

SET-A

उच्च गणित

(Higher Mathematics)
(Hindi & English Version)

समय : 3 घण्टे

अधिकतम अंक : 100

Time : 3 Hours

Maximum Marks: 100

निर्देश—

1. सभी प्रश्न हल करना अनिवार्य है।
2. प्रश्नों में दिये गये निर्देशों सावधानीपूर्वक पढ़कर सही उत्तर लिखिए।
3. प्रत्येक प्रश्न के निर्धारित अंक प्रश्न के सम्मुख दिये गये हैं।
4. प्रश्न क्र. 01 से 05 तक वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न दिये गये हैं।
5. प्रश्न क्र. 6 से 24 में आन्तरिक विकल्प दिये गये हैं।
6. जहाँ आवश्यक हो, स्वच्छ नामांकित रेखाचित्र बनाइये।

Note:

1. All question are compulaory.
2. Read the given instruction of Question paper carefully and write Correct answer of them.
3. Alloted marks are Indicated infront of each question.
4. Question No. 01 to 05 are objective type questions.
5. Internal options are given in question. No. 06 to 24
6. Draw the neat and clean latelled diagram if necessary.

1. सही विकल्प चुनकर अपनी उत्तर-पुस्तिका में लिखिए—

1 × 5 = 5 अंक

(a) भिन्न $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ का आंशिक भिन्न हैं :

(i) $\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)}$ (ii) $\frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}$

(iii) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ (iv) $\frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$

(b) $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ का मान होगा :

(i) $-\frac{3\pi}{4}$ (ii) $\frac{3\pi}{4}$

(iii) $\frac{\pi}{4}$ (iv) $\frac{\pi}{2}$

(c) बिन्दु (4, 3, 5) की xz समतल से लम्बवत् दूरी है :

(i) 4 (ii) 3

(iii) 5 (iv) $5\sqrt{2}$

(d) समतल $x + y + z + 3 = 0$ के अभिलंब की दिक्कोज्याएँ है :

(i) 1, 1, 1 (ii) $\pm 1, \pm 1, \pm 1$

$$(iii) \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (iv) 1, 1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(e) गोले $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 16x + 9z - 6 = 0$ के केन्द्र के निर्देशांक है :

$$(i) \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{4}{3}\right) \quad (ii) (-16, 0, 9)$$

$$(iii) \left(-8, 0, \frac{9}{2}\right) \quad (iv) \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{-3}{4}\right)$$

choose the correct answer and write in note book-

(a) Partial fractions of $\frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$ are

$$(i) \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)} \quad (ii) \frac{1}{(x-2)} - \frac{1}{(x-1)}$$

$$(iii) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \quad (iv) \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

(b) Value of $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} - 3 \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ is

$$(i) -\frac{3\pi}{4} \quad (ii) \frac{3\pi}{4}$$

$$(iii) \frac{\pi}{4} \quad (iv) \frac{\pi}{2}$$

(c) Perpendicular distance of point (4, 3, 5) from xz - plane is

$$(i) 4 \quad (ii) 3$$

$$(iii) 5 \quad (iv) 5\sqrt{2}$$

(d) Direction cosine of normal to the plane are :

$$(i) 1, 1, 1 \quad (ii) \pm 1, \pm 1, \pm 1$$

$$(iii) \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (iv) 1, 1, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(e) Coordinates of centre of sphere $6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 16x + 9z - 6 = 0$ are

$$(i) \left(\frac{3}{4}, 0, \frac{4}{3}\right) \quad (ii) (-16, 0, 9)$$

$$(iii) \left(-8, 0, \frac{9}{2}\right) \quad (iv) \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{-3}{4}\right)$$

2. निम्नलिखित कथनों में सत्य/असत्य लिखिए—

1 × 5 = 5 अंक

- (a) शीर्ष (1, 2, 3), (1, 0, 3), (0, 2, 0) वाले त्रिभुज के केन्द्रक के निर्देशांक (1, 4/3, 2) हैं।
(b) यदि बिन्दुओं P और Q के स्थिति सदिश क्रमशः $i+3j-7k$ और $5i-2j+4k$ हो तो $|PQ|$ का मान $9\sqrt{2}$ होगा।
(c) $\sin x + \cos x$ का महत्तम मान 2 होगा।
(d) यदि $\sum x = 15$, $\sum y = 40$, $\sum xy = 110$ तथा $n = 5$ तब x और y के बीच सह-प्रसरण -2 होगा

