04

सारणिक
(Determinants)

4.01 परिचय (Introduction)

निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2,$$

इस निकाय को अद्वितीयतः हल किया जा सकता है यदि हमें वास्तविक संख्या $a_1b_2 - b_1a_2$ ज्ञात हो जाए तथा यह शून्य के बराबर न हो। अतः संख्या $a_1b_2 - b_1a_2$ काफी महत्वपूर्ण है तथा इसे x तथा y के गुणांकों से प्राप्त आव्यूह

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

से भी सम्बन्धित किया जा सकता है। उपर्युक्त आव्यूह से सम्बन्धित इस संख्या को आव्यूह की सारणिक कहा जाता है। तथा इसे निम्न रूप से प्रदर्शित किया जाता है।

$$\text{सारणिक} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

या
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

इस सारणिक में दो स्तम्भ तथा दो पंक्ति हैं, अतः इसे दो क्रम का सारणिक कहते हैं।

इसी प्रकार तीन, चार, $\cdots$ इत्यादि क्रम के सारणिक भी प्राप्त किये जा सकते हैं।

टिप्पणी: 1. किसी समीकरण निकाय को अद्वितीयतः हल करने के लिए निकाय में जितने चर हो उतने ही समीकरणों की आवश्यकता होती है। अतः किसी भी सारणिक में पंक्ति एवं स्तम्भों की संख्या सदैव समान होती है।

2. एक आव्यूह को अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहते हैं यदि $|A| = 0$ अर्थात् आव्यूह से सम्बन्धित सारणिक का मान शून्य हो।

4.02 सारणिक की परिभाषा (Definition of Determinant)

माना $A = [a_{ij}]$ एक n क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब एक अद्वितीय संख्या (unique number) $|a_{ij}|$ आव्यूह A की सारणिक कहलाती है और इसे सारणिक A या $|A|$ से प्रकट करते हैं।

4.03 सारणिक का मान (Value of Determinant)

(i) एक क्रम की सारणिक का मान

माना $A = [a]$ एक क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब सारणिक $A = |A| = a$, सारणिक को मान स्वयं संख्या ही है।

उदाहरणार्थः यदि $A = [3]$ हो, तब सारणिक $A = |A| = |3| = 3$

यदि $A = [3]$ हो, तब सारणिक $A = |A| = |-3| = -3$

टिप्पणी: उपर्युक्त उदाहरणों से सारणिक एवं मापांक में अन्तर स्पष्ट है अतः एक क्रम की सारणिक को मापांक नहीं समझना चाहिए।

(ii) द्वितीय क्रम की सारणिक का मान

माना $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ एक द्वितीय क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब सारणिक

$$A=|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$=a_1|b_2|-b_1|a_2|$$

$$=a_1b_2-a_2b_1, \quad \text{सारणिक } A \text{ का मान है।} \qquad (1)$$

अतः $|A|=$ अग्रग विकर्ण के अवयवों का गुणा − पिछले विकर्ण के अवयवों का गुणा

यहाँ संख्याएँ a_1, b_1, a_2 व b_2 सारणिक के अवयव कहलाते हैं। द्वितीय क्रम की सारणिक में कुल $2^2=4$ अवयव होते हैं। इनमें $a_1 \quad b_1;\ a_2 \quad b_2$ दो पंक्तियाँ तथा $a_1 \quad a_2;\ b_1 \quad b_2$ दो स्तम्भ हैं। समीकरण (1) का दायाँ पक्ष सारणिक का प्रसार कहलाता है।

उदाहरणार्थः $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, तो

$$\text{सारणिक } A=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot(4)-3(-1)$$

$$=8+3=11.$$

(iii) तृतीय क्रम की सारणिक का मान

माना $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ एक, तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह है, तब $[A]$ से सम्बन्धित

$$\text{सारणिक } A=|A|=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)-b_1(a_2c_3-a_3c_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2) \qquad (2)$$

$$=(a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3)-(a_3b_2c_1+b_3c_2a_1+c_3a_2b_1) \qquad (3)$$

यहाँ संख्याएँ $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2;\ a_3, b_3, c_3$ सारणिक के अवयव कहलाते हैं। तृतीय क्रम की सारणिक में कुल $3^2=9$ अवयव होते हैं। अवयव $a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय पंक्ति बनाते हैं, जबकि अवयव $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय स्तम्भ बनाते हैं। a_1, b_2, c_3 अग्रग विकर्ण के अवयव और $a_3. b_2, c_1$ पिछले विकर्ण के अवयव हैं। समीकरण (2) का दायाँ पक्ष, सारणिक की प्रथम पंक्ति से सारणिक का प्रसार कहलाता है।

4.04 तृतीय क्रम की सारणिक के प्रसार के नियम (Rules to expand third order determinant)

(i) प्रथम पंक्ति के अवयवों को एकान्तर क्रम से धनात्मक तथा ऋणात्मक चिह्न लगाकर लिखे।

(ii) इन चिह्नों सहित अवयवों को, द्वितीय क्रम की उन सारणिकों से क्रमशः गुणा करें जो उस पंक्ति व स्तम्भ का दमन (supress) करने पर प्राप्त होती है जिसमें यह अवयव स्थित है।

(iii) इन गुणनफलों का योग, तृतीय क्रम की सारणिक का मान होता है।

उदाहरणार्थ: सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1(3\times2-1\times0)-2(2\times2-3\times1)+0(2\times0-3\times3)$$
$$= 1(6)-2(1)+0$$
$$= 6-2$$
$$= 4.$$

