

प्रादर्श प्रश्न—

Model Question Paper— गणित

HIGHER MATHEMATICS
(Hindi and English Versions)

Time— 3 घंटे

Maximum Marks—100

निर्देश—

- (1) सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
- (2) प्रश्नों पर आधारित अंक उनके सम्मुख दर्शाए गए हैं।
- (3) प्रश्न पत्र में दो खण्ड अ एवं ब दिए गए हैं।
- (4) खण्ड अ में दिए गए प्रश्न क्र. 1 से 5 तक वस्तुनिष्ठ प्रश्न हैं।
- (5) खण्ड ब में प्रश्न क्र. 6 से 21 में आंतरिक विकल्प दिए गए हैं।

Instructions

- (1) All questions are compulsory to solve.
- (2) Marks have been indicated against each question
- (3) There are two sections 'A' and 'B' are given in the question paper.
- (4) In section A question No. 1 to 5 are of objective type questions.
- (5) Internal options are given in question No. 6 to 21 of Section-B

खण्ड—अ वस्तुनिष्ठ प्रश्न (Objective Type Questions)

प्रश्न—1 प्रत्येक वस्तुनिष्ठ प्रश्न में दिए गए विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए—

(5 × 1 अंक)

(i) $\frac{1}{(x+4)(x+6)}$ के आंशिक भिन्न होगी—

(a) $\frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$

(b) $-\frac{1}{5(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$

(c) $\frac{1}{3(x+4)} + \frac{5}{2(x+6)}$

(d) $\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+6}$

(ii) $2 \tan^{-1} x$ का मान है—

(a) $\tan^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$

(b) $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$

(d) $\tan^{-1} \frac{1+x^2}{2x}$

(d) $\tan^{-1} \frac{1-x^2}{2x}$

(iii) बिन्दु (2, 1, 4) की y अक्ष से दूरी होगी—

(a) $\sqrt{20}$

(b) 1

- (c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{10}$
- (iv) समतल $2x - y + 2z + 1 = 0$ की मूल बिन्दु से दूरी होगी—
- (a) 1 (b) $\frac{1}{3}$
- (c) 3 (d) $\sqrt{3}$
- (v) \vec{A} और \vec{B} के स्थिति सदिश क्रमशः $2\hat{i} - 9\hat{j} - 4\hat{k}$ और $6\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}$ है। $|\overline{AB}|$ का परिणाम है—
- (a) 11 (b) 12
- (c) 13 (d) 14

Choose and Write the correct answer from the given options provided in every objective type question

- (i) Partial fraction of $\frac{1}{(x+4)(x+6)}$ is—
- (a) $\frac{1}{2(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$ (b) $-\frac{1}{5(x+4)} - \frac{1}{2(x+6)}$
- (c) $\frac{1}{3(x+4)} + \frac{5}{2(x+6)}$ (d) $\frac{2}{x+4} - \frac{1}{x+6}$
- (ii) The value of $2 \tan^{-1} x$ is —
- (a) $\tan^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ (b) $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$
- (c) $\tan^{-1} \frac{1+x^2}{2x}$ (d) $\tan^{-1} \frac{1-x^2}{2x}$
- (iii) Distance of the points (2, 1, 4) from y axis is—
- (a) $\sqrt{20}$ (b) 1
- (c) $\sqrt{12}$ (d) $\sqrt{10}$
- (iv) Distance from origin to plane $2x - y + 2z + 1 = 0$ is—
- (a) 1 (b) $\frac{1}{3}$
- (c) 3 (d) $\sqrt{3}$
- (v) The position vectors of vector \vec{A} and \vec{B} are $2\hat{i} - 9\hat{j} - 4\hat{k}$ and $6\hat{i} - 3\hat{j} + 8\hat{k}$ respectively then the magnitude of $|\overline{AB}|$ is—
- (a) 11 (b) 12
- (c) 13 (d) 14

प्रश्न-2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य कथन छाँटकर अपनी उत्तरपुस्तिका में लिखिए। (5 × 1 अंक)

- $\int \frac{\log x}{x} dx$ का मान $\frac{1}{2} (\log x)^2 + c$ है।
- गोले का $|\hat{r} - (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})| = 5$ केन्द्र (2, -1, 1) है।
- सह-संबंध r तथा समाश्रयण गुणाकों b_{xy} तथा b_{yx} में संबंध $r = b_{xy} \cdot b_{yx}$ होता है।
- त्रिभुज की तीनों मधिकाओं द्वारा निर्धारित सदियों का योग शून्य होता है।
- दो चरों के मध्य सह-संबंध गुणांक सदैव $r \leq 1$ सन्तुष्ट करता है।