- (e) समाश्रयण गुणांकों का समान्तर माध्य सह गुणांक से बड़ा होता है।
Write true/ false in the following statements.
- (a) $(1, 4/3, 2)$ is the coordinate of centroid of triangle whose vertices are $(1, 2, 3)$ $(1, 0, 3)$ $(0, 2, 0)$.
- (b) Position vectors of point p & Q are $\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ and $5\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ respectively then value of $|PQ|$ is $9\sqrt{2}$
- (c) Maximum value of $\sin x + \cos x$ is 2
- (d) If $\sum x = 15$, $\sum y = 40$, $\sum xy = 110$ and $n = 5$ then covariance between x and y is -2
- (e) The arithmetic mean of the regression coefficients is greater than the coefficient of co-relation.

3. प्रत्येक का एक वाक्य में उत्तर दीजिए : **1 × 5 = 5** अंक

- (a) यदि $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ और $\theta = 60^\circ$ हो, तो $|\vec{a} \times \vec{b}|$ का मान क्या होगा ?
- (b) $\cos x^2$ का x के सापेक्ष अवकलन गुणांक क्या होगा?
- (c) शून्य का समाकलन क्या होगा ?
- (d) दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ तथा $\vec{r} = \vec{c} + \mu \vec{d}$ के लम्बवत् होने का प्रतिबन्ध क्या होगा ?
- (e) किसी फलन के मूल ज्ञात करने के लिए समलम्ब चतुर्भुजीय नियम का सूत्र लिखिए।

Give the answer in one sentence:

- (a) If $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 5$ and $\theta = 60^\circ$ then what will be the value of $|\vec{a} \times \vec{b}|$
- (b) What is differential coefficient of $\cos x^2$ with respect to x .
- (c) What will be the Integration of zero ?
- (d) What will be the condition for perpendicularity of two lines $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ and $\vec{r} = \vec{c} + \mu \vec{d}$
- (e) Write formula to find roots of a function by Trapezoidal rule.

4. सही जोड़ी बनाइए : **1 × 5 = 5** अंक

स्तम्भ "अ"

स्तम्भ "ब"

(a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ (i) $\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

(b) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ (ii) $\log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$

(c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$ (iii) $\frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}, x > a$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$ (iv) $\frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}, x < a$

(e) $\int \sec x dx$ (v) $\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$

Match the Columns -

Column 'A'

Column 'B'

(a) $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx$ (i) $\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

$$(b) \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx \quad (ii) \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$(c) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \quad (iii) \frac{1}{2a} \log \frac{x-a}{x+a}, x > a$$

$$(d) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx \quad (iv) \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}, x < a$$

$$(e) \int \sec x dx \quad (v) \log (x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

5. खाली स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1 × 5 = 5 अंक

(a) e^x का n वाँ अवकलज है।

(b) $\int_a^b f(x) dx$ के लिए सिम्पसन नियम है।

(c) प्रसिद्ध पुस्तक "वैदिक गणित" के लेखक का पूरा नाम..... है।

(d) न्यूटन रैफसन विधि से वर्गमूल ज्ञात करने का सूत्र है।

(e) यदि $x_0 = 3.5, f(x_0) = 0.25, f'(x_0) = 7$, हो तो न्यूटन-रैफसन विधि से x_1 का मान है।
fill in the blanks -

(A) n^{th} derivative of e^x is

(B) Simpson's rule for $\int_a^b f(x) dx$ is.....

(C) The full name of the writer of famous book "Vedic mathematics" is

(D) By newton raphson method the formula is for finding the square root of a.

(E) If $x_0 = 3.5, f(x_0) = 0.25, f'(x_0) = 7$ then by Newton Raphson method the value of x_1 is.....

