पाठ 6

गुणज और गुणनखण्ड

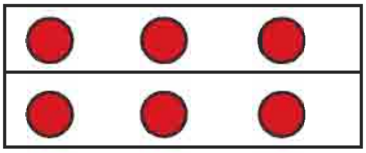
आइए सीखें-

- किसी संख्या के गुणज और गुणनखण्ड निकालना।
- अभाज्य संख्याओं को समझना तथा 100 तक की अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करना।
- किसी संख्या 2, 3, 4, 5, 9, 10 व 11 से विभाज्यता के नियम जानना।
- विभाज्यता के नियमों का प्रयोग कर सकना तथा जाँच करना।

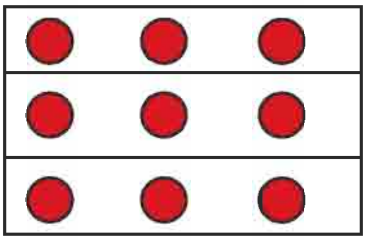
हमने गुणा एवं भाग संबंधी प्रश्न हल किए हैं। गुणा की सहायता से पहाड़ा भी हम बनाना जानते हैं। अब हम गुणज एवं गुणनखण्ड के बारे में सीखेंगे।

गुणज

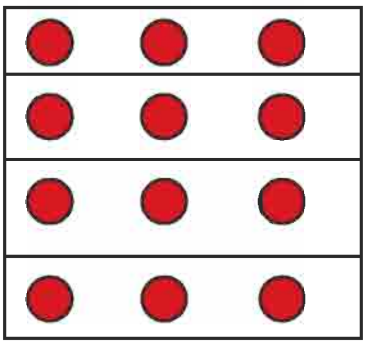
3 या तीन में एक से गुणा करने पर **3×1=3**



3+3 या तीन में दो से गुणा करने पर **3×2=6**



3+3+3 या तीन में तीन से गुणा करने पर **3×3=9**



3+3+3+3 या तीन में चार से गुणा करने पर **3×4=12**

ऊपर के उदाहरण में 3 को 1,2,3,4 से गुणा करने पर 3, 6, 9,12 प्राप्त होता है। 3, 6, 9, 12.... संख्या 3 के गुणज कहलाते हैं। गुणज को अपवर्त्य भी कहते हैं।

इसी प्रकार से

4 के गुणज 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 आदि।

5 के गुणज 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.. आदि।

7 के गुणज 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, ... आदि

किसी संख्या के गुणजों का कोई अंत नहीं होता है।

अभ्यास 6.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के अगले तीन गुणज लिखिए।

(1) 8, 16, 24, 32, ..., ..., ...

(2) 10, 20, 30, 40, ..., ..., ...

(3) 6, 12, 18, 24, ... , ..., ...

2. निम्नलिखित संख्याओं के प्रथम पाँच गुणज लिखिए।

(1) 12 (2) 5 (3) 7 (4) 9

(5) 10 (6) 11 (7) 13 (8) 15

(9) 20 (10) 14

3. जाँच कीजिए कि क्या :

(1) 3 का गुणज 18 है? (2) 9 का गुणज 27 है?

(3) 5 का गुणज 110 है? (4) 7 का गुणज 57 है?

(5) 4 का गुणज 37 है?

4. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(1) $5 \times 7 = 35$ यहाँ 5 तथा 7 का गुणज 35 है।

(2) $9 \times 6 = 54$ यहाँ 9 तथा 6 का गुणज .... है।

(3) $12 \times 3 = 36$ यहाँ 12 तथा 3 का गुणज ....है।

(4) $6 \times 8 \times 2=96$ यहाँ 6, ... तथा ... का गुणज ... है।

(5) $10 \times 2 \times 5 = 100$ यहाँ ..., ... तथा ... का गुणज 100 है।

निम्न तालिका को देखिए। इसमें 1 से 10 तक की संख्याओं के प्रथम 10 गुणज दिए गए हैं।

संख्या	गुणज									
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

ऊपर दी गई तालिका को देखकर निम्नलिखित के उत्तर दीजिए।

(अ) क्या 3 गुणज है 3 का? (ब) क्या 7 गुणज है 7 का?

(स) क्या 8 गुणज है 8 का? (द) क्या 10 गुणज है 10 का?