Write True / False in the following statements

- The value of $\int \frac{\log x}{x} dx$ is $\frac{1}{2} (\log x)^2 + c$
- The centre of the sphere $|\hat{r} - (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})| = 5$ is (2, -1, 1)
- The relation between correlation coefficient r and the regression coefficient b_{xy} and b_{yx} is $r = b_{xy} \cdot b_{yx}$
- The vector's sum of the median of triangle directed from the vertex is zero.
- The co-relation coefficient of two variables always satisfied the relation $r \leq 1$.

प्रश्न-3. सही जोड़ी बनाइए।

(5 × 1 अंक)

खण्ड-अ

खण्ड-ब

(i) $\int \frac{dx}{\tan x + \cot x}$

(a) $3 \sin^2 x \cos x$

(ii) $\frac{d}{dx} (\tan x)$

(b) $\cot^2 x$

(iii) यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

(c) $\frac{17}{7}$

तथा $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

तो $\vec{a} \cdot \vec{b}$ का मान

(iv) $0.4396E05 + 0.3512E02$ का मान

(d) $-\frac{\cos 2x}{4}$

(v) मूल बिन्दु से समतल $3x - 2y + 6z = 17$ की दूरी

(e) $0.1251E08$

(f) 0

(g) $\sec^2 x$

Make the correct pairs

Section-A

Section-B

(i) $\int \frac{dx}{\tan x + \cot x}$

(a) $3 \sin^2 x \cos x$

(ii) $\frac{d}{dx} (\tan x)$

(b) $\cot^2 x$

(iii) If $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

(c) $\frac{17}{7}$

and $\vec{b} = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

then value of $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(iv) Value of $0.4396E05 + 0.3512E02$

(d) $-\frac{\cos 2x}{4}$

(v) The length of perpendicular from the origin to the plane $3x - 2y + 6z = 17$

(e) $0.1251E08$

(f) 0

(g) $\sec^2 x$

प्रश्न-4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

(5 × 1 अंक)

(i) कोई फलन $f(x)$ बिन्दु x , पर उच्चिष्ठ है तो $f''(x)$ का मान होगा।

(ii) न्यूटन रेफसन विधि से 10 का घनमूल प्रथम पुनरावृत्ति पश्चात् होगा।

(iii) यदि $e^0 = 1$, $e^1 = 2.72$, $e^2 = 7.39$ तो समलम्ब चतुर्भुज नियम से $\int_0^3 e^x dx$ ।

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ का मान है।

(v) बिन्दु \vec{a} से हो कर जाने वाले तथा \vec{x} पर लम्बवत् समतल का समीकरण है।

Fill in the Blanks—

(i) If any function $f(x)$ is maxima at x , then value of $f''(x)$ is

(ii) Cube root of 10 by Nuwton Raphson's method after first interaction is

(iii) If $e^0 = 1$, $e^1 = 2.72$, $e^2 = 7.39$ then by trapezoidal rule integral $\int_0^3 e^x dx$

(iv) The value $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ is.....

(v) Equation of the plane passing through the point \vec{a} and normal to \vec{x} is

प्रश्न-5. निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर एक शब्द/वाक्य में लिखिए— (5×1 अंक)

(i) सिम्पसन के एक तिहाई नियम का सूत्र लिखिए।

(ii) yz-समतल का समीकरण लिखिए।

(iii) $\int \sec x \, dx$ का मान क्या होगा।

(iv) a^x का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक लिखिए।

(v) $0.65731E05 + 0.58918E05 = \dots\dots\dots$

Write the answer of each question in one word / sentence of the following—

(i) Write the formula of Simpsons' one third rule.

