

पाठ 4

भिन्नात्मक संख्याएँ एवं उन पर संक्रियाएँ

आइए सीखें

- भिन्न की अवधारणा का पुनरावलोकन
- भिन्नों को घटते एवं बढ़ते क्रम में लिखना
- भिन्नों को सरलतम रूप में लिखना।
- भिन्नों को जोड़ना एवं घटाना
- एक भिन्न में दूसरी भिन्न का गुणा करना तथा एक भिन्न में दूसरी भिन्न का भाग देना।
- भिन्नों से संबंधित दैनिक व्यवहार के प्रश्नों को हल करना।

इस अध्याय में हम पिछली कक्षा में सीखी गई भिन्नात्मक संख्याओं से सम्बन्धित बातों को दोहराएंगे और उनका व्यावहारिक उपयोग सीखेंगे। हम जानते हैं कि-

- यदि किसी वस्तु के दो बराबर भाग किए जाएं तो प्रत्येक भाग को आधा भाग कहते हैं (आकृति

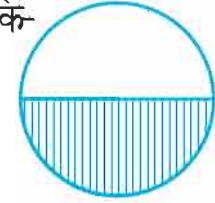
4.1)। आधे भाग को $\frac{1}{2}$ लिखते हैं तथा 'एक बटे दो' पढ़ते हैं।

- यदि किसी वस्तु के तीन बराबर भाग किए जाएं तो प्रत्येक भाग को एक तिहाई भाग कहते हैं।

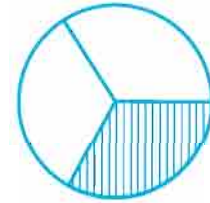
(आकृति 4.2) एक तिहाई भाग को $\frac{1}{3}$ लिखते हैं तथा 'एक बटे तीन' पढ़ते हैं।

- यदि किसी वस्तु के चार बराबर भाग किए जाएं तो एक भाग को एक चौथाई भाग कहते हैं

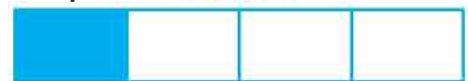
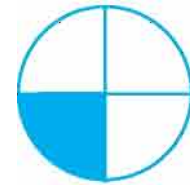
(आकृति 4.3)। एक चौथाई भाग को $\frac{1}{4}$ लिखते हैं तथा 'एक बटे चार' पढ़ते हैं।



आकृति 4.1

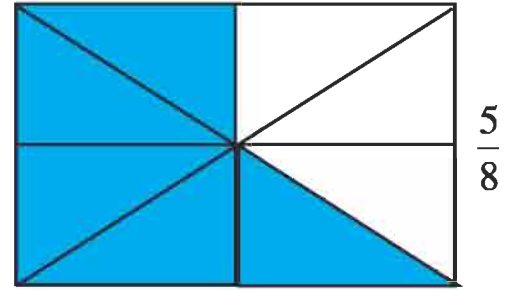


आकृति 4.2



आकृति 4.3

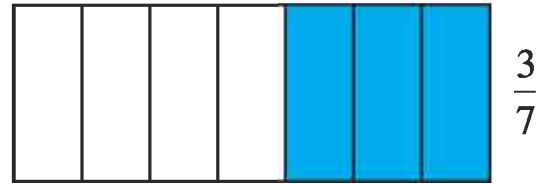
- किसी वस्तु को समान भागों में बांटने के पश्चात् इसके निश्चित भागों को दर्शाने वाली संख्या को भिन्न कहते हैं। जितने समान भागों में बांटा गया है, उसे भिन्न का हर कहते हैं और (-) बटे की रेखा के नीचे लिखते हैं। इन समान भागों में से जितने भाग लिए गए हैं उसे भिन्न का अंश कहते हैं और बटे की रेखा (-)के ऊपर लिखते हैं।



आकृति 4.4

उदाहरण के लिए साथ के चित्र में एक आकृति 4.4 को आठ (8) समान भागों में बांटा गया है और 5 भागों को छायांकित किया गया है। आकृति के छायांकित भाग को भिन्न $\frac{5}{8}$ से दर्शाया जाता है।

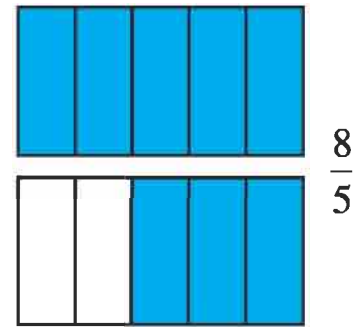
- यदि किसी भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है तो इस प्रकार की भिन्न को सम भिन्न कहते हैं। उदाहरणतः आकृति 4.5 में $\frac{3}{7}$ सम भिन्न है।



आकृति 4.5

- यदि किसी भिन्न में अंश, हर से बड़ा या बराबर होता है तो इस प्रकार की भिन्न को विषम भिन्न कहते हैं। उदाहरण के लिए आकृति

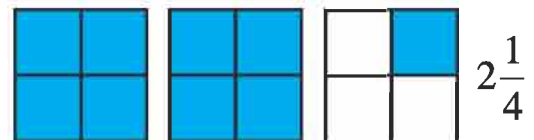
4.6 में $\frac{8}{5}$ विषम भिन्न है।



आकृति 4.6

- यदि किसी भिन्न में अंश और हर के साथ पूर्णांक (पूरा अंक) लिखा होता है तो इस प्रकार की भिन्न को मिश्र भिन्न कहते हैं।

आकृति 4.7 में दर्शाई गई भिन्न $2\frac{1}{4}$ मिश्र भिन्न है।



आकृति 4.7

- जिन भिन्नों में अंश, हर से छोटे होते हैं वे एक से छोटी होती है।
- जिन भिन्नों में अंश, हर के बराबर होते हैं वे एक के बराबर होती है।
- जिन भिन्नों में अंश, हर से बड़े होते हैं वे एक से बड़ी होती है।
- प्रत्येक मिश्र भिन्न के तुल्य एक विषम भिन्न और प्रत्येक विषम भिन्न के तुल्य एक मिश्र भिन्न लिखी जा सकती है।

सजातीय व विजातीय भिन्न

नीचे दिए गए भिन्नों के दो समूहों पर विचार करेंगे।

$$(1) \frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{12}{7} \quad (2) \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{15}{8}$$

हम देखते हैं कि पहले समूह की भिन्नों के हर समान हैं जबकि दूसरे समूह की भिन्नों के हर असमान हैं। इस प्रकार-

- समान हर वाली भिन्नों को सजातीय भिन्न कहते हैं।
- असमान हर वाली भिन्नों को विजातीय भिन्न कहते हैं।

अतः उपर्युक्त (1) में दी गई भिन्नें सजातीय हैं तथा

(2) में दी गई भिन्नें विजातीय हैं।

मिश्र भिन्न को विषम भिन्न में बदलना

हम जानते हैं कि प्रत्येक मिश्र भिन्न को एक तुल्य विषम भिन्न में बदला जा सकता है।

आइए मिश्र भिन्न $2\frac{4}{9}$ को विषम भिन्न में बदल कर देखते हैं। $2\frac{4}{9}$ एक मिश्र भिन्न है।

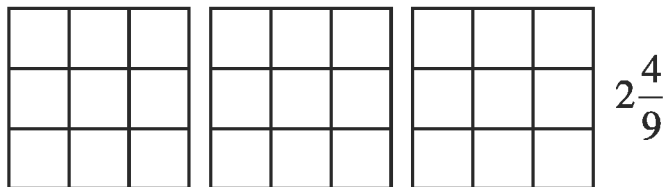
इसे विषम भिन्न में बदलने के लिए पहले 9 में 2 का गुणा करते हैं।

$$9 \times 2 = 18$$

अब इस गुणनफल में 4 को जोड़ते हैं।

$$18 + 4 = 22$$

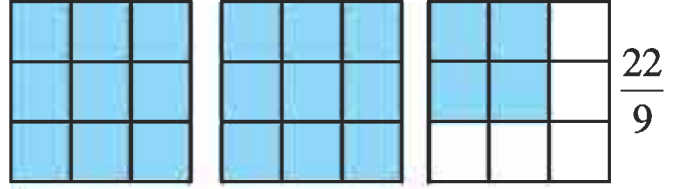
22, अंश हुआ।



इस प्रकार भिन्न बन जाती है $\frac{22}{9}$

यह एक विषम भिन्न है।

अब नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए



● $1\frac{3}{5}$ को विषम भिन्न में बदलिए



● $4\frac{2}{5}$ को विषम भिन्न में बदलिए



विषम भिन्न को मिश्र भिन्न में बदलना

हम जानते हैं कि प्रत्येक विषम भिन्न को एक तुल्य मिश्र भिन्न में बदला जा सकता है।

आइए विषम भिन्न $\frac{13}{3}$ को मिश्र भिन्न में बदलते हैं। $\frac{13}{3}$ एक विषम भिन्न है। इसे मिश्र भिन्न में बदलने के लिए 13 को 3 से भाग देने पर,


$$\begin{array}{r} 4 \\ 3 \overline{)13} \\ \underline{12} \\ 1 \end{array}$$


भागफल = 4 और शेषफल=1 है। $\frac{13}{3}$ में 4

पूर्णांश तथा $\frac{1}{3}$ भिन्न है। अतः $\frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

