सेमी.

(3) □ ABCD मध्ये $l(\text{AB}) = 6.4$ सेमी, $l(\text{BC}) = 4.8$ सेमी, $m\angle \text{A} = 70^\circ$, $m\angle \text{B} = 50^\circ$, $m\angle \text{C} = 140^\circ$.

(4) □ LMNO काढा $l(\text{LM}) = l(\text{LO}) = 6$ सेमी, $l(\text{ON}) = l(\text{NM}) = 4.5$ सेमी, $l(\text{OM}) = 7.5$ सेमी

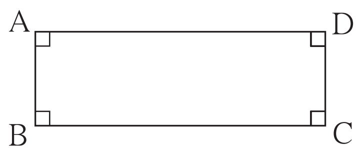
जरा आठवूया.

चौकोन या आकृतीच्या बाजू व कोनांवर वेगवेगळ्या अटी घातल्या की चौकोनाचे वेगवेगळे प्रकार मिळतात. काटकोन चौकोन किंवा आयत आणि चौरस या चौकोनाच्या प्रकारांचा परिचय तुम्हांला झाला आहे. चौकोनाच्या या आणि आणखी काही प्रकारांचा अभ्यास कृतींच्या आधारे करू.

काटकोन चौकोन किंवा आयत (Rectangle)

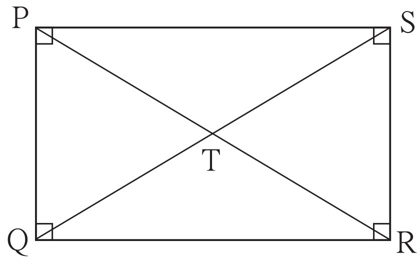
ज्या चौकोनाचे चारही कोन काटकोन असतात त्या चौकोनाला काटकोन चौकोन किंवा आयत म्हणतात.

चौकोन काढण्यासाठी दिलेल्या पाच घटकांमध्ये लगतच्या दोन बाजू असाव्याच लागतात. लगतच्या दोन बाजू आणि तीन कोन माहीत असतील तर तुम्ही चौकोन रचना करू शकता.



व्याख्येनुसार आयताचे सर्व कोन काटकोन असतात म्हणून आयताच्या लगतच्या दोन बाजू माहीत झाल्या तर तुम्ही आयताची रचना करू शकाल.

कृती I : तुम्हांला सोईच्या वाटतील अशा लगतच्या बाजू असणारा एक आयत PQRS काढा. त्याच्या कर्णांच्या छेदन बिंदूला T हे नाव द्या. कर्कटक आणि पट्टीच्या साहाय्याने



(1) बाजू QRआणि बाजू PS या संमुख बाजूंची लांबी मोजा.

(2) बाजू PQ आणि बाजू SR यांच्या लांबी मोजा.

(3) कर्ण PR आणि कर्ण QS यांच्या लांबी मोजा.

(4) कर्ण PR च्या रेख PT आणि रेख TR या भागांची लांबी मोजा.

(5) रेख QT आणि रेख TS या कर्ण QS च्या भागांची लांबी मोजा.

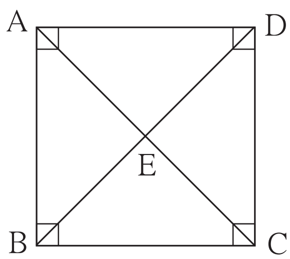
तुम्हांला मिळालेल्या मापांचे निरीक्षण करा. वर्गातील इतरांनी मोजलेली मापे परस्परांना दाखवून त्यांवर चर्चा करा. चर्चेतून आयताचे पुढील गुणधर्म तुमच्या लक्षात येतील.

- आयताच्या संमुख भुजा एकमेकींशी एकरूप असतात.
- आयताचे कर्ण एकरूप असतात.
- आयताचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

चौरस (Square)

ज्या चौकोनाच्या सर्व बाजू एकरूप असतात आणि सर्व कोन काटकोन असतात, त्या चौकोनाला चौरस म्हणतात.

कृती II : सोईस्कर अशी बाजूची लांबी असणारा चौरस ABCD काढा. त्याच्या कर्णांच्या छेदनबिंदूला E हे नाव द्या. भूमितीच्या पेटीतील साधने वापरून



(1) कर्ण AC आणि कर्ण BD यांच्या लांबी मोजा.

(2) बिंदू E मुळे झालेल्या प्रत्येक कर्णाच्या दोन भागांची लांबी मोजा.

(3) बिंदू E पाशी झालेल्या सर्व कोनांची मापे मोजा.

(4) चौरसाच्या कर्णामुळे प्रत्येक कोनाच्या झालेल्या भागांची मापे मोजा. (उदाहरणार्थ, $\angle$ ADB व $\angle$CDB).