6. उस गोले का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(2, -3, 4)$ तथा त्रिज्या

5 है ?

2 अंक

Find the vector and cartesian equation of the sphere whose centre $(2, -3, 4)$ and radius is 5 ?

अथवा / OR

उस गोले का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोले $|\vec{r} + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})| = 5$ के संकेन्द्री है और जो इससे दो गुनी त्रिज्या का है।

Find the vector equation of the sphere concentric with the sphere $|\vec{r} + (\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k})| = 5$ and its radius is two times of that sphere ?

7. यदि $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $\vec{c} = \hat{j} + \hat{k}$ तब $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ का मान ज्ञात कीजिए ?

2 अंक

If $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{j} + \hat{k}$ then find the value of $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$?

अथवा / OR

सिद्ध कीजिए कि-

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

Prove that –

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$$

8. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}$ तथा $\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ हो तो $[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$ मान ज्ञात कीजिए। 2 अंक

If $\vec{a} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}$ and $\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ then find the value of $[\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}]$

अथवा / OR

दो सदिशों $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ का अदिश गुणनफल ज्ञात कीजिए।

find the scalar product of two vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$?

9. $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अंक

Evaluate $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x \, dx$

अथवा / OR

$\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$

10. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 2 अंक

Evaluate $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} \, dx$

अथवा / OR

सिद्ध कीजिए $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx = \frac{\pi}{4}$

Prove that $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \, dx = \frac{\pi}{4}$

11. $\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x+1)}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए। 4 अंक

Resolve $\frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x+1)}$ Into partial fractions.

अथवा / OR

$\frac{2x^2 + 5x - 11}{x^2 + 2x - 3}$ को आंशिक भिन्नों में विभक्त कीजिए।

Resolve $\frac{2x^2 + 5x - 11}{x^2 + 2x - 3}$ Into partial fractions.

12. यदि $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 = 1$

If $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{\pi}{2}$ then prove that $x^2 + y^2 = 1$

अथवा / **OR**

समीकरण $\tan^{-1}x + 2 \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$ को हल कीजिए।

Solve the equation $\tan^{-1}x + 2 \cot^{-1}x = \frac{2\pi}{3}$

13. यदि $x^y = e^{x-y}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि—

4 अंक

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1 + \log_e x)^2}$$

If $x^y = e^{x-y}$ then prove that -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(1 + \log_e x)^2}$$

अथवा / **OR**

यदि $\log_e(xy) = x^2 + y^2$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि—

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2 - 1)}{x(1 - 2y^2)}$$

If $\log_e(xy) = x^2 + y^2$ then prove that -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^2 - 1)}{x(1 - 2y^2)}$$

14. यदि $y = \sin(2\sin^{-1}x)$ हो तो सिद्ध करो कि :

4 अंक

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

If $y = \sin(2\sin^{-1}x)$ then prove that

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

अथवा / **OR**

यदि $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ हो, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिये।

If $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ then find $\frac{dy}{dx}$.

15. एक वृत्त की त्रिज्या 2 से.मी. प्रति सेकण्ड की एक समान दर से बढ़ रही है। वृत्त के क्षेत्रफल में वृद्धि किस दर से होगी जबकि उसकी त्रिज्या 8 सेमी. है।

4 अंक

The radius of a circle is increasing at the rate of 2 cm/sec. At what rate is the area increasing when the radius is 8 cm.

अथवा / **OR**

यदि लाभ फलन $P(x) = 41 + 24x - 18x^2$ है, तो कम्पनी द्वारा प्राप्त किया गया उच्चिष्ठ लाभ ज्ञात कीजिए।

If the profit function is $P(x) = 41 + 24x - 18x^2$ then calculate the maximum profit of the company.

16. दो चर राशियों x तथा y के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक r हो तो सिद्ध कीजिए कि –

4 अंक

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

जहाँ σ_x^2, σ_y^2 तथा σ_{x-y}^2 क्रमशः x, y तथा $(x - y)$ के विचरण गुणांक हैं।

If r is the coefficient of correlation between two variables x and y then prove that :

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

where σ_x^2, σ_y^2 and σ_{x-y}^2 are variable of x, y and $(x - y)$ respectively.