इस प्रकार हमने देखा कि विषम भिन्न $\frac{13}{3}$ के तुल्य एक मिश्र भिन्न $4\frac{1}{3}$ लिखी जा सकती है।

निम्नलिखित विषम भिन्न को मिश्र भिन्न में बदलिए

● $\frac{9}{2}$ 

● $\frac{7}{5}$ 

अभ्यास 4.1

1. निम्नलिखित प्रश्नों के चार विकल्प दिए गए हैं, उनमें से सही विकल्प चुनकर लिखिए

(1) भिन्न $\frac{11}{7}$ है

(अ) सम भिन्न

(ब) विषम भिन्न

(स) मिश्र भिन्न

(द) इनमें से कोई नहीं।

(2) भिन्न $2\frac{3}{4}$ है

(अ) सम भिन्न

(ब) विषम भिन्न

(स) मिश्र भिन्न

(द) इनमें से कोई नहीं।

(3) भिन्न $\frac{8}{9}$ है

(अ) सम भिन्न

(ब) विषम भिन्न

(स) मिश्र भिन्न

(द) इनमें से कोई नहीं।

(4) मिश्र भिन्न $1\frac{3}{5}$ का मान है

(अ) $\frac{3}{5}$

(ब) $\frac{8}{5}$

(स) $\frac{4}{5}$

(द) $\frac{9}{5}$

(5) विषम भिन्न $\frac{9}{7}$ का मान है

(अ) $\frac{7}{9}$

(ब) $\frac{16}{7}$

(स) $1\frac{2}{7}$

(द) $\frac{7}{16}$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

(1) यदि किसी भिन्न में अंश, हर से छोटा होता है, तो इस प्रकार की भिन्न को भिन्न कहते हैं।

(2) यदि किसी भिन्न में अंश, हर से बड़ा या बराबर होता है, तो इस प्रकार की भिन्न को भिन्न कहते हैं।

(3) यदि किसी भिन्न में अंश और हर के साथ पूर्णांक लिखा होता है, तो इस प्रकार

के भिन्न को भिन्न कहते हैं।

(4) समान हर वाली भिन्नों को भिन्न कहते हैं।

(5) असमान हर वाली भिन्नों को भिन्न कहते हैं।

3. निम्नलिखित भिन्नों में से सम भिन्न, विषम भिन्न तथा मिश्र भिन्न छाँटिए

$$\frac{10}{9}, 3\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{4}, 1\frac{1}{2}, 5\frac{5}{9}, \frac{2}{10}$$

4. मिश्र भिन्न को विषम भिन्न में बदलिए

(1) $7\frac{1}{2}$

(2) $8\frac{3}{4}$

(3) $1\frac{1}{7}$

(4) $3\frac{5}{8}$

(5) $4\frac{4}{7}$

(6) $5\frac{3}{8}$

5. विषम भिन्न को मिश्र भिन्न में बदलिए

(1) $\frac{24}{7}$

(2) $\frac{18}{5}$

(3) $\frac{7}{2}$

(4) $\frac{15}{4}$

(5) $\frac{18}{7}$

(6) $\frac{20}{3}$

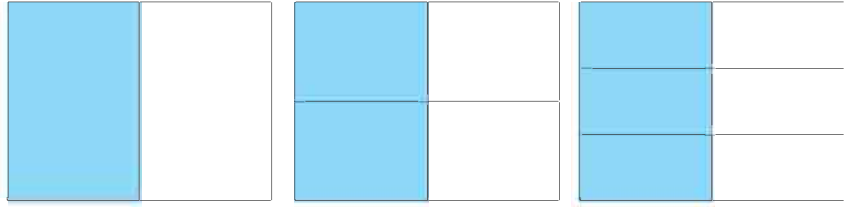
तुल्य (समतुल्य) भिन्न

हम जानते हैं कि $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ इत्यादि। अतः भिन्न $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ और $\frac{4}{8}$ इत्यादि तुल्य भिन्न हैं। इनको हम इस प्रकार समझ सकते हैं

$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$
$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि 'किसी दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न उसके अंश और हर में एक ही संख्या (0 के अतिरिक्त) से गुणा करके, ज्ञात की जा सकती है।'

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{4}{8}$$



$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{4}$$

$$\frac{4}{8}$$

इसी प्रकार

$$\frac{2}{4} = \frac{2 \div 2}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{3 \div 3}{6 \div 3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{8} = \frac{4 \div 4}{8 \div 4} = \frac{1}{2}$$

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि किसी दी हुई भिन्न की तुल्य भिन्न, उसके अंश और हर को उनके उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (1 के अतिरिक्त) यदि कोई हो, से भाग देकर भी ज्ञात की जा सकती है।

अर्थात् किसी दी गई भिन्न की तुल्य भिन्न को निम्नलिखित तरीके से प्राप्त किया जा सकता है

- भिन्न के अंश और हर को एक ही शून्येत्तर संख्या से गुणा करके अथवा भिन्न के अंश और हर को उनके उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (1 के अतिरिक्त) यदि कोई हो, से भाग देकर।

उदाहरण 1. के स्थान पर सही संख्या लिखिए।

$$\frac{15}{35} = \frac{\square}{7}$$

हल : यहाँ हम हर को देखते हैं। 35 तथा 7 हर हैं।

चूँकि $35 \div 7 = 5$, अतः हम भिन्न $\frac{15}{35}$ के अंश और हर को 5 से भाग देते हैं।

$$\frac{15}{35} = \frac{15 \div 5}{35 \div 5} = \frac{3}{7}$$

अतः हम के स्थान पर 3 लिखेंगे।

इस प्रकार हम $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 2. $\frac{5}{11}$ की ऐसी तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए जिसका हर 44 हो।

हल : चूँकि $44 = 11 \times 4$ है। अतः हम भिन्न $\frac{5}{11}$ के अंश व हर दोनों को 4 से गुणा करते हैं।

$$\text{इस प्रकार हमें, } \frac{5}{11} = \frac{5 \times 4}{11 \times 4} = \frac{20}{44}$$

अतः अभीष्ट भिन्न $\frac{20}{44}$ है।

आइए, उपर्युक्त उदाहरणों में प्रत्येक में हम पहली भिन्न के अंश को दूसरी तुल्य भिन्न के हर से गुणा करते हैं और पहली भिन्न के हर का दूसरी तुल्य भिन्न के अंश में गुणा करते हैं। इसे वज्र 'गुणा' कहते हैं।

$$\begin{array}{ccc} \text{अंश} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \text{अंश} \\ \hline & = & \hline \text{हर} & \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} & \text{हर} \end{array}$$

तब $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$, हम प्राप्त करते हैं $3 \times 35 = 105$ और $7 \times 15 = 105$

$\frac{5}{11} = \frac{20}{44}$, हम प्राप्त करते हैं $5 \times 44 = 220$ और $11 \times 20 = 220$

हमें क्या पता चलता है?