प्रत्येक संख्या स्वयं का गुणज होती है।

तालिका देखकर बताइए।

(अ) क्या 1 का गुणज 2 है? (ब) क्या 1 का गुणज 4 है?

(स) क्या 1 का गुणज 7 है? (द) क्या 1 का गुणज 10 है?

प्रत्येक संख्या 1 का गुणज होती है।

$$\begin{array}{r} 9 \\ 2\overline{)18} \\ -\ 18 \\ \hline 00 \end{array}$$

भाग के किसी प्रश्न में शेषफल शून्य (0) भी हो सकता है और नहीं भी हो सकता है।
यहाँ 2, संख्या 18 को पूरा-पूरा विभाजित करती है। अतः, हम कहते हैं कि 2, संख्या 18 का गुणनखण्ड है।

$$\begin{array}{r} 7 \\ 3\overline{)21} \\ -\ 21 \\ \hline 00 \end{array}$$

यहाँ 3, संख्या 21 को पूरा-पूरा विभाजित करती है। अतः 3, संख्या 21 का गुणनखण्ड है।

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4\overline{)22} \\ -\ 20 \\ \hline 2 \end{array}$$

यहाँ 4, संख्या 22 को पूरा-पूरा विभाजित नहीं करती है। अतः 4, संख्या 22 का गुणनखण्ड नहीं है।

$$\begin{array}{r} 8 \\ 10\overline{)84} \\ -\ 80 \\ \hline 4 \end{array}$$

यहाँ 10, संख्या 84 को पूरा-पूरा विभाजित नहीं करती है। अतः 10, संख्या 84 का गुणनखण्ड नहीं है।

अब हम संख्या 15 को 1, 3, 5 तथा 15 से विभाजित करते हैं।

$$\begin{array}{r} 5 \\ 3\overline{)15} \\ -\ 15 \\ \hline 00 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ 1\overline{)15} \\ -\ 1 \\ \hline 05 \\ -\ 5 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ 5\overline{)15} \\ -\ 15 \\ \hline 00 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 15\overline{)15} \\ -\ 15 \\ \hline 00 \\ \hline \end{array}$$

उपर्युक्त उदाहरण में हम देखते हैं कि 3 तथा 5 दोनों 15 के गुणनखण्ड हैं क्योंकि $3 \times 5 = 15$

1 तथा 15 भी 15 के गुणनखण्ड हैं क्योंकि $1 \times 15 = 15$

अतः 1, 3, 5 तथा 15 में से प्रत्येक 15 का गुणनखण्ड है।

जब हम दो संख्याओं का गुणा करते हैं, तो हमें एक गुणनफल प्राप्त होता है। उन संख्याओं में से प्रत्येक संख्या गुणनफल का गुणनखण्ड होती है।

इसी तरह से

$3 \times 4 \times 5 = 60$ अतः, 3, 4 तथा 5 में से प्रत्येक 60 का गुणनखण्ड है।

$2 \times 3 \times 4 = 24$ अतः 2, 3, तथा 4 में से प्रत्येक 24 का गुणनखण्ड है।

दो या अधिक संख्याओं का गुणा करने पर गुणनफल प्राप्त होता है। इस प्राप्त गुणनफल में वे सभी संख्याएँ, जिनका गुणा किया जाता है, गुणनखण्ड कहलाती है।

गुणनखण्डों से संबंधित कुछ तथ्य

- 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखण्ड होता है।
- कोई भी संख्या स्वयं का गुणनखण्ड होती है।
- 1 किसी संख्या का सबसे छोटा गुणनखण्ड होता है।
- किसी संख्या का सबसे बड़ा गुणनखण्ड स्वयं संख्या होती है।
- प्रत्येक संख्या (1 को छोड़कर) के कम-से-कम दो गुणनखण्ड होते हैं। 1 और स्वयं वह संख्या।

अभ्यास 6.2

1. निम्नलिखित खाली स्थान भरिए।

(1) $3 \times 6 = 18$, 3 और 6, ... है 18 के।

(2) $7 \times 8 = 56$, ... और .... गुणनखण्ड है 56 के।

(3) $10 \times 4 = 40$, ... और .... गुणनखण्ड है 40 के।

(4) $6 \times 9 = 54$, ... और .... गुणनखण्ड है 54 के।

2. ज्ञात कीजिए निम्नलिखित में कौन-कौन सी संख्याएँ 18 के गुणनखण्ड हैं।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

3. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक संख्या के दो गुणनखण्ड लिखिए।

(1) 20 (2) 48 (3) 72 (4) 45

(5) 30 (6) 100

4. निम्नलिखित संख्याओं में प्रत्येक के सभी गुणनखण्ड लिखिए।

(1) 9 (2) 7 (3) 21 (4) 25

(5) 13 (6) 40

अभाज्य संख्याएँ

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ... में किसी संख्या का भाग देकर देखते हैं कि, किस-किस संख्या का पूरा-पूरा भाग जाता है?

संख्या 2 विभाज्य है, 1 व 2 से

संख्या 3 विभाज्य है, 1 व 3 से

संख्या 4 विभाज्य है, 1, 2, व 4 से

संख्या 5 विभाज्य है, 1 व 5 से

संख्या 6 विभाज्य है, 1, 2, 3, व 6 से

इनमें से संख्या 2, 3, 5 अभाज्य संख्याएँ हैं क्योंकि ये एक तथा स्वयं के अतिरिक्त किसी अन्य से पूर्णतः विभाजित नहीं होती हैं।

अर्थात् इनके केवल दो गुणनखण्ड हैं। इस प्रकार की संख्याओं को अभाज्य संख्याएँ कहते हैं।

1 से 100 तक अभाज्य संख्याओं के लिए सारणी

1	11	~~21~~	31	41	~~51~~	61	71	~~81~~	~~91~~
2	~~12~~	~~22~~	~~32~~	~~42~~	~~52~~	~~62~~	~~72~~	~~82~~	~~92~~
3	13	23	~~33~~	43	53	~~63~~	73	83	~~93~~
~~4~~	~~14~~	~~24~~	~~34~~	~~44~~	~~54~~	~~64~~	~~74~~	~~84~~	~~94~~
5	~~15~~	~~25~~	~~35~~	~~45~~	~~55~~	~~65~~	~~75~~	~~85~~	~~95~~
~~6~~	~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~	~~66~~	~~76~~	~~86~~	~~96~~
7	17	~~27~~	37	47	~~57~~	67	~~77~~	~~87~~	97
~~8~~	~~18~~	~~28~~	~~38~~	~~48~~	~~58~~	~~68~~	~~78~~	~~88~~	~~98~~
~~9~~	19	29	~~39~~	~~49~~	59	~~69~~	79	89	~~99~~
~~10~~	~~20~~	~~30~~	~~40~~	~~50~~	~~60~~	~~70~~	~~80~~	~~90~~	~~100~~

यह पता लगाना है कि 100 तक कौन-कौन सी अभाज्य संख्याएँ होती हैं? एक सरल तरीका ऊपर दर्शाया गया है। इसे देखिए और समझिए

1 अभाज्य संख्या नहीं है।

2 अभाज्य संख्या है। इस पर गोला लगाइए और उन सभी संख्याओं को काट दीजिए, जिनमें 2 का भाग पूरी-पूरी बार जाए।

3 अभाज्य संख्या है। इस पर गोला लगाइए और उन सभी संख्याओं को काट दीजिए, जिनमें 3 का भाग पूरी-पूरी बार चला जाता है।

आगे बिना कटी संख्या 5 है, यह अभाज्य संख्या है।

5 पर गोला लगाइए और 5 से विभाजित होने वाली सभी संख्याओं को काट दीजिए।

इसके बाद बिना कटी संख्या 7 है, यह अभाज्य संख्या है। 7 पर गोला लगाइए और 7 से विभाजित होने वाली सभी संख्याएँ काट दीजिए।

इसके आगे जो संख्या नहीं कटी है उस पर गोला लगाइए व इससे विभाजित संख्या काटिए। इस क्रिया को (गोला लगाते हुए) तब तक कीजिए जब तक 100 तक की संख्याओं तक न पहुँच जाएँ।