4.05 तृतीय क्रम की सारणिक का मान ज्ञात करने का सारूस आकृति (Sarrus diagram to determine the vlaue of third order determinant)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$
$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

टिप्पणी : सारूस आकृति से सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त आकृतिानुसार तीन **अग्रणी विकर्णों** (Leading diagonals) के अवयवों के गुणन के योग में से, तीन पिछले विकर्णों के अवयवों के गुणन के योग को घटाते हैं।

उदाहरणार्थ: सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{matrix}$
$$= (30+28-12)-(-10+28+36)$$
$$= 46-54 = -8.$$

4.06 आव्यूह व सारणिक में अन्तर (Difference between matrix and determinant)

(i) आव्यूह संख्याओं का एक सुव्यवस्थित रूप है एवं उसका कोई संख्यात्मक मान नहीं होता है जबकि सारणिक का एक निश्चित मान (संख्यात्मक) होता है।

(ii) आव्यूह किसी भी क्रम के हो सकते है जबकि सारणिक में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या बराबर होती है।

(iii) आव्यूह की पंक्तियों को स्तम्भों एवं स्तम्भों को पंक्तियों से बदलने पर एक नया आव्यूह प्राप्त होता है जबकि ऐसा करने पर सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है। जिसे हम आगे सिद्ध करेंगे।

4.07 सारणिक के उपसारणिक (लघुसारणिक) तथा सहखण्ड (Minors and confactors of a determinant)

उपसारणिक: एक सारणिक के दिए गए अवयव से गुजरने वाली पंक्ति एवं स्तम्भ के दमन (supress) करने पर जो शेष सारणिक प्राप्त होता है वह उस अवयव की उपसारणिक कहलाता है।

उदाहरणार्थ: $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ सारणिक के अवयव a_2, द्वितीय पंक्ति व प्रथम स्तम्भ में है यदि Δ में द्वितीय पंक्ति व प्रथम स्तम्भ को छोड़ दिया जाए तो शेष सारणिक निम्न प्राप्त होगी।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ या } \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ जो अवयव a_2 की उपसारणिक है।

इसी प्रकार Δ के अवयव c_3 की उपसारणिक

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ या } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$ है।

इस प्रकार व्यापक रूप में किसी $n \times n$ क्रम की सारणिक में i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ के प्रतिच्छेदन पर स्थिति अवयव a_{ij} की उपसारणिक i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ का दमन करने पर शेष बची हुई $(n-1)\times(n-1)$ क्रम का सारणिक होगा।

सारणिक के किसी भी अवयव a_{ij} से सम्बन्धित उपसारणिक को सामान्यतया उसके संगत बड़े अक्षर A_{ij} से प्रकट करते हैं। जैसे अवयव a_{11} की उपसारणिक को A_{11} से तथा अवयव a_{12} की उपसारणिक को A_{12} से प्रकट करते हैं।

उदाहरणार्थः सारणिक $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ में अवयव 1 का उपसारणिक $|2|$ होगा।

सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ में अवयव 3 की उपसारणिक $\begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$ एवं अवयव 7 की उपसारणिक $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ होगा।

सहखण्डः किसी भी सारणिक में i वीं पंक्ति एवं j वें स्तम्भ के प्रतिच्छेदन पर स्थित अवयव a_{ij} का सहखण्ड

$$F_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ उपसारणिक}$$

$$\Rightarrow \quad F_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij},$$

जहाँ A_{ij} एवं F_{ij} अवयव a_{ij} के क्रमशः उपसारणिक एवं सह-खण्ड को प्रकट करते हैं।

अर्थात् $$F_{ij} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{जब } i+j \text{ समसंख्या है।} \\ -A_{ij}, & \text{जब } i+j \text{ विषम संख्या है।} \end{cases}$$

उदाहरणार्थः $$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$ हो, तब

अवयव 7 का सह-खण्ड $= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 6-0 = 6$

अवयव –5 का सह-खण्ड $= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$

अवयव 4 का सह-खण्ड $= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-4) = 4$

टिप्पणीः (i) शीघ्र गणना के लिए 2 व 3 क्रम की सारणिक में सह-खण्डों के चिह्न संगत स्थिति के अनुसार निम्न प्रकार होते हैं :

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

(ii) सारणिक में किसी अवयव की स्थिति के अनुसार पंक्ति एवं स्तम्भ का योग सम या विषम होने के अनुसार ही सम्बन्धित उपसारणिक एवं सह–खण्ड के चिह्न समान या विपरीत होंगे।

4.08 सारणिक का प्रसार (Expansion of determinants)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ एक तृतीय क्रम का सारणिक है।

हम जानते हैं कि इसका प्रथम पंक्ति से विस्तार करने पर निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, जहाँ A_{11}, A_{12} एवं A_{13} संगत अवयवों के उपसारणिक हैं।

$= a_{11}F_{11} + a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13}$, जहाँ F_{11}, F_{12} एवं F_{13} इनके संगत अवयवों के सह-खण्ड हैं।

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

$$\Delta = a_{21}F_{21} + a_{22}F_{22} + a_{23}F_{23}$$
$$\Delta = a_{11}F_{11} + a_{21}F_{21} + a_{31}F_{31}$$
$\Delta = a_{13}F_{13} + a_{23}F_{23} + a_{33}F_{33}$ आदि।

अतः स्पष्ट है कि किसी सारणिक Δ का मान उसके किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के समस्त अवयवों के एवं उनके संगत सह-खण्डों से गुणनफल के योग के बराबर होता है।

टिप्पणीः (i) सारणिक का विस्तार किसी भी पंक्ति या स्तम्भ के अनुसार किया जा सकता है।