इससे यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि दो तुल्य भिन्न दी हुई हो तो उनमें पहली भिन्न के अंश और दूसरी भिन्न के हर का गुणनफल, पहली भिन्न के हर और दूसरी भिन्न के अंश के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण 3. क्या दी गई भिन्न तुल्य भिन्न हैं? जाँच कीजिए

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{25}{35}$$

हल : वज्र गुणन द्वारा हम प्राप्त करते हैं,

$$\frac{5}{7} \times \frac{25}{35}$$

$$5 \times 35 = 175, 7 \times 25 = 175$$

क्योंकि दोनों गुणनफल समान है, अतः दी गई भिन्नें तुल्य भिन्न हैं।

$$\text{अतः } \frac{5}{7} = \frac{25}{35}$$

अभ्यास 4.2

1. निम्नलिखित प्रश्नों के चार विकल्प दिए गए हैं, सही विकल्प चुनकर लिखिए

(1) किसी दी गई भिन्न की तुल्य भिन्न ज्ञात की जाती है

(अ) भिन्न के अंश में गुणा करके।

(ब) भिन्न के हर में गुणा करके।

(स) भिन्न के अंश एवं हर में एक ही संख्या जोड़कर।

(द) भिन्न के अंश एवं हर में एक ही संख्या से गुणा करके अथवा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देकर।

(2) भिन्न $\frac{3}{5}$ की तुल्य भिन्न है

(अ) $\frac{5}{3}$ (ब) $\frac{3}{3}$ (स) $\frac{5}{5}$ (द) $\frac{6}{10}$

(3) भिन्न $\frac{7}{4}$ की तुल्य भिन्न है

(अ) $\frac{4}{4}$ (ब) $\frac{21}{12}$ (स) $\frac{7}{7}$ (द) $\frac{4}{7}$

(4) भिन्न $\frac{18}{12}$ की तुल्य भिन्न है

(अ) $\frac{12}{18}$ (ब) $\frac{2}{3}$ (स) $\frac{3}{2}$ (द) $\frac{30}{12}$

(5) भिन्न $\frac{5}{20}$ की तुल्य भिन्न हैं

(अ) $\frac{1}{4}$ (ब) $\frac{4}{1}$ (स) $\frac{20}{5}$ (द) $\frac{25}{20}$

2. के स्थान पर सही संख्या लिखिए

(1) $\frac{2}{7} = \frac{8}{\square}$ (2) $\frac{5}{8} = \frac{10}{\square}$ (3) $\frac{3}{5} = \frac{\square}{20}$

(4) $\frac{4}{9} = \frac{\square}{27}$ (5) $\frac{6}{11} = \frac{\square}{44}$ (6) $\frac{1}{8} = \frac{8}{\square}$

3. $\frac{3}{5}$ की ऐसी तुल्य भिन्न ज्ञात कीजिए, जिसका

- (1) हर 20 हो (2) अंश 9 हो।
(3) हर 30 हो। (4) अंश 27 हो।

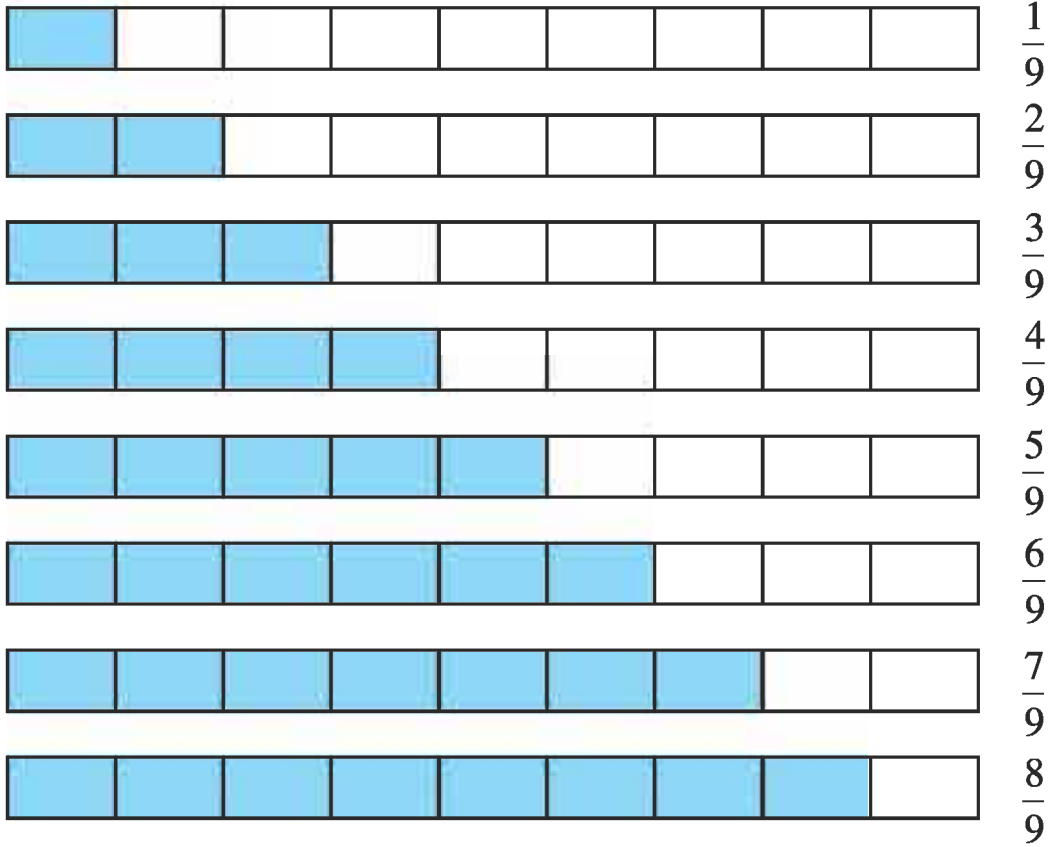
4. क्या दी गई भिन्न तुल्य है? जाँच कीजिए

(1) $\frac{5}{9}, \frac{30}{54}$ (2) $\frac{2}{7}, \frac{16}{42}$ (3) $\frac{7}{13}, \frac{5}{11}$

(4) $\frac{4}{11}, \frac{32}{88}$ (5) $\frac{3}{10}, \frac{12}{50}$ (6) $\frac{9}{27}, \frac{25}{75}$

भिन्नों को घटते एवं बढ़ते क्रम में लिखना

नीचे दिये गये छायांकित भाग को ध्यान से देखिए

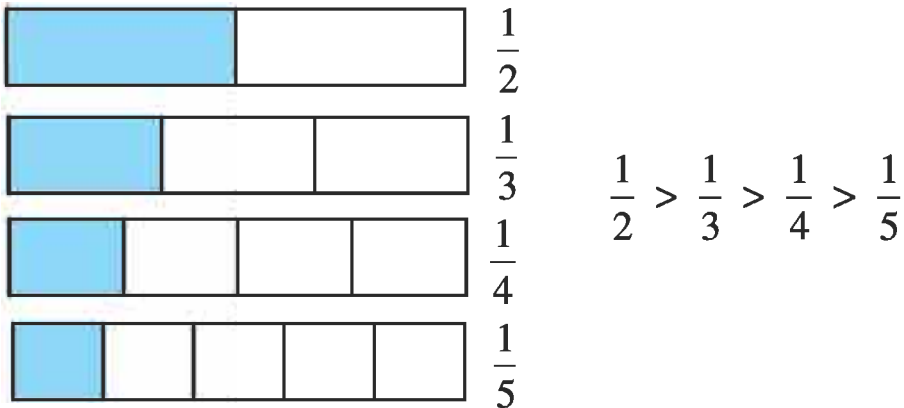


ऊपर दिए गये छायांकित भागों की तुलना करने पर पता चलता है कि

$$\frac{1}{9} < \frac{2}{9} < \frac{3}{9} < \frac{4}{9} < \frac{5}{9} < \frac{6}{9} < \dots < \dots$$

यहाँ चिह्न ' $<$ ' छोटा है के लिए प्रयोग किया गया है।

छायांकित भागों की तुलना करने पर पता चलता है कि



$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5}$$

उपरोक्त उदाहरणों से हमें ज्ञात होता है कि-

- यदि भिन्नो के हर समान हो तो छोटे अंश वाली भिन्न बड़े अंश वाली भिन्न से छोटी होती है।
- यदि भिन्नो के अंश समान हों तो छोटे हर वाली भिन्न बड़े हर वाली भिन्न से बड़ी होती है।

विजातीय भिन्नो की तुलना (जिनके अंश असमान हो)