अथवा / **OR**

निम्नलिखित आँकड़ों से सह-सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए :

x 2 3 5 7 3

y 15 17 4 5 4

Calculate coefficient of correlation from the following data

x 2 3 5 7 3

y 15 17 4 5 4

17. निम्नलिखित आँकड़ों से y का मान ज्ञात कीजिए जबकि $x = 70$ तथा सहसम्बन्ध गुणांक 0.8 है ?

4 अंक

	x	y
माध्य	18	100
माध्य विचलन	14	20

Find the value of y from following data, when $x = 70$ and coefficient of correlation is 0.8.

अथवा / **OR**

यदि समाश्रयण रेखाओं के मध्य कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि,

$$\tan \theta = \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \left| \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \right|$$

If θ be the angle between the regression line, then prove that

$$\tan \theta = \frac{\sigma_x \cdot \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \left| \frac{\rho^2 - 1}{\rho} \right|$$

18. समतलों $x + 3y + 6 = 0$ तथा $3x - y - 4z = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाने वाले समतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी मूल बिन्दु से दूरी 1 है

5 अंक

Find the equation of planes passing through the intersection of the planes $x + 3y + 6z = 0$ and $3x - y - 4z = 0$ whose distance from origin is 1.

अथवा / **OR**

समतलों $3x - 4y + 12z = 26$ एवं $2x - y + 2z + 3 = 0$ के बीच न्यून कोण समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the plane bisecting the acute angle between the planes $3x - 4y + 12z = 26$ and $2x - y + 2z + 3 = 0$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ecx - \cot x}{x}$ का मान ज्ञात कीजिए ? 5 अंक

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ecx - \cot x}{x}$

अथवा / **OR**

$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ की $x = 0$ पर सातत्य की जाँच कीजिए ?

If $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$ than test the continuity at $x = 0$

20. मान ज्ञात कीजिए— 5 अंक

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$$

Evaluate-

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$$

अथवा / **OR**

दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ के मध्य परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?

Find the area inclosed between the curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ and straight line $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

21. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$ की हल कीजिए। 5 अंक

Solve the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+3}$$

अथवा / **OR**

अवकल समीकरण $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1}y - x)dy$ को हल कीजिये?

Solve the differential equation $(1 + y^2) dx = (\tan^{-1}y - x)dy$

22. 52 पत्तों की फेंटी हुई ताश की गड्डी में से 2 पत्ते निकाले जाते हैं। दोनों के लाल या इक्के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए ? **5 अंक**
Two cards are drawn from a well shuffled pack of 52 cards, find the probability that both cards are red or ace.

अथवा / **OR**

एक पाँसा दो बार उछाला जाता है प्रत्येक उछाल में सम संख्या आने पर सफलता मानी जाती है। सफलताओं का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

A dice is thrown twice in throw getting even number is taken success, find the probability distribution of the success.

23. उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$ और $(1, -3, 0)$ से होकर जाता है तथा जिसका केन्द्र समतल $x + y + z = 0$ पर स्थित है। **6 अंक**
Find the equation of the sphere which passes through the points $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$ and $(1, -3, 0)$ whose centre lies on the plane $x + y + z = 0$.

अथवा / **OR**

दो बिन्दु $A(1, 3, 4)$ तथा $B(1, -2, -1)$ हैं। एक बिन्दु P इस प्रकार गति करता है कि $3PA = 2PB$ बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि वह एक गोला है।

There are two points $A(1, 3, 4)$ and $B(1, -2, -1)$. A point p moves Such that $3PA = 2PB$ find the locus of P and prove that it is a sphere.

24. सदिश विधि से उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $A(3, 4, -5)$ तथा $B(-2, 1, 4)$ से समदूरस्थ है। **6 अंक**
By using vector method find the locus of a point which is equidistant from the points $A(3, 4, -5)$ and $B(-2, 1, 4)$

अथवा / **OR**

सदिश विधि से सिद्ध कीजिए—

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Prove by vector method

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$