तुम्हांला आणि तुमच्या वर्गातील इतरांना मिळालेल्या मापांचे निरीक्षण करून चर्चा करा.

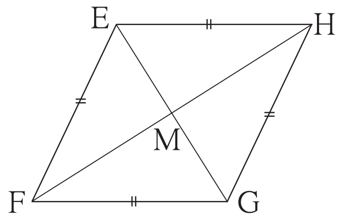
तुम्हांला चौरसाचे पुढील गुणधर्म मिळतील.

- कर्ण समान लांबीचे, म्हणजेच एकरूप असतात.
- कर्ण परस्परांना दुभागतात.
- कर्ण परस्परांशी काटकोन करतात.
- कर्ण चौरसाचे संमुख कोन दुभागतात.

समभुज चौकोन (Rhombus)

ज्या चौकोनाच्या सर्व भुजा समान लांबीच्या (एकरूप) असतात, त्या चौकोनाला समभुज चौकोन म्हणतात.

कृती III : बाजूची सोईस्कर लांबी घेऊन आणि एका कोनाचे कोणतेही सोईस्कर माप घेऊन समभुज चौकोन EFGH काढा. त्याचे कर्ण काढून त्यांच्या छेदनबिंदूला M हे नाव द्या.



(1) चौकोनाचे संमुख कोन तसेच बिंदू M पाशी झालेले कोन मोजा.

(2) चौकोनाच्या प्रत्येक कोनाचे कर्णामुळे झालेले दोन भाग मोजा.

(3) दोन्ही कर्णांची लांबी मोजा. बिंदू M मुळे झालेले कर्णाचे भाग मोजा.

मोजमापांवरून समभुज चौकोनाचे पुढील गुणधर्म तुम्हांला आढळतील.

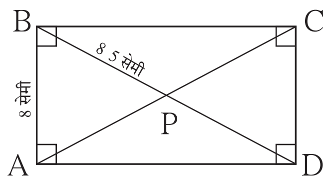
- संमुख कोन एकरूप असतात.
- कर्ण समभुज चौकोनाचे संमुख कोन दुभागतात.
- कर्ण परस्परांना दुभागतात, तसेच परस्परांशी काटकोन करतात.

वर्गातील इतरांनाही हे गुणधर्म आढळले आहेत, असे दिसून येईल.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) आयत ABCD च्या कर्णांचा छेदनबिंदू P आहे. (i) $l(AB) = 8$ सेमी तर $l(DC) =$ किती ?, (ii) $l(BP) = 8.5$ सेमी तर $l(BD)$ आणि $l(BC)$ काढा.

उकल : एक कच्ची आकृती काढून दिलेली माहिती दाखवू.



(i) आयताच्या संमुख भुजा एकरूप असतात.

$\therefore\ l(DC) = l(AB) = 8$ सेमी

(ii) आयताचे कर्ण परस्परांना दुभागतात.

$\therefore\ l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17$ सेमी

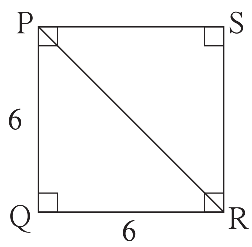
Δ BCD हा काटकोन त्रिकोण आहे. पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$

$\therefore\ l(BC) = \sqrt{225} = 15$ सेमी

उदा. (2) बाजू 6 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.

उकल : समजा, आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे $\square$ PQRS हा 6 सेमी बाजूचा चौरस आहे. रेख PR कर्ण आहे.



Δ PQR मध्ये, पायथागोरसच्या प्रमेयाने, $l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

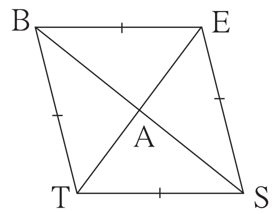
$$= (6)^2 + (6)^2 = 36 + 36 = 72$$

$\therefore\ l(PR) = \sqrt{72}$, $\therefore$ कर्णाची लांबी $\sqrt{72}$ सेमी आहे.

उदा (3) $\square$ BEST ह्या समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना बिंदू A मध्ये छेदतात.

(i) जर $m\angle BTS = 110^\circ$, तर $m\angle TBS$ काढा.

(ii)जर $l(TE) = 24$, $l(BS) = 70$, तर $l(TS)=$ किती ?



उकल : $\square$ BEST ची कच्ची आकृती काढून कर्णांचा छेदनबिंदू A दाखवू.

(i) समभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.

$\therefore\ m\angle BES = m\angle BTS = 110^\circ$

आता, $m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$

$\therefore 110^\circ + 110^\circ + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$

$\therefore\ m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$

$\therefore\ 2\, m\angle TBE = 140^\circ$...... $\because$ समभुज चौकोनाचे संमुख कोन एकरूप असतात.