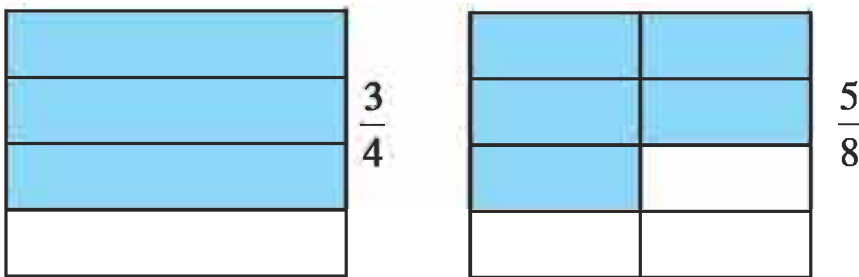
हम यह जानते हैं कि समान हर वाली भिन्नो की तुलना कैसे की जाती है। उदाहरण के लिए

$$\frac{3}{7} > \frac{2}{7}, \frac{7}{8} > \frac{5}{8}, \frac{4}{5} < \frac{5}{5}, \frac{5}{10} < \frac{6}{10}$$

अर्थात् सजातीय भिन्नो में बड़े अंश वाली भिन्न बड़ी होती है। हम यह भी जानते हैं कि समान अंश वाली भिन्नो की तुलना कैसे की जाती है। जैसे

$$\frac{1}{3} > \frac{1}{4}, \frac{4}{7} > \frac{4}{8}, \frac{5}{9} < \frac{5}{6}, \frac{3}{7} < \frac{3}{5}$$

अब क्या हम $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{8}$ की तुलना कर सकते हैं? जिनके न तो अंश समान हैं और न ही हर समान हैं, आइए, इसके लिये हम निम्नांकित छायांकित भाग देखते हैं



छायांकित भागों की तुलना करने पर पता चलता है कि $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$

हमने उपर्युक्त उदाहरण में भिन्नो की तुलना चित्र के माध्यम से की थी। लेकिन यह विधि व्यावहारिक रूप से सरल नहीं है। अब हम बिना चित्रों की सहायता से दो भिन्नो की तुलना करना सीखेंगे।

आइए, भिन्न $\frac{3}{4}$ व $\frac{5}{6}$ की तुलना करें।

इन दोनों भिन्नों में न तो अंश समान है और न ही हर समान है। अतः इनमें तुलना करने के लिये इनको ऐसी समतुल्य भिन्नों में बदल लें, जिनके या तो अंश समान हों या हर समान हों। साधारणतः ऐसी भिन्नों की तुलना करने के लिये इन्हें समान हर वाली समतुल्य भिन्नों में बदलना सुविधाजनक है। हर 4 व 6 के लिये सबसे छोटा समान हर 12 होगा जो कि 4 व 6 का लघुत्तम समापवर्त्य है।

$$\text{अब } \frac{3}{4} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} = \frac{9}{12} \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \times 2}{6 \times 2} = \frac{10}{12}$$

$$\text{चूँकि } \frac{9}{12} < \frac{10}{12} \quad \text{अतः } \frac{3}{4} < \frac{5}{6}$$

इस प्रकार $\frac{3}{4}$ व $\frac{5}{6}$ में से भिन्न $\frac{5}{6}$ बड़ी भिन्न है।

भिन्नों की तुलना करने के लिए दिए गए भिन्नों के हर का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करें। तत्पश्चात् भिन्नों को समान हर वाली भिन्नों में परिवर्तित करें।

उदाहरण 4. $\frac{7}{10}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ को बढ़ते क्रम में लिखिए

हल : इन भिन्नों के हर अथवा अंश समान नहीं हैं। अतः बढ़ते क्रम में रखने के लिए इनको समान हर वाली तुल्य भिन्न में बदलना होगा।

समान हर वाली तुल्य भिन्न में बदलने के लिए 10, 4, 8 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना होगा।

2	10, 4, 8
2	5, 2, 4
2	5, 1, 2
5	5, 1, 1
	1, 1, 1

$$10, 4, 8 \text{ का ल.स.} = 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$\therefore \text{ ल. स.} = 40$$

10, 4, 8 का लघुत्तम समापवर्त्य 40 हुआ। अब दी गई भिन्नों को समान हर वाली समतुल्य भिन्नों में बदलते हैं।

$$\frac{7}{10} = \frac{7 \times 4}{10 \times 4} = \frac{28}{40} \quad \frac{3}{4} = \frac{3 \times 10}{4 \times 10} = \frac{30}{40} \quad \frac{5}{8} = \frac{5 \times 5}{8 \times 5} = \frac{25}{40}$$

$\frac{28}{40}, \frac{30}{40}, \frac{25}{40}$ की तुलना करने पर पता चलता है कि $\frac{25}{40} < \frac{28}{40} < \frac{30}{40}$

अर्थात् $\frac{25}{40}, \frac{28}{40}, \frac{30}{40}$ बढ़ते क्रम में हैं।

अतः $\frac{5}{8} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$ बढ़ते क्रम में हैं।

उदाहरण 5. $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$ को घटते क्रम में लिखिए

हल :

2	3, 4, 8
2	3, 2, 4
2	3, 1, 2
3	3, 1, 1
	1, 1, 1

दी गई भिन्नों $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$ को समान हर 24 वाली तुल्य भिन्नों में बदल लेते हैं।
 $3, 4, 8$ का ल.स. = $2 \times 2 \times 2 \times 3$
 = 24

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 8}{3 \times 8} = \frac{16}{24} \quad \frac{1}{4} = \frac{1 \times 6}{4 \times 6} = \frac{6}{24} \quad \frac{3}{8} = \frac{3 \times 3}{8 \times 3} = \frac{9}{24}$$

तुल्य भिन्नों के अंशों की तुलना करने पर पता चलता है कि,

$\frac{16}{24} > \frac{9}{24} > \frac{6}{24}$ अतः $\frac{2}{3} > \frac{3}{8} > \frac{1}{4}$ अर्थात् $\frac{2}{3}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}$ घटते क्रम में हैं।

भिन्नों को सरलतम रूप में लिखना

हम यह सीख चुके हैं कि किसी दी गई भिन्न की तुल्य भिन्न ज्ञात करने के लिए अंश व हर दोनों को एक ही संख्या से गुणा करते हैं या उनके उभयनिष्ठ गुणनखण्ड से भाग देते हैं।

आइए $\frac{12}{52}$ की सबसे छोटी तुल्य भिन्न ज्ञात करें।

$$\frac{12}{52} = \frac{12 \div 2}{52 \div 2} = \frac{6}{26}$$

(2, अंश 12 व हर 52 का उभयनिष्ठ गुणन-खंड है)

$$\frac{12}{52} = \frac{12 \div 4}{52 \div 4} = \frac{3}{13}$$

(4, अंश 12 व हर 52 का उभयनिष्ठ गुणन-खंड है जो महत्तम समापवर्तक भी है)

हमने देखा $\frac{12}{52}$ को सरल करने पर $\frac{3}{13}$ सबसे छोटी तुल्य भिन्न प्राप्त होती है।

भिन्न $\frac{3}{13}$ को हम भिन्न $\frac{12}{52}$ का सरलतम रूप कहेंगे।

अर्थात् $\frac{12}{52} = \frac{3}{13}$ (सरलतम भिन्न)

भिन्न $\frac{3}{13}$ के अंश और हर की तुलना करने पर हम पाते हैं कि इसका महत्तम समापवर्तक 1 है। अतः हम कह सकते हैं कि कोई भिन्न सरलतम रूप में होगी यदि उसके अंश और हर का महत्तम समापवर्तक 1 है। फलतः किसी भिन्न का सरलतम रूप ज्ञात करने के लिए हमें एक ऐसी तुल्य भिन्न प्राप्त करना होगा जिसके अंश और हर का महत्तम समापवर्तक 1 हो।

उदाहरण 6. भिन्न $\frac{20}{35}$ को सरलतम रूप में लिखिए।

हल : भिन्न $\frac{20}{35}$ में 20 और 35 का महत्तम समापवर्तक 5 है, अर्थात् 20 और

35, 5 से पूरा-पूरा भाज्य है। अतः $\frac{20}{35} = \frac{20 \div 5}{35 \div 5} = \frac{4}{7}$

अतः प्राप्त भिन्न $\frac{4}{7}$ सरलतम रूप में है।

उदाहरण 7. भिन्न $\frac{9}{14}$ को सरलतम रूप में लिखिए।

हल : भिन्न $\frac{9}{14}$ में 9 और 14 का महत्तम समापवर्तक 1 है।

$$\text{अतः } \frac{9}{14} = \frac{9 \div 1}{14 \div 1} = \frac{9}{14}$$

अतः दी गई भिन्न $\frac{9}{14}$ सरलतम रूप में है।

उदाहरण 8. क्या भिन्न $\frac{25}{35}$ सरलतम रूप में है?