(ii) सारणिक के प्रसार का यह नियम किसी भी क्रम की सारणिक के लिए सत्य है।

(iii) सारणिक का मान शीघ्र प्राप्त करने के लिए इसका प्रसार उस पंक्ति या स्तम्भ के अनुसार करें, जिसके अधिकतम अवयव शून्य हो।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6) - (8) = -14.$$

उदाहरण-2. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos^2\theta) - (-\sin^2\theta)$$
$$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

उदाहरण-3. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} 3 & 11 & -1 \\ 5 & 2 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ का प्रसार तृतीय स्तम्भ के अनुसार करने पर

$$= -1\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} - 0 + 0 = -(15 - 20) = 5.$$

उदाहरण-4. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हलः दिया हुआ है $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$

$\Rightarrow \quad 4k - 16 = 4$

$\Rightarrow \quad k = 5.$

उदाहरण-5. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} = 7$ हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हलः दिया हुआ है $\begin{vmatrix} k & 3 \\ -1 & k \end{vmatrix} = 7$

$\Rightarrow \quad k^2 - (-3) = 7 \quad \Rightarrow \quad k^2 + 3 = 7$

$\Rightarrow \quad k^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2.$

उदाहरण-6. यदि सारणिक $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ हो, तो दूसरी पंक्ति के सभी अवयवों के उपसारणिक एवं सह-खण्ड लिखिए तथा सारणिक का मान भी ज्ञात कीजिए।

हलः $A_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 3 = 25, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - (-1) = 15, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - (-4) = 10$

$\therefore \quad F_{21} = -A_{21} = -25, \quad F_{22} = A_{22} = 15, \quad F_{23} = -A_{23} = -10$

अतः सारणिक A का मान $= 8 \cdot F_{21} + 5 \cdot F_{22} + 2 \cdot F_{23}$

$= 8(-25) + 5(15) + 2(-10)$

$= -200 + 75 - 20 = -145.$

उदाहरण-7. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 13 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः यहाँ द्वितीय पंक्ति में दो शून्य हैं अतः द्वितीय पंक्ति के अनुसार प्रसार करने पर

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 13 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times (-1) \begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} + 0 - 0$$

$$= -5[-14 - 143] = 785.$$

प्रश्नमाला 4.1

1. k के किस मान के लिए सारणिक $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ का मान शून्य होगा ?

2. यदि $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो $x : y$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ y & x \end{vmatrix} = 4$ तथा $\begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 7$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. निम्न सारणिकों में प्रथम स्तम्भ के अवयवों की उपसारणिक एवं सह-खण्ड लिखकर उसका मान भी ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 3 & -11 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -10 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. सिद्ध कीजिए: $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2 \cdot$

4.09 सारणिक के गुणधर्म (Properties of determinants)

(i) यदि किसी सारणिक में समस्त पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दें, तो सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उपपत्ति: माना $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$,

तथा $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,

जो Δ की पंक्तियों को स्तम्भों में एवं स्तम्भों को पंक्तियों में बदलने पर प्राप्त होती है।

$\therefore$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$ सारूस आकृति से

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \quad (1)$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$\Delta_1 = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (c_1b_2a_3 + c_2b_3a_1 + c_3b_1a_2) \quad (2)$$

अतः (1) एवं (2) से $\Delta = \Delta_1$

अतः $|A^T| = |A|$, जहाँ A^T, वर्ग आव्यूह A की परिवर्त आव्यूह है।

(ii) यदि किसी सारणिक में दो पंक्तियों या दो स्तम्भों को परस्पर विनिमय (Inter-change) किया जाए, तो सारणिक का संख्यात्मक मान तो वही रहता है लेकिन उसका चिह्न बदल जाता है।

उपपत्तिः माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

जो Δ के प्रथम व द्वितीय स्तम्भों को विनिमय करने से प्राप्त होती है।

$\therefore$ $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \quad (1)$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$\Delta_1 = (b_1a_2c_3 + a_1c_2b_3 + c_1b_2a_3) - (b_3a_2c_1 + a_3c_2b_1 + c_3b_2a_1) \quad (2)$$

अतः (1) एवं (2) से $\Delta_1 = -\Delta$

(iii) यदि किसी सारणिक में कोई दो पंक्तियाँ या दो स्तम्भ सर्वसम (Identical) हो, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्तिः $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{matrix} a & b \\ a & b \\ x & y \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$= (abz + bcx + cay) - (xbc + yca + zab)$$

$$= 0.$$

और $$\begin{vmatrix} x & a & x \\ y & b & y \\ z & c & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & a & x \\ y & b & y \\ z & c & z \end{vmatrix} \begin{matrix} x & a \\ y & b \\ z & c \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$= (xbz + ayz + xyc) - (zbx + cyx + zya)$$

$$= 0.$$

(iv) यदि किसी सारणिक में एक पंक्ति या एक स्तम्भ के सभी अवयवों को किसी अशून्य संख्या से गुणा कर दिया जावे तो प्राप्त सारणिक का मान, मूल सारणिक के मान तथा संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।

उपपत्तिः माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix},$$

जो कि Δ की तृतीय पंक्ति को k से गुणा करने पर प्राप्त होती है।

$\therefore$ सारूस आकृति की सहायता से

$$\Delta = (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1) \qquad (1)$$

तथा $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ ka_3 & kb_3 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$\Delta_1 = (a_1b_2kc_3 + b_1c_2ka_3 + c_1a_2kb_3) - (ka_3b_2c_1 + kb_3c_2a_1 + kc_3a_2b_1)$$

$$= k\{(a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)\}$$

$$= k\Delta$$

अतः $$\Delta_1 = k\Delta$$

उपप्रमेयः यदि किसी सारणिक Δ के प्रत्येक अवयव को k से गुणा करने पर प्राप्त सारणिक Δ_1 हो, तो