$\therefore\ m\angle TBE = 70^\circ$

$\therefore\ m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ$ ... $\because$ समभुज चौकोनाचा कर्ण संमुख कोन दुभागतो.

(ii) समभुज चौकोनाचे कर्ण एकमेकांना काटकोनात दुभागतात.

$\therefore\ \Delta$ TAS मध्ये, $m\angle TAS = 90^\circ$

$l(TA) = \frac{1}{2}\ l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12$, $l(AS) = \frac{1}{2}\ l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$

पायथागोरसच्या प्रमेयावरून,

$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$

$\therefore\ l(TS) = \sqrt{1369} = 37$

सरावसंच 8.2

1. $l(AB) = 6.0$ सेमी आणि $l(BC) = 4.5$ सेमी असा आयत ABCD काढा.

2. बाजू 5.2 सेमी असलेला चौरस WXYZ काढा.

3. बाजू 4 सेमी आणि $m\angle K = 75^\circ$ असा समभुज $\square$ KLMN काढा.

4. एका आयताचा कर्ण 26 सेमी असून त्याची एक बाजू 24 सेमी आहे, तर त्याची दुसरी बाजू काढा.

5. समभुज □ABCD च्या कर्णांची लांबी 16 सेमी व 12 सेमी आहेत, तर त्या समभुज चौकोनाची बाजू व परिमिती काढा.

6. बाजू 8 सेमी असलेल्या चौरसाच्या कर्णाची लांबी काढा.

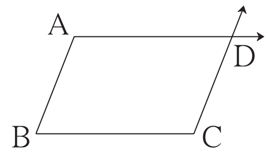
7. एका समभुज चौकोनाच्या एका कोनाचे माप 50° आहे, तर त्याच्या इतर तीन कोनांची मापे काढा.

समांतरभुज चौकोन (Parallelogram)

चौकोनाच्या या प्रकाराच्या नावावरून तुम्ही याची व्याख्या सहज सांगू शकाल.

ज्या चौकोनाच्या संमुख भुजा परस्परांना समांतर असतात, त्या चौकोनाला समांतरभुज चौकोन म्हणतात.

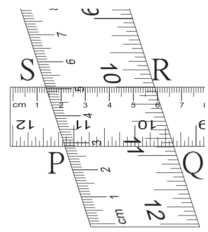
समांतरभुज चौकोन कसा काढता येईल ?



सोबतच्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे रेख AB आणि रेख BC हे परस्परांशी कोणत्याही मापाचा कोन करणारे रेषाखंड काढा.

'रेषेबाहेरील बिंदूतून त्या रेषेला समांतर रेषा काढणे' ही रचना तुम्ही केली आहे. तिचा उपयोग करून बिंदू C मधून रेख AB ला समांतर रेषा काढा. तसेच बिंदू A मधून रेख BC ला समांतर रेषा काढा. त्यांच्या छेदनबिंदूला D नाव द्या. □ABCD समांतरभुज चौकोन आहे. लक्षात घ्या की, समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणारे आंतरकोन परस्परपूरक असतात. म्हणून वरील आकृतीमध्ये, $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$, $m\angle C + m\angle D = 180^\circ$ आणि $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$ म्हणजेच समांतरभुज चौकोनाच्या कोनांचा एक गुणधर्म पुढीलप्रमाणे आहे.
- समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांच्या जोड्या परस्परपूरक असतात.

या प्रकारच्या चौकोनाचे आणखी काही गुणधर्म जाणून घेण्यासाठी □ PQRS हा कोणताही एक समांतरभुज चौकोन पुढील **कृती** करून काढा. कमीजास्त रुंदीच्या दोन मोजपट्ट्या घ्या. त्यांपैकी एक पट्टी कागदावर ठेवून तिच्या कडांलगत रेघा काढा. दुसरी पट्टी त्यांवर तिरकी ठेवून तिच्या कडांलगत रेघा काढा. यामुळे समांतरभुज चौकोन मिळेल. त्याचे कर्ण काढून त्यांच्या छेदनबिंदूला T हे नाव द्या.



(1) चौकोनाच्या संमुख कोनांची मापे मोजून लिहा. (2) संमुख बाजूंच्या जोड्यांची लांबी मोजून लिहा. (3) कर्णांची लांबी मोजून लिहा. (4) बिंदू T मुळे झालेल्या प्रत्येक कर्णाच्या भागांची लांबी मोजून लिहा.

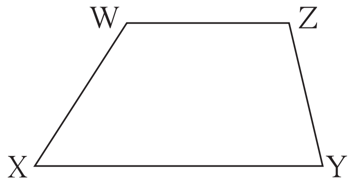
मोजमापांवरून तुम्हांला समांतरभुज चौकोनाचे पुढील गुणधर्म मिळतील.