(ii) What is the equation of yz-plane

(iii) What is the value of $\int \sec x \, dx$

(iv) Write differential coefficient of a^x with respect to x

(v) $0.65731E05 + 0.58918E05 = \dots\dots\dots$

खण्ड-ब (Section-B)

अतिलघु उत्तरीय प्रश्न (Very Short Answer Type Questions)

प्रश्न-6. भिन्न $\frac{2x-3}{(x-1)(x^2+1)^2}$ को आंशिक भिन्न में व्यक्त कीजिए। (4 अंक)

Resolve $\frac{2x-3}{(x-1)(x^2+1)^2}$ into partial fraction

अथवा (or)

भिन्न $\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8}$ को आंशिक भिन्न में विभक्त कीजिए।

Resolve $\frac{x^2+7x}{x^2+2x-8}$ into partial fraction

प्रश्न-7. सिद्ध कीजिए कि— (4 अंक)

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{5}{13} + \sin^{-1} \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$$

Prove that—

$$\sin^{-1} \frac{4}{5} + \sin^{-1} \frac{5}{13} + \sin^{-1} \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$$

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए—

$$\sin^{-1} \sqrt{x} + \sin^{-1} \sqrt{x-1} = \frac{\pi}{2}$$

Prove that—

$$\sin^{-1} \sqrt{x} + \sin^{-1} \sqrt{x-1} = \frac{\pi}{2}$$

प्रश्न-8. यदि $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $(1-x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$ (4 अंक)

If $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ then prove that $(1-x^2) \frac{dy}{dx} + y = 0$

अथवा (or)

यदि $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि—

$$(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \cos x$$

If $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \dots \infty}}}$, then prove that

$$(2y - 1) \frac{dy}{dx} = \cos x$$

प्रश्न-9. $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ का अकवल गुणांक ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

Find the differential coefficient of $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

अथवा (or)

यदि $y = \log \sqrt{\frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx}}$ हो तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

If $y = \log \sqrt{\frac{1 - \cos mx}{1 + \cos mx}}$, then find the value of $\frac{dy}{dx}$

प्रश्न-10. एक वृत्तीय प्लेट की त्रिज्या 0.2 सेमी प्रति सेकेण्ड की दर से बढ़ रही है। जब त्रिज्या 10 सेमी हो तो प्लेट के क्षेत्रफल परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

The radius of a circular plate is increasing at the rate of 0.2 cm per second. At what rate is the area increasing, when the radius of plate is 10 cm.

अथवा (or)

फलन $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ की अन्तराल $[1, 3]$ में रोले प्रमेय की जाँच कीजिए।

Verify Rolle's theorem for the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ in the interval $[1, 3]$

प्रश्न-11. निम्नलिखित आँकड़ों से x तथा y के मध्य सह-संबंध गुणांक की गणना कीजिए। (4 अंक)

x	5	9	13	17	21
y	12	20	25	33	35

Calculate the coefficient of correlation between x and y on the basis of the following data when x and y are

x	5	9	13	17	21
y	12	20	25	33	35

अथवा (or)

यदि $\text{cov}(x, y) = -2.25$, $\text{var}(x) = 6.25$, $\text{var}(y) = 20.25$ हो, तो सह-संबंध गुणांक $\rho(x, y)$ ज्ञात कीजिए तथा सह-संबंधी की प्रकृति भी बताइए।

If $\text{cov}(x, y) = -2.25$, $\text{var}(x) = 6.25$, $\text{var}(y) = 20.25$ then find the coefficient of correlation $\rho(x, y)$ and also describe the nature of correlation.

प्रश्न-12. यदि दो समाश्रयण रेखाओं के बीच का कोण θ है, समाश्रयण गुणांक $b_{yx} = 1.6$ तथा $b_{xy} = 0.4$ तो $\tan \theta$ का मान ज्ञात कीजिए। (4 अंक)

If the angle between two regression lines of θ , regression coefficient $b_{yx} = 1.6$ and $b_{xy} = 0.4$, then calculate the value of $\tan \theta$

अथवा (or)

दो चर राशियों x और y के मध्य सह-संबंध गुणांक ρ है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{(x-y)}^2}{2\sigma_x\sigma_y} \text{ जहाँ } \sigma_x^2, \sigma_y^2 \text{ तथा } \sigma_{(x-y)}^2 \text{ क्रमशः } x, y \text{ और } (x-y) \text{ के प्रसारण गुणांक हैं।}$$

If the correlation coefficient between two variables x and y is ρ , then show

$$\text{that } \rho = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{(x-y)}^2}{2\sigma_x\sigma_y} \text{ where } \sigma_x^2, \sigma_y^2 \text{ and } \sigma_{(x-y)}^2 \text{ the variance of } x, y \text{ and } (x-y) \text{ respectively.}$$

लघु उत्तरीय प्रश्न (Short Answer Type Questions)

प्रश्न-13. 52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी में से 2 यादृच्छया निकाले जाते हैं, दोनों लाल या दोनों इक्के होने की क्या प्रायिकता है? (5 अंक)

Two cards are drawn at random from a well shuffled pack of 52 cards, what is the probability that either both are red or both are aces?

