

रिबेट (Rebate)

खादी ग्रामोद्योग भांडार, हातमाग दुकान, हस्तकला वस्तू विक्री केंद्र, महिला बचत गट इत्यादी संस्था काही विशेष प्रसंगानिमित्त ग्राहकांना सूट देतात उदा. गांधीजयंती निमित्त खादीच्या कापडावर सूट दिली जाते, अशा वेळी दुकानदाराला छापील किमतीपेक्षा जेवढी रक्कम कमी मिळते त्याची भरपाई शासन करते. अशा योजनेखाली ग्राहकाला जी सूट मिळते, तिला रिबेट म्हणतात.

आयकर भरणाऱ्या ज्या व्यक्तींचे उत्पन्न ठरावीक मर्यादेपर्यंत असते, त्यांना आयकरात सूट मिळते या सुटीलाही रिबेट म्हणतात.

थोडक्यात रिबेट म्हणजे एक प्रकारची सूटच असते. ती विशिष्ट अटीनुसार मान्यताप्राप्त संस्था किंवा शासन यांच्याकडून दिली जाते.

सोडवलेले उदाहरण

उदा. हातमाग मंडळाच्या एका दुकानातून सुधीरने खालील वस्तू खरेदी केल्या.

(i) 2 चादरी, प्रत्येक 375 रुपये, (ii) 2 सतरंज्या, प्रत्येकी 525 रुपये

या खरेदीवर शेकडा 15 रिबेट मिळाले, तर रिबेटची एकूण रक्कम किती? सुधीरने दुकानदाराला किती रक्कम द्यावी?

उकल : 2 चादरींची किंमत = $2 \times 375 = ₹ 750$. 2 सतरंज्यांची किंमत = $2 \times 525 = ₹ 1050$.

खरेदी केलेल्या वस्तूंची एकूण किंमत = $750 + 1050 = 1800$ रुपये.

मिळणारे एकूण रिबेट = $1800 \times \frac{15}{100} = 270$ रुपये.

∴ सुधीरने दुकानदाराला द्यायची रक्कम = $1800 - 270 = 1530$ रुपये.

सरावसंच 9.2

1. जॉनने एका प्रकाशकाची 4500 रुपये किमतीची पुस्तके विकली. त्याबद्दल त्याला शेकडा 15 कमिशन मिळाले. तर जॉनला मिळणारे एकूण कमिशन किती हे काढण्यासाठी रिकाम्या चौकटीत योग्य संख्या लिहा.

पुस्तकाची विक्री किंमत =

कमिशनचा दर =

मिळालेले कमिशन = $\frac{\text{}}{\text{}} \times \text{$

∴ कमिशन = रुपये

2. रफिकने शेकडा 4 दलाली देऊन दलालामार्फत 15000 रुपयांची फुले विकली, तर दलाली काढा. रफिकला मिळणारी रक्कम काढा.
3. एका शेतकऱ्याने 9200 रुपये किमतीचा माल अडत्यामार्फत विकला. त्याला 2% अडत द्यावी लागली. तर अडत्याला किती रक्कम मिळाली ?
4. खादी भांडारातून उमाताईनी खालील वस्तू खरेदी केल्या.
 (i) 3 साड्या प्रत्येकी 560 रुपये. (ii) मधाच्या 6 बाटल्या प्रत्येकी 90 रुपये.
 या खरेदीवर शेकडा 12 प्रमाणे रिबेट मिळाले, तर उमाताईना या वस्तू केवढ्याला मिळाल्या ?
5. दिलेल्या माहितीच्या आधारे खालील रिकाम्या चौकटीत योग्य संख्या भरा.
 एका दलालामार्फत श्रीमती दीपांजली यांनी 7,50,000 रुपये किमतीचे घर श्रीमती लीलाबेन यांच्याकडून खरेदी केले. दलालाने दोर्घीकडून प्रत्येकी 2% दलाली घेतली. तर
- (1) श्रीमती दीपांजली यांनी घर खरेदीसाठी \times $\frac{\text{input}}{\text{input}}$ = रुपये दलाली दिली.
- (2) लीलाबेन यांनी घर विक्रीसाठी रुपये दलाली दिली.
- (3) दलालास या व्यवहारांत एकूण रुपये दलाली मिळाली.
- (4) श्रीमती दीपांजली यांना ते घर रुपयांस मिळाले.
- (5) श्रीमती लीलाबेन यांना घर विकून रुपये मिळाले.

२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 9.1

1. ₹ 160 2. ₹ 891 3. ₹ 1125 4. सूट ₹ 360, वि.किं ₹ 2640 5. 15%
 6. ₹ 25,000 8. 0 %.

सरावसंच 9.2

2. दलाली ₹ 600, रक्कम ₹ 14400
 3. ₹ 184
 4. ₹ 1953.60



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 1

1. पुढील प्रश्नांसाठी पर्यायी उत्तरे दिली आहेत त्यापैकी योग्य पर्याय निवडा.
 - (1) □ PQRS मध्ये $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$ व $m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$ तर पुढीलपैकी कोणत्या बाजू समांतर आहेत?

(A) बाजू PQ व बाजू QR	(B) बाजू PQ व बाजू SR
(C) बाजू SR व बाजू SP	(D) बाजू PS व बाजू PQ
 - (2) खालील विधाने वाचा, त्याखाली दिलेल्या पर्यायातून योग्य पर्याय निवडा.
 - (i) आयताचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात
 - (ii) समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
 - (iii) समांतरभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.
 - (iv) पतंगाचे कर्ण परस्परांचे दुभाजक असतात.

(A) विधान (ii) व (iii) सत्य आहेत	(B) फक्त विधान (ii) सत्य आहे
(C) विधान (ii) व (iv) सत्य आहेत	(D) विधान (i), (iii), (iv) सत्य आहेत
 - (3) $19^3 = 6859$ यावरून $\sqrt[3]{0.006859} =$ किती ?

(A) 1.9	(B) 19	(C) 0.019	(D) 0.19
---------	--------	-----------	----------
2. पुढील संख्यांची घनमुळे काढा.

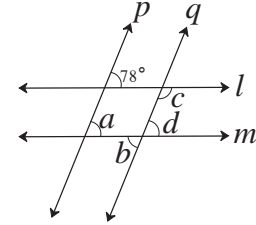
(1) 5832	(2) 4096
----------	----------
3. $m \propto n$, जेव्हा $m = 25$ तेव्हा $n = 15$ यावरून

(1) $n = 87$ असताना m किती ?	(2) $m = 155$ तर $n = ?$
--------------------------------	--------------------------
4. x आणि y यात व्यस्त चलन आहे, जेव्हा $x = 12$ तेव्हा $y = 30$ असते

(1) जर $x = 15$ तर $y =$ किती ?	(2) जर $y = 18$ तर $x = ?$
---------------------------------	----------------------------
5. एक रेषा l काढा. त्या रेषेपासून 3.5 सेमी अंतरावर एक समांतर रेषा काढा.
6. $(256)^{\frac{5}{7}}$ ही संख्या कोणत्या संख्येच्या कितव्या मूळाचा कितवा घात आहे ते लिहा.
7. विस्तार करा.

(1) $(5x-7)(5x-9)$	(2) $(2x-3y)^3$	(3) $(a + \frac{1}{2})^3$
--------------------	-----------------	---------------------------
8. एक विशालकोन त्रिकोण काढा. त्या त्रिकोणाच्या सर्व मध्यगा काढून त्यांचा संपात बिंदू दाखवा.

9. ΔABC असा काढा की $l(BC) = 5.5$ सेमी $m \angle ABC = 90^\circ$, $l(AB) = 4$ सेमी या त्रिकोणाचा शिरोलंबसंपात बिंदू दाखवा.
10. बसचा वेग ताशी 48 किमी असताना एका गावाहून दुसऱ्या गावाला जायला 5 तास लागतात. बसचा वेग ताशी 8 किमीने कमी केला, तर तेवढ्याच प्रवासाला किती तास लागतील ते काढा. चलनाचा प्रकार ओळखून उदाहरण सोडवा.
11. ΔABC च्या रेषा AD व रेषा BE या मध्यगा आहेत. G हा मध्यगा संपातबिंदू आहे. जर $l(AG) = 5$ सेमी तर $l(GD) =$ किती आणि जर $l(GE) = 2$ सेमी तर $l(BE) =$ किती ?
12. खालील परिमेय संख्या दशांश रूपात लिहा.
 (1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$
13. अवयव पाडा.
 (1) $2y^2 - 11y + 5$ (2) $x^2 - 2x - 80$ (3) $3x^2 - 4x + 1$
14. एका दूरचित्रवाणी संचाची किंमत 50000 रुपये आहे. तो संच दुकानदाराने 15% सूट देऊन विकला तर त्या गिऱ्हाईकास तो केवढ्यास पडेल ?
15. राजाभाऊंनी आपला फ्लॅट दलालमार्फत वसंतरावांना 88,00000 रुपयास विकला. दलालाने दोघांकडून 2 % दराने दलाली घेतली, तर दलालास एकूण किती दलाली मिळाली ?
16. $\square ABCD$ समांतरभुज चौकोन असा काढा की $l(DC) = 5.5$ सेमी, $m \angle D = 45^\circ$, $l(AD) = 4$ सेमी.
17. आकृतीत रेषा $l \parallel$ रेषा m तसेच रेषा $p \parallel$ रेषा q यावरून $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ ची मापे काढा.



उत्तर सूची

1. (i) B (ii) B (iii) D 2. (1) 18 (2) 16 3. (1) 145 (2) 93
4. (1) 24 (2) 20 6. 256 च्या सातव्या मुळाचा पाचवा घात
7. (1) $25x^2 - 80x + 63$ (2) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ (3) $a^3 + \frac{3a^2}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{1}{8}$
10. व्यस्त, 6 तास 11. $l(GD) = 2.5$ सेमी, $l(BE) = 6$ सेमी
12. (1) $0.\overline{615384}$ (2) $1.\overline{571428}$ (3) 0.3125 (4) $0.\overline{7}$
13. (1) $(y - 5)(2y - 1)$ (2) $(x - 10)(x + 8)$ (3) $(x - 1)(3x - 1)$
14. ₹42500 15. ₹ 352000 17. $78^\circ, 78^\circ, 102^\circ, 78^\circ$

10

बहुपदींचा भागाकार



जरा आठवूया.

मागील इयत्तेत बैजिक राशींवर बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया कशा करायच्या हे आपण शिकलो आहोत.

खालील उदाहरणांत रिकाम्या जागा भरा.

(1) $2a + 3a = \square$

(2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$

(4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$

(6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$



जाणून घेऊया.

बहुपदीची ओळख (Introduction to polynomial)

एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल, तर ती राशी एका चलातील बहुपदी असते.

उदाहरणार्थ, $x^2 + 2x + 3$; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ या एका चलातील बहुपदी आहेत.

बहुपदी या विशिष्ट बैजिक राशीच असतात म्हणून बहुपदींवरील बेरीज, वजाबाकी व गुणाकार या क्रिया बैजिक राशींप्रमाणे केल्या जातात.

उदाहरणार्थ, (1) $(3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2)$
 $= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2)$
 $= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3$
 $= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3$

(2) $(4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8)$
 $= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8$
 $= -3x^2 + 11x - 13$

बहुपदीची कोटी (Degree of a polynomial)

पुढील उदाहरणात दिलेल्या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक चौकटीत लिहा.

उदा. (1) $3x^2 + 4x$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक आहे.

उदा. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ या बहुपदीतील चलाचा सर्वात मोठा घातांक आहे.

दिलेल्या बहुपदीतील चलाच्या सर्वात मोठ्या घातांकास त्या बहुपदीची कोटी म्हणतात.



हे मला समजले.

- एका चलातील बैजिक राशीच्या प्रत्येक पदातील चलाचा घातांक हा पूर्ण संख्या असेल तर ती राशी बहुपदी असते.
- बहुपदीतील चलाचा सर्वांत मोठा घातांक म्हणजे त्या बहुपदीची कोटी होय.



जाणून घेऊया.

(I) एकपदीला एकपदीने भागणे (To divide a monomial by a monomial)

उदा. (1) $15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करा.

उकल : भागाकार ही गुणाकाराची उलट क्रिया आहे.

$\therefore 15p^3 \div 3p$ हा भागाकार करण्यासाठी, $3p$ या एकपदीला कोणत्या एकपदीने गुणले असता गुणाकार $15p^3$ येतो, हा विचार करावा लागेल.

$$3p \times 5p^2 = 15p^3 \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

या उदाहरणाची मांडणी शेजारी दाखवल्याप्रमाणे करता येते.

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p \overline{) 15p^3} \\ \underline{-15p^3} \\ 0 \end{array}$$

उदा. (2) भागाकार करा व चौकटीत योग्य ती पदे लिहा.

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

(iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -9x \overline{) -36x^4} \\ \underline{} \\ \boxed{} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ 2y^3 \overline{) -20y^5} \\ \underline{} \\ \boxed{} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

बहुपदीला एकपदीने भागणे (To divide a polynomial by a monomial)

खालील उदाहरणे अभ्यासा व बहुपदीला एकपदीने भागण्याची रीत समजून घ्या.

उदा. (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

उकल :

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^3 + 8x^2} \\ \underline{6x^3} \\ 0 + 8x^2 \\ \underline{- 8x^2} \\ 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

\therefore भागाकार = $3x^2 + 4x$ व बाकी = 0

उदा. (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

उकल :

$$\begin{array}{r} 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 \overline{)15y^4 + 10y^3 - 3y^2} \\ \underline{-15y^4} \\ 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ \underline{-10y^3} \\ 0 - 3y^2 \\ \underline{+3y^2} \\ 0 \end{array}$$

\therefore भागाकार = $3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ व बाकी = 0

स्पष्टीकरण -

(i) $5y^2 \times 3y^2 = 15y^4$
 (ii) $5y^2 \times 2y = 10y^3$
 (iii) $5y^2 \times \frac{-3}{5} = -3y^2$

उदा. (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

उकल :

$$\begin{array}{r} 4p - 2 \\ 3p^2 \overline{)12p^3 - 6p^2 + 4p} \\ \underline{-12p^3} \\ 0 - 6p^2 + 4p \\ \underline{+6p^2} \\ 0 + 4p \end{array}$$

\therefore भागाकार = $4p - 2$ व बाकी = $4p$

स्पष्टीकरण -

(i) $3p^2 \times 4p = 12p^3$
 (ii) $3p^2 \times -2 = -6p^2$

उदा. (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

उकल :

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 \overline{)5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6} \\ \underline{-5x^4} \\ 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{+3x^3} \\ 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{-4x^2} \\ 0 + 2x - 6 \end{array}$$

\therefore भागाकार = $5x^2 - 3x + 4$ व बाकी = $2x - 6$

स्पष्टीकरण -

(i) $x^2 \times 5x^2 = 5x^4$
 (ii) $x^2 \times -3x = -3x^3$
 (iii) $x^2 \times 4 = 4x^2$

बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.

वरील उदा. (3) मध्ये, बाकी $4p$ ची कोटी ही $3p^2$ या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे. तसेच उदा. (4) मध्ये $2x - 6$ ह्या बाकीची कोटी ही x^2 या भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान आहे हे लक्षात घ्या.

सरावसंच 10.1

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

$$(1) 21m^2 \div 7m$$

$$(2) 40a^3 \div (-10a)$$

$$(3) (-48p^4) \div (-9p^2)$$

$$(4) 40m^5 \div 30m^3$$

$$(5) (5x^3 - 3x^2) \div x^2$$

$$(6) (8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$$

$$(7) (2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$$

$$(8) (21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$$

$$(9) (6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$$

$$(10) (25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$$



जाणून घेऊया.

बहुपदीला द्विपदीने भागणे (To divide a polynomial by a binomial)

बहुपदीला द्विपदीने भागण्याची रीत ही बहुपदीला एकपदीने भागण्याच्या रीतीप्रमाणेच असते.

उदा. (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

उकल :

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ 0 + 2x + 4 \\ \underline{+ 2x + 4} \\ 0 \end{array}$$

स्पष्टीकरण

(i) प्रथम भाज्यास व भाजकास घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावे.

भाजकाच्या पहिल्या पदास x ने गुणले की भाज्याचे पहिले पद मिळते.

\therefore भाजकास x ने गुणावे

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

\therefore भागाकार = $x + 2$ व बाकी = 0

उदा. (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

उकल : येथे भाज्य बहुपदीची कोटी 4 आहे. तिच्यातील चलाचे घातांक उतरत्या क्रमाने नाहीत. तसेच घातांक 3 असलेले पदही नाही. ते $0y^3$ मानू आणि भाज्य बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहू व भागाकार करू.

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 4y^2 + 6y \\
 y + 4 \overline{) y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y} \\
 \underline{-y^4 + 4y^3} \\
 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 \underline{+4y^3 - 16y^2} \\
 0 + 6y^2 + 24y \\
 \underline{-6y^2 + 24y} \\
 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

\therefore भागाकार = $y^3 - 4y^2 + 6y$ व बाकी = 0

उदा. (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

उकल :

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 5x + 9 \\
 x^2 - 1 \overline{) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9} \\
 \underline{-6x^4 + 6x^2} \\
 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 \underline{+5x^3 - 5x} \\
 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 \underline{-9x^2 + 9} \\
 0 + 10x + 0
 \end{array}$$

स्पष्टीकरण -

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

\therefore भागाकार = $6x^2 + 5x + 9$ व बाकी = $10x$



- बहुपदीचा भागाकार करताना जेव्हा बाकी शून्य उरते, किंवा बाकीची कोटी ही भाजक बहुपदीच्या कोटीपेक्षा लहान असते तेव्हा भागाकाराची क्रिया पूर्ण होते.
- भाज्य बहुपदीतील पदे घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने नसतील तर ती बहुपदी घातांकांच्या उतरत्या क्रमाने लिहावी ती तशी लिहिताना एखाद्या घातांकाचे पद नसेल तर त्याचा सहगुणक 0 मानून घातांकांचा उतरता क्रम पूर्ण करावा.

सरावसंच 10.2

1. भागाकार करा. भागाकार व बाकी लिहा.

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$

(2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$

(4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6*) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7*) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$



उत्तरसूची

सरावसंच 10.1

1. $3m, 0$

2. $-4a^2, 0$

3. $\frac{-16}{3}p^2, 0$

4. $\frac{4}{3}m^2, 0$

5. $5x - 3, 0$

6. $4p - 2, 0$

7. $y + 2, 3$

8. $3x, -14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0$

10. $5m - 3, 10m + 8$

सरावसंच 10.2

1. $y + 6, 0$

2. $p + 4, -17$

3. $4x^2 + 18x + 75, 300$

4. $m^2 + m + 1, 10$

5. $x^2 + x - 5, x - 2$

6. $a - 1, a^2 + a - 1$

7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{-13}{16}$





जरा आठवूया.

उदा. निनादने एका पुस्तकाच्या दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची संख्या 60, 50, 54, 46, 50 अशी आहे. यावरून दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची सरासरी काढा.

उकल : सरासरी = $\frac{\text{सर्व प्राप्तांकांची बेरीज}}{\text{एकूण प्राप्तांकांची संख्या}}$

$$= \frac{60 + \square + \square + \square + 50}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

∴ दररोज वाचलेल्या पृष्ठांची सरासरी \square आहे.

या सरासरीस मध्य किंवा मध्यमान म्हणतात.



जाणून घेऊया.

वरील उदाहरणात रोज वाचलेल्या पृष्ठांची संख्या ही सांख्यिक माहिती आहे. त्यावरून निनादने रोज साधारणपणे 52 पृष्ठे वाचली असा निष्कर्ष काढला आहे.

अशा रीतीने घटनेविषयी किंवा समस्येविषयी सांख्यिक माहिती जमा करणे, त्या माहितीचा अभ्यास करून काही निष्कर्ष मिळवणे, ही एक स्वतंत्र ज्ञानशाखा आहे. या शाखेला **सांख्यिकी** असे नाव आहे.

मध्य (Mean)

आपण पाहिले की 60, 50, 54, 46 व 50 या संख्यांची सरासरी 52 येते. या सरासरीला सांख्यिकीच्या परिभाषेत मध्य म्हणतात. सांख्यिक सामग्रीचा मध्य काढण्यासाठी सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करतात. या बेरजेला सामग्रीतील संख्यांच्या संख्येने भागतात.

मध्य काढण्याच्या या रीतीचा आपण आणखी अभ्यास करू. त्यासाठी पुढील उदाहरण पाहा.