- संमुख कोनांची मापे समान असतात, म्हणजेच संमुख कोन एकरूप असतात.
- संमुख भुजा समान लांबीच्या, म्हणजेच एकरूप असतात.
- कर्ण एकमेकांना दुभागतात.

वेगवेगळे समांतरभुज चौकोन काढून हे गुणधर्म पडताळून पाहा.

समलंब चौकोन (Trapezium)

ज्या चौकोनाच्या संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर असते, त्या चौकोनाला समलंब चौकोन म्हणतात.



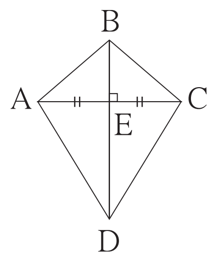
आकृती 15 मधील □ WXYZ मध्ये, रेख WZ आणि रेख XY ही संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर आहे. व्याख्येनुसार, □ WXYZ हा समलंब चौकोन आहे.

समांतर रेषांच्या छेदिकेमुळे होणाऱ्या आंतरकोनांच्या गुणधर्मांनुसार,

$m\angle W + m\angle X = 180^\circ$ आणि $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$

समलंब चौकोनात लगतच्या कोनांच्या चारपैकी दोन जोड्या परस्परपूरक असतात.

पतंग (Kite)



आकृतीमधील □ ABCD पाहा. या चौकोनाचा कर्ण BD हा कर्ण AC चा लंबदुभाजक आहे.

ज्याचा एक कर्ण दुसऱ्या कर्णाचा लंबदुभाजक असतो अशा चौकोनाला पतंग म्हणतात.

या आकृतीत रेख AB ≅ रेख CB आणि रेख AD ≅ रेख CD हे कर्कटकाच्या साहाय्याने पडताळून पाहा.

तसेच, $\angle BAD$ आणि $\angle BCD$ मोजा आणि ते एकरूप आहेत, हे पडताळून पाहा.

म्हणजे पतंग या चौकोनाच्या प्रकारात दोन गुणधर्म असतात.

- लगतच्या बाजूंच्या दोन जोड्या एकरूप असतात.
- संमुख कोनांची एक जोडी एकरूप असते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका समांतरभुज चौकोनाच्या लगतच्या कोनांची मापे $(5x - 7)^\circ$ आणि $(4x + 25)^\circ$ आहेत. तर त्या कोनांची मापे काढा.

उकल : समांतरभुज चौकोनाचे लगतचे कोन पूरक असतात.

$\therefore (5x - 7) + (4x + 25) = 180$

$\therefore 9x + 18 = 180$

$\therefore 9x = 180 - 18 = 162$

$\therefore x = 18$

$\therefore$ एका कोनाचे माप $= (5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$

दुसऱ्या कोनाचे माप $= (4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$

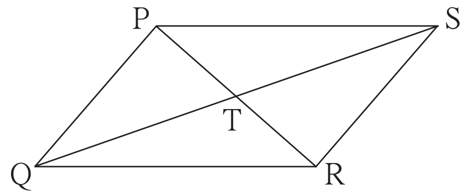
उदा.(2) सोबतच्या आकृतीत □ PQRS समांतरभुज आहे. त्याच्या कर्णांचा छेदनबिंदू T आहे. आकृतीच्या आधारे पुढील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

(i) जर l(PS) = 5.4 सेमी, तर l(QR) = किती ?

(ii) जर l(TS) = 3.5 सेमी, तर l(QS) = किती ?

(iii) $m\angle QRS = 118^\circ$, तर $m\angle QPS$ = किती ?

(iv) $m\angle SRP = 72^\circ$ तर $m\angle RPQ$ = किती ?



उकल : समांतरभुज चौकोन PQRS मध्ये,

(i) l(QR) = l(PS) = 5.4 सेमी .... संमुख बाजू एकरूप

(ii) l(QS) = $2 \times l$(TS) = 2×3.5 = 7 सेमी .... कर्ण परस्परांना दुभागतात

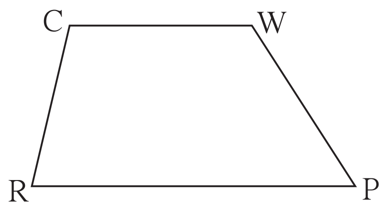
(iii) $m\angle QPS = m\angle QRS = 118^\circ$ .... संमुख कोन एकरूप

(iv) $m\angle RPQ = m\angle SRP = 72^\circ$ .... व्युत्क्रम कोन एकरूप

उदा . (3) □ CWPR च्या क्रमागत कोनांच्या मापांचे गुणोत्तर 7:9:3:5 आहे, तर त्या चौकोनाच्या कोनांची मापे काढा आणि चौकोनाचा प्रकार ओळखा.