अथवा (or)

दो पासों की एक फेंक में योग 9 या 11 प्राप्त न करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
In the single through of two dice what is the probability of not obtaining a total of 9 and 11.

प्रश्न-14. बिन्दु $(-1, 3, 2)$ से गुजरने वाले उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतल $x + 2y + 2z = 5$ तथा $3x + 3y + 2z = 8$ पर लम्बा है। (5 अंक)

Find the equation of the plane which passes through the point $(1, 3, 2)$ and perpendicular to the planes $x + 2y - 3z = 5$ and $3x + 3y + 2z = 8$

अथवा (or)

एक चर समतल मूल बिन्दु से P दूरी पर रहता है तथा अक्षों को A, B और C बिन्दुओं पर काटता है। सिद्ध कीजिए कि चतुष्फलक OABC के केन्द्रक का बिन्दु पथ

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{16}{p^2} \text{ है}$$

A variable plane is at a constant distance P from a origin and meet the axis at points A, B and C. Show that the locus of the centroid of tetrahedron

$$\text{OABC is } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{16}{p^2}$$

प्रश्न-15. सदिश विधि से सिद्ध कीजिए कि- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ (5 अंक)

Prove by vector method- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए कि-

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

Prove that—

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

प्रश्न-16. यदि $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ (5 अंक)

If $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, then prove that $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

अथवा (or)

निम्नलिखित फलन की $x = 0$ पर सांतत्य की विवेचना कीजिए-

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$$

Discuss the continuity of the following at $x = 0$ —

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ; x = 0 \end{cases}$$

प्रश्न—17. निम्न का मान ज्ञात कीजिए—

(5 अंक)

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$$

Evaluate the following—

$$\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$$

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए— $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{1 + \sqrt{\tan x}} dx = \frac{\pi}{4}$

Prove that— $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\tan x}}{1 + \sqrt{\tan x}} dx = \frac{\pi}{4}$

प्रश्न—18. वक्र $x^2 = 4y$ तथा रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
Find the area bounded by the curve $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$.

(5 अंक)

अथवा (or)

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए—

$$\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$$

Evaluate the following—

प्रश्न—19. निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए—

(5 अंक)

$$x + y \frac{dy}{dx} = 2y$$

Solve the following differential equation—

$$x + y \frac{dy}{dx} = 2y$$

अथवा (or)

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए—

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

Solve the following differential equation—

$$(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + 2xy - 4x^2 = 0$$

प्रश्न-20. उन रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए जिनकी दिक्-कोज्याएँ निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निर्धारित हैं— (6 अंक)

$$2l + 2n - m = 0 \text{ एवं } ml + mn + nl = 0$$

Find the angle between those lines, where direction cosines are recognised by the following equation—

$$2l + 2n - m = 0 \text{ and } ml + mn + nl = 0$$

अथवा (or)

सिद्ध कीजिए कि रेखाएँ $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ तथा $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$ समतलीय हैं। इनका प्रतिच्छेद बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Prove that the lines $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3}$ and $\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-3}{4}$ are coplaner.

Also find the point of intersection of these lines

प्रश्न-21. उन रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए, जिनकी सदिश समीकरण है— (6 अंक)

$$\vec{r} = (1 + 2\lambda) \hat{i} + (2 + 3\lambda) \hat{j} + (3 + 4\lambda) \hat{k}$$

$$\vec{r} = (2 + 3\mu) \hat{i} + (3 + 4\mu) \hat{j} + (4 + 5\mu) \hat{k}$$

Find the shortest distance between the two lines, whose vector equations are—

$$\vec{r} = (1 + 2\lambda) \hat{i} + (2 + 3\lambda) \hat{j} + (3 + 4\lambda) \hat{k}$$

$$\vec{r} = (2 + 3\mu) \hat{i} + (3 + 4\mu) \hat{j} + (4 + 5\mu) \hat{k}$$

अथवा (or)

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(0, -2, -4)$ तथा $(2, -1, -1)$ से गुजरता है तथा जिसका केन्द्र रेखा $5y + 2z = 0 = 2x - 3y$ पर स्थित है।

Find the equation of the sphere which passes through points $(0, -2, -4)$ and $(2, -1, -1)$ and $5y + 2z = 0 = 2x - y$.