हल : चूँकि इसके अंश व हर का महत्तम समापवर्तक 5 है। अतः इसे सरलतम रूप में लाने के लिये अंश एवं हर में 5 का भाग देना होगा।

$$\frac{25}{35} = \frac{25 \div 5}{35 \div 5} = \frac{5}{7}$$

अतः भिन्न $\frac{25}{35}$ का सरलतम रूप $\frac{5}{7}$ है।

अभ्यास 4.3

1. निम्नलिखित प्रश्नों के चार विकल्प दिए गए हैं, सही विकल्प चुनकर लिखिए

(1) $\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ का आरोही क्रम (बढ़ता क्रम)

(अ) $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{5}{6}$

(ब) $\frac{6}{1}, \frac{6}{2}, \frac{6}{5}$

(स) $\frac{2}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$

(द) $\frac{5}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$

(2) $\frac{8}{9}, \frac{3}{9}, \frac{6}{9}$ का अवरोही क्रम है (घटता क्रम)

(अ) $\frac{3}{9}, \frac{6}{9}, \frac{8}{9}$

(ब) $\frac{8}{9}, \frac{3}{9}, \frac{6}{9}$

$$(स) \frac{9}{3}, \frac{9}{6}, \frac{9}{9}$$

$$(द) \frac{8}{9}, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}$$

(3) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ का आरोही क्रम है

$$(अ) \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$$

$$(ब) \frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{8}{1}$$

$$(स) \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

$$(द) \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}$$

(4) $\frac{8}{3}, \frac{8}{7}, \frac{8}{9}$ का अवरोही क्रम है

$$(अ) \frac{8}{3}, \frac{8}{7}, \frac{8}{9}$$

$$(ब) \frac{8}{9}, \frac{8}{7}, \frac{8}{3}$$

$$(स) \frac{3}{8}, \frac{7}{8}, \frac{9}{8}$$

$$(द) \frac{8}{3}, \frac{8}{7}, \frac{8}{9}$$

2. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए

- (1) यदि भिन्नों के हर समान हों तो छोटे अंश वाली भिन्न, बड़े अंश वाली भिन्न से होती है।
- (2) यदि भिन्नों के अंश समान हों तो छोटे हर वाली भिन्न, बड़े हर वाली भिन्न से होती है।
- (3) यदि दो भिन्नों में न तो अंश समान हैं और न ही हर समान हैं, ऐसी भिन्नों की तुलना करने के लिए समान हर अथवा अंश वाली भिन्नों में बदल लेते हैं।
- (4) कोई भिन्न सरलतम रूप में होती है यदि उसके अंश और हर का महत्तम समापवर्तक हो।

3. रिक्त स्थान की पूर्ति "<" (छोटा है) या ">" (बड़ा है) का चिह्न (निशान) लगाकर कीजिए

$$(1) \frac{1}{2} \dots\dots\dots \frac{8}{2}$$

$$(2) \frac{5}{9} \dots\dots\dots \frac{5}{7}$$

$$(3) \frac{7}{9} \dots\dots \frac{2}{9} \quad (4) \frac{1}{10} \dots\dots \frac{7}{10}$$

4. नीचे दी गई भिन्नों को बढ़ते क्रम में लिखिए

$$(1) \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{3} \quad (2) \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5} \quad (3) \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}$$
$$(4) \frac{5}{9}, \frac{7}{9}, \frac{3}{5} \quad (5) \frac{3}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3} \quad (6) \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}$$

5. नीचे दी गई भिन्नों को घटते क्रम में लिखिए

$$(1) \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5} \quad (2) \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5} \quad (3) \frac{5}{6}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}$$
$$(4) \frac{2}{3}, \frac{6}{7}, \frac{5}{6} \quad (5) \frac{5}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{9} \quad (6) \frac{4}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{15}$$

6. निम्नलिखित भिन्नों को आरोही क्रम एवं अवरोही क्रम में लिखिए

$$(1) \frac{7}{9}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{2}{5} \quad (2) \frac{2}{7}, \frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3} \quad (3) \frac{3}{5}, \frac{3}{2}, \frac{3}{7}, \frac{13}{12}$$
$$(4) \frac{5}{7}, \frac{3}{14}, \frac{13}{42}, \frac{17}{21} \quad (5) \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{13}{20}, \frac{7}{10} \quad (6) \frac{5}{6}, \frac{3}{5}, \frac{14}{15}, \frac{30}{30}$$

7. दी गई भिन्नों को सरलतम रूप में लिखिए

$$(1) \frac{15}{20} \quad (2) \frac{16}{36} \quad (3) \frac{18}{39}$$
$$(4) \frac{12}{28} \quad (5) \frac{14}{35} \quad (6) \frac{21}{49}$$

भिन्नात्मक संख्याओं पर संक्रियाएँ

अब हम भिन्न संख्याओं का जोड़, घटाना, गुणा व भाग करना सीखेंगे।

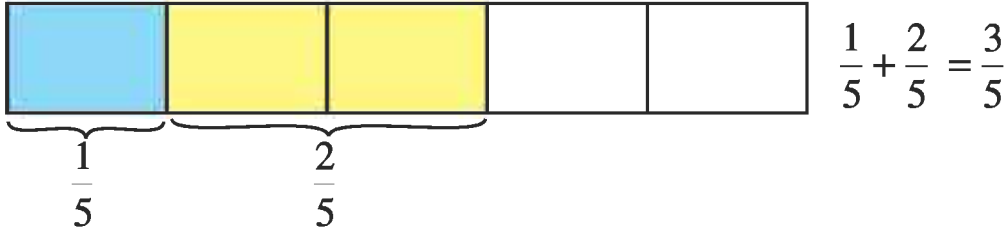
भिन्नों का जोड़

(अ) सजातीय भिन्नों को जोड़ना

उदाहरण 9. $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ को जोड़िए।

हल : $\frac{1}{5}$ और $\frac{2}{5}$ भिन्नों के हर समान हैं।

चित्र के सहायता से भिन्नों को जोड़ने पर,



अतः सजातीय भिन्नों को जोड़ने के लिये भिन्न के अंशों को जोड़कर लिखते हैं तथा हर ज्यों का त्यों लिखते हैं।

उदाहरण 10. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$

(ब) विजातीय भिन्नों को जोड़ना

उदाहरण 11. $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ को जोड़िए।

हल : दोनों भिन्नों में हर समान नहीं है। अतः इन्हें पहले तुल्य भिन्नों में बदलकर सजातीय भिन्न बना लेते हैं।

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15} \quad \frac{1}{5} = \frac{1 \times 3}{5 \times 3} = \frac{3}{15}$$

$$\text{अतः } \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{5+3}{15} = \frac{8}{15}$$

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{5}$ का समान हर 15 आता है, जो 3 और 5 का लघुत्तम समापवर्त्य भी है।

अतः विजातीय भिन्नों को जोड़ने के लिए इन्हें पहले तुल्य भिन्नों में बदलकर सजातीय भिन्न बना लेते हैं। इसके लिए आवश्यक है कि हम पहले दिए गए भिन्नों के हर का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करें।

उदाहरण 12. हल कीजिए $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

हल : 8, 4 और 2 का लघुत्तम समापवर्त्य 8 होता है। $\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ को $\frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{8}$ के रूप में लिख सकते हैं।

$$\text{इस प्रकार } \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{8} = \frac{3+6+4}{8} = \frac{13}{8} = 1\frac{5}{8}$$

(स) मिश्र भिन्नों को जोड़ना

उदाहरण 13. $\frac{3}{8}$, 4 और $\frac{15}{4}$ को जोड़िए।

हल : हम 4 को $\frac{4}{1}$ के रूप में लिख सकते हैं। हमें $\frac{3}{8} + \frac{4}{1} + \frac{15}{4}$ का योग ज्ञात करना है। 8, 1 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य 8 है। अतः हम दी हुई भिन्नों को सजातीय तुल्य भिन्नों के रूप में बदल लेते हैं।

$$\frac{3}{8} + \frac{4}{1} + \frac{15}{4} = \frac{3}{8} + \frac{32}{8} + \frac{30}{8} = \frac{3+32+30}{8} = \frac{65}{8}$$