उकल : समजा, $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 7:9:3:5$

$\therefore \angle C, \angle W, \angle P$ व $\angle R$ यांची मापे अनुक्रमे $7x, 9x, 3x, 5x$ मानू.



$\therefore 7x + 9x + 3x + 5x = 360^\circ$

$\therefore 24x = 360^\circ \quad \therefore x = 15$

$\therefore m\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ, m\angle W = 9 \times 15 = 135^\circ$

$m\angle P = 3 \times 15 = 45^\circ$ आणि $m\angle R = 5 \times 15 = 75^\circ$

$\therefore m\angle C + m\angle R = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ \quad \therefore$ बाजू CW $\parallel$ बाजू RP

$m\angle C + m\angle W = 105^\circ + 135^\circ = 240^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ बाजू CR ही बाजू WP ला समांतर नाही.

$\therefore$ □ CWPR च्या संमुख बाजूंची एकच जोडी समांतर आहे.

$\therefore$ □ CWPR हा समलंब चौकोन आहे.

सरावसंच 8.3

1. एका समांतरभुज चौकोनाच्या संमुख कोनांची मापे $(3x-2)^\circ$ आणि $(50 - x)^\circ$ आहेत, तर चौकोनाच्या प्रत्येक कोनाचे माप काढा.

2. शेजारील समांतरभुज चौकोनाच्या आकृतीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे लिहा.

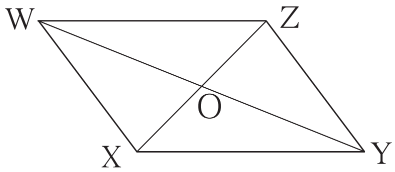
(1) जर l(WZ) = 4.5 सेमी तर l(XY) = ?

(2) जर l(YZ) = 8.2 सेमी तर l(XW) = ?

(3) जर l(OX) = 2.5 सेमी तर l(OZ) = ?

(4) जर l(WO) = 3.3 सेमी तर l(WY) = ?

(5) जर $m\angle$ WZY = 120° तर $m\angle$ WXY = ? आणि $m\angle$ XWZ = ?



3. $\square$ ABCD हा समांतरभुज चौकोन असा काढा की l(BC) = 7 सेमी, $\angle$ABC = 40°, l(AB) = 3 सेमी.

4. एका चौकोनाच्या चार क्रमागत कोनांचे प्रमाण 1:2:3:4 आहे, तर तो कोणत्या प्रकाराचा चौकोन असेल ? त्या चौकोनाच्या प्रत्येक कोनाचे माप काढा. कारण लिहा.

5. $\square$ BARC असा काढा की l(BA) = l(BC) = 4.2 सेमी, l(AC) = 6.0 सेमी, l(AR) = l(CR) = 5.6 सेमी.

6*. $\square$ PQRS असा काढा की l(PQ) = 3.5 सेमी, l(QR) = 5.6 सेमी, l(RS) = 3.5 सेमी, $m\angle$ Q = 110°, $m\angle$ R = 70°.

$\square$ PQRS समांतरभुज आहे ही माहिती दिल्यास वरीलपैकी कोणती माहिती देणे आवश्यक नाही ते लिहा.

उत्तरसूची

सराव संच 8.2

4. 10 सेमी **5.** बाजू 10 सेमी व परिमिती 40 सेमी **6.** $\sqrt{128}$ सेमी **7.** 130°, 50°, 130°

सराव संच 8.3

1. 37°, 143°, 37°, 143°

2. (1) 4.5 सेमी (2) 8.2 सेमी (3) 2.5 सेमी (4) 6.6 सेमी (5) 120°, 60°

4. 36°, 72°, 108°, 144°, समलंब चौकोन

CJTH48

9 सूट व कमिशन

जरा आठवूया.

खालील रिकाम्या चौकटींत योग्य संख्या लिहा.

1. $\frac{12}{100}$ = शेकडा $\square$ = $\square$ % 2. शेकडा 47 = $\frac{\square}{\square}$ 3. 86% = $\frac{\square}{\square}$

4. 300 चा शेकडा 4 = $300 \times \frac{\square}{\square} = \square$ 5. 1700 चे 15% = $1700 \times \frac{\square}{\square} = \square$

चला, चर्चा करूया.

अशा प्रकारच्या जाहिराती तुम्ही पाहिल्या असतील. सेलमध्ये अनेक वस्तूंच्या किमतींवर सूट किंवा रिबेट दिले जाते. आपल्याकडे साधारण जुलै महिन्यात, विशेषतः कपड्यांचे सेल सुरू होतात. याची कारणे शोधा व चर्चा करा.