गोला लगी सभी संख्याओं को पढ़िए। ये सभी अभाज्य संख्याएँ हैं।

देखिए

1. सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए जो 8 से बड़ी हो।

   8 से बड़ी अभाज्य संख्याएँ 11, 13, 17, 19, 23,... इनमें सबसे छोटी 11 है।

2. सबसे बड़ी अभाज्य संख्या लिखिए जो 18 से छोटी हो।

   18 से छोटी अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 है।

   इनमें सबसे बड़ी 17 है।

अभ्यास 6.3

1. सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए।
2. 17 से बड़ी किन्तु सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए।
3. 13 से छोटी परन्तु सबसे बड़ी अभाज्य संख्या लिखिए।

4. 20 से छोटी उन अभाज्य संख्याओं के जोड़े लिखिए जिनका अन्तर 2 हो।

5. ऐसी 50 से छोटी अभाज्य संख्याओं के जोड़े लिखिए जिनका अन्तर 1 हो।

6. 30 और 40 के बीच की अभाज्य संख्याएँ लिखिए।

7. 50 से छोटी अभाज्य संख्याएँ लिखिए।

8. एक अंक की सभी भाज्य संख्याओं को छाँटिए।

विभाज्यता की जाँच

हमें कभी-कभी बड़ी संख्याओं की विभाज्यता देखनी पड़ती है। बिना भाग की क्रिया किए हुए हम यह जान सकते हैं कि दी हुई संख्या 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11 आदि से विभाज्य है या नहीं। विभिन्न संख्याओं द्वारा विभाज्यता की जाँच हेतु नियम।

2 से विभाज्यता

जिस संख्या में इकाई का अंक 0, 2, 4, 6, व 8 हो, वह संख्या 2 से विभाज्य होती है।

जैसे हम संख्या 2328 को लेते हैं।

हल : 2328 को विस्तार से लिखने पर,

$$2328 = (2 \times 1000) + (3 \times 100) + (2 \times 10) + 8$$

चूंकि संख्या 1000, 100 और 10, 2 से पूर्णतः विभाजित है तथा 8 भी 2 से पूर्णतः विभाजित है।

2328 भी 2 से पूर्णतः विभाजित होगी।

जो संख्याएँ 2 से विभाजित हो जाती हैं। उनका इकाई अंक $\boxed{0,2,4,6,8}$ होता है।

3 से विभाज्यता

संख्याओं 24, 327, 1215 व 3023 को 3 से भाग कीजिए। हम पाते हैं, कि 24, 327 व 1215 संख्याएँ 3 से विभाजित हो जाती हैं। अब इनके अंकों को जोड़ते हैं।

	संख्या	अंकों का योग
1.	24	2+4=6
2.	327	3+2+7=12

3.	1215	1+2+1+5=9
4.	3023	3+0+2+3=8

उपरोक्त उदाहरण में 24, 327 और 1215 के अंकों का योग 3 से पूर्णतः विभाजित हो जाता है। 3023 के अंकों का योग 8 है जो कि 3 से विभाजित नहीं है। अतः 3023 भी 3 से विभाजित नहीं है। इस प्रकार यदि किसी संख्या के सभी अंकों का योग 3 से पूरा-पूरा विभाजित हो जाए तो वह संख्या भी 3 से पूरी तरह विभाजित हो जाती है।

4 से विभाज्यता

जिस संख्या के दाईं ओर के दो अंकों (दहाई और इकाई के अंकों) से बनी संख्या 4 से विभाजित हो जाती है वह संख्या भी 4 से पूरी तरह विभाजित हो जाएगी।

जैसे संख्या 3456 लें।

हल : 3456 को विस्तार से लिखने पर

$$3456 = (3 \times 1000) + (4 \times 100) + 56$$

यहाँ इकाई एवं दहाई के अंकों से बनी संख्या 56 चार से पूर्णतः विभाजित हो जाती है। अतः संख्या 3456 भी चार से पूर्णतः विभाजित होती है।

5 से विभाज्यता

हम जानते हैं कि]

$5 \times 1 = 5$	$5 \times 6 = 30$	$5 \times 2 = 10$	$5 \times 7 = 35$
$5 \times 3 = 15$	$5 \times 8 = 40$	$5 \times 4 = 20$	$5 \times 9 = 45$
$5 \times 5 = 25$	$5 \times 10 = 50$		

उपरोक्त सारणी में 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50 सभी 5 से विभाजित हो जाती हैं। इन संख्याओं के इकाई अंक 0 व 5 हैं।