उदा. एका शाळेतील इयत्ता 8 वी च्या 37 विद्यार्थ्यांना गणित विषयात एका 10 गुणांच्या चाचणीत मिळालेले गुण खालीलप्रमाणे आहेत. या गुणांचा मध्य काढा.

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6, 5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7.

उकल : या उदाहरणात सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करण्यासाठी बराच वेळ जाईल. आपल्याला माहित आहे की $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 5 = 35$. यावरून एका संख्येत तीच संख्या मिळवण्याची क्रिया सोपी होते, हे लक्षात घ्या. याचाच उपयोग करून वरील सामग्रीतील संख्यांची बेरीज करणे सोईचे होईल म्हणून सामग्रीतील संख्यांचे वर्गीकरण करून संख्यांची बेरीज करू.

गुण, x_i (प्राप्तांक)	ताळ्याच्या खुणा	विद्यार्थी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
2		1	$1 \times 2 = 2$
3		1	$1 \times 3 = 3$
4	≡	5	$5 \times 4 = 20$
5		2	$2 \times 5 = 10$
6	≡	5	$5 \times 6 = 30$
7	≡	6	$6 \times 7 = 42$
8	≡	5	$5 \times 8 = 40$
9	≡	8	$8 \times 9 = 72$
10		4	$4 \times 10 = 40$
		$N = 37$	$\sum f_i x_i = 259.$

$$\begin{aligned} \text{मध्य} &= \frac{\sum f_i \times x_i}{N} \\ &= \frac{259}{37} \\ &= 7 \end{aligned}$$

वरीलप्रमाणे सारणी तयार करून दिलेल्या सामग्रीचा मध्य काढण्याच्या पुढील पायऱ्या लक्षात ठेवा.

- पहिल्या स्तंभात $x_1 < x_2 < x_3 \dots$ असे चढत्या क्रमाने प्राप्तांक लिहा, ते x_i ने दर्शवले.
 - दुसऱ्या स्तंभात ताळ्याच्या खुणा करा.
 - तिसऱ्या स्तंभात प्रत्येक प्राप्तांकाशी संबंधित ताळ्याच्या खुणा मोजून वारंवारता लिहा. ही वारंवारता f_i ने दर्शवली आहेत. त्याखाली सर्व वारंवारतांची बेरीज लिहा. एकूण वारंवारता N ने दर्शवली आहे.
 - शेवटच्या स्तंभात $f_i \times x_i$ हे गुणाकार लिहा. त्याखाली सर्व गुणाकारांची बेरीज लिहा.
- $f_i \times x_i$ या गुणाकारांची बेरीज $\sum f_i \times x_i$ अशी दाखवली जाते. \sum (सिग्मा) हे चिन्ह 'बेरीज' या अर्थाने वापरले जाते. मध्य \bar{x} (एक्स बार) ने दर्शवतात.

$$\therefore \text{मध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i \times x_i}{N}$$

उदा. राजापूर या गावातील 30 शेतकऱ्यांचे सोयाबीनचे एकरी उत्पादन क्विंटलमध्ये खालीलप्रमाणे आहे.
 9, 7.5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8,
 6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 9, 5.5, 4, 8.
 यावरून वारंवारता वितरण सारणी तयार करा आणि सोयाबीनच्या एकरी उत्पादनाचा मध्य काढा.

उकल :

एकरी उत्पादन (क्विंटल) (प्राप्तांक) x_i	ताळ्याच्या खुणा	शेतकरी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
4		3	12
5		5	25
5.5		4	22
6		3	18
6.5		2	13
7.5		4	30
8		6	48
9		3	27
		N = 30	$\Sigma f_i x_i = 195.$

$$\text{मध्यमान } \bar{x} = \frac{\Sigma f_i \times x_i}{N} = \frac{195}{30} = 6.5$$

एकरी सोयाबीन उत्पादनाचा मध्य 6.5 क्विंटल.

सरावसंच 11.1

1. इयत्ता 8 वी मधील 30 विद्यार्थ्यांपैकी प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांची संख्या खालील वारंवारता सारणीत दिली आहे. यावरून प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांचा मध्य काढण्यासाठी खालील चौकटी पूर्ण करा.

रोपांची संख्या (प्राप्तांक) x_i	विद्यार्थी संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	<input type="text"/>
3	12	<input type="text"/>
4	8	<input type="text"/>
	N = <input type="text"/>	$\Sigma f_i x_i =$ <input type="text"/>

$$\begin{aligned} \text{मध्य } \bar{x} &= \frac{\text{□}}{N} \\ &= \frac{\text{□}}{\text{□}} \\ &= \text{□} \end{aligned}$$

\therefore प्रत्येकाने लावलेल्या रोपांचा मध्य आहे.

2. एकलारा गावातील 25 कुटुंबांत मे महिन्यात वापरलेली वीज युनिटमध्ये खालील सारणीत दिली आहे. सारणी पूर्ण करून खालील प्रश्नांची उत्तरे द्या.

वीज वापर (युनिट) (प्राप्तांक) x_i	कुटुंबांची संख्या (वारंवारता) f_i	$f_i \times x_i$
30	7
45	2
60	8
75	5
90	3
	N =	$\sum f_i x_i = \dots\dots\dots$

- (1) 45 युनिट वीज वापरणारी एकूण कुटुंबे किती ?
 (2) ज्या प्राप्तांकाची वारंवारता 5 आहे तो प्राप्तांक कोणता ?
 (3) N = किती? $\sum f_i x_i =$ किती?
 (4) यावरून मे महिन्यात प्रत्येक कुटुंबाने वापरलेल्या विजेचा मध्य काढा.

3. भिलार येथील 40 कुटुंबांतील सदस्यांची संख्या पुढीलप्रमाणे आहे. 1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2. यावरून या 40 कुटुंबांतील सदस्यांचा मध्य वारंवारता सारणीचा वापर करून काढा.
4. 'मॉडेल हायस्कूल, नांदपूर' ने राज्यस्तरीय विज्ञान प्रदर्शनात मागील 20 वर्षांत सादर केलेल्या विज्ञान व गणित प्रकल्पांची संख्या खालीलप्रमाणे आहे. यावरून वारंवारता सारणी तयार करून सामग्रीचा मध्य काढा. 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.



मागील इयत्तेत आपण साधा स्तंभालेख व जोडस्तंभालेख यांचा अभ्यास केला आहे. आता अजून काही स्तंभालेखांचा अभ्यास करू.

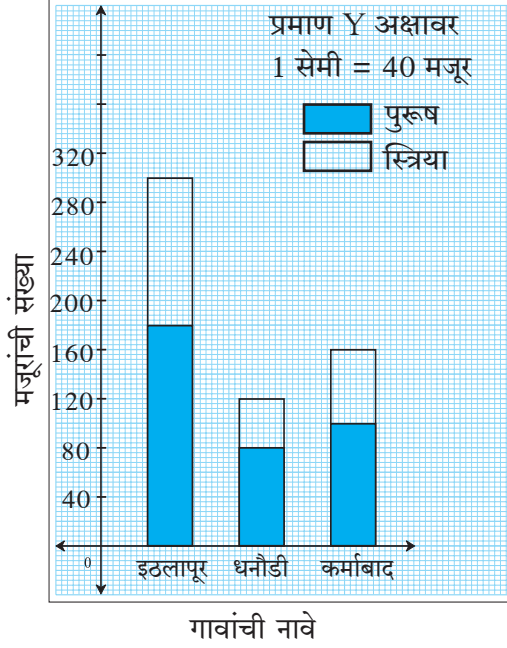
विभाजित स्तंभालेख (Subdivided bar diagram)

सामग्रीतील माहितीचे तुलनात्मक विश्लेषण जोड स्तंभालेखाप्रमाणे विभाजित स्तंभालेखाने सुद्धा करता येते. यात दोन किंवा अधिक घटकांची माहिती एकाच स्तंभात दाखवली जाते. विभाजित स्तंभालेख काढण्याच्या पायऱ्या बघू.

गाव	इठलापूर	धनोडी	कर्माबाद
पुरुष मजूर	180	80	100
स्त्री मजूर	120	40	60
एकूण मजूर	300	<input type="text"/>	<input type="text"/>

- प्रथम सामग्रीतील माहितीची वरीलप्रमाणे सारणी तयार करा.

- आलेख कागदावर X- अक्ष व Y- अक्ष काढा.
- समान अंतर ठेवून, X- अक्षावर गावांची नावे लिहा.
- Y - अक्षावर मजूरांची संख्या लिहा. 1 सेमी = 40 मजूर हे प्रमाण घ्या.
- इठलापूर गावात एकूण मजूर 300 आहेत. मजूरांची ही संख्या एका स्तंभाने दाखवा.

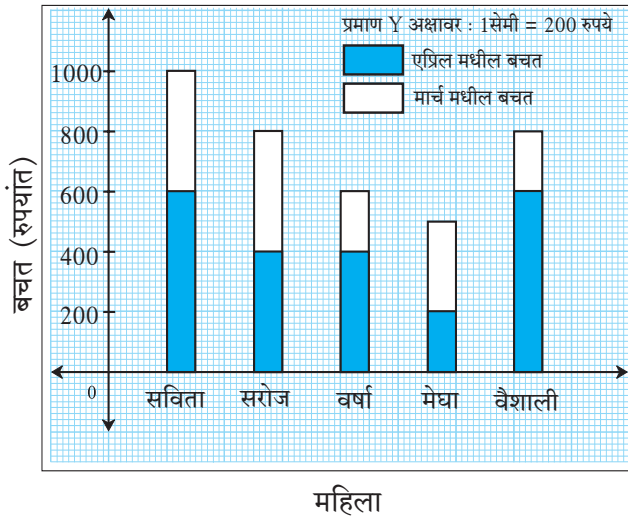


- त्यामध्ये पुरुष मजूर हा एकूण मजूरांच्या स्तंभाचा एक भाग आहे, तो एका खुणेने दाखवा.
- स्तंभाचा राहिलेला भाग हा साहजिकच स्त्री मजूरांची संख्या दाखवेल. तो वेगळ्या खुणेने दाखवा.
- याप्रमाणेच धनौडी व कर्माबाद गावांकरिता विभाजित स्तंभ काढा.

वरील पायऱ्यांनुसार विभाजित स्तंभालेख शेजारी काढून दाखवला आहे, त्याचे निरीक्षण करा.

सरावसंच 11.2

1. खालील आकृतीचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



- (1) ही आकृती कोणत्या प्रकारच्या स्तंभालेखाची आहे?
- (2) वैशालीची एप्रिल महिन्यातील बचत किती आहे?
- (3) सरोजची मार्च व एप्रिल महिन्यांतील एकूण बचत किती?
- (4) सविताची एकूण बचत मेघाच्या एकूण बचतीपेक्षा किती जास्त आहे?
- (5) कोणाची एप्रिल महिन्यातील बचत सर्वात कमी आहे?

2. एका जि. प. शाळेतील इयत्ता 5 वी ते 8 वी मधील मुलांची व मुलींची संख्या खालील सारणीत दिली आहे. यावरून विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर 1 सेमी = 10 विद्यार्थी घ्या.)

इयत्ता	5 वी	6 वी	7 वी	8 वी
मुले	34	26	21	25
मुली	17	14	14	20

3. खालील सारणीत चार गावांमध्ये 2016 आणि 2017 या वर्षांत लावलेल्या झाडांच्या संख्या दिल्या आहेत. सारणीतील माहिती विभाजित स्तंभालेखाने दाखवा.

वर्ष	गाव	कर्जत	वडगाव	शिवापूर	खंडाळा
2016		150	250	200	100
2017		200	300	250	150

4. खालील सारणीत तीन शहरांतील इयत्ता 8 वीतील विद्यार्थ्यांनी शाळेत जाण्यासाठी वापरलेल्या वाहतुकीच्या साधनांची व पायी जाणाऱ्यांची माहिती दिली आहे. ही माहिती दर्शवणारा विभाजित स्तंभालेख काढा. (प्रमाण : Y अक्षावर - 1 सेमी = 500 विद्यार्थी घ्या.)

साधन	शहर	पैठण	येवला	शहापूर
सायकल		3250	1500	1250
बस व ऑटो		750	500	500
पायी		1000	1000	500



शतमान स्तंभालेख (Percentage bar diagram)

आर्वी या गावामध्ये लावलेल्या 60 झाडांपैकी 42 झाडे जगली आणि मोर्शी या गावामध्ये लावलेल्या 75 झाडांपैकी 45 झाडे जगली. बार्शी या गावात लावलेल्या 90 झाडांपैकी 45 झाडे जगली.

कोणत्या गावातील वृक्षारोपण अधिक यशस्वी झाले ते समजण्यासाठी केवळ संख्या पुरेशा नाहीत. त्यासाठी जगलेल्या झाडांचे शतमान काढावे लागेल.

$$\text{आर्वी येथे जगलेल्या झाडांचे शेकडा प्रमाण} = \frac{42}{60} \times 100 = 70.$$

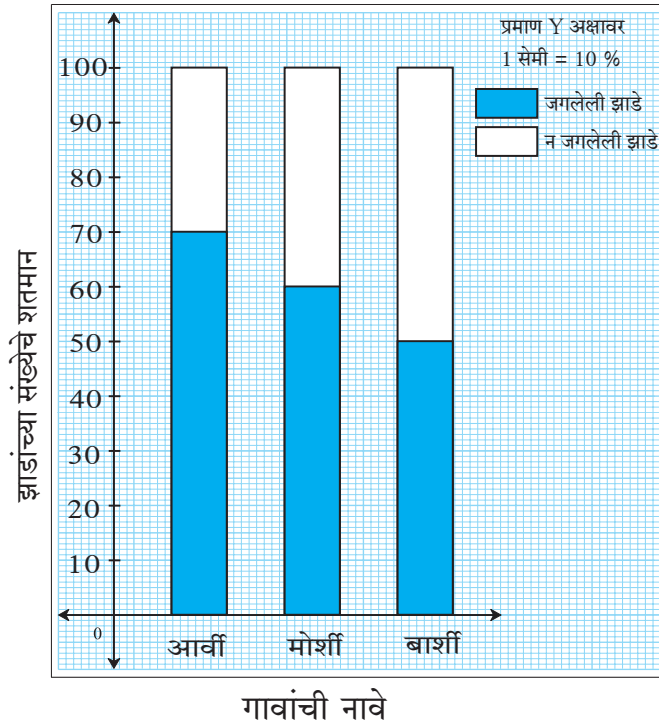
$$\text{मोर्शी येथे जगलेल्या झाडांचे शेकडा प्रमाण} = \frac{45}{75} \times 100 = 60.$$

या शतमानांवरून असे लक्षात येते की आर्वी गावातील जगलेल्या झाडांची संख्या कमी असली तरी त्यांचे शतमान जास्त आहे. म्हणजेच शतमानांवरून थोड्या वेगळ्या प्रकारची माहिती मिळते. दिलेली माहिती शतमानात

रूपांतरित करून जो विभाजित स्तंभालेख काढतात, त्याला शतमान स्तंभालेख म्हणतात. म्हणजेच शतमान स्तंभालेख हे विभाजित स्तंभालेखाचे विशेष रूप असते. हा शतमान स्तंभालेख खालील पायऱ्यांच्या आधारे काढू.

- प्रथम खालीलप्रमाणे सारणी तयार करू.

गाव	आर्वी	मोर्शी	बाशी
लावलेली एकूण झाडे	60	75	90
जगलेली झाडे	42	45	45
जगलेल्या झाडांचे शतमान	$\frac{42}{60} \times 100 = 70$	$\frac{45}{75} \times 100 = 60$	$\frac{45}{90} \times 100 = 50$



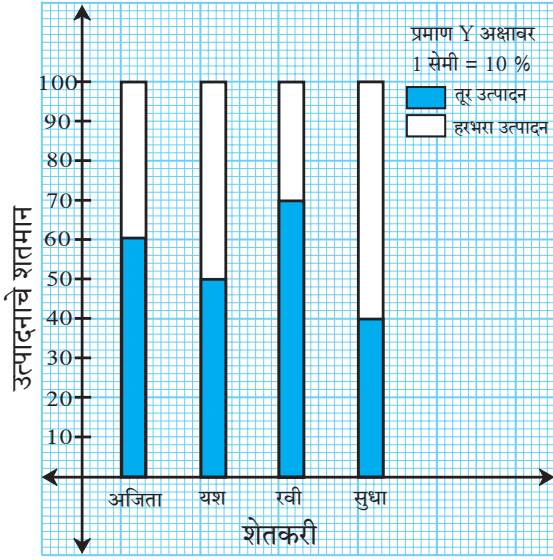
- शतमान स्तंभालेखात सर्व स्तंभ 100 एकक उंचीचे घेतात.
- प्रत्येक स्तंभात जगलेल्या झाडांचे शतमान दाखवू. उरलेले शतमान न जगलेल्या झाडांचे असेल.
- शतमान स्तंभालेख हा एक प्रकारचा विभाजित स्तंभालेख असल्यामुळे बाकी सर्व कृती विभाजित स्तंभालेख काढण्याच्या कृतीप्रमाणेच असते.
वरील पायऱ्यांनुसारच शेजारील स्तंभालेख काढला आहे. त्याचे निरीक्षण करा.

सरावसंच 11.3

1. खालील सारणीतील माहितीवरून शतमान स्तंभालेख काढा.

इयत्ता आठवीची तुकडी	A	B	C	D
गणितात श्रेणी A मध्ये आलेले विद्यार्थी	45	33	10	15
एकूण विद्यार्थी	60	55	40	75

2. पुढील स्तंभालेखाचे निरीक्षण करून प्रश्नांची उत्तरे लिहा.



- (1) शेजारील स्तंभालेख कोणत्या प्रकारचा आहे ?
- (2) अजिताच्या शेतातील तुरीचे उत्पादन एकूण उत्पादनाच्या किती टक्के आहे ?
- (3) यश आणि रवी यांच्यापैकी कोणाच्या हरभरा उत्पादनाचे शतमान किती जास्त आहे ?
- (4) तुरीच्या उत्पादनाचे सर्वात कमी शतमान कोणाचे आहे ?
- (5) सुधाच्या तूर व हरभरा यांच्या उत्पादनांची शेकडेवारी किती ?

3. काही शाळांतील इयत्ता 10 वीतील विद्यार्थ्यांचे सर्वेक्षण करून मिळालेली माहिती खालील सारणीत दिली आहे. ती माहिती शतमान स्तंभालेखाने दाखवा.

शाळा	पहिली	दुसरी	तिसरी	चौथी
विज्ञान शाखेकडे कल	90	60	25	16
वाणिज्य शाखेकडे कल	60	20	25	24

उपक्रम : शतमान स्तंभालेख व विभाजित स्तंभालेख यांची तुलनात्मक चर्चा करा. याचा उपयोग करून विज्ञान, भूगोल यांसारख्या विषयांतील अशा आलेखांची माहिती घ्या.

२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 11.1 2. (1) 2 (2) 75 (3) $N = 25, \sum f_i \times x_i = 1425$ (4) 57
3. 3.9 4. 2.75

सरावसंच 11.2 1. (1) विभाजित स्तंभालेख (2) ₹ 600 (3) ₹ 800
(4) ₹ 500 (5) मेघाची

सरावसंच 11.3 2. (1) शतमान स्तंभालेख (2) 60%
(3) यशचे उत्पादन 20% ने जास्त (4) सुधाचे
(5) 40% आणि 60%





जरा आठवूया.

मागील इयत्तांमध्ये आपण एका चलातील समीकरणांचा अभ्यास केला आहे.

- समीकरणात दिलेल्या चलासाठी जी किंमत ठेवल्यामुळे समीकरणाच्या दोन्ही बाजू समान होतात ती किंमत म्हणजे त्या समीकरणाची उकल असते.
- समीकरण सोडवणे म्हणजे त्याची उकल शोधणे होय.
- समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर समान क्रिया केली तर मिळणारे समीकरण सत्य असते. या गुणधर्माचा वापर करून आपण नवीन सोपी समीकरणे तयार करून दिलेले समीकरण सोडवतो.

समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर करण्याच्या क्रिया.

(i) दोन्ही बाजूंमध्ये समान संख्या मिळवणे.

(ii) दोन्ही बाजूंतून समान संख्या वजा करणे.

(iii) दोन्ही बाजूंना समान संख्येने गुणणे.

(iv) दोन्ही बाजूंना शून्येतर समान संख्येने भागणे.

खालील समीकरणे सोडवण्यासाठी रिकाम्या जागा भरा.