$\Delta_1 = k\Delta,$ जब Δ का क्रम एक है।

$\Delta_1 = k^2\Delta,$ जब Δ का क्रम दो है।

$\Delta_1 = k^3\Delta,$ जब Δ का क्रम तीन है।

$\Delta_1 = k^4\Delta,$ जब Δ का क्रम चार है।

अर्थात् $\Delta_1 = k^n\Delta$ जब Δ का क्रम n है।

(v) यदि किसी सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो या दो से अधिक संख्याओं का योग हो, तो उस सारणिक को उसकी क्रम की दो या दो से अधिक सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपपत्तिः माना $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

इसका प्रथम स्तम्भ से विस्तार करने पर

$$\Delta = (a_1+d_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - (a_2+d_2)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (a_3+d_3)\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\} + \left\{d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - d_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(vi) सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के प्रत्येक अवयव में किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत अवयवों का कोई अचर गुणज (multiple) जोड़ने या घटाने से सारणिक के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

उपपत्ति: माना
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

तथा
$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

जो Δ के प्रथम स्तम्भ में तृतीय स्तम्भ के संगत अवयवों का k गुणा जोड़ने से प्राप्त हुई है।

$$\therefore \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & b_1 & c_1 \\ kc_2 & b_2 & c_2 \\ kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (v) से]

$$= \Delta + k \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= \Delta + k \times 0$$
$$= \Delta.$$ [गुणधर्म (iii) से]

(vii) सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के अवयवों का किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत सहखण्डों से गुणा करने पर प्राप्त राशियों का योग शून्य होता है।

उपपत्ति: माना
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ $\Delta = a_{11}F_{11} + a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13}$ (सारणिक का प्रथम पंक्ति से प्रसार करने से) (2)

(1) में a_{11}, a_{12} एवं a_{13} को क्रमशः a_{21}, a_{22} एवं a_{23} से प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$ [गुणधर्म (iii) से] (3)

अतः (1) एवं (3) से $0 = a_{21}F_{11} + a_{22}F_{12} + a_{23}F_{13}$

इसी प्रकार $0 = a_{31}F_{11} + a_{32}F_{12} + a_{33}F_{13}$ आदि।

(viii) यदि किसी सारणिक के किसी पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयव शून्य हो, तो सारणिक का मान शून्य होता है।

उपपत्ति:
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ का द्वितीय पंक्ति से प्रसार करने पर

$$= -0 \times \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= 0$$

(ix) त्रिभुजाकार आव्यूह से सम्बन्धित सारणिक का मान उसके मुख्य विकर्ण के अवयवों का गुणन होता है।

उदाहरणार्थः (i) $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$

(ii) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix} = ac - 0 = ac$

(iii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & \ell \end{vmatrix} = \ell \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & x \end{vmatrix} = \ell(ax) = a\ell x$

(iv) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & x & 0 \\ c & y & \ell \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & \ell \end{vmatrix} = a(x\ell - 0) = a\ell x$

उपप्रमेयः $|I_n| = 1$, जहाँ I_n, n क्रम की इकाई आव्यूह है।

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(x) यदि किसी सारणिक में x के बहुपद हों और x के स्थान पर a रखने पर सारणिक का मान शून्य हो जाए तो $x-a$ सारणिक के मान का एक गुणनखण्ड होता है।

उदाहरणार्थः $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}$ में $x = a$ तथा $x = b$ रखने पर Δ का मान गुणधर्म (iii) के अनुसार शून्य हो जाता है। अतः

$(x-a)$ एवं $(x-b)$ सारणिक के मान के दो गुणनखण्ड हैं।

अतः Δ का हल करने हेतु द्वितीय पंक्ति में से प्रथम पंक्ति व तृतीय पंक्ति में से प्रथम पंक्ति को घटाने पर

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & a-x & a^2-x^2 \\ 0 & b-x & b^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-x & a^2-x^2 \\ b-x & b^2-x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)\begin{vmatrix} 1 & a+x \\ 1 & b+x \end{vmatrix}$$

$$= (a-x)(b-x)(b+x-a-x)$$

$$= (a-x)(b-x)(b-a)$$

$$= (x-a)(x-b)(b-a)$$

4.10 प्रारम्भिक संक्रियाएँ (Elementary operations)

यदि सारणिक Δ का क्रम $n \geq 2$ तो $R_1, R_2, R_3, \ldots$ से क्रमशः प्रथम पंक्ति, द्वितीय पंक्ति, तृतीय पंक्ति, . . . तथा $C_1, C_2, C_3, \ldots$ से क्रमशः प्रथम स्तम्भ, द्वितीय स्तम्भ, तृतीय स्तम्भ, . . . को प्रकट करते हैं।

(i) संक्रिया $R_i \leftrightarrow R_j$ से तात्पर्य है कि i वीं एवं j वीं पंक्तियों को परस्पर बदला गया है, तथा $C_i \leftrightarrow C_j$ से तात्पर्य है कि i वें एवं j वें स्तम्भों को परस्पर बदला गया है।

(ii) संक्रिया $R_i \to kR_i$ से तात्पर्य है कि i वीं पंक्ति के प्रत्येक अवयव को k से गुणा किया है। जबकि $C_i \to kC_i$ से तात्पर्य है कि i वें स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को k से गुणा किया गया है।