जाणून घेऊया.

सूट (Discount)

श्री. सुरेश यांनी जून आणि जुलै महिन्यात केलेली साड्यांची विक्री व नफा यांची दिलेली सारणी पाहा :

महिना	साडीची मूळ किंमत रुपये	साडीची विक्री किंमत रुपये	एका साडीवरील नफा रुपये	विक्री केलेल्या साड्यांची संख्या	एकूण नफा रुपये.
जून	200	250	50	40	$50 \times 40 = 2000$
जुलै (सेल)	200	230	30	100	$30 \times 100 = 3000$

सारणीवरून तुमच्या लक्षात येईल की जुलैमध्ये साड्यांचा सेल जाहीर करून प्रत्येक साडीच्या किंमतीवर सूट दिली आहे. त्यामुळे त्यांचा एका साडीवरील नफा जून महिन्यापेक्षा जुलै महिन्यात कमी झाला तरी जुलै मध्ये जास्त साड्यांची विक्री झाल्यामुळे एकूण नफा वाढला.

विक्रीसाठी असलेल्या वस्तूवर त्या वस्तूची किंमत छापलेली असते, तिला त्या वस्तूची **छापील किंमत** (Marked Price) म्हणतात. दुकानदार छापील किमतीवर सूट देतात.

वस्तू विकताना, दुकानदार छापील किमतीपेक्षा जेवढी रक्कम कमी घेतो त्या रकमेला **'सूट'** म्हणतात. सूट देऊन उरलेली किंमत ही विक्री किंमत असते. म्हणजेच विक्री किंमत = छापील किंमत – सूट

सुटीचा दर सामान्यपणे शतमानात म्हणजेच शेकडेवारीत देण्यात येतो.

'शेकडा 20 सूट' याचा अर्थ वस्तूच्या छापील किमतीच्या 20% किंमत कमी घेऊन वस्तू विकणे.

म्हणजेच वस्तूची छापील किंमत 100 रुपये असल्यास तिच्यावर 20 रुपये सूट दिल्यावर तिची विक्री किंमत 100 – 20 = 80 रुपये होईल.

अशा व्यवहारात सूट x % असेल तर $\frac{x}{100} = \frac{\text{वस्तूच्या किमतीवरील सूट}}{\text{छापील किंमत}}$ असा संबंध असतो.

$$\therefore \text{ वस्तूच्या किमतीवरील सूट} = \frac{\text{छापील किंमत} \times x}{100}$$

अधिक माहितीसाठी

हल्ली दुकानात जाऊन खरेदी करण्याऐवजी; पुस्तके, कपडे मोबाइल इत्यादी अनेक वस्तूंची ऑनलाइन खरेदी केली जाते. जी कंपनी वस्तूंची विक्री ऑनलाइन करते त्या कंपनीचा दुकानाची मांडणी व तेथील व्यवस्थापन इत्यादीचा खर्च कमी असतो. त्यामुळे ऑनलाइन खरेदीवरही सूट देतात आणि वस्तू घरपोच मिळते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका पुस्तकाची छापील किंमत 360 रुपये आहे. दुकानदाराने ते पुस्तक 306 रुपयांस विकले, तर त्याने शेकडा सूट किती दिली?

उकल : छापील किंमत = ₹ 360, विक्री किंमत = ₹ 306. $\therefore$ सूट = 360 – 306 = ₹ 54.

वस्तूची छापील किंमत 360 रुपये, तेव्हा सूट 54 रुपये.

$\therefore$ वस्तूची छापील किंमत 100 रुपये तेव्हा सूट x मानू. $\frac{\text{सूट}}{\text{छापील किंमत}} = \frac{x}{100}$

$$\therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} \qquad \therefore \quad x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

$\therefore$ पुस्तकाच्या छापील किमतीवर शेकडा 15 सूट दिली.

उदा. (2) खुर्चीची छापील किंमत 1200 रुपये असून त्यावर 10% सूट असेल तर एकूण सूट किती ? वस्तूची विक्री किंमत किती ?

उकल :

रीत I

छापील किंमत = 1200 रुपये. सूट = 10%

$\frac{\text{सूट}}{\text{छापील किंमत}}$ हे गुणोत्तर काढू.

खुर्चीच्या किमतीवर x रुपये सूट मिळते असे मानू.

$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{10}{100}$

$x = \frac{10}{100} \times 1200$

$x = 120$

एकूण सूट = 120 रु.

विक्री किंमत = छापील किंमत − सूट

= 1200 − 120

= 1080

$\therefore$ खुर्चीची विक्री किंमत 1080 रुपये.

रीत II

छापील किमतीवर 10% सूट म्हणून जर छापील किंमत ₹ 100 तर विक्री किंमत ₹ 90.