उदाहरण 14. $2\frac{1}{3}$ और $3\frac{2}{3}$ को जोड़िए।

हल : दी गई मिश्र भिन्नों को तुल्य विषम भिन्न में बदलने पर

$$2\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \text{ और } 3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\text{अब } 2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} = \frac{7}{3} + \frac{11}{3} = \frac{7+11}{3} = \frac{18}{3} = \frac{6}{1} = 6$$

वैकल्पिक विधि

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{3} + 3\frac{2}{3} &= \left(2 + \frac{1}{3}\right) + \left(3 + \frac{2}{3}\right) \\ &= (2+3) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) \\ &= 5 + \left(\frac{1+2}{3}\right) \\ &= 5 + \frac{3}{3} \\ &= 5 + 1 = 6 \end{aligned}$$

हम कह सकते हैं समान हर वाली मिश्र भिन्नों को जोड़ने के लिए

- पहले भिन्नों के पूर्णांशों का योग ज्ञात करें।
- फिर मिश्र भिन्नों के भिन्नात्मक भागों का योग ज्ञात करें।
- उपर्युक्त दोनों चरणों में प्राप्त योगफल को जोड़ें, यही अभीष्ट योगफल होगा।

मिश्र भिन्नों का योगफल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित विधि का उपयोग भी किया जाता है :

दो या उससे अधिक विजातीय भिन्नों को निम्नलिखित चरणों में जोड़ते हैं

चरण 1. हम दी हुई प्रत्येक भिन्न को विषम भिन्न में बदल लेते हैं। जैसे 5 को $\frac{5}{1}$ के रूप

में $2\frac{3}{5}$ को $\frac{13}{5}$ के रूप में।

चरण 2. हम भिन्नों के हर का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करते हैं।

चरण 3. हम भिन्नों को तुल्य भिन्नों में बदलते हैं

चरण 4. हम सजातीय भिन्नों को जोड़ते हैं।

चरण 5. हम योगफल को सरलतम रूप में लिखते हैं।

चरण 6. यदि भिन्न अपने सरलतम रूप में एक विषम भिन्न होती है तो हम उसे आवश्यकतानुसार मिश्र भिन्न के रूप में लिखते हैं।

उदाहरण 15. $3\frac{1}{4}$ और $4\frac{5}{6}$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$3\frac{1}{4} = \frac{3 \times 4 + 1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$\text{और } 4\frac{5}{6} = \frac{4 \times 6 + 5}{6} = \frac{29}{6}$$

अब 4 और 6 का ल.स. = 12

$$\frac{13}{4} = \frac{13 \times 3}{4 \times 3} = \frac{39}{12}$$

$$\text{और } \frac{29}{6} = \frac{29 \times 2}{6 \times 2} = \frac{58}{12}$$

$$\text{अतः } 3\frac{1}{4} + 4\frac{5}{6} = \frac{13}{4} + \frac{29}{6}$$

$$= \frac{39}{12} + \frac{58}{12} = \frac{39+58}{12}$$

$$= \frac{97}{12} = 8\frac{1}{12}$$

उत्तर

अभ्यास 4.4

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

- (1) सजातीय भिन्नों को जोड़ने के लिए भिन्न के को जोड़कर लिखते हैं तथा हर ज्यों का त्यों लिखते हैं।
- (2) विजातीय भिन्नों को जोड़ने के लिए इन्हें पहले भिन्नों में बदलकर सजातीय भिन्न बना लेते हैं।

2. योगफल ज्ञात कीजिए :

$$(1) \frac{2}{4} + \frac{3}{8}$$

$$(2) \frac{1}{5} + \frac{1}{3}$$

$$(3) \frac{1}{4} + \frac{3}{10} + \frac{4}{2}$$

$$(4) 7 + \frac{2}{3} + \frac{9}{10}$$

$$(5) 7 + 3 + \frac{11}{12}$$

$$(6) 5 + \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$$

$$(7) \frac{9}{1} + \frac{21}{20} + 5$$

$$(8) 3 + 1\frac{1}{4} + 2\frac{1}{8}$$

$$(9) 3\frac{3}{4} + 4\frac{1}{4} + 5\frac{1}{2}$$

$$(10) \frac{9}{10} + 2\frac{1}{2} + 5$$

$$(11) 3 + 4\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3}$$

$$(12) 5\frac{3}{7} + 3\frac{1}{4} + 3\frac{2}{7}$$

भिन्नों के योग के शाब्दिक प्रश्न

उदाहरण 16. लीला ने एक डबल रोटी का $\frac{4}{9}$ भाग खाया और उसके भाई ने उसी डबल रोटी का $\frac{3}{9}$ भाग खाया। बताइए दोनों ने मिलकर कुल कितनी डबल रोटी खाई?

हल : लीला द्वारा खाई गई डबल रोटी $= \frac{4}{9}$
उसके भाई द्वारा खाई गई डबल रोटी $= \frac{3}{9}$
दोनों ने खाई कुल डबल रोटी $= \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{4+3}{9} = \frac{7}{9}$
अतः दोनों ने मिलकर डबल रोटी का $\frac{7}{9}$ भाग खाया।

अभ्यास 4.5

1. राकेश अपनी आय का $\frac{4}{9}$ भाग भोजन और $\frac{1}{9}$ भाग आवास पर खर्च करता है। राकेश भोजन और आवास पर आय का कितना भाग खर्च करता है?
2. कमला ने खेत के $\frac{2}{8}$ भाग की कल और $\frac{5}{8}$ भाग की आज निराई की। बताइए दोनों दिनों में उसने कितने खेत की निराई की?
3. मोहिन ने सोमवार को $\frac{3}{10}$ भाग दीवार और मंगलवार को $\frac{4}{10}$ भाग दीवार की चुनाई की। बताइए दोनों दिनों में मोहिन ने कितनी भाग दीवार की चुनाई की?
4. घीसा ने दो दिन दीवार की पुताई की। एक दिन उसने $\frac{3}{9}$ दीवार की पुताई की। दूसरे दिन उसने $\frac{4}{9}$ दीवार की पुताई की। बताइए दोनों दिनों में उसने कितनी दीवार की पुताई की?
5. राधा ने अपने धन का $\frac{1}{7}$ भाग किताबों पर और $\frac{4}{7}$ भाग खाने पर व्यय किया। बताइए उसने खाने और किताबों पर कुल कितना व्यय किया?
6. एक मेंढक पहली बार में $\frac{2}{10}$ मीटर कूदा, दूसरी बार में $\frac{3}{10}$ मीटर कूदा और तीसरी बार में $\frac{4}{10}$ मीटर कूदा। बताइए वह कुल कितने मीटर कूदा?
7. सोहन ने मंगलवार को $\frac{7}{10}$ भाग खेत की सिंचाई की और बुधवार को $\frac{3}{10}$ भाग की सिंचाई की। बताइए दो दिनों में उसने कितने खेत की सिंचाई की?

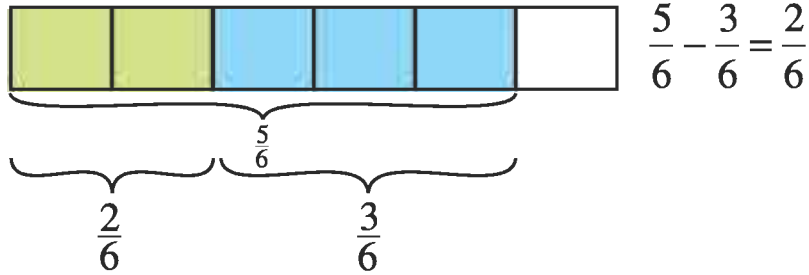
भिन्नों का घटाना

(अ) सजातीय भिन्नों का घटाना

उदाहरण 17. $\frac{5}{6}$ में से $\frac{3}{6}$ घटाइए।

हल : $\frac{5}{6}$ और $\frac{3}{6}$ भिन्नों के हर समान हैं।

चित्र की सहायता से भिन्नों को घटाने पर,



अतः सजातीय भिन्नों को घटाने के लिए पहले भिन्न के अंश में से दूसरे भिन्न के अंश को घटाकर लिखते हैं तथा हर ज्यों का त्यों लिखते हैं।

उदाहरण 18. $\frac{8}{3}$ में से $\frac{6}{3}$ घटाइए।

हल : $\frac{8}{3} - \frac{6}{3} = \frac{2}{3}$

(ब) विजातीय भिन्नों का घटाना

दो विजातीय भिन्नों में अंतर ज्ञात करने की प्रक्रिया लगभग वही होती है जो दो विजातीय भिन्नों का योगफल ज्ञात करने की है। हम कुछ उदाहरणों को देखते हैं