उदा. (1) $x + 4 = 9$

$$x + 4 - \boxed{} = 9 - \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

उदा. (2) $x - 2 = 7$

$$x - 2 + \boxed{} = 7 + \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

उदा. (3) $\frac{x}{3} = 4$

$$\frac{x}{3} \times \boxed{} = 4 \times \boxed{}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$

उदा. (4) $4x = 24$

$$\frac{4x}{\boxed{}} = \frac{24}{\boxed{}}$$

$$\therefore x = \boxed{}$$



जाणून घेऊया.

एकचल समीकरणांची उकल (Solution of equations in one variable)

कधी कधी समीकरण सोडवण्यासाठी त्यावर एकापेक्षा जास्त क्रिया कराव्या लागतात. अशा समीकरणाच्या दोन्ही बाजूंवर क्रिया करून उकल काढण्याचे काही प्रकार पाहू.

उदा. (1) पुढील समीकरणे सोडवा.

$$(i) 2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$$

उकल : दोन्ही बाजूंना 5 ने गुणून

$$10(x - 3) = 3(x + 4)$$

$$\therefore 10x - 30 = 3x + 12$$

दोन्ही बाजूंत 30 मिळवू.

$$\therefore 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$$

$$10x = 3x + 42$$

दोन्ही बाजूंतून $3x$ वजा करू

$$\therefore 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$$

$$\therefore 7x = 42$$

दोन्ही बाजूंना 7 ने भागून

$$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$$

$$\therefore x = 6$$

$$(iii) \frac{2}{3} + 5a = 4$$

उकल : रीत I

$$\frac{2}{3} + 5a = 4$$

प्रत्येक पदाला 3 ने गुणू.

$$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$$

$$\therefore 2 + 15a = 12$$

$$\therefore 15a = 12 - 2$$

$$\therefore 15a = 10$$

$$\therefore a = \frac{10}{15}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

$$(ii) 9x - 4 = 6x + 29$$

उकल : दोन्ही बाजूंत 4 मिळवू.

$$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$$

$$\therefore 9x = 6x + 33$$

दोन्ही बाजूंतून $6x$ वजा करू.

$$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$$

$$\therefore 3x = 33$$

दोन्ही बाजूंना 3 ने भागू.

$$\therefore \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$$

$$\therefore x = 11$$

रीत II

दोन्ही बाजूंतून $\frac{2}{3}$ वजा करून,

$$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{12-2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{10}{3}$$

दोन्ही बाजूंना 5 ने भागून,

$$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

जर A, B, C, D या शून्येतर राशींसाठी $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ तर दोन्ही बाजूंना $B \times D$ ने गुणून $AD = BC$ हे समीकरण मिळते. याचा उपयोग करून उदाहरणे सोडवू.

$$(iv) \quad \frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$$

$$\text{उकल : } \frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore 4(x-7) = 5(x-2)$$

$$\therefore 4x - 28 = 5x - 10$$

$$\therefore 4x - 5x = -10 + 28$$

$$\therefore -x = 18 \quad \therefore x = -18$$

$$(v) \quad \frac{8m-1}{2m+3} = 2$$

$$\text{उकल : } \frac{8m-1}{2m+3} = \frac{2}{1}$$

$$1(8m-1) = 2(2m+3)$$

$$\therefore 8m-1 = 4m+6$$

$$\therefore 8m-4m = 6+1$$

$$\therefore 4m = 7 \quad \therefore m = \frac{7}{4}$$

सरावसंच 12.1

1. प्रत्येक समीकरणानंतर चलासाठी दिलेल्या किमती, त्या समीकरणाच्या उकली आहेत का ते ठरवा.

$$(1) x - 4 = 3, \quad x = -1, 7, -7$$

$$(2) 9m = 81, \quad m = 3, 9, -3$$

$$(3) 2a + 4 = 0, \quad a = 2, -2, 1$$

$$(4) 3 - y = 4, \quad y = -1, 1, 2$$

2. खालील समीकरणे सोडवा.

$$(1) 17p - 2 = 49$$

$$(2) 2m + 7 = 9$$

$$(3) 3x + 12 = 2x - 4$$

$$(4) 5(x-3) = 3(x+2)$$

$$(5) \frac{9x}{8} + 1 = 10$$

$$(6) \frac{y}{7} + \frac{y}{3} = 2$$

$$(7) 13x - 5 = \frac{3}{2}$$

$$(8) 3(y+8) = 10(y-4) + 8$$

$$(9) \frac{x-9}{x-5} = \frac{5}{7}$$

$$(10) \frac{y-4}{3} + 3y = 4$$

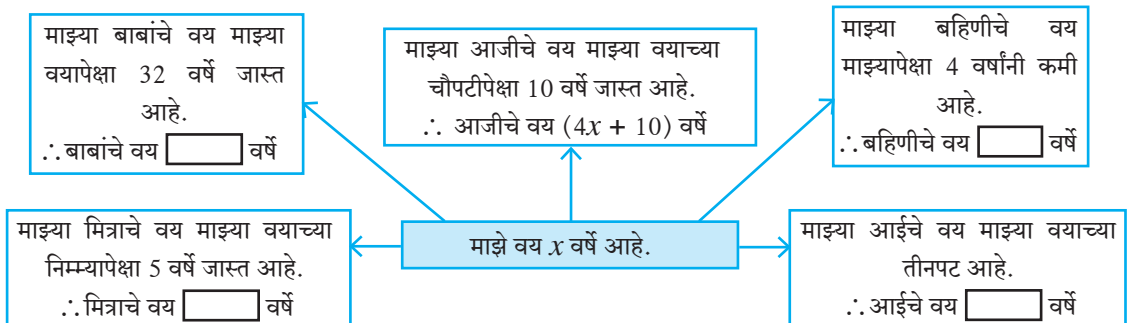
$$(11) \frac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$$



जाणून घेऊया.

शाब्दिक उदाहरणे (Word Problems)

शाब्दिक उदाहरणातील दिलेल्या माहितीसाठी चल वापरून ती माहिती बैजिक राशींत कशी लिहितात ते पाहू.



आधी दिलेल्या माहितीनुसार माझ्या मित्राचे वय जर 12 वर्षे असेल तर माझे वय किती ?

$$\text{माझे वय} = x \text{ वर्षे} \quad \therefore \text{मित्राचे वय} = \frac{x}{2} + 5$$

$$\frac{x}{2} + 5 = 12 \quad \dots\dots (\text{दिले आहे})$$

$$\therefore x + 10 = 24 \quad \dots\dots (\text{प्रत्येक पदाला 2 ने गुणून})$$

$$\therefore x = 24 - 10$$

$$\therefore x = 14$$

\therefore माझे वय 14 वर्षे आहे. यावरून वरील माहितीतील इतर व्यक्तींची वये काढा.

कृती : चौकटीत योग्य संख्या लिहा.

<p style="text-align: center;">रुंदीच्या तिप्पट लांबी</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <p style="text-align: center;">मी आयत आहे माझी परिमिती 40 सेमी</p> </div> <p style="text-align: right; margin-right: 10px;">रुंदी x</p>	<p style="font-size: 2em;">}</p>	<p>आयताची परिमिती = 40</p> $2(\square x + \square x) = 40$ $2 \times \square x = 40$ $\square x = 40$ $x = \square$
---	----------------------------------	---

$$\therefore \text{आयताची रुंदी} = \square \text{ सेमी व आयताची लांबी} = \square \text{ सेमी}$$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) जोसेफचे वजन त्याच्या लहान भावाच्या वजनाच्या दुप्पट आहे. दोघांचे मिळून वजन 63 किग्रॅ आहे, तर जोसेफचे वजन काढा.

उकल : जोसेफच्या लहान भावाचे वजन x किग्रॅ मानू.

$$\therefore \text{जोसेफचे वजन त्याच्या भावाच्या वजनाच्या दुप्पट} = 2x$$

$$\therefore \text{दिलेल्या माहितीवरून } x + 2x = 63$$

$$\therefore 3x = 63 \quad \therefore x = 21$$

$$\therefore \text{जोसेफचे वजन} = 2x = 2 \times 21 = 42 \text{ किग्रॅ.}$$

उदा. (2) एका अपूर्णाकाचा अंश त्याच्या छेदापेक्षा 5 ने मोठा आहे. अंश व छेद यांमध्ये प्रत्येकी 4 मिळवल्यास

$\frac{6}{5}$ हा अपूर्णाक मिळतो, तर तो अपूर्णाक काढा.

उकल : अपूर्णाकाचा छेद x मानू.

$$\therefore \text{त्या अपूर्णाकाचा अंश, छेदापेक्षा 5 ने जास्त म्हणजे } x + 5 \text{ आहे.}$$

$$\therefore \text{तो अपूर्णाक } \frac{x+5}{x} \text{ आहे.}$$

त्याच्या अंशात व छेदात 4 मिळवल्यास नवीन अपूर्णांक $\frac{6}{5}$ होईल.

$$\therefore \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 5(x+9) = 6(x+4)$$

$$\therefore 5x + 45 = 6x + 24$$

$$\therefore 45 - 24 = 6x - 5x$$

$$\therefore 21 = x$$

$$\therefore \text{अपूर्णांकाचा छेद } 21, \text{ अंश} = 21 + 5 = 26$$

$$\therefore \text{तो अपूर्णांक} = \frac{26}{21}$$

उदा. (3) रत्नाजवळची रक्कम रफिकजवळच्या रकमेच्या तिपटीपेक्षा 200 रुपयांनी जास्त आहे. रत्नाजवळचे 300 रुपये घेऊन रफिकला दिले, तर रत्नाजवळची रक्कम रफिकजवळच्या रकमेच्या $\frac{7}{4}$ पट होते; तर रफिकजवळची मूळ रक्कम किती होती ? मूळ रक्कम काढण्यासाठी खालील कृती पूर्ण करा.

उकल : रत्नाजवळची रक्कम, रफिकजवळ असलेल्या रकमेच्या तिपटीपेक्षा 200 रुपये जास्त आहे.

रफिकजवळची रक्कम x रुपये मानू. \therefore रत्नाजवळची रक्कम रुपये

\therefore रत्नाकडचे 300 रुपये घेऊन रफिकला दिले, म्हणून रत्नाजवळ उरले रुपये

\therefore रफिकजवळ झाले $x + 300$ रु.

रत्नाजवळची नवीन रक्कम ही रफिकजवळच्या रकमेच्या $\frac{7}{4}$ पट झाली.

$$\frac{\text{रत्नाजवळची रक्कम}}{\text{रफिकजवळची रक्कम}} = \frac{\text{input}}{\text{input}}$$

$$\frac{3x - 100}{x + 300} = \frac{\text{input}}{\text{input}}$$

$$4 \text{ input} = 7 \text{ input}$$

$$12x - 400 = 7x + 2100$$

$$12x - 7x = \text{input}$$

$$5x = \text{input}$$

$$x = \text{input}$$

\therefore रफिकजवळ रुपये होते.

सरावसंच 12.2

- आईचे वय मुलाच्या वयापेक्षा 25 वर्षांनी जास्त आहे. 8 वर्षांनंतर मुलाच्या वयाचे आईच्या वयाशी गुणोत्तर $\frac{4}{9}$ होईल तर मुलाचे वय काढा.
- एका अपूर्णांकाचा छेद अंशापेक्षा 12 ने मोठा आहे. त्याच्या अंशातून 2 वजा करून व छेदात 7 मिळवून तयार झालेला अपूर्णांक $\frac{1}{2}$ शी सममूल्य होतो तर तो अपूर्णांक कोणता ?

3. पितळ या संमिश्रामध्ये तांबे व जस्त यांचे प्रमाण 13:7 असते तर 700 ग्रॅम वजनाच्या पितळेच्या भांड्यात जस्त किती असेल ?
- 4*. तीन क्रमागत पूर्ण संख्यांची बेरीज 45 पेक्षा जास्त पण 54 पेक्षा कमी आहे तर त्या संख्या काढा.
5. दोन अंकी संख्येतील दशक स्थानचा अंक हा एकक स्थानच्या अंकाच्या दुप्पट आहे. अंकांची अदलाबदल करून येणारी संख्या व मूळ दिलेली संख्या यांची बेरीज 66 आहे, तर दिलेली संख्या कोणती ?
- 6*. एका नाट्यगृहावर नाटकाची 200 रुपये दराची व 100 रुपये दराची काही तिकिटे विकली गेली. 200 रुपये दराच्या तिकिटांची संख्या 100 रुपयांच्या तिकिटांच्या संख्येपेक्षा 20 तिकिटे जास्त खपली होती. दोन्ही प्रकारच्या तिकिट विक्रीतून नाट्यगृहाला 37000 रुपये मिळाले तर 100 रुपयांची किती तिकिटे विकली गेली ?
7. तीन क्रमागत नैसर्गिक संख्यांपैकी सर्वात लहान संख्येची पाचपट सर्वात मोठ्या संख्येच्या चौपटीपेक्षा 9 ने अधिक आहे तर त्या संख्या कोणत्या ?
8. राजूने एक सायकल 8% नफ्याने अमितला विकली. अमितने 54 रुपये खर्च करून ती दुरुस्त करून घेतली. ती सायकल त्याने निखिलला 1134 रुपयांना विकली. तेव्हा अमितला नफा किंवा तोटा झाला नाही. तर राजूने ती सायकल किती रुपयांना खरेदी केली होती ?
9. एका क्रिकेट खेळाडूने एका सामन्यात 180 धावा काढल्या. दुसऱ्या सामन्यात 257 धावा काढल्या. तिसऱ्या सामन्यात त्याने किती धावा काढल्या तर त्याच्या सामन्यातील धावांची सरासरी 230 होईल ?
10. सुधीरचे वय विरूच्या वयाच्या तिपटीपेक्षा 5 ने जास्त आहे. अनिलचे वय सुधीरच्या वयाच्या निमपट आहे. सुधीरचे वय व विरूचे वय यांच्या वयांची बेरीज व अनिलच्या वयाची तिप्पट यांचे गुणोत्तर 5:6 आहे तर विरूचे वय काढा.

२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 12.1 1. समीकरणाची उकल असलेल्या किमती (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$

(4) $y = -1$ 2. (1) $p = 3$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$

(7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$

सरावसंच 12.2 1. 12 वर्षे 2. $\frac{23}{35}$ 3. 245 ग्रॅम

4. 15, 16, 17 किंवा 16, 17, 18 5. 42 6. 110

7. 17, 18, 19 8. ₹ 1000 9. 253 10. 5 वर्षे

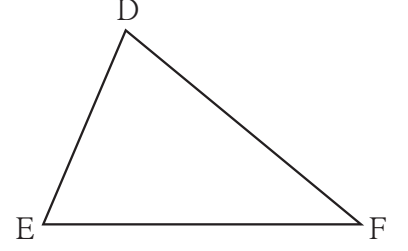




जरा आठवूया.

शेजारील आकृतीवरून खालील प्रश्नांची उत्तरे शोधा.

- बाजू DE समोरील कोन कोणता आहे?
- $\angle E$ हा कोणत्या बाजूसमोरील कोन आहे ?
- बाजू DE आणि बाजू DF यांनी समाविष्ट केलेला कोन कोणता ?
- $\angle E$ आणि $\angle F$ यांनी समाविष्ट केलेली बाजू कोणती ?
- बाजू DE च्या लगत कोणते कोन आहेत ?



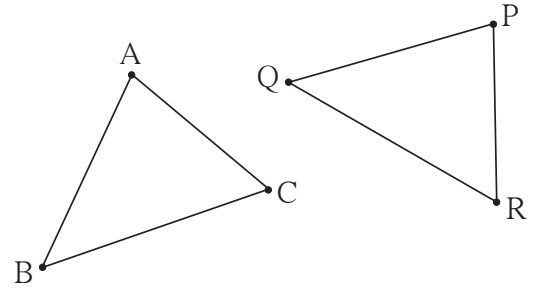
- ज्या आकृत्या परस्परांशी तंतोतंत जुळतात त्या आकृत्यांना एकरूप आकृत्या म्हणतात.
- ज्या रेषाखंडांची लांबी समान असते ते रेषाखंड एकरूप असतात.
- ज्या कोनांची मापे समान असतात ते कोन एकरूप असतात.



जाणून घेऊया.

त्रिकोणांची एकरूपता (Congruence of triangles)

कृती : शेजारील आकृत्या पाहा. पारदर्शक ट्रेसिंग पेपरवर ΔABC काढून घ्या व तो कागद ΔPQR वर ठेवून पाहा. बिंदू A हा बिंदू P वर, बिंदू B हा बिंदू Q वर आणि बिंदू C हा बिंदू R वर ठेवून पाहा. दोन्ही त्रिकोण तंतोतंत जुळतात, म्हणजेच ते एकरूप आहेत हे दिसेल.

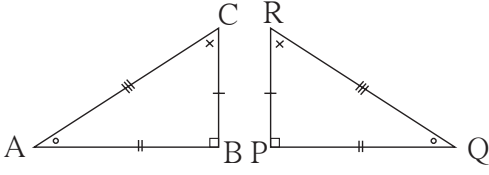


कृतीमध्ये ΔABC हा ΔPQR वर ठेवण्याची एक पद्धत दिली आहे. परंतु बिंदू A हा Q वर, बिंदू B हा R वर आणि बिंदू C हा P वर ठेवला तर ते त्रिकोण तंतोतंत जुळणार नाहीत. म्हणजे विशिष्ट पद्धतीनेच ते एकमेकांशी जुळवले पाहिजेत. ही जुळवण्याची पद्धत एकास-एक संगतीने दाखवली जाते. बिंदू A ची संगती बिंदू P शी आहे, हे $A \leftrightarrow P$ असे लिहितात. येथे, $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ अशा संगतीत ते त्रिकोण एकरूप आहेत. या पद्धतीने त्रिकोण एकरूप झाले की $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$ तसेच रेख $AB \cong$ रेख PQ , रेख $BC \cong$ रेख QR ,

रेख $CA \cong$ रेख RP या सहा एकरूपता मिळतात म्हणून ΔABC व ΔPQR हे $ABC \leftrightarrow PQR$ या संगतीत एकरूप आहेत असे म्हणतात व $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ असे लिहितात. अशा लिहिण्यामध्ये $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ ही शिरोबिंदूंची एकास एक संगती व त्यांमुळे मिळणाऱ्या वरील सहा एकरूपता यांचा अंतर्भाव होतो, म्हणून दोन त्रिकोण एकरूप आहेत हे लिहिताना शिरोबिंदूंचा क्रम एकरूपतेची एकास एक संगती पाळतो याकडे लक्ष द्यावे.



ΔABC आणि ΔPQR या एकरूप त्रिकोणांचे एकरूप घटक सारख्या खुणांनी दाखवले आहेत.



अनिलचे लेखन : $\Delta ABC \cong \Delta QPR$
 रेहानाचे लेखन : $\Delta BAC \cong \Delta PQR$
 सुरजितचे लेखन : $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

अनिल, रेहाना व सुरजित यांनी या त्रिकोणांच्या एकरूपतेचे लेखन पुढीलप्रमाणे केले होते.

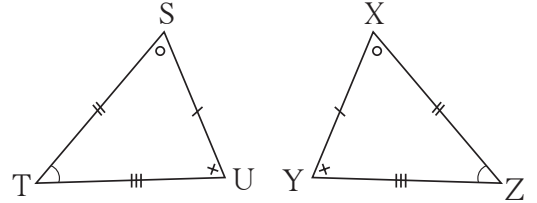
यांपैकी कोणते लेखन बरोबर आहे आणि कोणते चूक आहे? चर्चा करा.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) शेजारच्या आकृतीतील त्रिकोणांचे सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत.

(i) शिरोबिंदूच्या ज्या एकास एक संगतीने हे त्रिकोण एकरूप होतात त्या संगतीत त्रिकोणांची एकरूपता दोन प्रकारे लिहा.

(ii) $\Delta XYZ \cong \Delta STU$ हे लेखन बरोबर आहे की चूक, हे सकारण लिहा.



उकल : निरीक्षणावरून दिलेले त्रिकोण $STU \leftrightarrow XZY$ या एकास एक संगतीत एकरूप आहेत.

(i) एक प्रकार : $\Delta STU \cong \Delta XZY$, दुसरा प्रकार: $\Delta UST \cong \Delta YXZ$

हीच एकरूपता आणखी वेगवेगळ्या प्रकारे लिहिण्याचा प्रयत्न करा.

(ii) या त्रिकोणांची एकरूपता $\Delta XYZ \cong \Delta STU$ अशी लिहिली, तर बाजू $ST \cong$ बाजू XY असा अर्थ होईल, आणि ते चूक आहे.

$\therefore \Delta XYZ \cong \Delta STU$ हे लेखन चूक आहे.