$\therefore$ छापील किंमत 1200 रुपये असताना

विक्री किंमत x रुपये मानू.

$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$

$\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$

$\therefore x = 1080$

$\therefore$ खुर्चीची विक्री किंमत 1080 रुपये.

$\therefore$ एकूण सूट = 1200 − 1080 = 120 रुपये.

उदा. (3) छापील किमतीवर 20% सूट देऊन एक साडी 1120 रुपयांना विकली, तर त्या साडीची छापील किंमत किती होती ?

उकल : समजा, साडीची छापील किंमत 100 रुपये होती. त्यावर 20% सूट दिली. म्हणजे ग्राहकास ती साडी 100 − 20 = 80 रुपयांना विकली. म्हणजेच जेव्हा विक्री किंमत 80 रुपये तेव्हा छापील किंमत 100 रुपये. जेव्हा विक्री किंमत 1120 रुपये तेव्हा छापील किंमत x रुपये मानू.

$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$

$\therefore x = \frac{1120 \times 100}{80}$

$= 1400$

$\therefore$ साडीची छापील किंमत 1400 रुपये होती.

उदा. (4) दुकानदार एक वस्तू काही किमतीला विकायचे मनाशी ठरवतो आणि वस्तूची किंमत त्याने ठरवलेल्या किमतीपेक्षा 30% वाढवून छापतो. वस्तू विकताना ग्राहकास 20% सूट देतो, तर दुकानदारास त्याने ठरवलेल्या किमतीपेक्षा किती टक्के अधिक किंमत मिळते हे काढा.

उकल : किमतीतील वाढ तसेच जास्तीचा नफा यांची टक्केवारी ठरवलेल्या किमतीवर आहे म्हणून ठरवलेली किंमत 100 मानल्यास उदाहरण सोपे होईल. $\therefore$ ठरवलेली किंमत रु. 100 मानू.

ही किंमत तो 30% वाढवून छापतो. $\therefore$ छापील किंमत = 130 रुपये.

सूट = 130 चे 20% $= 130 \times \dfrac{20}{100} = 26$ रुपये

$\therefore$ विक्री किंमत = 130 − 26 = 104 रुपये

$\therefore$ ठरवलेली किंमत 100 रुपये असेल तर त्याला 104 रुपये मिळतात.

म्हणजेच दुकानदाराला त्याने ठरवलेल्या किमतीपेक्षा 4% अधिक किंमत मिळते.

उदा. (5) एका वस्तूवर दुकानदार ग्राहकास 8% सूट देतो, तरीही त्यास 15% नफा होतो, जर त्या वस्तूची छापील किंमत 1750 रुपये असेल, तर ती वस्तू दुकानदाराने किती किमतीला खरेदी केली असेल?

उकल : वस्तूची छापील किंमत = 1750 रुपये, शेकडा सूट = 8

$\therefore$ सूट $= 1750 \times \dfrac{8}{100} = 140$ रुपये

वस्तूची विक्री किंमत = 1750 − 140 = 1610 रुपये

नफा 15%, म्हणजे वस्तूची खरेदी किंमत 100 रुपये असेल तर विक्री किंमत 115 रुपये.

म्हणजेच विक्री किंमत 115 रुपये असताना खरेदी किंमत 100 रुपये.

विक्री किंमत 1610 रुपये असताना खरेदी किंमत x रुपये मानू.

$\therefore \dfrac{x}{100} = \dfrac{1610}{115}$ $\qquad \therefore \quad x = \dfrac{1610 \times 100}{115} = 1400$

वस्तूची खरेदी किंमत = 1400 रुपये.

हे मला समजले.

- सूट = छापील किंमत − विक्री किंमत
- सूट शेकडा x असेल तर $\dfrac{x}{100} = \dfrac{\text{मिळालेली सूट}}{\text{छापील किंमत}}$

सरावसंच 9.1

1. जर छापील किंमत = ₹ 1700, विक्री किंमत = ₹ 1540 तर सूट काढा.
2. जर छापील किंमत = ₹ 990, सूट शेकडा 10, तर विक्री किंमत काढा.
3. जर विक्री किंमत = ₹ 900. सूट शेकडा 20, तर छापील किंमत काढा.
4. एका पंख्याची छापील किंमत 3000 रुपये आहे. दुकानदाराने शेकडा 12 सूट दिली तर पंख्यावर दिलेली सूट व पंख्याची विक्री किंमत काढा.
5. 2300 रुपये छापील किंमत असलेला मिक्सर गिऱ्हाइकास 1955 रुपयास मिळतो तर गिऱ्हाइकास मिळालेली शेकडा सूट काढा.
6. दुकानदार एका दूरदर्शन संचावर शेकडा 11 सूट देतो, त्यामुळे गिऱ्हाइकास तो संच 22,250 रुपयांस मिळतो, तर त्या दूरदर्शन संचाची छापील किंमत काढा.
7. छापील किमतीवर 10% सूट असताना ग्राहकास एकूण सूट 17 रुपये मिळते, तर ग्राहकास ती वस्तू केवढ्यास पडेल हे काढण्यासाठी खालील रिकाम्या चौकटी भरून कृती पूर्ण करा.