(iii) संक्रिया $R_i = R_i + kR_j$ से तात्पर्य है कि i वें पंक्ति के प्रत्येक अवयव में, j वीं पंक्ति के संगत अवयवों को k से गुणा कर जोड़ा गया है, तथा $C_i = C_i + kC_j$ से तात्पर्य है कि i वीं स्तम्भ के प्रत्येक अवयव में j वें स्तम्भ के संगत अवयवों को k से गुणा कर जोड़ा गया है।

4.11 सारणिकों का गुणनफल (Product of determinants)

I. द्वितीय क्रम की दो सारणिकों का गुणनफल निम्न प्रकार किया जाता है।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{(पंक्ति से स्तम्भ गुणा)}$$

तथा

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} \quad \text{(पंक्ति से पंक्ति गुणा)}$$

$\because \quad |A^T| = |A|$

II. तृतीय क्रम की दो सारणिकों का गुणनफल निम्न प्रकार किया जाता है।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 + c_1\alpha_3 & a_1\beta_1 + b_1\beta_2 + c_1\beta_3 & a_1\gamma_1 + b_1\gamma_2 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 + c_2\alpha_3 & a_2\beta_1 + b_2\beta_2 + c_2\beta_3 & a_2\gamma_1 + b_2\gamma_2 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + c_3\alpha_3 & a_3\beta_1 + b_3\beta_2 + c_3\beta_2 & a_3\gamma_1 + b_3\gamma_2 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

(पंक्ति से स्तम्भ गुणा)

तथा

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

(पंक्ति से पंक्ति गुणा)

टिप्पणी: दो भिन्न–भिन्न क्रम की सारणिकों का गुणनफल भी सम्भव है।

उदाहरणार्थ: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 11 \\ 5 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= 1(50 - 44) - 2(40 - 55) + 3(16 - 25)$$

$$= 6 + 30 - 27 = 9. \quad (1)$$

अब $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4 = -3. \quad (2)$$

तथा $$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1(4-6)-2(8-3)+3(4-1)$$

$$= -2-10+9 = -3. \quad (3)$$

अतः (1), (2) और (3) से

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 9.$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-8. सारणिक $\begin{vmatrix} 49 & 1 & 6 \\ 39 & 7 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ का मान बिना विस्तार के ज्ञात कीजिए।

हल: संक्रिया $C_1 \to C_1 - 8C_3$ से

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 7 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad [\because C_1 = C_2 \text{ गुणधर्म (iii) से}]$$

उदाहरण-9. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ का मान बिना विस्तार के ज्ञात कीजिए।

हल: $$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & c+a+b \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} \qquad (\text{संक्रिया } C_3 \to C_3 + C_2)$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} \qquad [\text{गुणधर्म (iv) से}]$$

$$= (a+b+c)(0)$$
$$= 0 \qquad [\because C_1 = C_3 \text{ गुणधर्म (iii) से}]$$

उदाहरण-10. सारणिक $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$ का मान बिना विस्तार के ज्ञात कीजिए।

हल: $$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix}$$

संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0 \qquad [\text{गुणधर्म (viii) से}]$$

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से

$$= \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)(y-z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y+z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर

$$= (x-y)(y-z)\left\{0-0+1\begin{vmatrix} 1 & x+y \\ 1 & y+z \end{vmatrix}\right\}$$

$$= (x-y)(y-z)(y+z-x-y)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x).$$

= दक्षिण पक्ष इतिसिद्धम्

उदाहरण-12. बिना विस्तार के सिद्ध कीजिए कि

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

हल:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2c & c+a & a+b \\ 2r & r+p & p+q \\ 2z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 - C_3$ से)

$$= 2\begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= 2\begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ से)

$$=2\begin{vmatrix} c & a & b \\ r & p & q \\ z & x & y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_3 \to C_3 - C_2$ से)

$$=-2\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \leftrightarrow C_2$ से)

$$=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_2 \leftrightarrow C_3$ से)

उदाहरण-13. यदि x, y, z सभी भिन्न-भिन्न हो, तथा

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}=0$$

हो, तो सिद्ध कीजिए कि $xyz=-1\cdot$

हलः

दिया हुआ है $$\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}=0$$ [गुणधर्म (v) से]

$$\Rightarrow \quad -\begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ y & 1 & y^2 \\ z & 1 & z^2 \end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$ [गुणधर्म (ii) व (iv) से]

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}+xyz\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$ [गुणधर्म (ii) से]

$$\Rightarrow \quad (1+xyz)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}=0$$ [उदाहरण 4 से]

$$\Rightarrow \quad (1+xyz)(x-y)(y-z)(z-x)=0$$

$\because \quad x \neq y \neq z \Rightarrow x-y \neq 0, y-z \neq 0$ तथा $z-x \neq 0$

$\Rightarrow \quad 1+xyz=0 \Rightarrow xyz=-1\cdot$ इतिसिद्धम्

उदाहरण-14. सारणिक $\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:
$$\begin{vmatrix} 1/a & a^2 & bc \\ 1/b & b^2 & ca \\ 1/c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^3 & abc \\ 1 & b^3 & abc \\ 1 & c^3 & abc \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_1 \to aR_1$, $R_2 \to bR_2$ तथा $R_3 \to cR_3$ से)

$$= \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} 1 & a^3 & 1 \\ 1 & b^3 & 1 \\ 1 & c^3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ [$\because C_1 = C_3$, गुणधर्म (iii) से]

उदाहरण-15. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

हल: वाम पक्ष
$$= \begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & a & b \\ 2(a+b+c) & b+c+2a & b \\ 2(a+b+c) & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$ [गुणधर्म (iv) से]