($\Delta XYZ \cong \Delta STU$ या लेखनामुळे आणखीही काही चुका होतात. त्या विद्यार्थ्यांनी शोधव्यात. परंतु उत्तर का चूक आहे, हे सांगण्यासाठी कोणतीही एक चूक दाखवणे पुरेसे असते.)

उदा. (2) पुढे दिलेल्या आकृतीत, त्रिकोणांच्या जोडीतील सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. त्या त्रिकोणांच्या शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास-एक संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील हे सांगा व त्रिकोणांची एकरूपता चिन्हांने दर्शवा.

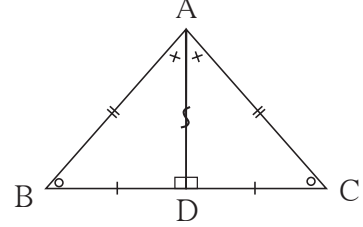
उकल : ΔABD आणि ΔACD यांमध्ये बाजू AD

हा सामाईक रेषाखंड आहे.

प्रत्येक रेषाखंड स्वतःशी एकरूप असतो.

संगती : $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C, D \leftrightarrow D. \Delta ABD \cong \Delta ACD$

टीप : सामाईक बाजूवर 's' अशी खूण करण्याची पद्धत आहे.

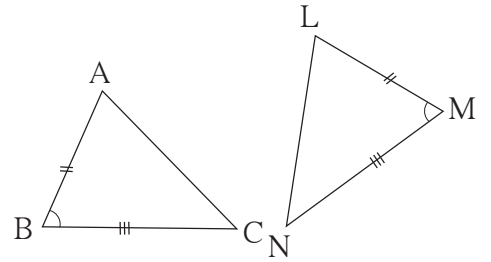


एखाद्या जोडीतील त्रिकोण एकरूप आहेत हे दाखवण्यासाठी सर्व सहा घटकांची एकरूपता दाखवण्याची आवश्यकता नसते. एका त्रिकोणाचे तीन विशिष्ट घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असतात, तेव्हा उरलेल्या तीन घटकांच्या जोड्याही परस्परांशी एकरूप असतात, म्हणजे ते विशिष्ट तीन घटक एकरूपतेची कसोटी निश्चित करतात.

आपण काही त्रिकोण रचना करायला शिकलो आहोत. जे तीन घटक दिले असता त्रिकोणाची एकमेव आकृती काढता येते, तेच घटक एकरूपतेच्या कसोट्या निश्चित करतात, हे आपण पडताळून पाहू.

(1) दोन बाजू आणि समाविष्ट कोन : बाकोबा कसोटी

बाजूंच्या दोन जोड्या एकरूप असतील आणि त्यांनी समाविष्ट केलेले कोनही एकरूप असतील असे ΔABC आणि ΔLMN काढा.



ΔABC व ΔLMN मध्ये $l(AB) = l(LM), l(BC) = l(MN), m\angle ABC = m\angle LMN$
 ΔABC हा ट्रेसिंग पेपरवर काढून घ्या व ट्रेसिंग पेपर ΔLMN वर असा ठेवा की, शिरोबिंदू A हा शिरोबिंदू L वर, बाजू AB ही बाजू LM वर, $\angle B$ हा $\angle M$ वर आणि बाजू BC ही बाजू MN वर पडेल. $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ आहे हे दिसून येईल.

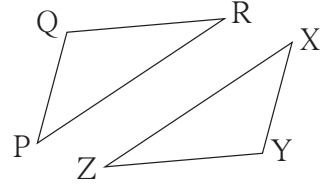
(2) तीन संगत बाजू : बाबाबा कसोटी

$$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), l(RP) = l(ZX)$$

असे त्रिकोण ΔPQR व ΔXYZ काढा.

ट्रेसिंग पेपरवर ΔPQR काढून तो ΔXYZ वर

$P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Y, R \leftrightarrow Z$ अशा एकास एक संगतीने ठेवा. $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ हे दिसून येईल.



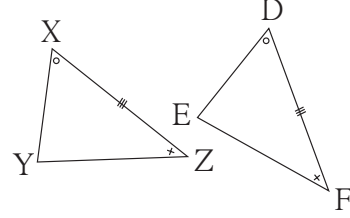
(3) दोन कोन आणि समाविष्ट बाजू : कोबाको कसोटी

ΔXYZ आणि ΔDEF असे काढा की,

$$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D \text{ आणि } \angle Z \cong \angle F$$

ट्रेसिंग पेपरवर ΔXYZ काढून तो पेपर ΔDEF

वर ठेवा. $X \leftrightarrow D, Y \leftrightarrow E, Z \leftrightarrow F$ या संगतीनुसार $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$ असे दिसेल.

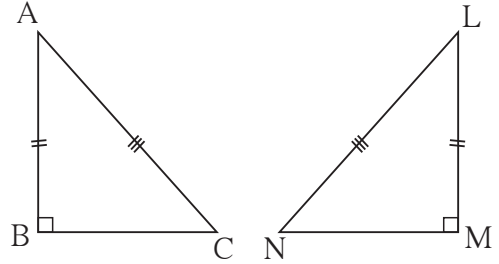


(4) कोकोबा (किंवा बाकोको) कसोटी :

दोन त्रिकोणांतील संगत कोनांच्या दोन जोड्या एकरूप असतील, तर उरलेले कोन एकरूप असतात; कारण प्रत्येक त्रिकोणातील तीनही कोनांच्या मापांची बेरीज 180° असते. म्हणून कोणतेही दोन कोन व एका कोनाची लगतची बाजू दुसऱ्या त्रिकोणातील दोन कोन व संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर कोबाको कसोटीची अट पुरी होते व ते त्रिकोण एकरूप असतात.

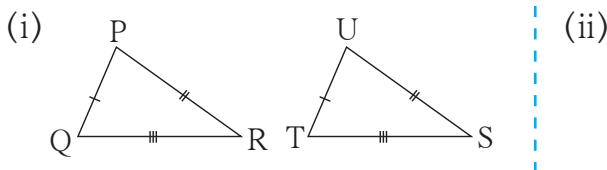
(5) काटकोन त्रिकोणांची कर्णभुजा कसोटी

काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा दिली असता एकमेव त्रिकोण काढता येतो. एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण व एक भुजा दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असलेले दोन काटकोन त्रिकोण काढा. वर दिलेल्या रीतीप्रमाणे ते एकरूप आहेत हे पडताळा.



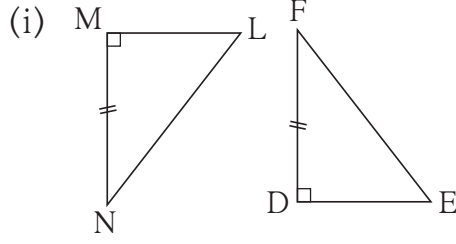
सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार आणि शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास एक संगतीनुसार एकरूप होतात, हे लिहा.

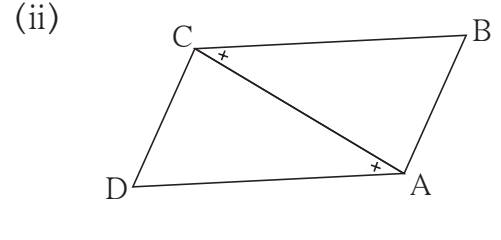


- उकल : (i) बा-बा-बा कसोटीने $PQR \leftrightarrow UTS$ या संगतीनुसार
(ii) को-बा-को कसोटीने $DBA \leftrightarrow DBC$ या संगतीनुसार

उदा. (2) पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीतील समान खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक आकृतीखाली त्रिकोणांच्या एकरूपतेची कसोटी लिहिली आहे. त्या कसोटीने त्रिकोण एकरूप होण्यासाठी आणखी कोणती माहिती देणे आवश्यक आहे आणि ती माहिती दिल्यावर त्रिकोण शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास संगतीने एकरूप होतील, हे लिहा.



कर्णभुजा कसोटी



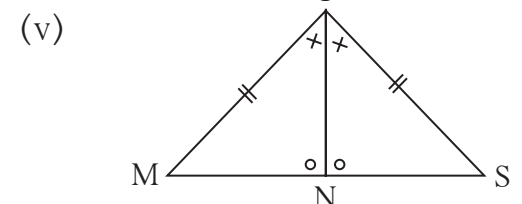
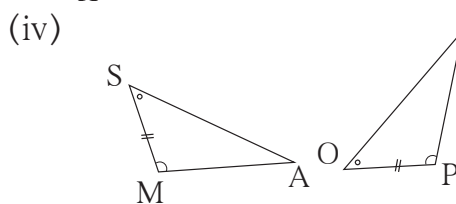
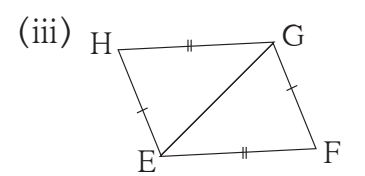
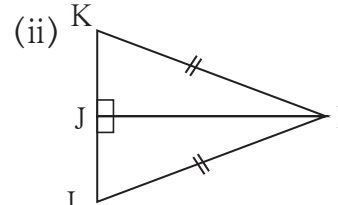
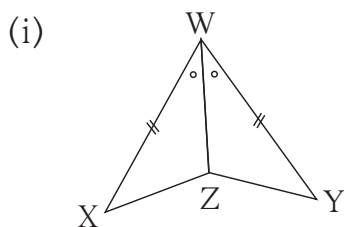
कोबाको कसोटी

- उकल : (i) दिलेले त्रिकोण हे काटकोन त्रिकोण आहेत. त्यांच्या एकेक बाजू एकरूप आहेत. म्हणून त्यांचे रेख LN व EF हे कर्ण एकरूप आहेत, ही माहिती देणे आवश्यक आहे. ही माहिती दिल्यावर $LMN \leftrightarrow EDF$ या संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील.

- (ii) आकृतीतील त्रिकोणांची रेख CA ही भुजा सामाईक आहे म्हणून $\angle DCA \cong \angle BAC$ ही माहिती देणे आवश्यक आहे. ही माहिती दिल्यावर $DCA \leftrightarrow BAC$ या संगतीत त्रिकोण एकरूप होतील.

सरावसंच 13.1

1. पुढील आकृत्यांतील त्रिकोणांच्या प्रत्येक जोडीत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण कोणत्या कसोटीनुसार आणि शिरोबिंदूंच्या कोणत्या एकास एक संगतीनुसार एकरूप होतात, हे लिहा.





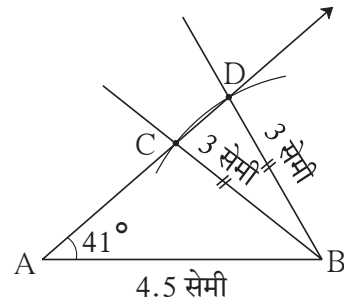
- (1) **बा-को-बा कसोटी** : जर एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू व त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या दोन संगत बाजू त्यांनी समाविष्ट केलेला कोन यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.
- (2) **बा-बा-बा कसोटी**: जर एका त्रिकोणाच्या तीन बाजू ह्या दुसऱ्या त्रिकोणाच्या तीन संगत बाजूंशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप असतात.
- (3) **को-बा-को कसोटी** : जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांनी समाविष्ट केलेली बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे दोन संगत कोन आणि त्यांनी समाविष्ट केलेली बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण एकमेकांशी एकरूप असतात.
- (4) **को-को-बा कसोटी** : जर एका त्रिकोणाचे दोन कोन व त्यांच्यात समाविष्ट नसलेली एक बाजू हे दुसऱ्या त्रिकोणाचे संगत कोन आणि त्यांच्यात समाविष्ट नसलेली संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.
- (5) **कर्ण-भुजा कसोटी** : जर एका काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू हे दुसऱ्या काटकोन त्रिकोणाचा कर्ण आणि संगत बाजू यांच्याशी एकरूप असतील, तर दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतात.

अधिक माहितीसाठी

एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असेल, तर ते दोन त्रिकोण परस्परांशी एकरूप असतील का?

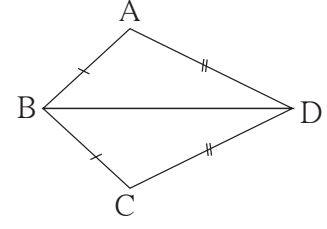
सोबतची आकृती पाहा. $\triangle ABC$ आणि $\triangle ABD$ यांमध्ये, बाजू AB सामाईक आहे. बाजू $BC \cong$ बाजू BD , $\angle A$ हा सामाईक कोन आहे, परंतु त्या बाजूंनी समाविष्ट केलेला तो कोन नाही. म्हणजे एका त्रिकोणाचे तीन घटक दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप आहेत, परंतु ते त्रिकोण एकरूप नाहीत.

यावरून, एका त्रिकोणाच्या दोन बाजू आणि त्यांनी समाविष्ट न केलेला कोन हे दुसऱ्या त्रिकोणाच्या संगत घटकांशी एकरूप असतील, तर दोन त्रिकोण एकरूप असतीलच असे नाही.



सोडवलेले उदाहरण

उदा. (1) आकृती मध्ये, □ ABCD च्या एकरूप बाजू, सारख्या खुणांनी दाखवल्या आहेत. या आकृतीत एकरूप कोनांच्या जोड्या आहेत का, हे शोधा.



उकल : ΔABD आणि ΔCBD मध्ये,

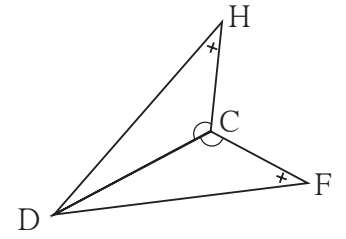
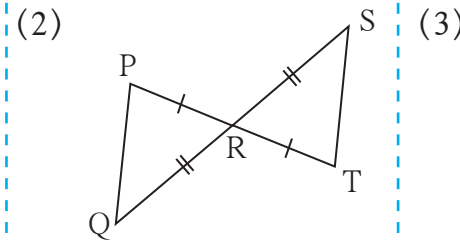
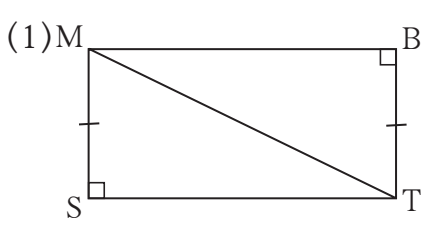
बाजू $AB \cong$ बाजू CB (दिलेले आहे) बाजू $DA \cong$ बाजू DC (दिलेले आहे) बाजू BD ही सामाईक आहे.	$\therefore \angle BAD \cong \angle BCD$ $\angle ABD \cong \angle CBD$ $\angle ADB \cong \angle CDB$
--	--

.....(एकरूप त्रिकोणांचे संगत कोन)

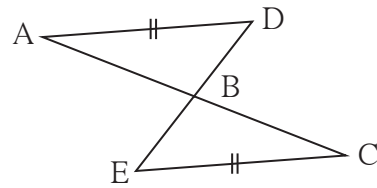
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta CBD$ (बा-बा-बा कसोटीनुसार)

सरावसंच 13.2

1. पुढीलपैकी प्रत्येक जोडीतील त्रिकोणांत सारख्या खुणांनी दाखवलेले घटक एकरूप आहेत. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोण, शिरोबिंदूच्या कोणत्या संगतीने आणि कोणत्या कसोटीने एकरूप आहेत हे लिहा. प्रत्येक जोडीतील त्रिकोणांचे उरलेले संगत एकरूप घटक लिहा.



2*. सोबतच्या आकृतीत, रेख $AD \cong$ रेख EC आहे आणखी कोणती माहिती दिली असता ΔABD व ΔECB बाकोको कसोटीने एकरूप होतील ?



&&&

उत्तरसूची

सरावसंच 13.1 1. (i) बाकोबा, $XWZ \leftrightarrow YWZ$ (ii) कर्णभुजा $KJI \leftrightarrow LJI$
 (iii) बाबाबा $HEG \leftrightarrow FGE$ (iv) कोबाको $SMA \leftrightarrow OPT$ (v) बाकोको किंवा कोबाको $MTN \leftrightarrow STN$

सरावसंच 13.2 1. (1) $\Delta MST \cong \Delta TBM$ - कर्णभुजा, बाजू $ST \cong$ बाजू MB ,
 $\angle SMT \cong \angle BTM$, $\angle STM \cong \angle BMT$ (2) $\Delta PRQ \cong \Delta TRS$ - बाकोबा,
 बाजू $PQ \cong$ बाजू TS , $\angle RPQ \cong \angle RTS$, $\angle PQR \cong \angle TSR$
 (3) $\Delta DCH \cong \Delta DCF$ - बाकोको किंवा कोबाको, $\angle DHC \cong \angle DFC$,
 बाजू $HC \cong$ बाजू FC

2. $\angle ADB \cong \angle ECB$ आणि $\angle ABD \cong \angle ECB$ किंवा $\angle DAB \cong \angle CEB$





जरा आठवूया.

एखादी व्यक्ती बँक, पतपेढी, अशा संस्थेकडून काही रक्कम ठरावीक व्याजदराने कर्ज म्हणून घेते आणि काही काळानंतर घेतलेली रक्कम परत करते. ती वापरल्याबद्दल काही अधिक पैसे दर वर्षी मोबदला म्हणून देते, त्याला व्याज म्हणतात. सरळव्याज काढण्यासाठी $I = \frac{PNR}{100}$ हे सूत्र आपण शिकलो. या सूत्रात $I =$ व्याज, $P =$ मुद्दल, $N =$ वर्षांत मुदत आणि $R =$ दसादशे व्याजदर असतो.



जाणून घेऊया.

चक्रवाढव्याज (Compound interest)

ठेव किंवा कर्ज यावर बँक चक्रवाढव्याज आकारते, ते का व कसे हे आपण शिकूया.

शिक्षिका : सज्जनरावांनी एका बँकेतून द.सा.द.शे. 10 दराने 1 वर्षांनी परतफेडीच्या अटीवर 10,000 रुपये कर्ज घेतले, तर वर्षअखेर त्यांना व्याजासह किती रक्कम द्यावी लागेल ?

विद्यार्थी : येथे $P = 10,000$ रु. ; $R = 10$; $N = 1$ वर्ष.

$$I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ रुपये.}$$

∴ सज्जनरावांना वर्षअखेर व्याजासह $10,000 + 1000 = 11,000$ रुपये द्यावे लागतील.

विद्यार्थी : पण एखादा कर्जदार वर्षअखेर व्याजाची रक्कम देखील भरू शकला नाही तर ?

शिक्षिका : बँक प्रत्येक वर्षाच्या शेवटी व्याज आकारणी करते व दरवर्षी कर्जदाराने ती व्याजाची रक्कम बँकेत भरावी अशी अपेक्षा करते. कर्जदाराने पहिल्या वर्षानंतर व्याज दिले नाही, तर बँक दुसऱ्या वर्षासाठी मुद्दल व पहिल्या वर्षाचे व्याज मिळून होणारी रक्कम कर्ज आहे असे मानते. म्हणून मुद्दल आणि पहिल्या वर्षाचे व्याज मिळून जी रास होते, तीच रक्कम दुसऱ्या वर्षी मुद्दल मानून पुढे व्याज आकारले जाते. म्हणजे दुसऱ्या वर्षी व्याज आकारणी करताना मुद्दलाची रक्कम पहिल्या वर्षाच्या राशीएवढी असते. या पद्धतीने केलेल्या व्याज आकारणीस **चक्रवाढव्याज** असे म्हणतात.

विद्यार्थी : सज्जनरावांनी कर्जफेडीची मुदत आणखी एक वर्ष वाढवली तर ?

शिक्षिका : तर दुसऱ्या वर्षासाठी 11,000 रुपये मुद्दल मानून त्यावर व्याज आणि रास काढावी लागेल.

विद्यार्थी : यासाठी आधीच्या इयत्तेत शिकलेले $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}} = \frac{110}{100}$ हे गुणोत्तर वापरले तर चालेल ना ?

शिक्षिका : नक्कीच ! प्रत्येक वर्षासाठी $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर स्थिर आहे. चक्रवाढव्याजाची आकारणी करताना प्रत्येक वर्षी मागील वर्षाची रास ही पुढच्या वर्षाचे मुद्दल असते. म्हणून व्याजाऐवजी थेट रास काढणे सोईचे ठरते. पहिल्या वर्षानंतर रास A_1 , दुसऱ्या वर्षानंतर रास A_2 , तिसऱ्या वर्षानंतर रास A_3 असे लिहू.

प्रथम मुद्दल P होते.