अतः हम कह सकते हैं कि,

किसी भी संख्या का इकाई का अंक शून्य (0) या पाँच (5) हो तो वह 5 से विभाज्य होगी।

9 से विभाज्यता

नीचे लिखी 9 से विभाजित होने वाली संख्याएँ देखिए।

संख्या	अंकों का योग
18	$1 + 8 = 9$
36	$3 + 6 = 9$
171	$1 + 7 + 1 = 9$
234	$2 + 3 + 4 = 9$

हम देखते हैं कि 18, 36, 171, 234 आदि के अंकों का योग 9 आता है।

यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित हो जाता है तो वह संख्या 9 से विभाजित हो जाएगी।

3 और 9 के विभाज्यता की एक और विधि

3 और 9 के विभाज्यता की एक सरलतम विधि दी गई संख्या का बीजांक ज्ञात करके विभाज्यता का पता कर सकते हैं।

अब हम यहाँ पर बीजांक क्या है इसकी जानकारी प्राप्त करते हैं। हम जानते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 एवं 9, ये सभी मूल अंक हैं। इन्हें ही हम बीजांक भी कहते हैं।

किसी दी गई संख्या का बीजांक ज्ञात करने के लिए हम उस संख्या के अंकों का योग एक अंक प्राप्त होने तक नीचे दिए गए तरीके से करते हैं।

उदाहरण 10, 24, 143, 78 के बीजांक ज्ञात करना।

हल :

10 का बीजांक $\Rightarrow 1 + 0 \Rightarrow 1$

24 का बीजांक $\Rightarrow 2 + 4 \Rightarrow 6$

143 का बीजांक $\Rightarrow 1 + 4 + 3 \Rightarrow 8$

78 का बीजांक $\Rightarrow 7 + 8 \Rightarrow 15$ का बीजांक $\Rightarrow 1 + 5 \Rightarrow 6$

उदाहरण 8967 का बीजांक ज्ञात करना।

8967 का बीजांक $\Rightarrow 8 + 9 + 6 + 7 = 30 \Rightarrow 3 + 0 = 3$

3 की विभाज्यता जिन संख्याओं का बीजांक 3, 6 या 9 हो, वह संख्या 3 से विभाजित होगी।

9 की विभाज्यता जिन संख्याओं का बीजांक 9 हो, वह संख्या 9 से विभाजित होगी।

10 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0 हो तो वह 10 से विभाज्य होगी।

जैसे : संख्याएँ	इकाई का अंक	10 से विभाज्य है या नहीं
100	0	10 से विभाज्य है।
117	7	10 से विभाज्य नहीं है।

भाग करके हम पता कर सकते हैं, कि 100 में 10 का पूरा-पूरा भाग जाता है परंतु 117 में नहीं जाता।

11 से विभाज्यता

यदि किसी संख्या के विषम और सम स्थानों पर आने वाले अंकों के योगफल का अंतर शून्य (0) या 11 से विभाज्य है, तो वह संख्या 11 से विभाज्य होगी।

जैसे : संख्याएँ	विषम स्थानों के अंकों का योग	सम स्थानों के अंकों का योग	अंतर
176	$6 + 1 = 7$	7	$7 - 7 = 0$
429	$9 + 4 = 13$	2	$13 - 2 = 11$
2365	$6 + 2 = 8$	$5 + 3 = 8$	$8 - 8 = 0$

अतः इनमें से प्रत्येक संख्या 11 से विभाज्य है।

अभ्यास 6.4

विभाज्यता के नियमों का प्रयोग करते हुए बताइए।

(1) कौन-कौनसी संख्याएँ 2 से विभाजित हैं?
122, 613, 5900, 525, 1210, 730

(2) कौन-कौनसी संख्याएँ 3 से विभाजित हैं?
39, 73, 435, 735, 130, 7821

(3) कौन-कौनसी संख्याएँ 4 से विभाजित हैं?
81, 318, 5724, 8322, 6422

(4) कौन-कौनसी संख्याएँ 9 से विभाजित हैं?
63, 70, 315, 1341, 117

(5) कौन-कौनसी संख्याएँ 11 से विभाजित हैं?
11, 123, 121, 2365

(6) कौन-कौनसी संख्याएँ 5 से विभाजित हैं?
5, 53, 105, 1000, 1285, 1830