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b+c+a & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_2 \to R_2 - R_1$ तथा $R_3 \to R_3 - R_1$ से)

$$= 2(a+b+c)\left\{1 \cdot \begin{vmatrix} b+c+a & 0 \\ 0 & c+a+b \end{vmatrix}\right\}$$ (प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर)

$$= 2(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b+c & 0 \\ 0 & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c)(a+b+c)^2$$

$$= 2(a+b+c)^3$$

= दक्षिण पक्ष

इतिसिद्धम्

उदाहरण-16. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

(प्रथम, द्वितीय व तृतीय पंक्तियों में से क्रमशः a, b व c बाहर लेने पर)

$$= abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ से)

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & 1+\frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

[गुणधर्म (iv) से]

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{1}{b} \\ 0 & -1 & 1+\frac{1}{c} \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ तथा $C_2 \to C_2 - C_3$ से)

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{0+0+1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right\}$$

(प्रथम पंक्ति से प्रसार करने पर)

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-0)$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

= दक्षिण पक्ष

इतिसिद्धम्।

उदाहरण-17. समीकरण $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ को हल कीजिए।

हल: दिया हुआ है $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ c & x+b & a \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x+a+b+c & b & c \\ x+a+b+c & x+b & a \\ x+a+b+c & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ से)

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & x+b & a \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -x & c-a \\ 0 & x & a-x-c \\ 1 & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$ (संक्रिया $R_1 \to R_1 - R_2$ तथा $R_2 \to R_2 - R_3$ से)

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} -x & c-a \\ x & a-x-c \end{vmatrix} = 0$$ (C_1 से प्रसार करने पर)

या $$(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & -x \\ x & a-x-c \end{vmatrix} = 0$$ (संक्रिया $R_1 \to R_1 + R_2$ से)

$\Rightarrow \quad (x+a+b+c)(0+x^2) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2(x+a+b+c) = 0$

$\Rightarrow \quad x^2 = 0$ या $x+a+b+c = 0$

$\Rightarrow \quad x = 0$ या $x = -(a+b+c)$

उदाहरण-18. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy).$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to xC_1, C_2 \to yC_2, C_3 \to zC_3$ से)

$$=\frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया R_3 में से xyz बाहर लेने पर)

$$=-\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_2 \leftrightarrow R_3$ से)

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_1 \leftrightarrow R_2$ से)

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_2$ व $C_2 \to C_2 - C_3$ से)

$$=\begin{vmatrix} x^2-y^2 & y^2-z^2 \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 \end{vmatrix}$$ (R_1 से प्रसार करने पर)

$$=\begin{vmatrix} (x-y)(x+y) & (y+z)(y-z) \\ (x-y)(x^2+xy+y^2) & (y-z)(y^2+yz+z^2) \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & y+z \\ x^2+xy+y^2 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z-x \\ x^2+xy+y^2 & yz+z^2-x^2-xy \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_2 \to C_2 - C_1$ से)

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z-x \\ x^2+xy+y^2 & (z-x)(z+x)+y(z-x) \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)\begin{vmatrix} x+y & z-x \\ x^2+xy+y^2 & (z-x)(z+x+y) \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\begin{vmatrix} x+y & 1 \\ x^2+xy+y^2 & z+x+y \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\left\{(x+y)(z+x+y)-(x^2+xy+y^2)\right\}$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\cdot(zx+x^2+xy+yz+xy+y^2-x^2-xy-y^2)$$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

= दक्षिण पक्ष। इतिसिद्धम्।

उदाहरण-19. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ का मान बिना प्रसार के ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि $\log_n m = \dfrac{\log m}{\log n}$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\log y}{\log x} & \dfrac{\log z}{\log x} \\ \dfrac{\log x}{\log y} & 1 & \dfrac{\log z}{\log y} \\ \dfrac{\log x}{\log z} & \dfrac{\log y}{\log z} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\log x \cdot \log y \cdot \log z} \begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log x & \log y & \log z \\ \log x & \log y & \log z \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $R_1 \to \log x \cdot R_1; R_2 \to \log y \cdot R_2; R_3 \to \log z \cdot R_3$ से)

$$= \frac{1}{\log x \cdot \log y \cdot \log z} \times 0 \qquad (\because \; R_1 = R_2 = R_3)$$

$$= 0$$

उदाहरण-20. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3 \cdot$$

हल: वाम पक्ष $= \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} (b+c)^2 - a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2 - b^2 & b^2 \\ c^2 - (a+b)^2 & c^2 - (a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

(संक्रिया $C_1 \to C_1 - C_3$ एवं $C_2 \to C_2 - C_3$ से)

$$= \begin{vmatrix} (b+c+a)(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a+b)(c+a-b) & b^2 \\ (c+a+b)(c-a-b) & (c+a+b)(c-a-b) & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$ (संक्रिया C_1 व C_2 में से $(a+b+c)$ बाहर लेने पर)

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $R_3 \to R_3 - R_1 - R_2$ से)

$$=(a+b+c)^2\begin{vmatrix} b+c & \frac{a^2}{b} & a^2 \\ \frac{b^2}{a} & c+a & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + \frac{C_3}{a}$ एवं $C_2 \to C_2 + \frac{C_3}{b}$ से)

$$=(a+b+c)^2\left\{0+0+2ab\begin{vmatrix} b+c & \frac{a^2}{b} \\ \frac{b^2}{a} & (c+a) \end{vmatrix}\right\}$$ (R_3 से प्रसार करने पर)

$$=(a+b+c)^2\cdot 2ab\{(b+c)(c+a)-ab\}$$

$$=(a+b+c)^2\cdot 2ab\left(bc+ab+c^2+ca-ab\right)$$

$$=(a+b+c)^2\cdot 2ab\left(bc+c^2+ca\right)$$

$$=(a+b+c)^2\cdot 2abc(b+c+a)$$

$$=2abc(a+b+c)^3 = \text{दक्षिण पक्ष}$$ इतिसिद्धम

उदाहरण-21. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}.$$

हल: वाम पक्ष $$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}\times(-1)\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$$ (द्वितीय सारणिक में $C_2 \leftrightarrow C_3$ से)

$$=\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} -a & c & b \\ -b & a & c \\ -c & b & a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+bc & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$ (पंक्ति से पंक्ति गुणा करने पर)