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100} \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

दुसऱ्या वर्षाची रास काढण्यासाठी

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100} \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

विद्यार्थी : मग तिसऱ्या वर्षाची रास A_3 काढताना

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100} \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

शिक्षिका : शाब्बास ! हे चक्रवाढव्याजाने रास काढण्याचे सूत्रच आहे. येथे, $\frac{110}{100}$ ही एक रुपयाची वर्षअखेर होणारी रास आहे हे लक्षात घ्या. जेवढ्या वर्षाची रास काढावयाची तेवढ्या वेळा मुद्दलाला या गुणोत्तराने गुणावे.

विद्यार्थी : म्हणजे पहिल्या वर्षाअखेर $\frac{\text{रास}}{\text{मुद्दल}}$ हे गुणोत्तर M आहे आणि P हे मुद्दल आहे असे मानले तर वर्ष अखेर रास $P \times M$, दुसऱ्या वर्षाअखेर $P \times M^2$, तिसऱ्या वर्षाअखेर रास $P \times M^3$ होते. या रीतीने कितीही वर्षाची रास काढता येते.

शिक्षिका : बरोबर ! द.सा.द.शे. R हा व्याजाचा दर असेल, तर

$$\therefore 1 \text{ रुपयाची } 1 \text{ वर्षाने होणारी रास} = 1 \times M = 1 \times \frac{100+R}{100} = 1 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right) \text{ आहे.}$$

$$\therefore P \text{ रुपयांची } 1 \text{ वर्षाची रास} = P \times \frac{100+R}{100} = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

\therefore मुद्दल P, व्याजाचा दसादशे दर R, मुदत N वर्षे असेल, तर

$$N \text{ वर्षानंतर रास, } A = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right)^N = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

❧ सोडवलेले उदाहरण ❧

उदा. (1) 4000 रुपयांचे 3 वर्षांचे द.सा.द.शे. $12\frac{1}{2}$ दराने चक्रवाढव्याज काढा.

उकल : येथे, $P = 4000 \text{ रु.}; R = 12\frac{1}{2}\%; N = 3 \text{ वर्षे.}$

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = P \left(1 + \frac{12.5}{100}\right)^3$$

$$= 4000 \left(1 + \frac{12.5}{100}\right)^3$$

$$A = 4000 \left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000 \left(\frac{9}{8}\right)^3$$

$$= 5695.31 \text{ रुपये}$$

∴ तीन वर्षांचे चक्रवाढव्याज (I) = रास - मुद्दल
= 5695.31 - 4000 = 1695.31 रुपये

सरावसंच 14.1

1. चक्रवाढव्याजाने येणारी रास व चक्रवाढव्याज काढा.

अ.क्र.	मुद्दल (रुपये)	दर (द.सा.द.शे.)	मुदत (वर्षे)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. समीररावांनी एका पतपेढीतून द.सा.द.शे. 12 दराने 3 वर्षांसाठी 12500 रुपये कर्ज घेतले. तर त्यांना तिसऱ्या वर्षाअखेर चक्रवाढव्याज आकारणीने एकूण किती रुपये परतफेड करावी लागेल ?
3. शलाकाने व्यवसाय सुरू करण्यासाठी द.सा.द.शे. $10\frac{1}{2}$ दराने 8000 रुपये कर्ज घेतले. तर 2 वर्षांनंतर कर्ज परतफेड करताना चक्रवाढव्याज आकारणीने तिला किती व्याज भरावे लागेल ?

अधिक माहितीसाठी

- काही आर्थिक व्यवहारात दर सहा महिन्यांना व्याज आकारणी करतात. N वर्षे मुदतीसाठी व्याजाचा दर R असेल तर सहामाही व्याज आकारणीमध्ये दिलेल्या मुद्दलासाठी व्याजाचा दर $\frac{R}{2}$ घेतात. N वर्षांसाठी सहा महिन्यांचे 2N टप्पे होतात हे लक्षात घेऊन व्याज आकारणी करतात.
- अनेक वित्तसंस्था मासिक व्याज आकारणीने चक्रवाढव्याज काढतात. तेव्हा व्याजाचा मासिक दर $\frac{R}{12}$ घेतात आणि मुदत $12 \times N$ एकूण महिन्यांएवढी घेऊन व्याज आकारणी करतात.
- अलीकडील काळात बँका दैनिक व्याज आकारणीने चक्रवाढव्याज काढतात.

उपक्रम : तुमच्या जवळच्या बँकेत जाऊन तिथे वेगवेगळ्या योजनांची माहिती मिळवा. त्या योजनांच्या व्याजांच्या दरांची सारणी करून ती वर्गात लावा.



चक्रवाढव्याजाच्या सूत्राचे उपयोजन (Application of formula for compound interest)

चक्रवाढव्याजाने रास काढण्याच्या सूत्राचा उपयोग दैनंदिन जीवनातील इतर क्षेत्रांतील उदाहरणे सोडवण्यासाठीही करता येतो; जसे लोकसंख्येतील वाढ, एखाद्या वाहनाची दरवर्षी कमी होणारी किंमत इत्यादी.

एखादी वस्तू काही काळ वापरून ती विकल्यास तिची किंमत खरेदीच्या किमतीपेक्षा कमी होते. कमी होणाऱ्या किमतीला घट किंवा घसारा (depreciation) असे म्हणतात.

किमतीतील घसारा ठरावीक काळात ठरावीक दराने होत असतो. उदा. यंत्राची किंमत दरवर्षी ठरावीक टक्क्यांनी कमी होते. काही काळानंतर कमी झालेली किंमत काढण्यासाठी चक्रवाढव्याजाच्या सूत्राचा उपयोग होतो.

ही किंमत काढण्यासाठी घसाऱ्याचा दर माहित असावा लागतो. वस्तूची किंमत कमी होत असल्याने घसाऱ्याचा (घटीचा) दर R हा ऋण घेतात.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका शहराची लोकसंख्या दरवर्षी 8% दराने वाढते. 2010 साली त्या शहराची लोकसंख्या 2,50,000 असल्यास 2012 मध्ये त्या शहराची लोकसंख्या किती होती ?

उकल : येथे, P = 2010 ची लोकसंख्या = 2,50,000

A = 2012 मधील लोकसंख्या;

R = लोकसंख्या वाढीचा दर = दरसाल 8%

N = 2 वर्षे

A = 2012 मध्ये म्हणजेच 2 वर्षांनी होणारी लोकसंख्या

$$\begin{aligned} A &= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1 + \frac{8}{100}\right)^2 \\ &= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right)^2 \\ &= 250000 \times \left(\frac{108}{100}\right) \times \left(\frac{108}{100}\right) \\ &= 2,91,600. \end{aligned}$$

∴ 2012 मध्ये शहराची लोकसंख्या 2,91,600 होती.

उदा. (2) रेहानाने एक स्कूटर 2015 मध्ये 60000 रुपयांस विकत घेतली. घसाच्याचा दर द.सा.द.शे 20 असल्यास 2 वर्षांनंतर त्या स्कूटरची किंमत किती होईल ?

उकल : येथे, $P = 60000$ रु. $A = 2$ वर्षांनंतर मिळणारी किंमत
 $R =$ घसाच्याचा दर $= -20\%$ दरसाल $N = 2$ वर्षे

$A = 2$ वर्षांनंतर मिळणारी किंमत

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 60000 \times \left(1 + \frac{20}{100}\right)^2 = 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$= 60000 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 \quad A = 38400 \text{ रु.}$$

∴ दोन वर्षांनी स्कूटरची किंमत 38400 रुपये होईल.

चक्रवाढ पद्धतीने व्याज आकारणीच्या सूत्रातील A, P, N, R या चार बाबींपैकी तीन बाबी दिल्यास चौथी बाब कशी काढता येते, हे पुढील उदाहरणांतून अभ्यासा.

उदा. (3) एका रकमेची द.सा.द.शे 10 दराने 3 वर्षांनी चक्रवाढ व्याजाने 6655 रुपये रास होते. तर ती रक्कम काढा.

उकल : येथे $A = 6655$ रुपये; $R =$ द.सा.द.शे. 10; $N = 3$ वर्षे.

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

$$\therefore 6655 = P \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\therefore P = \frac{6655 \times 10^3}{11 \times 11 \times 11} \quad P = 5 \times 10^3 = 5000$$

∴ ती रक्कम 5000 रुपये आहे.

उदा. (4) द.सा.द.शे. 10 दराने 9000 रुपयांचे किती वर्षांचे चक्रवाढव्याज 1890 रुपये होईल ?

उकल : येथे $R = 10$; $P = 9000$; चक्रवाढव्याज $= 1890$

अगोदर चक्रवाढव्याजाने होणारी रास काढू.

$$A = P + I = 9000 + 1890 = 10890$$

चक्रवाढव्याजाने होणाऱ्या राशीचे सूत्र लिहू व त्यात किमती घालू.

$$A = 10890 = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^N = 9000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \quad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} \quad \therefore N = 2$$

\therefore 2 वर्षांत चक्रवाढव्याज 1890 रुपये होईल.

सरावसंच 14.2

1. एका उड्डाणपुलाच्या बांधकामावर सुरुवातीला 320 मजूर होते. दरवर्षी 25% मजूर वाढवण्यात आले, तर दोन वर्षांनंतर त्या कामावर किती मजूर असतील ?
2. एका मेंढपाळाकडे 200 मेंढ्या असतील आणि दरवर्षी त्यांच्या संख्येत 10% ने वाढ होत असेल तर 2 वर्षांनंतर त्याच्याकडे किती मेंढ्या असतील ?
3. एका अभयारण्यात 40,000 झाडे आहेत. दरवर्षी 5% दराने वृक्षवाढ करण्याचे उद्दिष्ट ठरवण्यात आले असेल, तर 3 वर्षांनंतर त्या अभयारण्यातील झाडांची संख्या किती असली पाहिजे ?
4. आज एक मशीन 2,50,000 रुपयांना खरेदी केले. घसान्याचा दर दरवर्षी 10% असल्यास दोन वर्षांनंतर मशीनची किंमत खरेदीपेक्षा किती कमी होईल ?
5. एका मुद्दलाची द.सा.द.शे. 16 दराने चक्रवाढव्याजाने दोन वर्षांची रास 4036.80 रुपये झाली. तर दोन वर्षांत झालेले व्याज किती ?
6. 15000 रुपये चक्रवाढव्याजाने द.सा.द.शे. 12 दराने कर्जाऊ घेतले तर 3 वर्षांनी कर्ज फेडताना किती रुपये द्यावे लागतील ?
7. द.सा.द.शे. 18 दराने चक्रवाढव्याजाने एका मुद्दलाची 2 वर्षांची रास 13,924 रुपये झाली, तर मुद्दल किती होते ?
8. शहराच्या एका उपनगराची लोकसंख्या विशिष्ट दराने वाढते. आजची व दोन वर्षांनंतरची लोकसंख्या अनुक्रमे 16000 व 17640 असतील, तर लोकसंख्या वाढीचा दर काढा.
9. 700 रुपयांची द.सा.द.शे. 10 दराने किती वर्षांत 847 रुपये रास होईल ?
10. द.सा.द.शे. 8 दराने होणारे 20,000 रुपयांवरील 2 वर्षांचे सरळव्याज आणि चक्रवाढव्याज यांतील फरक काढा.

२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 14.1	1. (1) 2205, 205	(2) 6298.56, 1298.56	(3) 4622.5, 622.5
	2. 17561.60	3. 1768.2	
सरावसंच 14.2	1. 500	2. 242	3. 46,305
	4. ₹ 47500	5. ₹ 1036.80	6. ₹ 21073.92
	7. ₹ 10,000	8. दसादशे 5	9. 2 वर्षांत
	10. ₹ 128		





जरा आठवूया.

आपल्याला माहित आहे की बंदिस्त बहुभुजाकृतीच्या बाजू सेंटिमीटर, मीटर, किलोमीटर या एककात दिलेल्या असतील तर त्यांची क्षेत्रफळे अनुक्रमे चौसेमी, चौमी, चौकिमी या एककांत दिली जातात, कारण क्षेत्रफळ चौरसांनी मोजले जाते.

(1) चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू²

(3) काटकोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ
= $\frac{1}{2} \times$ काटकोन करणाऱ्या बाजूंचा गुणाकार

(2) आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी \times रुंदी

(4) त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ पाया \times उंची

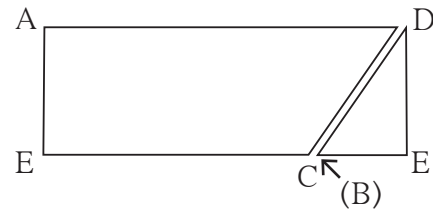
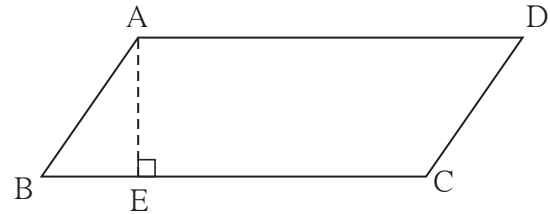


जाणून घेऊया.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of a parallelogram)

कृती :

- एका कागदावर एक पुरेसा मोठा समांतरभुज चौकोन ABCD काढा. A बिंदूतून बाजू BC वर लंब काढा. ΔAEB हा काटकोन त्रिकोण कापा. तो सरकवत दुसऱ्या आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे $\square ABCD$ च्या उरलेल्या भागाला जोडून ठेवा. तयार झालेली आकृती आयत आहे हे लक्षात घ्या.



- समांतरभुज चौकोनापासूनच हा आयत तयार झाला आहे, म्हणून दोन्हीचे क्षेत्रफळ समान आहे.
- समांतरभुज चौकोनाचा पाया म्हणजे आयताची एक बाजू (लांबी) व त्याची उंची म्हणजे आयताची दुसरी बाजू (रुंदी) होय.

\therefore समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया \times उंची

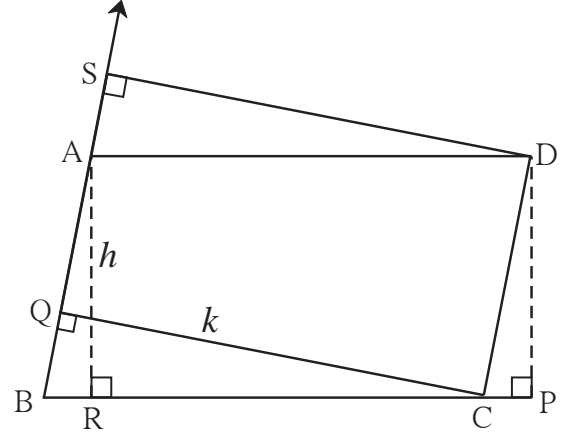
लक्षात घ्या की, समांतरभुज चौकोनाच्या समांतर भुजांपैकी एक भुजा पाया मानला तर त्या समांतर भुजांमधील अंतर ही त्या चौकोनाची त्या पाया संगत उंची असते.

□ ABCD हा समांतरभुज चौकोन आहे.

रेख $DP \perp$ बाजू BC, रेख $AR \perp$ बाजू BC. बाजू BC हा पाया मानला तर उंची = $l(AR) = l(DP) = h$.

जर रेख $CQ \perp$ बाजू AB असून जर AB ही बाजू पाया मानली, तर त्या पायाची संगत उंची म्हणजे $l(QC) = k$ आहे.

$$\therefore A(\square ABCD) = l(BC) \times h = l(AB) \times k.$$



सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका समांतरभुज चौकोनाचा पाया 8 सेमी व उंची 5 सेमी असेल तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

$$\begin{aligned} \text{उकल} : \text{ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} &= \text{पाया} \times \text{उंची} = 8 \times 5 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} = 40 \text{ चौसेमी}$$

उदा. (2) एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 112 चौसेमी असून त्याचा पाया 10 सेमी असेल तर त्याची उंची काढा.

$$\text{उकल} : \text{ समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} = \text{पाया} \times \text{उंची} \quad \therefore 112 = 10 \times \text{उंची}$$

$$\frac{112}{10} = \text{उंची}$$

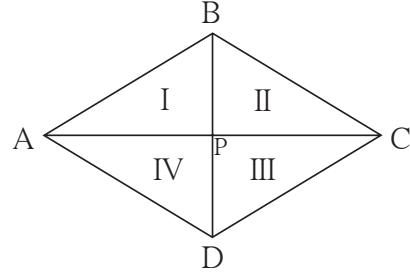
$$\therefore \text{ समांतरभुज चौकोनाची उंची} = 11.2 \text{ सेमी}$$

सरावसंच 15.1

- एका समांतरभुज चौकोनाचा पाया 18 सेमी व उंची 11 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.
- एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 29.6 चौसेमी व पाया 8 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाची उंची काढा.
- एका समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 83.2 चौसेमी आहे. त्याची उंची 6.4 सेमी असेल तर त्याचा पाया किती लांबीचा असेल ?

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of a rhombus)

कृती : आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एक समभुज चौकोन काढा. आपल्याला माहित आहे की समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांचे लंबदुभाजक असतात.



$$l(AC) = d_1 \text{ आणि } l(BD) = d_2 \text{ मानू.}$$

□ ABCD हा समभुज चौकोन आहे. त्याचे कर्ण P बिंदूत छेदतात. त्यामुळे आपल्याला चार एकरूप काटकोन त्रिकोण मिळतात. प्रत्येक काटकोन त्रिकोणाच्या बाजू $\frac{1}{2} l(AC)$ व $\frac{1}{2} l(BD)$ एवढ्या आहेत. चारही त्रिकोणांची क्षेत्रफळे समान आहेत.

$$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{d_1}{2},$$

$$\text{तसेच } l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2} l(BD) = \frac{d_2}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ समभुज चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ} &= 4 \times A(\Delta APB) \\ &= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP) \\ &= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2} \times \text{कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार}$$

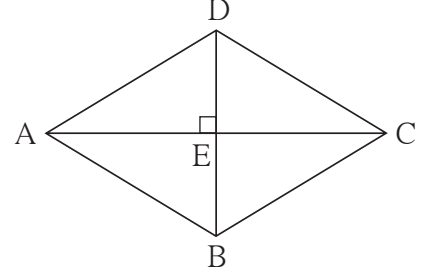
सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) एका समभुज चौकोनाच्या दोन कर्णांची लांबी अनुक्रमे 11.2 सेमी व 7.5 सेमी आहे तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

$$\begin{aligned} \text{उकल : समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} &= \frac{1}{2} \times \text{कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} = 5.6 \times 7.5 \\ &= 42 \text{ चौसेमी.} \end{aligned}$$

उदा.(2) एका समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ 96 चौसेमी आहे. त्याचा एक कर्ण 12 सेमी आहे तर त्या चौकोनाच्या बाजूची लांबी काढा.

उकल : समजा, \square ABCD हा समभुज चौकोन आहे. त्याच्या कर्ण BD ची लांबी 12 सेमी आहे. त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ 96 चौसेमी आहे. यावरून प्रथम कर्ण AC ची लांबी काढू.



$$\text{समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2} \times \text{कर्णांच्या लांबींचा गुणाकार}$$

$$\therefore 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore l(AC) = 16$$

समजा कर्णाचा छेदनबिंदू E आहे. समभुज चौकोनाचे कर्ण परस्परांना काटकोनात दुभागतात.

$$\therefore \Delta ADE \text{ मध्ये, } m\angle E = 90^\circ,$$

$$l(DE) = \frac{1}{2} l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6; \quad l(AE) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

पायथागोरसच्या प्रमेयाने,

$$\begin{aligned} l(AD)^2 &= l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

$$\therefore l(AD) = 10$$

\therefore समभुज चौकोनाची बाजू 10 सेमी.

सरावसंच 15.2

- एका समभुज चौकोनाच्या दोन कर्णांची लांबी 15 व 24 सेमी आहे, तर त्याचे क्षेत्रफळ काढा.
- एका समभुज चौकोनाच्या दोन कर्णांची लांबी अनुक्रमे 16.5 सेमी व 14.2 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.
- एका समभुज चौकोनाची परिमिती 100 सेमी असून त्याच्या एका कर्णाची लांबी 48 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ किती येईल ?
- एका समभुज चौकोनाचा एक कर्ण 30 सेमी असून त्याचे क्षेत्रफळ 240 चौसेमी आहे. तर त्या चौकोनाची परिमिती काढा.

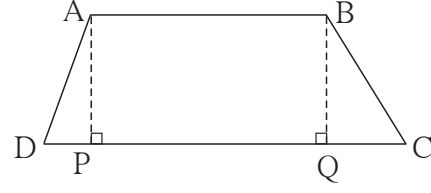
समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ (Area of a trapezium)

कृती : रेषा $AB \parallel$ रेषा DC असेल असा $\square ABCD$ हा समलंब चौकोन एका कागदावर काढा.