उदाहरण 19. $\frac{2}{5}$ में से $\frac{1}{4}$ घटाइए।

हल : यहाँ पर दी गई भिन्ने विजातीय हैं। अतः हम पहले उनको सजातीय भिन्नों में बदलते हैं। 5 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य 20 होता है।

$$\text{अतः } \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8}{20} - \frac{5}{20} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$$

उदाहरण 20. $\frac{6}{7}$ और $\frac{3}{5}$ का अंतर ज्ञात कीजिए

हल : यहाँ पर दी हुई भिन्न विजातीय हैं। इन्हें सजातीय भिन्नों में बदल लेते हैं। 7 और 5 का लघुत्तम समापवर्त्य 35 होता है।

$$\text{अतः } \frac{6}{7} - \frac{3}{5} = \frac{30}{35} - \frac{21}{35} = \frac{30-21}{35} = \frac{9}{35}$$

(स) मिश्र भिन्नों का घटाना

उदाहरण 21. $3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}$ घटाइए

हल : $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$, $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

4 और 2 का लघुत्तम समापवर्त्य 4 है। अतः हम दी हुई भिन्नों को 4 हर वाली तुल्य भिन्न के रूप में बदल लेते हैं।

$$3\frac{3}{4} = \frac{15}{4} \quad ; \quad 2\frac{1}{2} = \frac{5 \times 2}{2 \times 2} = \frac{10}{4}$$

$$3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2} = \frac{15}{4} - \frac{10}{4} = \frac{15-10}{4} = \frac{5}{4}$$

उदाहरण 22. बताइए कि $7\frac{1}{2}$ से $\frac{1}{7}$ कितना कम है?

हल : इसमें हमें $7\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{7}$ का अंतर निकालना है।

$$\text{अतः } 7\frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{15}{2} - \frac{1}{7} = \frac{105}{14} - \frac{2}{14} = \frac{105-2}{14} = \frac{103}{14} = 7\frac{5}{14}$$

$7\frac{1}{2}$ से $\frac{1}{7}$, $7\frac{5}{14}$ कम है। उत्तर

अभ्यास 4.6

1. अंतर ज्ञात कीजिए

(1) $\frac{5}{6}$ और $\frac{2}{3}$

(2) $13\frac{3}{4}$ और $6\frac{1}{4}$

(3) 8 और $3\frac{1}{2}$

(4) $9\frac{7}{8}$ और $1\frac{5}{6}$

2. ज्ञात कीजिए 'कितना कम है'?

(1) $3\frac{5}{6}$ से $\frac{1}{9}$

(2) $\frac{17}{4}$ से $\frac{4}{5}$

(3) $9\frac{1}{2}$ से $\frac{1}{3}$

(4) $4\frac{1}{2}$ से $1\frac{4}{5}$

3. $7\frac{2}{5}$ को प्राप्त करने के लिये $5\frac{1}{7}$ में क्या जोड़ना पड़ेगा?

4. 5 में से क्या घटाया जाए कि $4\frac{1}{6}$ रह जाए?

भिन्नों से संबंधित दैनिक जीवन की समस्याएँ

दैनिक जीवन में हमारे सामने ऐसी अनेक समस्याएँ आती हैं जिनमें भिन्नों को जोड़ने और घटाने की आवश्यकता पड़ती है। अब हम इस प्रकार की समस्याओं का हल करना सीखेंगे। अब हम कुछ उदाहरण करके देखते हैं।

उदाहरण 23. समान चौड़ाई के कपड़े के तीन टुकड़ों की लम्बाईयाँ $\frac{7}{10}$ मीटर, $\frac{1}{2}$ मीटर और $\frac{4}{5}$ मीटर है। तीनों को जोड़ने पर कितनी लम्बाई हो जावेगी?

हल : पहले टुकड़े की लम्बाई = $\frac{7}{10}$ मीटर

$$\text{दूसरे टुकड़े की लम्बाई} = \frac{1}{2} \text{ मीटर}$$

$$\text{तीसरे टुकड़े की लम्बाई} = \frac{4}{5} \text{ मीटर}$$

$$\begin{aligned} \text{कपड़े की कुल लम्बाई} &= \frac{7}{10} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{7}{10} + \frac{5}{10} + \frac{8}{10} = \frac{7+5+8}{10} = \frac{20}{10} = 2 \text{ मीटर} \\ &= \frac{7}{10} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = 2 \text{ मीटर} \quad \text{उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण 24. एक लम्बी कूद प्रतियोगिता में गीता ने $2\frac{1}{4}$ मीटर और सुधा ने $1\frac{4}{5}$ मीटर लम्बी छलाँग लगाई। एक ने दूसरे की अपेक्षा कितनी अधिक छलाँग लगाई?

हल : गीता द्वारा लगाई गई छलाँग की लम्बाई $= 2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ मीटर

सुधा द्वारा लगाई गई छलाँग की लम्बाई $= 1\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ मीटर

$$\text{अब } \frac{9}{4} = \frac{9 \times 5}{4 \times 5} = \frac{45}{20}$$

$$\frac{9}{5} = \frac{9 \times 4}{5 \times 4} = \frac{36}{20}$$

$$\text{अतः } \frac{9}{4} > \frac{9}{5}$$

अतः गीता ने अधिक लम्बी छलाँग लगाई।

कितनी अधिक छलाँग लगाई, यह निकालने के लिए दोनों भिन्नों का अंतर निकालना होगा।

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{5} = \frac{45}{20} - \frac{36}{20} = \frac{45-36}{20} = \frac{9}{20} \text{ मीटर}$$

इस प्रकार गीता, सुधा से $\frac{9}{20}$ मीटर अधिक छलाँग लगाई

अभ्यास 4.7

1. एक पेंटर एक मेज को पेंट करने में $\frac{3}{4}$ घंटे और एक कुर्सी को पेंट करने में $\frac{1}{3}$ घंटे लगाता है। उसे एक मेज और एक कुर्सी को पेंट करने में कुल कितना समय लगा?
2. राम ने $14\frac{7}{10}$ लीटर, रहीम ने $16\frac{3}{10}$ लीटर और जॉन ने 15 लीटर दूध एक महीने में पिया, तो बताइए तीनों ने मिलकर कितना दूध पिया?
3. एक गैस के सिलेण्डर में 15 कि.ग्रा. गैस भरी हुई थी। उसमें से $10\frac{3}{4}$ कि.ग्रा. गैस उपयोग में आ गई। बताइए सिलेण्डर में कितनी गैस बची है?
4. जीनत और शबीना ने 400 मीटर दौड़ में भाग लिया। जीनत को $72\frac{6}{10}$ सेकेण्ड और शबीना को $64\frac{3}{10}$ सेकेण्ड लगे। बताइए जीनत ने शबीना से कितना अधिक समय लगाया?
5. यदि $8\frac{1}{5}$ मीटर तार के टुकड़े में से $3\frac{1}{3}$ मीटर तार काट दिया जाए तो कितना तार बचेगा?
6. कौन सा अधिक है? $3\frac{1}{2}$ और $5\frac{1}{4}$ का योग या, $4\frac{3}{5}$ और $1\frac{1}{10}$ का अंतर।
7. शीला के पास एक रस्सी $7\frac{1}{4}$ मीटर, दूसरी रस्सी $5\frac{2}{3}$ मीटर और तीसरी रस्सी $6\frac{2}{5}$ मीटर लम्बी थी। उसके पास कुल कितनी मीटर लम्बी रस्सी थी?
8. दीनू सुबह 5 लीटर दूध लाया। उसकी माँ ने दिन भर में $4\frac{1}{4}$ लीटर दूध काम में ले लिया। कितना दूध बचा?
9. पीटर को अपने मित्र पॉल के पास जाने में साईकिल द्वारा $3\frac{1}{4}$ घंटे और मोटर साईकिल द्वारा $\frac{1}{2}$ घंटे लगते हैं। बताइए साईकिल द्वारा कितना समय अधिक लगता है?