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ac-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix}$$

= दक्षिण पक्ष इतिसिद्धम्

प्रश्नमाला 4.2

1. यदि $\begin{vmatrix} \ell & m \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो $\ell : m$ ज्ञात कीजिए।

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ के द्वितीय पंक्ति के अवयवों की उपसारणिक ज्ञात कीजिए।

3. सारणिक $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. यदि किसी सारणिक के प्रथम व तृतीय स्तम्भों को आपस में बदल दें तो सारणिक के मान पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

5. सिद्ध कीजिए कि:

$$\begin{vmatrix} 1 & yz & y+z \\ 1 & zx & z+x \\ 1 & xy & x+y \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x).$$

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 0 & b^2a & c^2a \\ a^2b & 0 & c^2b \\ a^2c & b^2c & 0 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2x-3 & 3x-4 \\ x-4 & 2x-9 & 3x-16 \\ x-8 & 2x-27 & 3x-64 \end{vmatrix} = 0.$$

8. बिना विस्तार के सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}.$$

9. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} b+c & a+b & a \\ c+a & b+c & b \\ a+b & c+a & c \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc.$$

10. सारणिक $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि ω इकाई का घनमूल हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

12. सिद्ध कीजिए कि:

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2 \cdot$$

13. यदि सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ में $A_1, B_1, C_1, \ldots$ आदि क्रमशः अवयव $a_1, b_1, c_1, \ldots$ आदि के सह-खण्ड हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \cdot$$

[संकेत : $\Delta \cdot \Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$,

$$= \begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3$$ (पंक्ति से पंक्ति को गुणा करने पर)

$\therefore \quad \Delta\Delta' = \Delta^3$ या $\Delta' = \Delta^2$]

विविध प्रश्नमाला–4

1. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos 80^\circ & -\cos 10^\circ \\ \sin 80^\circ & \sin 10^\circ \end{vmatrix}$ का मान है

(क) 0 (ख) 1 (ग) –1 (घ) इनमें से कोई नहीं।

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ में प्रथम स्तम्भ के सह-खण्ड है

(क) –1, 3 (ख) –1, –3 (ग) –1, 20 (घ) –1, –20.

3. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \\ -2 & -4 & -8 \end{vmatrix}$ का मान होगा

(क) -2Δ (ख) 8Δ (ग) -8Δ (घ) -6Δ.

4. निम्न में से कौनसा सारणिक, सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ के समान है?

(क) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (ख) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$ (ग) $-\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (घ) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

5. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos 50^\circ & \sin 10^\circ \\ \sin 50^\circ & \cos 10^\circ \end{vmatrix}$ का मान है

(क) 0 (ख) 1 (ग) 1/2 (घ) –1/2.

6. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$ का मान है

(क) $ab+bc+ca$ (ख) 0 (ग) 1 (घ) abc.

7. यदि ω इकाई का एक घनमूल हो, तो सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & \omega^4 & \omega^8 \\ \omega^4 & \omega^8 & 1 \\ \omega^8 & 1 & \omega^4 \end{vmatrix}$ का मान है

(क) ω^2 (ख) ω (ग) 1 (घ) 0.

8. यदि $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ हो, तो x का मान है

(क) 6 (ख) 7 (ग) 8 (घ) 0.

9. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ तथा $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ के संगत सह–खण्ड क्रमश $F_{11}, F_{12}, F_{13}, \ldots$ हो, तो सत्य कथन है

(क) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = 0$ (ख) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} \neq \Delta$

(ग) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = \Delta$ (घ) $a_{12}F_{12} + a_{22}F_{22} + a_{32}F_{32} = -\Delta.$

10. सारणिक $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ का मान है

(क) $x+y+z$ (ख) $2(x+y+z)$ (ग) 1 (घ) 0.

11. निम्न समीकरण को हल कीजिएः

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

12. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. सारणिक $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

14. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2.$$

15. सिद्ध कीजिए कि निम्न समीकरण का एक मूल $x = 2$ है तथा इसके शेष मूल भी ज्ञात कीजिए

$$\begin{vmatrix} x & -6 & -1 \\ 2 & -3x & x-3 \\ -3 & 2x & x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

सिद्ध कीजिएः [प्र.सं. 16 से 20]

16. $$\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & c+a+b \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a).$$

17. $$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$$

18. $\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$

19. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$

20. $\begin{vmatrix} \dfrac{a^2+b^2}{c} & c & c \\ a & \dfrac{b^2+c^2}{a} & a \\ b & b & \dfrac{c^2+a^2}{b} \end{vmatrix} = 4abc$ (संकेतः संक्रिया $R_1 \to cR_1, R_2 \to aR_2$ एवं $R_3 \to bR_3$ से)

21. यदि $a+b+c=0$ हो, तो निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0.$$

22. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9(a+b)b^2$$

23. यदि $p+q+r=0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} pa & qb & rc \\ qc & ra & pb \\ rb & pc & qa \end{vmatrix} = pqr \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