रेखा $AP \perp$ बाजू DC आणि

रेखा $BQ \perp$ बाजू DC काढा.

$l(AP) = l(BQ) = h$ मानू.



समलंब चौकोनाची उंची h , म्हणजेच समांतर रेषांमधील अंतर,

लंब काढल्यामुळे $ABCD$ या चौकोनी क्षेत्राचे 3 भाग झाले. त्यांपैकी ΔDPA व ΔBQC हे काटकोन त्रिकोण आहेत. $ABQP$ हा आयत आहे. बिंदू P आणि Q हे रेषा DC वर आहेत.

समलंब चौकोन $ABCD$ चे क्षेत्रफळ

$$= A(\Delta APD) + A(\square APQB) + A(\Delta BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2} l(QC) \times h$$

$$= h \left[\frac{1}{2} DP + PQ + \frac{1}{2} QC \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \dots l(PQ) = l(AB)$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

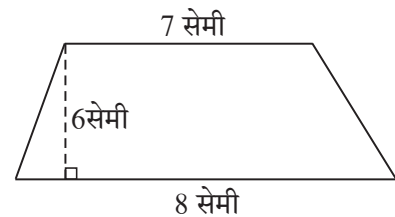
$$= \frac{1}{2} \times h [l(DC) + l(AB)]$$

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2} (\text{समांतर असलेल्या बाजूंच्या लांबींची बेरीज}) \times h$$

$$\therefore \text{समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ} = \frac{1}{2} \times \text{समांतर बाजूंच्या लांबींची बेरीज} \times \text{उंची}$$

सोडवलेले उदाहरण

उदा.(1) एका समलंब चौकोनाच्या संमुख भुजांची एक जोडी परस्परांना समांतर आहे. त्या भुजांमधील अंतर 6 सेमी आहे व समांतर बाजूंची लांबी अनुक्रमे 7 सेमी व 8 सेमी आहे, तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

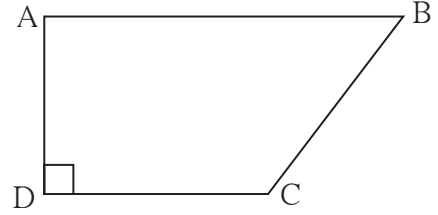


उकल : समांतर भुजांमधील अंतर = समलंब चौकोनाची उंची = 6 सेमी

$$\begin{aligned}\text{समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ} &= \frac{1}{2} (\text{समांतर बाजूंच्या लांबींची बेरीज}) \times \text{उंची} \\ &= \frac{1}{2} (7 + 8) \times 6 = 45 \text{ चौसेमी}\end{aligned}$$

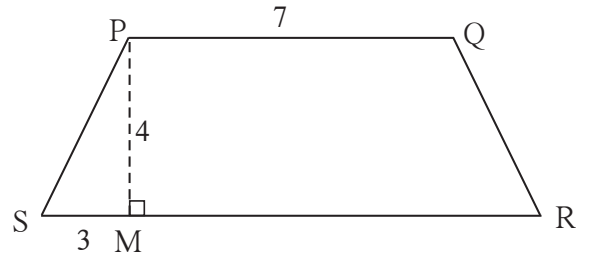
सरावसंच 15.3

1. चौकोन ABCD मध्ये $l(AB) = 13$ सेमी,
 $l(DC) = 9$ सेमी, $l(AD) = 8$ सेमी,
तर \square ABCD चे क्षेत्रफळ काढा.



2. एका समलंब चौकोनाच्या समांतर बाजूंची लांबी अनुक्रमे 8.5 सेमी व 11.5 सेमी आहे. त्याची उंची 4.2 सेमी आहे तर त्या चौकोनाचे क्षेत्रफळ काढा.

- 3*. \square PQRS हा समद्विभुज समलंब चौकोन आहे. $l(PQ) = 7$ सेमी,
रेख $PM \perp$ बाजू SR, $l(SM) = 3$ सेमी,
समांतर बाजूंमधील अंतर 4 सेमी आहे,
तर \square PQRS चे क्षेत्रफळ काढा.

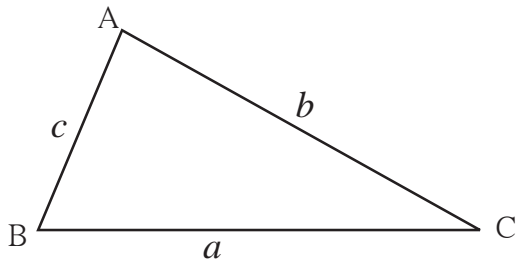


जाणून घेऊया.

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ (Area of a Triangle)

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ पाया \times उंची हे आपल्याला माहित आहे.

आता त्रिकोणाची उंची दिली नाही परंतु त्रिकोणाच्या तीन बाजूंची लांबी दिली आहे. तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ कसे काढतात ते पाहू.



Δ ABC च्या बाजूंची लांबी a, b, c आहे.

या त्रिकोणाची अर्धपरिमिती काढू.

$$\text{अर्धपरिमिती} = s = \frac{1}{2} (a + b + c)$$

$$\text{त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

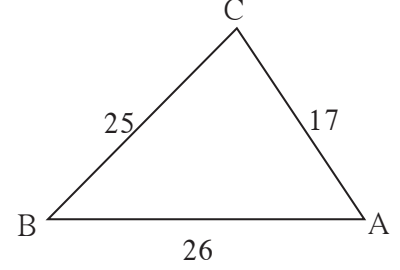
या सूत्राला **हिरोचे सूत्र** (Heron's Formula) असे म्हणतात.

उदा. (1) एका त्रिकोणाच्या बाजू 17 सेमी, 25 सेमी व 26 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

उकल : $a = 17, b = 25, c = 26$

$$\text{अर्धपरिमिती} = s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+25+26}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\begin{aligned} \text{त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)} \\ &= \sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8} \\ &= \sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} \\ &= \sqrt{17^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2} \\ &= 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204 \text{ चौसेमी} \end{aligned}$$

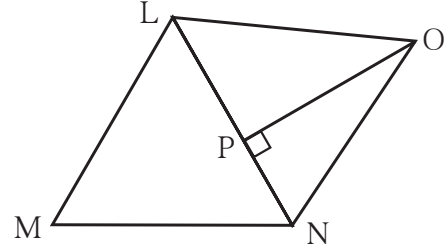


उदा. (2) एका भूखंडाची आकृती व मापे दिली आहेत.

$$l(LM) = 60 \text{ मी. } l(MN) = 60 \text{ मी.}$$

$$l(LN) = 96 \text{ मी. } l(OP) = 70 \text{ मी.}$$

तर या भूखंडाचे क्षेत्रफळ काढा.



उकल : या आकृतीत ΔLMN व ΔLON तयार झालेले दिसतात. ΔLMN च्या सर्व बाजूंची लांबी माहीत आहे, म्हणून हिरोचे सूत्र वापरून त्याचे क्षेत्रफळ काढू. ΔLON मध्ये बाजू LN हा पाया आणि $l(OP)$ ही उंची घेऊन ΔLON चे क्षेत्रफळ काढू.

$$\Delta LMN \text{ ची अर्धपरिमिती, } s = \frac{60+60+96}{2} = \frac{216}{2} = 108 \text{ मी}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta LMN \text{ चे क्षेत्रफळ} &= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)} \\ &= \sqrt{108 \times 48 \times 48 \times 12} \\ &= \sqrt{12 \times 9 \times 48 \times 48 \times 12} \end{aligned}$$

$$A(\Delta LMN) = 12 \times 3 \times 48 = 1728 \text{ चौमी.}$$

$$A(\Delta LNO) = \frac{1}{2} \text{ पाया} \times \text{उंची}$$

$$= \frac{1}{2} \times 96 \times 70$$

$$= 96 \times 35 = 3360 \text{ चौमी}$$

$$\text{भूखंड LMNO चे क्षेत्रफळ} = A(\Delta LMN) + A(\Delta LNO)$$

$$= 1728 + 3360$$

$$= 5088 \text{ चौमी.}$$



हे मला समजले.

समांतरभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = पाया × उंची

समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ कर्णाच्या लांबीचा गुणाकार

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times$ समांतर बाजूंच्या लांबींची बेरीज × उंची

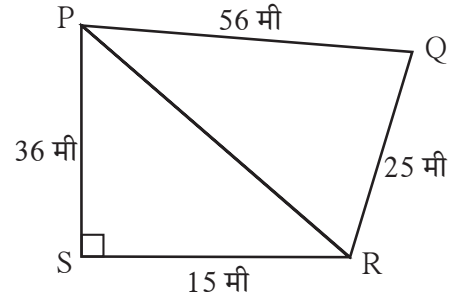
ABC त्रिकोणाच्या बाजू जर a, b, c असतील तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढण्याचे हिरोचे सूत्र

$$A(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} ; s = \frac{a+b+c}{2}$$

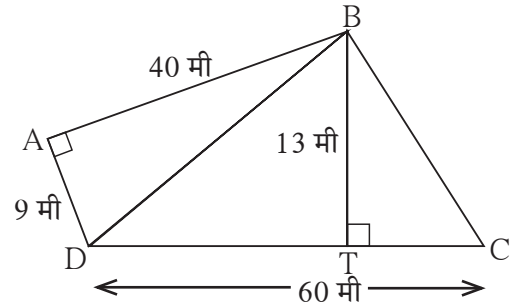
सरावसंच 15.4

1. एका त्रिकोणाच्या बाजू 45 सेमी, 39 सेमी व 42 सेमी आहेत तर त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ काढा.

2. आकृतीत दाखवलेली मापे लक्षात घ्या व $\square PQRS$ चे क्षेत्रफळ काढा.



3. शेजारी दिलेल्या आकृतीत काही मापे दर्शवली आहेत, त्यावरून $\square ABCD$ चे क्षेत्रफळ काढा.

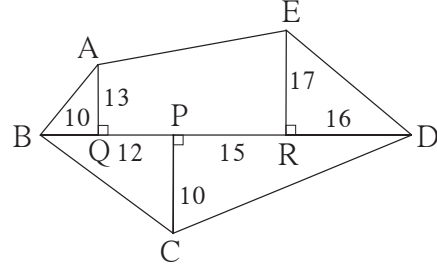


जाणून घेऊया.

अनियमित आकाराच्या जागेचे क्षेत्रफळ

भूखंड, शेतजमिनी यांचे आकार सामान्यपणे अनियमित आकाराचे बहुभुज असतात. त्यांचे विभाजन त्रिकोण किंवा विशिष्ट चौकोनांत करता येते. असे विभाजन करून त्यांचे क्षेत्रफळ कसे काढतात, हे पुढील उदाहरणांवरून समजून घ्या.

उदा. शेजारील आकृतीत ABCDE ही बहुभुजाकृती आहे. आकृतीतील सर्व मापे मीटरमध्ये आहेत. या आकृतीचे क्षेत्रफळ काढा.



उकल : येथे Δ AQB, Δ ERD हे काटकोन त्रिकोण आहेत. \square AQRE हा समलंब चौकोन आहे.

Δ BCD चा पाया BD व उंची PC दिली आहे. प्रत्येक आकृतीचे क्षेत्रफळ काढू.

$$A(\Delta AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ चौमी}$$

$$A(\Delta ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ चौमी}$$

$$\begin{aligned} A(\square AQRE) &= \frac{1}{2} [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR) \\ &= \frac{1}{2} [13 + 17] \times (12 + 15) \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ चौमी} \end{aligned}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ मी}$$

$$A(\Delta BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ चौमी}$$

\therefore बहुभुजाकृती ABCDE चे क्षेत्रफळ

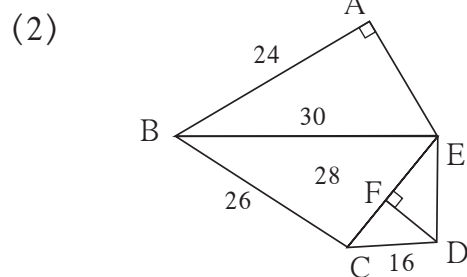
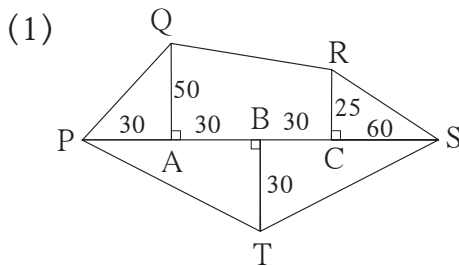
$$= A(\Delta AQB) + A(\square AQRE) + A(\Delta ERD) + A(\Delta BCD)$$

$$= 65 + 405 + 136 + 265$$

$$= 871 \text{ चौमी}$$

सरावसंच 15.5

1. खालील भूखंडांच्या आराखड्यांवरून त्यांची क्षेत्रफळे काढा. (सर्व मापे मीटरमध्ये आहेत.)

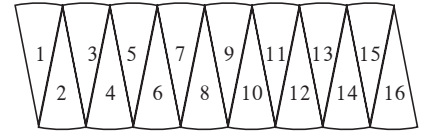
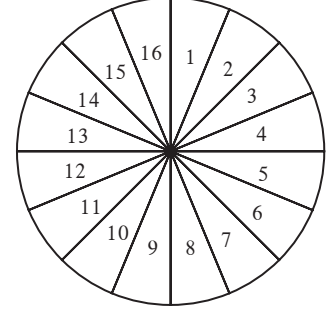


वर्तुळाचे क्षेत्रफळ (Area of a circle)

कृती : एका जाड कागदावर एक वर्तुळ काढा.

वर्तुळाकार भाग कापून वेगळा करा. घड्या घालून त्याचे 16 किंवा 32 समान भागांत विभाजन करा. किंवा 360° चे समान भाग करून वर्तुळाचे 18 किंवा 20 समान भाग करा.

नंतर ते भाग त्रिज्यांवर कापून वेगवेगळ्या पाकळ्या मिळवा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे त्या जोडा. आपल्याला जवळपास आयत तयार झालेला दिसेल. वर्तुळाच्या समान भागांची संख्या जेवढी जास्त असेल तेवढी आकृती अधिकाधिक आयताकार होईल.



वर्तुळाचा परीघ = $2\pi r$

\therefore आयताची लांबी πr , म्हणजे अर्धपरिघाएवढी, आणि रुंदी r एवढी आहे.

\therefore वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी \times रुंदी = $\pi r \times r = \pi r^2$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा.(1) एका वर्तुळाची त्रिज्या 21 सेमी असेल तर त्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

$$\begin{aligned} \text{उकल : } \text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ} &= \pi r^2 \\ &= \frac{22}{7} \times 21^2 \\ &= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} = 66 \times 21 = 1386 \text{ चौसेमी} \end{aligned}$$

उदा.(2) एका वर्तुळाकृती मैदानाचे क्षेत्रफळ 3850 चौमी आहे, तर त्या मैदानाची त्रिज्या काढा.

$$\begin{aligned} \text{उकल : } \text{वर्तुळाचे क्षेत्रफळ} &= \pi r^2 \\ 3850 &= \frac{22}{7} \times r^2 \\ r^2 &= \frac{3850 \times 7}{22} \quad r^2 = 1225 \quad r = 35 \text{ मी.} \end{aligned}$$

\therefore मैदानाची त्रिज्या 35 मी आहे.

सरावसंच 15.6

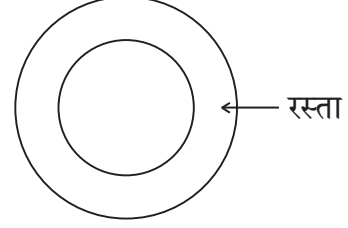
1. खाली वर्तुळांच्या त्रिज्या दिल्या आहेत. त्या वर्तुळांची क्षेत्रफळे काढा.

- (1) 28 सेमी (2) 10.5 सेमी (3) 17.5 सेमी

2. खाली काही वर्तुळांची क्षेत्रफळे दिली आहेत. त्या वर्तुळांचे व्यास काढा.

- (1) 176 चौसेमी (2) 394.24 चौसेमी (3) 12474 चौसेमी

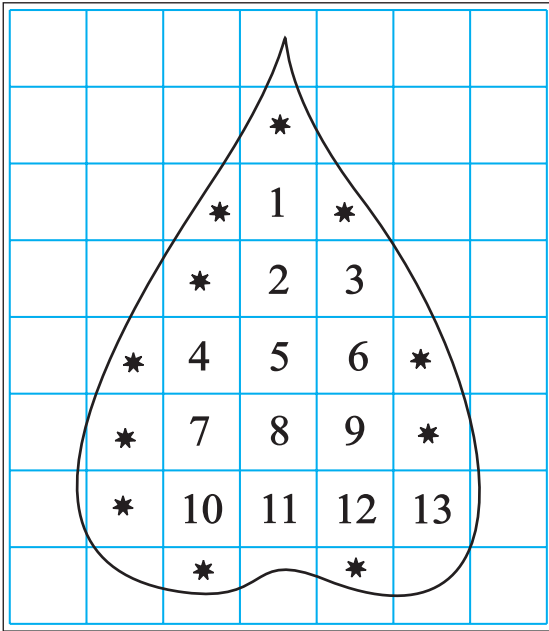
3. एका वर्तुळाकार बागेचा व्यास 42 मी आहे. त्या बागेभोवती 3.5 मी रुंदीचा रस्ता आहे, तर त्या रस्त्याचे क्षेत्रफळ काढा.



4. एका वर्तुळाचा परीघ 88 सेमी आहे, तर त्या वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढा.

अनियमित आकाराच्या आकृतीचे अंदाजे क्षेत्रफळ काढणे.

आलेख कागदाच्या साहाय्याने कोणत्याही बंदिस्त आकृतीचे क्षेत्रफळ काढता येते. दिलेली आकृती किंवा वस्तूचे एखादे पृष्ठ आलेख कागदावर ठेवून त्याच्या कडेने पेन्सिल फिरवा. आलेख कागदावरील आकृतीचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी चौरसांची संख्या कशी मोजायची व क्षेत्रफळ कसे काढायचे ते खालील कृतीवरून समजून घ्या.



(1) आकृतीतील 1 चौसेमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या पूर्ण

चौरसांची संख्या = 13

∴ त्यांचे क्षेत्रफळ 13 चौसेमी.

(2) आकृतीतील $\frac{1}{2}$ चौसेमी पेक्षा जास्त परंतु 1

चौसेमी पेक्षा कमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या भागांची संख्या = 11

∴ त्यांचे क्षेत्रफळ = अंदाजे 11 चौसेमी

(3) आकृतीतील $\frac{1}{2}$ चौसेमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या

भागांची संख्या = 0

∴ त्यांचे क्षेत्रफळ = 0 चौसेमी

(4) आकृतीतील $\frac{1}{2}$ चौसेमी पेक्षा कमी क्षेत्रफळ असणाऱ्या भागाच्या क्षेत्रफळाचा विचार करायचा नाही.

∴ त्यांचे एकूण क्षेत्रफळ = 0 चौसेमी

∴ दिलेल्या आकृतीचे अंदाजे क्षेत्रफळ

$$= 13 + 11 + 0 + 0 = 24 \text{ चौसेमी}$$

मोजण्यासाठी वापरलेले चौरस जेवढे लहान तेवढा क्षेत्रफळाचा अंदाज अधिक बरोबर असतो.

कृती : आलेख कागदावर 28 मिमी त्रिज्येचे एक वर्तुळ, कोणताही एक त्रिकोण आणि कोणताही एक समलंब चौकोन काढा. या तीनही आकृत्यांची क्षेत्रफळे आलेख कागदावरील लहान चौरस मोजून काढा. ती सूत्रांनी मिळणाऱ्या क्षेत्रफळांबरोबर पडताळून पाहा.

२२२

उत्तरसूची

सरावसंच 15.1	1. 198 चौसेमी	2. 3.7 सेमी	3. 13 सेमी
सरावसंच 15.2	1. 180 चौसेमी	2. 117.15 चौसेमी	3. 336 चौसेमी 4. 68 सेमी
सरावसंच 15.3	1. 88 चौसेमी	2. 42 सेमी	3. 40 चौसेमी
सरावसंच 15.4	1. 756 चौसेमी	2. 690 चौसेमी	3. 570 चौसेमी
सरावसंच 15.5	1. 6,000 चौमी	2. 776 चौमी	
सरावसंच 15.6	1. (1) 2464 चौसेमी	(2) 346.5 चौसेमी	(3) 962.5 चौसेमी
	2. (1) $2\sqrt{56}$ सेमी	(2) 22.4 सेमी	(3) 126 सेमी
	3. 500.50 चौमी	4. 616 चौसेमी	

अधिक माहितीसाठी :

आपल्या देशाने मापनासाठी दशमान पद्धत स्वीकारली आहे.