   कृती :समजा, वस्तूची छापील किंमत 100 रुपये आहे.

   म्हणजे ग्राहकास ती वस्तू $\boxed{} - \boxed{} = 90$ रुपयांस मिळते.

   म्हणजेच जेव्हा $\boxed{}$ रुपये सूट तेव्हा विक्री किंमत $\boxed{}$ रुपये.

   तर जेव्हा $\boxed{}$ रुपये सूट तेव्हा विक्री किंमत x रुपये मानू.

   $$\therefore \frac{x}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \qquad \therefore x = \frac{\boxed{} \times \boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

   ∴ ग्राहकास ती वस्तू 153 रुपयांना पडेल.
8. दुकानदार एक वस्तू एका विशिष्ट किमतीला विकण्याचे ठरवतो आणि तिची किंमत ठरवलेल्या किमतीपेक्षा 25% वाढवून छापतो. वस्तू विकताना तो ग्राहकास 20% सूट देतो, तर दुकानदारास त्याने ठरवलेली किंमत आणि प्रत्यक्ष विक्रीची किंमत यांत शेकडा किती फरक पडतो ?

जाणून घेऊया.

कमिशन (Commission)

वस्तूचे उत्पादन करणाऱ्या कंपनीला आपला माल स्वत: विकणे शक्य नसते तेव्हा ती कंपनी काही

व्यक्तींवर आपला माल विकण्याची जबाबदारी सोपवते (उदाहरणार्थ पुस्तके, कापड, साबण इत्यादी) या सेवेबद्दल त्या व्यक्तीस काही मोबदला दिला जातो. त्यास **कमिशन** असे म्हणतात म्हणून असे काम करणाऱ्या व्यक्तीस कमिशन एजंट म्हणतात. कमिशन शेकडेवारीत देण्यात येते. त्याचे दर वस्तूनुसार वेगवेगळे असतात.

जमीन (भूखंड), घरे, गुरेढोरे यांच्या मालकांना वरील गोष्टींची विक्री करताना सहजासहजी ग्राहक मिळेलच असे नसते. त्यामुळे विकणारा व खरेदी करणारा यांना एकत्र आणण्याचे काम जी व्यक्ती करते तिला **मध्यस्थ** किंवा **दलाल** किंवा **कमिशन एजंट** म्हणतात.

धान्य, भाजीपाला, फळे-फुले वगैरे शेतमालाची विक्री ज्या मध्यस्थामार्फत होते त्या व्यक्तीस **दलाल** किंवा **अडत्या** असे म्हणतात. या कामाबद्दल मध्यस्थाला जे कमिशन मिळते त्यास **दलाली** किंवा **अडत** म्हणतात. ही दलाली किंवा अडत ज्याचा माल विकतो त्याच्याकडून किंवा जो माल खरेदी करतो त्याच्याकडून किंवा दोघांकडूनही मिळू शकते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका दलालामार्फत श्रीपतीने 2,50,000 रुपये किमतीचा भूखंड सदाशिवला विकला. दलालाने दोघांकडून प्रत्येकी 2% दलाली घेतली, तर दलालास एकूण किती दलाली मिळाली ?

उकल : भूखंडाची किंमत = 2,50,000

$\therefore$ दलाली $= 250000 \times \frac{2}{100} = 5000$

दलाली दोघांकडून घेतली. $\therefore$ एकूण दलाली $= 5000 + 5000 = 10000$ रुपये.

उदा. (2) सुखदेवने अडत्यामार्फत 10 क्विंटल गहू, प्रतिक्विंटल 4050 रूपये या दराने विकला. त्याने अडत्याला 1% दराने अडत दिली, तर गहू विकून सुखदेवला किती रक्कम मिळाली ते काढा.

उकल : गव्हाची विक्री किंमत $= 10 \times 4050 = 40500$ रुपये, अडतीचा दर शेकडा 1

$\therefore$ दिलेली अडत $= 40500 \times \frac{1}{100} = 405$ रुपये

$\therefore$ गहू विकून मिळालेली रक्कम = गव्हाची विक्री किंमत − अडत

$= 40500 - 405 = 40,095$ रुपये

गहू विकून सुखदेवला मिळालेली रक्कम = 40,095 रुपये.