(संकेतः वाम पक्ष $= pqr(a^3+b^3+c^3) - abc(p^3+q^3+r^3)$ $\because$ $p+q+r=0 \Rightarrow p^3+q^3+r^3 = 3pqr$

$\therefore$ वाम पक्ष $= pqr(a^3+b^3+c^3-3abc) =$ दक्षिण पक्ष]

24. सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(x-4)^2$$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. द्वितीय क्रम का सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \cdot$

2. तृतीय क्रम का सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$ सारूस आकृति से

$$= (a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3) - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)$$

3. आव्यूह एवं सारणिक में अंतर
   - (i) आव्यूह का मान नहीं होता जबकि सारणिक का संख्यात्मक मान होता है।
   - (ii) आव्यूह का क्रम कोई भी हो सकता है जबकि सारणिक का क्रम $n \times n$ ही होता है।
   - (iii) सारणिक में $|A| = |A^T|$ जबकि आव्यूह में $[A] \neq [A^T] \cdot$

4. उपसारणिक n क्रम की सारणिक में किसी अवयव वाली पंक्ति और स्तम्भ के दमन करने पर जो शेष सारणिक प्राप्त होता है वह उस अवयव की उपसारणिक होता है।

5. सह-खण्ड किसी सारणिक के अवयव a_{ij} का सह-खण्ड $= (-1)^{i+j}$ उप सारणिक

   $\Rightarrow$ अवयव a_{ij} का सह-खण्ड $= a_{ij}$ का उपसारणिक, जब $i + j$ सम है।

   $= -(a_{ij}$ का उपसारणिक), जब $i + j$ विषम है।

6. सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ का विस्तार
   - (i) इसके उपसारणिकों के पदों में: $\Delta = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ आदि।
   - (ii) इसके सह-खण्डों के पदों में: $\Delta = a_{11}F_{11} + a_{12}F_{12} + a_{13}F_{13}$

7. सारणिक के गुणधर्म:
   - (i) किसी सारणिक की समस्त पंक्तियों को स्तम्भों में या स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाए तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है।
   - (ii) किसी सारणिक की किन्हीं दो पंक्तियों या दो स्तम्भों को परस्पर बदल दिया जाए तो सारणिक का संख्यात्मक मान तो वही रहता है किन्तु चिह्न बदल जाता है।
   - (iii) यदि किसी सारणिक में एक पंक्ति या एक स्तम्भ के सभी अवयवों को किसी अशून्य संख्या से गुणा कर दिया जाए तो प्राप्त सारणिक का मान मूल सारणिक के मान एवं उस अशून्य संख्या के गुणनफल के बराबर होता है।
   - (iv) किसी सारणिक में किसी पंक्ति या स्तम्भ का प्रत्येक अवयव दो संख्याओं का योग हो, तो सारणिक को उसी क्रम की दो सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
   - (v) किसी सारणिक में किसी पंक्ति (स्तम्भ) के प्रत्येक अवयव में किसी अन्य पंक्ति (स्तम्भ) के संगत अवयवो का कोई अचर गुणज जोड़ने या घटाने पर सारणिक के मान पर कोई भी प्रभाव नहीं पड़ता है।
   - (vi) किसी सारणिक की एक पंक्ति या स्तम्भ के सभी अवयव शून्य हों तो उसका मान शून्य होता है।

(vii) सारणिक की किसी पंक्ति या स्तम्भ के अवयवों को किसी अन्य पंक्ति या स्तम्भ के संगत सह-खण्डों से गुणा करने पर प्राप्त राशियों का योग शून्य होता है।

$$a_{11}F_{31}+a_{12}F_{32}+a_{13}F_{33}=0\cdot$$

(viii) त्रिभुजाकार आव्यूह से सम्बन्धित सारणिक का मान उसके मुख्य विकर्ण के अवयवों का गुणनफल होता है।

(ix) दो भिन्न-भिन्न क्रम की सारणिकों का गुणनफल भी सम्भव होता है। परन्तु गुणन करने से पूर्व दोनो को समान क्रम के सारणिक बनाना आवश्यक होता है।

(x) दो सारणिकों का गुणा, पंक्ति से स्तम्भ और पंक्ति से पंक्ति नियम से किया जा सकता है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 4.1

1. $\frac{-8}{3}$ 2. 1 : 2   3. $x=\frac{-5}{2}, y=-3$ 4. $\frac{3}{2}$

5. (i) $A_{11}=-12, A_{21}=-16, A_{31}=-4$

$F_{11}=-12, F_{21}=16, F_{31}=-4,\quad 40$

(ii) $A_{11}=bc-f^2,\ A_{21}=hc-fg,\ A_{31}=hf-bg$

$F_{11}=bc-f^2,\ F_{21}=fg-hc,\ F_{31}=hf-bg;$

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

6. 15

प्रश्नमाला 4.2

1. 2 : 3   2. 3 की उपसारणिक $=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 8 & 9\end{vmatrix}$, 6 की उपसारणिक $=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 9\end{vmatrix}$ एवं 5 की उपसारणिक $=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 8\end{vmatrix}$.

7. 0   8. सारणिक का चिह्न बदल जाएगा।   10. $2a^3b^3c^3$ 11. 4   14. –8   15. 3

विविध प्रश्नमाला–4

1. (ख)   2. (घ)   3. (ग)   4. (ग)   5. (ग)   6. (ख)   7. (घ)
8. (क)   9. (ग)   10. (घ)   11. 5   12. –676   13. $1+a+b+c$

15. 1, –3   21. $0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right)}$

❑