शासकीय दस्तऐवजांत जमिनीची क्षेत्रफळे आर, हेक्टर या दशमान एककांत नोंदलेली असतात.

100 चौमी = 1 आर, 100 आर = 1 हेक्टर = 10,000 चौमी

व्यवहारात मात्र जमिनीचे क्षेत्रफळ गुंठा, एकर या एककांत मोजण्याची पद्धत अजूनही रूढ आहे. 1 गुंठा हे क्षेत्रफळ सुमारे 1 आर एवढे, म्हणजे सुमारे 100 चौमी असते. 1 एकर क्षेत्रफळ सुमारे 0.4 हेक्टर भरते.



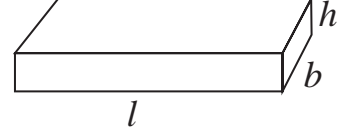
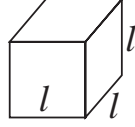
CLN3FR



जरा आठवूया.

इष्टिकाचितीचे एकूण पृष्ठफळ = $2(l \times b + b \times h + l \times h)$

घनाचे एकूण पृष्ठफळ = $6l^2$



1 मी = 100 सेमी

1 चौमी = 100×100 चौसेमी = 10000 चौसेमी = 10^4 चौसेमी

1 सेमी = 10 मिमी

1 चौसेमी = 10×10 चौमिमी = 100 चौमिमी = 10^2 चौमिमी

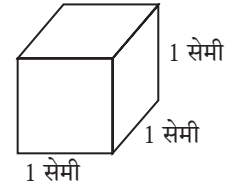


जाणून घेऊया.

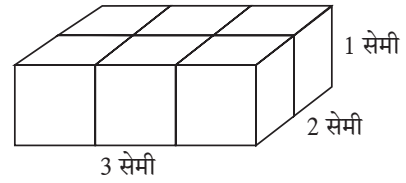
इष्टिकाचिती, घन आणि वृत्तचिती हे त्रिमितीय आकार म्हणजेच घनाकृती असतात. त्या घनाकृती अवकाशातील जागा व्यापतात. घनाकृतीने अवकाशातील व्यापलेल्या जागेचे माप म्हणजे त्या घनाकृतीचे घनफळ होय.

घनफळाचे प्रमाणित एकक (Standard unit of volume)

आकृती 16.3 मधील घनाची प्रत्येक बाजू 1 सेमी आहे. या घनाने व्यापलेली जागा हे, घनफळ मापनाचे एक प्रमाणित एकक आहे. ते 1 घनसेंटीमीटर, थोडक्यात 1 घसेमी किंवा 1 सेमी³ असे लिहितात.

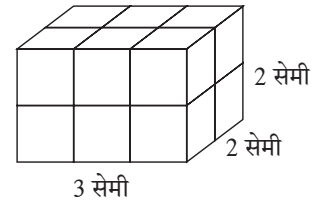


कृती I : प्रत्येक बाजू 1 सेमी असेल असे बरेच घन मिळवा. आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे 6 घन एकमेकांना चिकटून ठेवा. एक इष्टिकाचिती तयार होईल. या इष्टिकाचितीची



लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी व उंची 1 सेमी आहे. 1 सेमी बाजू असलेले 6 घन मिळून ती इष्टिकाचिती तयार झाली आहे. या इष्टिकाचितीचे घनफळ $3 \times 2 \times 1 = 6$ घसेमी आहे, हे लक्षात घ्या.

कृती II : शेजारील इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी व उंची 2 सेमी आहे. या इष्टिकाचितीमध्ये 1 घसेमी घनफळ असलेले $3 \times 2 \times 2 = 12$ घन आहेत. म्हणून या इष्टिकाचितीचे

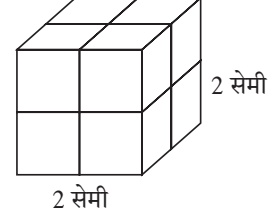


घनफळ 12 घसेमी आहे. यावरून, इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी \times रुंदी \times उंची हे सूत्र मिळते.

लांबीसाठी l रुंदीसाठी b आणि उंचीसाठी h ही अक्षरे घेऊन. इष्टिकाचितीचे घनफळ = $l \times b \times h$

कृती III :

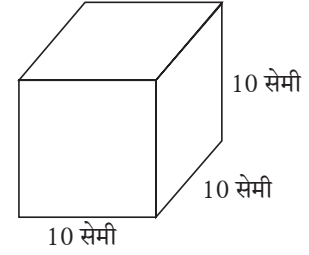
शेजारील आकृतीत 1 घसेमी घनफळ असलेले 8 घन एकमेकांना चिकटून ठेवले आहेत. त्यामुळे मिळणारी घनाकृती ही बाजू 2 सेमी असलेला घन आहे. या घनाचे घनफळ = $2 \times 2 \times 2 = 2^3$ हे लक्षात घ्या.



यावरून घनाची बाजू l असेल तर घनाचे घनफळ = $l \times l \times l = l^3$ असते.

द्रवाचे घनफळ : द्रवाचे आकारमान म्हणजेच द्रवाचे घनफळ होय. द्रवाचे आकारमान मोजण्यासाठी मिलिलीटर आणि लीटर ही एकके वापरतात हे आपल्याला माहित आहे.

सोबतच्या आकृतीत 10 सेमी बाजू असलेला एक पोकळ घन आहे. याचे घनफळ $10 \times 10 \times 10 = 1000$ घसेमी आहे. हा घन पाण्याने भरला तर त्यातील पाण्याचे आकारमान म्हणजेच घनफळ 1000 घसेमी असेल. या आकारमानालाच 1 लीटर असे म्हणतात.



\therefore 1 लीटर = 1000 मिली, हे आपल्याला माहित आहे.

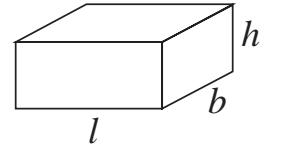
\therefore 1 लीटर = 1000 घसेमी = 1000 मिली, यावरून 1 घसेमी = 1 मिली हेही लक्षात घ्या.

म्हणजेच 1 सेमी बाजू असलेल्या घनामध्ये मावणाऱ्या पाण्याचे आकारमान 1 मिली असते.

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) इष्टिकाचिती आकाराच्या, मासे ठेवण्याच्या काचेच्या पेटीची लांबी 1 मीटर, रुंदी 40 सेमी व उंची 50 सेमी आहे तर त्या पेटीत किती लीटर पाणी मावेल ते काढा.

उकल : पेटीमध्ये मावणाऱ्या पाण्याचे घनफळ त्या पेटीच्या घनफळाएवढे असेल. पेटीची लांबी 1 मीटर = 100 सेमी, रुंदी 40 सेमी व उंची 50 सेमी आहे.



पेटीचे घनफळ = $l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 200000$ घसेमी,

200000 घसेमी = $\frac{200000}{1000} = 200$ ली. (\therefore 1000 घसेमी = 1 ली)

\therefore पेटीमध्ये 200 लीटर पाणी मावेल.

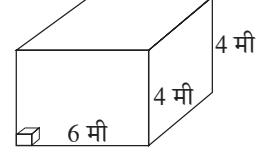
उदा. (2) एका इष्टिकाचिती आकाराच्या गोदामाची लांबी 6 मी, रुंदी 4 मी आणि उंची 4 मी आहे. या गोदामात 40 सेमी बाजू असलेली घनाकृती खोकी जास्तीत जास्त किती मावतील ?

उकल : रचलेल्या खोक्यांनी गोदाम पूर्ण भरेल तेव्हा सर्व खोक्यांचे एकूण घनफळ हे गोदामाच्या घनफळाएवढे असेल. उदाहरण सोडवण्यासाठी पुढील पायऱ्यांचा विचार करू.

(1) गोदामाचे घनफळ काढू.

(2) एका खोक्याचे घनफळ काढू .

(3) खोक्यांची संख्या काढू.



पायरी (1) : गोदामाची लांबी 6 मी = 600 सेमी, रुंदी = उंची = 4 मी = 400 सेमी

गोदामाचे घनफळ = लांबी \times रुंदी \times उंची = $600 \times 400 \times 400$ घसेमी

पायरी (2) : एका खोक्याचे घनफळ = बाजू³ = $(40)^3 = 40 \times 40 \times 40$ घसेमी

पायरी (3) : खोक्यांची संख्या = $\frac{\text{गोदामाचे घनफळ}}{\text{एका खोक्याचे घनफळ}} = \frac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

\therefore त्या गोदामात जास्तीत जास्त 1500 खोकी मावतील.

उदा. (3) बर्फी तयार करण्यासाठी खवा व साखर यांचे वितळलेले 5 लीटर मिश्रण इष्टिकाचिती आकाराच्या ट्रेमध्ये ओतल्यास तो काठोकाठ भरतो. ट्रेची रुंदी 40 सेमी व उंची 2.5 सेमी असल्यास त्याची लांबी काढा.

उकल: उदाहरण सोडवण्यासाठी पुढील चौकटीत योग्य संख्या भरा.

पायरी (1) : ट्रेची धारकता = 5 लीटर = घनसेमी (\because 1 ली = 1000 घसेमी)

पायरी (2) : मिश्रणाचे घनफळ = घनसेमी

पायरी (3) : आयताकृती ट्रेचे घनफळ = मिश्रणाचे घनफळ

लांबी \times रुंदी \times उंची = घनसेमी

लांबी \times 40 \times 2.5 = घनसेमी, \therefore ट्रे ची लांबी = $\frac{\text{घनफळ}}{40 \times 2.5} = \frac{\text{घनफळ}}{100} = 50$ सेमी



हे मला समजले.

- इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी \times रुंदी \times उंची = $l \times b \times h$
- घनाचे घनफळ = बाजू³ = l^3

सरावसंच 16.1

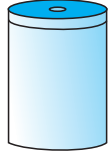
1. एका खोक्याची लांबी 20 सेमी, रुंदी 10.5 सेमी व उंची 8 सेमी असल्यास त्याचे घनफळ काढा.
2. एका इष्टिकाचिती आकाराच्या साबणाच्या वडीचे घनफळ 150 घसेमी आहे. तिची लांबी 10 सेमी व रुंदी 5 सेमी असेल तर तिची जाडी किती असेल?
3. 6 मीटर लांब, 2.5 मी उंच व 0.5 मी रुंद अशी भिंत बांधायची आहे यासाठी 25 सेमी लांबी, 15 सेमी रुंदी व 10 सेमी उंचीच्या किती विटा लागतील ?

4. पावसाचे पाणी साठवण्यासाठी एका वसाहतीत 10 मी लांब, 6 मी रुंद व 3 मी खोल अशा मापांची टाकी बांधून घेतली आहे. तर त्या टाकीची धारकता किती आहे? टाकीत किती लीटर पाणी मावेल ?



वृत्तचितीचे पृष्ठफळ (Surface area of a cylinder)

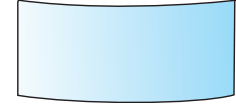
वृत्तचिती आकाराचा डबा घ्या. त्याच्या उंचीएवढी रुंदी असलेला एक आयताकार कागद घ्या. तो डब्याभोवती वक्रपृष्ठभाग नेमका झाकला जाईल असा गुंडाळा. कागदाचा उरलेला भाग कापून वेगळा करा.



वृत्तचिती



कागद गुंडाळला



वर्तुळाचा परीघ = लांबी

गुंडाळलेला कागद उलगडा. तो आयताकार असल्याचे दिसेल. या आयताचे क्षेत्रफळ, म्हणजे वृत्तचितीच्या वक्राकार भागाचे क्षेत्रफळ म्हणजेच वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ.

आयताची लांबी म्हणजे वर्तुळाच्या तळाचा परीघ व आयताची रुंदी म्हणजे वृत्तचितीची उंची होय.

वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ = आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी \times रुंदी

$$= \text{वृत्तचितीच्या तळाचा परीघ} \times \text{वृत्तचितीची उंची}$$

$$\text{वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ} = 2\pi r \times h = 2\pi rh$$

बंदिस्त वृत्तचितीच्या तळाचे पृष्ठ आणि वरचे पृष्ठ वर्तुळाकार असते.

\therefore बंदिस्त वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = वक्रपृष्ठफळ + वरच्या पृष्ठाचे क्षेत्रफळ + तळाचे क्षेत्रफळ

\therefore वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ = वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ + $2 \times$ वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) एका वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीचा व्यास 1 मीटर आणि उंची 2 मीटर आहे. टाकीला झाकण लावले आहे. झाकणासह टाकीला आतून व बाहेरून रंग लावायचा आहे. रंगाचा खर्च 80 रुपये प्रतिचौमी आहे. तर टाकी रंगवण्यासाठी किती खर्च येईल? ($\pi = 3.14$)

उकल : टाकीला आतून व बाहेरून रंग लावायचा आहे. म्हणजे रंग लावण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ हे टाकीच्या एकूण बाह्यपृष्ठफळाच्या दुप्पट आहे.

वृत्तचितीच्या तळाचा व्यास 1 मीटर

∴ त्रिज्या 0.5 मी आणि वृत्तचितीची उंची 2 मी आहे.

$$\begin{aligned}\therefore \text{वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ} &= 2\pi r (h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5 (2.0 + 0.5) \\ &= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85 \text{ चौमी}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{रंग देण्याच्या भागाचे क्षेत्रफळ} = 2 \times 7.85 = 15.70 \text{ चौमी}$$

$$\therefore \text{टाकीला रंग देण्याचा एकूण खर्च} = 15.70 \times 80 = 1256 \text{ रुपये.}$$

उदा. (2) जस्ताच्या एका आयताकार पत्र्याची लांबी 3.3 मी व रुंदी 3 मी आहे. या पत्र्यापासून 3.5 सेमी त्रिज्येच्या आणि 30 सेमी लांबीच्या जास्तीत जास्त किती नळ्या तयार करता येतील ?

उकल: आयताकार पत्र्याचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी
$$= 3.3 \times 3 \text{ चौमी} = 330 \times 300 \text{ चौसेमी}$$

एका नळीची लांबी म्हणजेच वृत्तचितीची उंची = $h = 30$ सेमी

नळीची त्रिज्या = वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या = $r = 3.5$ सेमी,

एक नळी तयार करण्यासाठी लागलेला पत्रा = एका नळीचे वक्रपृष्ठफळ

$$\begin{aligned}&= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1} \\ &= 2 \times 22 \times 15 = 660 \text{ चौसेमी.}\end{aligned}$$

$$\text{पत्र्यापासून तयार झालेल्या नळ्या} = \frac{\text{पत्र्याचे क्षेत्रफळ}}{\text{एका नळीचे वक्रपृष्ठफळ}} = \frac{330 \times 300}{660} = 150$$

सरावसंच 16.2

1. खालील प्रत्येक उदाहरणात वृत्तचितीच्या पायाची त्रिज्या r व उंची h दिली आहे; त्यावरून प्रत्येक वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ व एकूण पृष्ठफळ काढा.

(1) $r = 7$ सेमी, $h = 10$ सेमी (2) $r = 1.4$ सेमी, $h = 2.1$ सेमी (3) $r = 2.5$ सेमी, $h = 7$ सेमी
(4) $r = 70$ सेमी, $h = 1.4$ सेमी (5) $r = 4.2$ सेमी, $h = 14$ सेमी

2. दोन्ही बाजू बंद असलेल्या, 50 सेमी व्यास व 45 सेमी उंचीच्या पिंपाचे एकूण पृष्ठफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

3. एका वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ 660 चौसेमी व उंची 21 सेमी आहे, तर तिची त्रिज्या व तळाचे क्षेत्रफळ काढा.
4. एका वृत्तचिती आकाराच्या पत्र्याच्या डब्याचा व्यास 28 सेमी आहे व त्याची उंची 20 सेमी आहे. तो एका बाजूने उघडा आहे तर त्यासाठी लागलेल्या पत्र्याचे क्षेत्रफळ काढा. त्या डब्यास 2 सेमी उंचीचे झाकण तयार करण्यासाठी अंदाजे किती चौसेमी पत्रा लागेल ते काढा.



वृत्तचितीचे घनफळ (Volume of a cylinder)

वृत्तचिती आकाराच्या पाण्याच्या टाकीत किती पाणी मावते हे काढण्यासाठी त्या टाकीचे घनफळ काढावे लागते.

कोणत्याही चितीचे घनफळ = तळाचे क्षेत्रफळ \times उंची, हे सामान्य सूत्र आहे.

वृत्तचितीचा तळ हा वर्तुळाकार असतो. वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$

सोडवलेली उदाहरणे

उदा (1) एका वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 5 सेमी असून तिची उंची 10 सेमी आहे. तर त्या वृत्तचितीचे घनफळ काढा. ($\pi = 3.14$)

उकल : वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या $r = 5$ सेमी आणि उंची $h = 10$ सेमी

$$\text{वृत्तचितीचे घनफळ} = \pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785 \text{ घसेमी.}$$

उदा. (2) एका वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाची उंची 56 सेमी आहे. त्या पिंपाची धारकता 70.4 लीटर आहे. तर त्या पिंपाची त्रिज्या काढा. ($\pi = \frac{22}{7}$)

उकल : वृत्तचिती आकाराच्या पिंपाच्या तळाची त्रिज्या = r मानू

$$\text{पिंपाची धारकता} = \text{पिंपाचे घनफळ} = 70.4 \times 1000 \text{ घसेमी} = 704 \times 100 \text{ घसेमी}$$

$$1 \text{ ली} = 1000 \text{ मिली} \therefore 70.4 \text{ ली} = 70400 \text{ मिली}$$

$$\therefore \text{पिंपाचे घनफळ} = \pi r^2 h = 70400$$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

$$\therefore r = 20,$$

$$\therefore \text{पिंपाची त्रिज्या } 20 \text{ सेमी आहे.}$$

उदा. (3) तांब्याच्या भरीव वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या 4.2 सेमी असून तिची उंची 16 सेमी आहे. ती वितळवून 1.4 सेमी व्यास व 0.2 सेमी जाडी असलेल्या किती चकत्या तयार करता येतील?

उकल : वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या = $R = 4.2$ सेमी उंची = $H = 16$ सेमी

$$\text{वृत्तचितीचे घनफळ} = \pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$$

$$\text{चकतीच्या तळाची त्रिज्या} = 1.4 \div 2 = 0.7 \text{ सेमी}$$

$$\text{चकतीची जाडी} = \text{वृत्तचितीची उंची} = 0.2 \text{ सेमी}$$

$$\text{चकतीचे घनफळ} = \pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$$

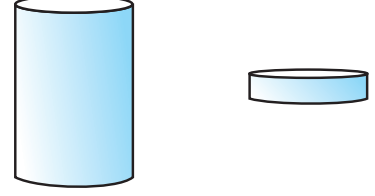
वितळलेल्या वृत्तचितीपासून n चकत्या तयार होतील, असे मानू

$$\therefore n \times \text{एका चकतीचे घनफळ} = \text{वृत्तचितीचे घनफळ}$$

$$n = \frac{\text{वृत्तचितीचे घनफळ}}{\text{एका चकतीचे घनफळ}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore 2880$ चकत्या तयार होतील.



हे मला समजले.

$$\text{वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ} = 2\pi r h \quad \text{वृत्तचितीचे एकूण पृष्ठफळ} = 2\pi r(h + r)$$

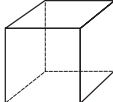
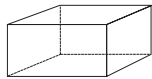
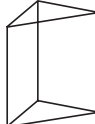
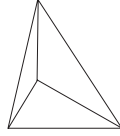

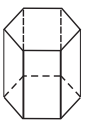
$$\text{वृत्तचितीचे घनफळ} = \pi r^2 h$$

सरावसंच 16.3

- खाली वृत्तचितीच्या तळाची त्रिज्या (r) व उंची (h) दिली आहे त्यावरून वृत्तचितीचे घनफळ काढा.
 - $r = 10.5$ सेमी, $h = 8$ सेमी
 - $r = 2.5$ मी, $h = 7$ मी
 - $r = 4.2$ सेमी, $h = 5$ सेमी
 - $r = 5.6$ सेमी, $h = 5$ सेमी
- लांबी 90 सेमी व व्यास 1.4 सेमी असेल अशी लोखंडी सळई तयार करण्यासाठी लागणाऱ्या लोखंडाचे घनफळ काढा.
- वृत्तचिती आकाराच्या एका हौदाचा आतील व्यास 1.6 मी असून त्याची खोली 0.7 मी आहे, तर त्या हौदात जास्तीत जास्त किती पाणी मावेल ?
- एका वृत्तचितीच्या पायाचा परीघ 132 सेमी असून त्याची उंची 25 सेमी आहे, तर त्या वृत्तचितीचे घनफळ किती ?

ऑयलरचे सूत्र

पृष्ठे (F), शिरोबिंदू (V) आणि कडा (E) असलेल्या घनाकृतीसंबंधी एक मनोरंजक सूत्र खूप लहान वयात लिओनार्ड ऑयलर या थोर गणितीने शोधले. खालील सारणीतील घनाकृतींच्या कडा, कोपरे व पृष्ठे मोजून सारणी पूर्ण करा आणि $V + F = E + 2$ हे ऑयलरचे सूत्र पडताळून पाहा.

नाव	घन	इष्टिकाचिती	त्रिकोणीचिती	त्रिकोणी सूची	पंचकोनी सूची	षटकोनी चिती
आकार						
पृष्ठे (F)	6					8
शिरोबिंदू (V)	8					12
कडा (E)		12			10	

उत्तरसूची

सरावसंच 16.1

1. 1680 घसेमी
2. 3 सेमी
3. 2000 विटा
4. 1,80,000 ली.

सरावसंच 16.2

1. (1) 440 चौसेमी, 748 चौसेमी (2) 18.48 चौसेमी, 30.80 चौसेमी
(3) 110 चौसेमी, 149.29 चौसेमी (4) 616 चौसेमी, 31416 चौसेमी
(5) 369.60 चौसेमी, 480.48 चौसेमी
2. 10,990 चौसेमी 3. 5 सेमी, 78.50 चौसेमी
4. 2376 चौसेमी, झाकणासाठी अंदाजे 792 चौसेमी पत्रा लागेल.

सरावसंच 16.3

1. (1) 2772 घसेमी (2) 137.5 घमी (3) 277.2 घसेमी (4) 492.8 घसेमी
2. 138.6 घसेमी 3. 1408 ली 4. 34650 घसेमी



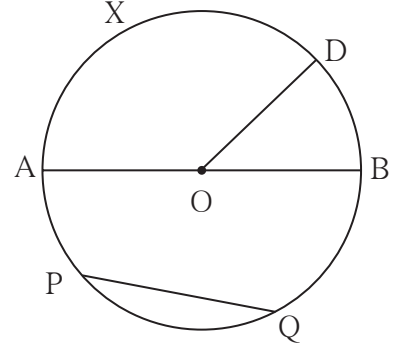


जरा आठवूया.

शेजारील आकृतीत बिंदू O हे वर्तुळकेंद्र आहे.

आकृतीच्या संदर्भाने खालील विधानांतील रिकाम्या जागा भरा.

- रेख OD ही वर्तुळाची आहे.
- रेख AB हा वर्तुळाचा आहे.
- रेख PQ ही वर्तुळाची आहे.
- हा केंद्रीय कोन आहे.
- लघुकंस : कंस AXD, कंस BD,,,
- विशालकंस : कंस PAB, कंस PDQ, • अर्धवर्तुळकंस : कंस ADB,
- $m(\text{कंस DB}) = m\angle \dots\dots\dots$ • $m(\text{कंस DAB}) = 360^\circ - m\angle \dots\dots\dots$



जाणून घेऊया.

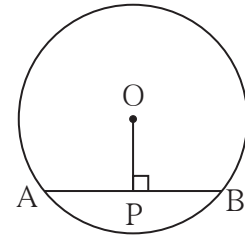
वर्तुळाच्या जीवेचे गुणधर्म (Properties of chord of a circle)

कृती I :

केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा काढा.

केंद्र O मधून जीवा AB वर रेख OP लंब काढा.

रेख AP व रेख PB ची लांबी मोजा.



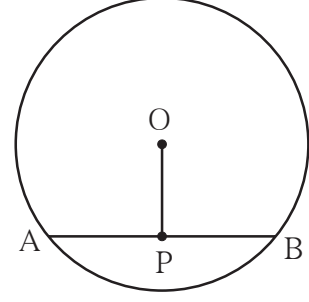
याप्रमाणे वेगवेगळ्या त्रिज्येची पाच वर्तुळे कागदावर काढा. प्रत्येक वर्तुळात एक जीवा काढून त्या जीवेवर केंद्रातून लंब काढा. जीवेचे झालेले दोन भाग समान आहेत का हे कर्कटकाच्या साहाय्याने तपासून पाहा.

तुम्हांला खालील गुणधर्म मिळेल. अनुभव घ्या.

वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

कृती II :

एका कागदावर वेगवेगळ्या त्रिज्यांची 5 वर्तुळे काढा. प्रत्येक वर्तुळात एक जीवा काढा. त्या जीवेचा मध्यबिंदू मिळवा. वर्तुळकेंद्र O व जीवेचा मध्य जोडा. शेजारील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे प्रत्येक जीवेला AB आणि जीवेच्या मध्यबिंदूला P हे नाव द्या. $\angle APO$ व $\angle BPO$ काटकोन आहेत हे गुण्याने किंवा कोनमापकाने तपासून पाहा.



प्रत्येक वर्तुळातील जीवेच्या संदर्भात हाच अनुभव येतो हे पाहा. यावरून तुम्हांला खालील गुणधर्म मिळेल.

वर्तुळाचे केंद्र व त्या वर्तुळातील जीवेचा मध्यबिंदू जोडणारा रेषाखंड हा त्या जीवेला लंब असतो.

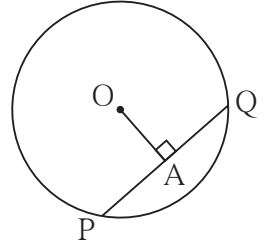
सोडवलेली उदाहरणे

उदा. (1) O केंद्र असलेल्या वर्तुळात जीवा PQ ची लांबी 7 सेमी आहे.

रेख OA \perp जीवा PQ, तर l(AP) काढा.

उकल : रेख OA \perp जीवा PQ, \therefore बिंदू A हा जीवा PQ चा मध्यबिंदू आहे.

$$\therefore l(PA) = \frac{1}{2} l(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5 \text{ सेमी}$$



उदा. (2) केंद्र O असलेल्या एका वर्तुळाची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळाची एक जीवा केंद्रापासून 6 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या जीवेची लांबी काढा.

उकल : वर्तुळाच्या जीवेचे केंद्रापासूनचे अंतर म्हणजे केंद्रापासून त्या जीवेवर काढलेल्या लंबरेषाखंडाची लांबी होय.

O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची रेख AB ही जीवा आहे.

रेख OP \perp जीवा AB.

वर्तुळाची त्रिज्या = l(OB) = 10 सेमी.

l(OP) = 6 सेमी. येथे ΔOPB हा काटकोन त्रिकोण तयार झाला.

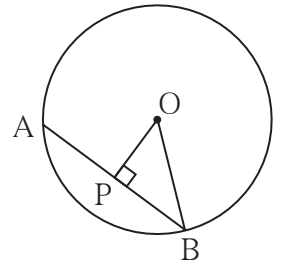
पायथागोरसच्या प्रमेयानुसार,

$$[l(OP)]^2 + [l(PB)]^2 = [l(OB)]^2$$

$$\therefore 6^2 + [l(PB)]^2 = 10^2$$

$$\therefore [l(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\therefore [l(PB)]^2 = (10 + 6)(10 - 6) = 16 \times 4 = 64$$



$$\therefore l(PB) = 8 \text{ सेमी}$$

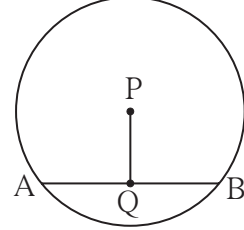
आपल्याला माहित आहे की, वर्तुळ केंद्रातून जीवेवर टाकलेला लंब जीवेला दुभागतो.

$$\therefore l(AB) = 2l(PB) = 2 \times 8 = 16$$

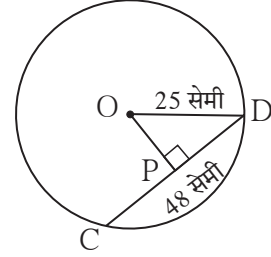
\therefore जीवा AB ची लांबी 16 सेमी आहे.

सरावसंच 17.1

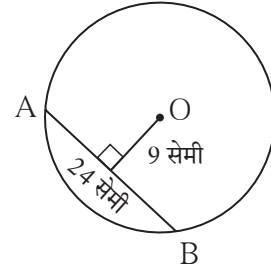
1. केंद्र P असलेल्या वर्तुळाच्या जीवा AB ची लांबी 13 सेमी आहे. रेख $PQ \perp$ जीवा AB, तर $l(QB)$ काढा.



2. केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची त्रिज्या 25 सेमी आहे. या वर्तुळात 48 सेमी लांबीची एक जीवा काढली, तर वर्तुळ केंद्रापासून ती किती अंतरावर असेल ?



3. O केंद्र असलेल्या वर्तुळाची एक जीवा 24 सेमी लांबीची असून ती वर्तुळ केंद्रापासून 9 सेमी अंतरावर आहे, तर त्या वर्तुळाची त्रिज्या काढा.



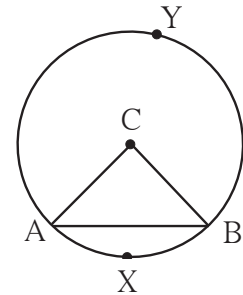
4. एका वर्तुळाचे केंद्र C असून त्याची त्रिज्या 10 सेमी आहे. त्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 12 सेमी असेल तर ती जीवा केंद्रापासून किती अंतरावर असेल ?



जाणून घेऊया.

वर्तुळाच्या जीवेचे संगत कंस (Arcs corresponding to chord of a circle)

सोबतच्या आकृतीत, रेख AB ही केंद्र O असलेल्या वर्तुळाची जीवा आहे. कंस AXB हा लघुकंस असून कंस AYB हा विशालकंस आहे. या दोन्ही कंसांना जीवा AB चे संगत कंस म्हणतात. याउलट जीवा AB ही कंस AXB आणि कंस AYB यांची संगत जीवा आहे.



एकरूप कंस (Congruent arcs)

जर एकाच वर्तुळाच्या दोन कंसांची मापे समान असतील तर ते दोन कंस एकरूप असतात.

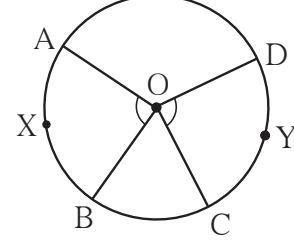
○ केंद्र असलेल्या वर्तुळात

$$\therefore m\angle AOB = m\angle COD$$

$$\therefore m(\text{कंस } AXB) = m(\text{कंस } CYD)$$

$$\therefore \text{कंस } AXB \cong \text{कंस } CYD$$

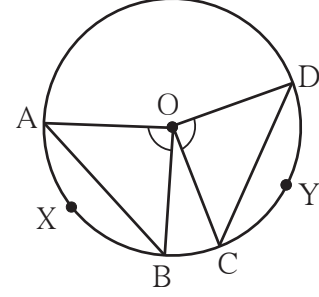
हे ट्रेसिंग पेपरच्या सहाय्याने पडताळून पाहा.



वर्तुळाची जीवा आणि संगत कंस यांचे गुणधर्म पुढील कृतीतून शोधा आणि लक्षात ठेवा.

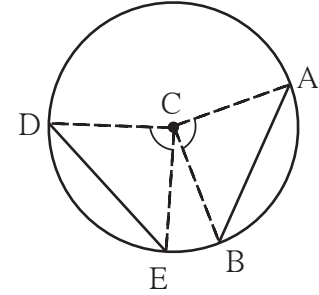
कृती I :

- (1) ○ केंद्र असलेले एक वर्तुळ काढा.
- (2) वर्तुळात $\angle COD$ व $\angle AOB$ हे समान मापाचे कोन काढा. त्यावरून कंस AXB आणि AYB हे एकरूप कंस मिळतील.
- (3) जीवा AB व जीवा CD काढा.
- (4) कर्कटकाच्या साहाय्याने जीवा AB व जीवा CD यांची लांबी समान आहे याचा अनुभव घ्या.



कृती II :

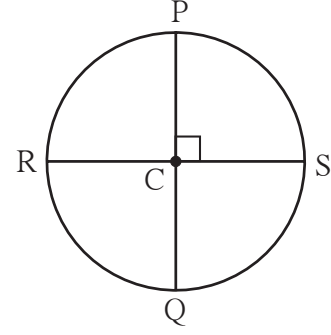
- (1) केंद्र C असलेले एक वर्तुळ काढा.
- (2) या वर्तुळाच्या रेख AB आणि रेख DE या एकरूप जीवा काढा. रेख CA, रेख CB, रेख CD, रेख CE या त्रिज्या काढा.
- (3) $\angle ACB$ व $\angle DCE$ एकरूप आहेत, हे दाखवा.
- (4) त्यावरून कंस AB आणि कंस DE यांची मापे समान आहेत, म्हणजेच हे कंस एकरूप आहेत, हे दाखवा.



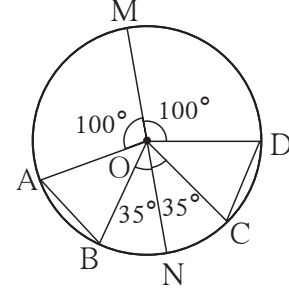
एका वर्तुळाच्या एकरूप कंसांशी निगडित असलेल्या जीवा एकरूप असतात. एका वर्तुळात दोन जीवा एकरूप असतील तर त्यांच्या संबंधित संगत लघुकंस व संगत विशालकंस एकरूप असतात.

सरावसंच 17.2

- केंद्र C असलेल्या वर्तुळाचे रेख PQ व रेख RS हे व्यास काटकोनात छेदतात. तर (1) कंस PS आणि कंस SQ एकरूप का आहेत, हे सांगा. (2) कंस PS शी एकरूप असलेल्या इतर कंसांची नावे लिहा.



- आकृतीत केंद्र O असलेल्या वर्तुळाचा रेख MN हा व्यास आहे. काही केंद्रीय कोनांची मापे दिली आहेत. त्यावरून (1) $\angle AOB$ आणि $\angle COD$ यांची मापे काढा. (2) कंस $AB \cong$ कंस CD हे दाखवा. (3) जीवा $AB \cong$ जीवा CD हे दाखवा.



उत्तरसूची

सरावसंच 17.1

- 6.5 सेमी 2. 7 सेमी 3. 15 सेमी 4. 8 सेमी

सरावसंच 17.2

- (1) कारण कंसाशी संगत केंद्रीय कोन समान मापाचे म्हणजे प्रत्येकी 90° आहेत.
(2) कंस $PS \cong$ कंस $PR \cong$ कंस RQ
- (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45^\circ$
(2) कंस $AB \cong$ कंस CD कारण कंसांशी संगत केंद्रीय कोन समान मापाचे म्हणजे प्रत्येकी 45° आहेत.
(3) जीवा $AB \cong$ जीवा CD कारण एकरूप कंसाशी संगत जीवा एकरूप असतात.



संकीर्ण प्रश्नसंग्रह 2

1. पुढील प्रश्नांसाठी पर्यायी उत्तरे दिली आहे. त्यांपैकी योग्य पर्याय निवडा.
 - (1) एका वर्तुळाचे क्षेत्रफळ 1386 चौसेमी असेल तर त्याचा परीघ किती असेल ?
 (A) 132 चौसेमी (B) 132 सेमी (C) 42 सेमी (D) 21 चौसेमी
 - (2) एका घनाची बाजू 4 मी आहे. ती दुप्पट केली तर त्याचे घनफळ किती पटीने वाढेल ?
 (A) दोन पटीने (B) तीन पटीने (C) चार पटीने (D) आठ पटीने
2. प्रणाली 100 मीटर धावण्याच्या शर्यतीचा सराव करत होती. त्यासाठी ती 100 मीटर अंतर 20 वेळा धावली. प्रत्येक वेळी त्यासाठी लागलेला वेळ सेकंदांत खालील प्रमाणे होता.
 18 , 17 , 17 , 16 , 15 , 16 , 15 , 14 , 16 , 15 ,
 15 , 17 , 15 , 16 , 15 , 17 , 16 , 15 , 14 , 15 धावण्यासाठी तिला लागलेल्या वेळांचा मध्य काढा.
3. ΔDEF आणि ΔLMN हे त्रिकोण $EDF \leftrightarrow LMN$ या एकास एक संगतीत एकरूप आहेत. तर या संगतीनुसार होणाऱ्या एकरूप बाजूंच्या आणि एकरूप कोनांच्या जोड्या लिहा.
4. एका यंत्राची किंमत 2,50,000 रुपये आहे. ती दरसाल 4% दराने घटते. तर यंत्र घेतल्यापासून तीन वर्षांनी त्या यंत्राची किंमत किती असेल ?
5. $\square ABCD$ मध्ये बाजू $AB \parallel$ बाजू DC , रेषा $AE \perp$ बाजू DC जर $l(AB) = 9$ सेमी, $l(AE) = 10$ सेमी, $A(\square ABCD) = 115$ सेमी², तर $l(DC)$ काढा.
6. वृत्तचिती आकाराच्या एका टाकीच्या तळाचा व्यास 1.75 मी आणि उंची 3.2 मी आहे. तर त्या टाकीची क्षमता किती लीटर आहे ? ($\pi = \frac{22}{7}$)
7. त्रिज्या 9.1 सेमी असलेल्या वर्तुळाच्या एका जीवेची लांबी 16.8 सेमी आहे. तर ती जीवा केंद्रापासून किती अंतरावर आहे ?
8. रोजगार हमी योजनेखाली A, B, C, D या गावांत सुरु असलेल्या कामांवरील पुरुष व स्त्री कामगारांची संख्या खालील सारणीत दिली आहे.

गाव	A	B	C	D
स्त्रिया	150	240	90	140
पुरुष	225	160	210	110

- (1) ही माहिती विभाजित स्तंभालेखाने दाखवा.
- (2) ही माहिती शतमान स्तंभालेखाने दाखवा.

9. पुढील समीकरणे सोडवा.

$$(1) 17(x+4) + 8(x+6) = 11(x+5) + 15(x+3)$$

$$(2) \frac{3y}{2} + \frac{y+4}{4} = 5 - \frac{y-2}{4} \quad (3) 5(1-2x) = 9(1-x)$$

10. पुढील कृती दिलेल्या पायऱ्यांनुसार करा.

(1) समभुज \square ABCD आणि त्याचा कर्ण AC काढा.

(2) एकरूप घटक समान चिन्हाने दाखवा.

(3) $\triangle ADC$ व $\triangle ABC$ कोणत्या संगतीत व कोणत्या कसोटीने एकरूप होतात ते लिहा.

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$, तसेच $\angle DAC \cong \angle BAC$ दाखवण्यासाठी कारण लिहा.

(5) वरील पायऱ्यांवरून लक्षात येणारा समभुज चौकोनाचा गुणधर्म लिहा.

11. एका शेतजमिनीचा आकार चौकोनी आहे. त्याच्या चार कोपऱ्यांना P, Q, R, S ही नावे देऊन घेतलेली मोजमापे पुढीलप्रमाणे आली.

$$l(PQ) = 170 \text{ मी}, l(QR) = 250 \text{ मी}, l(RS) = 100 \text{ मी},$$

$$l(PS) = 240 \text{ मी}, l(PR) = 260 \text{ मी}$$

या शेतजमिनीचे क्षेत्रफळ हेक्टरमध्ये काढा. (1 हेक्टर = 10,000 चौमी)

12. एका ग्रंथालयातील एकूण पुस्तकांच्या 50% पुस्तके मराठीची आहेत. मराठीच्या पुस्तकांच्या $\frac{1}{3}$ पुस्तके इंग्रजीची आणि, इंग्रजीच्या पुस्तकांच्या 25% पुस्तके गणिताची आहेत. उरलेली 560 पुस्तके इतर विषयांची आहेत. तर त्या ग्रंथालयात एकूण किती पुस्तके आहेत ?

13. $(2x+1)$ या द्विपदीने $(6x^3+11x^2-10x-7)$ या बहुपदीला भागा. भागाकार व बाकी लिहा.

उत्तरसूची

1. (1) B (2) D 2. 15.7 सेकंद

3. बाजू $ED \cong$ बाजू LM , बाजू $DF \cong$ बाजू MN , बाजू $EF \cong$ बाजू LN ,
 $\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

4. ₹ 2,21,184 5. 14 सेमी

6. 7700 7. 3.5 सेमी

9. (1) $x = 16$, (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ 11. 3.24 हेक्टर

12. 1920 13. भागाकार $3x^2 + 4x - 7$; बाकी 0