10. हल कीजिए

$$(1) 2\frac{4}{5} + 3\frac{4}{5}$$

$$(2) 3\frac{1}{7} + 4\frac{5}{6}$$

$$(3) 2\frac{1}{4} + 5\frac{1}{6} + 1\frac{2}{3}$$

$$(4) 3\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + 2\frac{1}{3}$$

$$(5) \frac{8}{9} - \frac{1}{3}$$

$$(6) 4\frac{5}{6} - 2$$

$$(7) 2\frac{4}{7} - 1\frac{1}{7}$$

$$(8) 2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}$$

भिन्नों का गुणा

- भिन्न संख्याओं का पूर्णांक से गुणा।
- भिन्नात्मक संख्या का भिन्नात्मक संख्या से गुणा।

(अ) भिन्न संख्याओं का पूर्णांक से गुणा

जिस प्रकार प्राकृत संख्याओं में $7 + 7 + 7 + 7 = 4 \times 7$ होता है। उसी प्रकार, भिन्न संख्याओं में भी $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$ होता है।

अतः हम कह सकते हैं कि

$$4 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1+1+1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{अतः } 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

इस प्रकार हमने पूर्णांक संख्या 4 का भिन्न संख्या के अंश 1 में गुणा किया और प्राप्त विषम भिन्न को मिश्र भिन्न के रूप में लिखा।

उदाहरण 25. गुणा कीजिए $\frac{2}{3}$ को 4 से।

$$\text{हल : } 4 \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

उदाहरण 26. हल कीजिए $\frac{3}{7} \times 2$

हल : $2 \times \frac{3}{7} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$

उदाहरण 27. सुनील प्रतिदिन 45 मिनट कबड्डी खेलता है। इस समय को घंटों में बदलिए और यह ज्ञात कीजिए कि सुनील 6 दिन में कितने घंटे कबड्डी खेलता है।

हल : सुनील द्वारा कबड्डी खेलने में एक दिन में लगाया गया समय = 45 मिनट
 $= \frac{45}{60}$ घंटे $= \frac{3}{4}$ घंटे

इस प्रकार सुनील द्वारा कबड्डी खेलने में 6 दिनों में लगाया गया समय

$$= \left(\frac{3}{4} \times 6 \right) \text{ घंटे}$$

$$= \frac{3 \times 6}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \text{ घंटे} = 4\frac{1}{2} \text{ घंटे}$$

इस प्रकार सुनील कबड्डी खेलने में 6 दिन में $4\frac{1}{2}$ घंटे लगाता है।

अभ्यास 4.8

1. हल कीजिए

(1) $\frac{2}{3} \times 8$

(2) $\frac{3}{5} \times 9$

(3) $\frac{5}{2} \times 16$

(4) $\frac{4}{7} \times 14$

(5) $\frac{3}{4} \times 6$

(6) $\frac{8}{9} \times 12$

(7) $\frac{4}{7} \times 2$

(8) $\frac{8}{5} \times 25$

(9) $\frac{3}{5} \times 8$

(10) $2 \times \frac{9}{10}$

(11) $3 \times \frac{5}{6}$

(12) $4 \times \frac{3}{16}$

2. गुणा कीजिए

(1) $\frac{2}{5}$ को 4 से

(2) $\frac{9}{20}$ को 5 से

(3) $\frac{19}{25}$ को 50 से

(4) $\frac{9}{2}$ को 4 से

3. मान ज्ञात कीजिए

(1) $\frac{9}{10} \times 5$

(2) $4\frac{1}{2} \times 9$

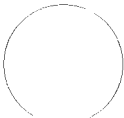
(3) $17\frac{1}{5} \times 5$

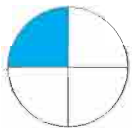
4. संगीता प्रतिदिन प्रातःकालीन व्यायाम में आधा घंटा लगाती है। ज्ञात कीजिए कि संगीता प्रति सप्ताह (1 सप्ताह = 7 दिन) कितना समय (घंटों में) प्रातःकालीन व्यायाम में लगाती है?

5. एक स्कूल में सात कालखण्ड होते हैं। प्रत्येक कालखण्ड की अवधि $\frac{3}{4}$ घंटे की है। 7 कालखण्डों की कुल अवधि कितनी है?

भिन्नात्मक संख्या का भिन्नात्मक संख्या से गुणा

नीचे बनी आकृतियों का अवलोकन कीजिए

यदि  1 को दर्शाता है, तो



$\frac{1}{4}$ को दर्शाता है, और



$\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$ या $\frac{1}{8}$ को दर्शाता है।

हम $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{2}$ को $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ लिखते हैं।

इस प्रकार $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{4 \times 2} = \frac{1}{8}$ लिखते हैं।

पुनः आगे बनी आकृतियों को ध्यान से देखिए

यदि सामने बना चित्र 1 को दर्शाता है

तो छायांकित भाग  $\frac{1}{6}$ को दर्शाएगा

तथा छायांकित भाग $\frac{1}{6}$ का $\frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ दर्शाएगा

हम $\frac{1}{6}$ का $\frac{1}{3}$ को $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3}$ लिखते हैं।

इस प्रकार $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1 \times 1}{6 \times 3} = \frac{1}{18}$ लिखते हैं।

इस प्रकार दो भिन्नात्मक संख्याओं का गुणनफल वह भिन्न होती है, जिसका अंश भिन्नों के अंशों का गुणनफल तथा हर भिन्नों के हरों का गुणनफल होता है।

$$\text{भिन्नों का गुणा} = \frac{\text{भिन्नों के अंशों का गुणनफल}}{\text{भिन्नों के हरों का गुणनफल}}$$

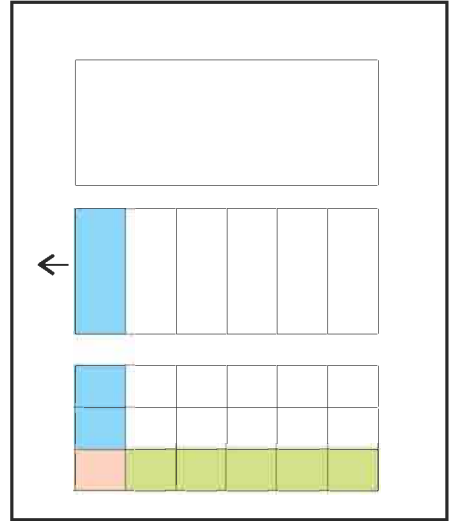
इसी प्रकार, अब हम दो से अधिक भिन्नात्मक संख्याओं को गुणा कर उनका गुणनफल ज्ञात करें।

हम भिन्नात्मक संख्याओं $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{6}$ को लें।

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \right) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{48}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1 \times 1}{2 \times 4 \times 6} = \frac{1}{48}$$

इस प्रकार हमें ज्ञात होता है कि दो या दो से अधिक भिन्नात्मक संख्याओं का गुणनफल वह भिन्न होती है जिसका अंश दी गई भिन्नों के अंश के गुणनफल तथा हर दी गई भिन्नों के



हर का गुणनफल होता है।

उदाहरण 28. $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{6}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1 \times 1}{4 \times 6} = \frac{1}{24}$

इस प्रकार $\frac{1}{4}$ का $\frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

उदाहरण 29. ज्ञात कीजिए $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}$

हल : $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1 \times 1}{8 \times 8} = \frac{1}{64}$

इस प्रकार $\frac{1}{8}$ और $\frac{1}{8}$ का गुणनफल $\frac{1}{64}$ है।

उदाहरण 30. गुणा कीजिए $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}$

हल : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1 \times 1}{3 \times 5 \times 4} = \frac{1}{60}$

इस प्रकार $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$

उदाहरण 31. एक खेत के आधे भाग में सब्जी उगाई जाती है। इस हिस्से के $\frac{1}{5}$ में आलू उगाया जाता है। खेत का कितना सा भाग आलू उगाने के काम में लाया जाता है?

हल : सब्जी उगाने के काम में आने वाला खेत का भाग $= \frac{1}{2}$

आलू उगाने के काम में आने वाला खेत का भाग $= \frac{1}{2}$ का $\frac{1}{5}$

$$\text{अतः } \frac{1}{2} \text{ का } \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 1}{2 \times 5} = \frac{1}{10}$$

इस प्रकार खेत का $\frac{1}{10}$ भाग आलू उगाने के काम में आता है।

अभ्यास 4.9

1. हल कीजिए

(1) $\frac{1}{10}$ का $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{3}$ का $\frac{1}{12}$

(3) $\frac{1}{2}$ का $\frac{1}{6}$

2. हल कीजिए

(1) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}$

(2) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{8}$

(3) $\frac{1}{5} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{2}$

(4) $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$

3. रहीम के पास $\frac{1}{2}$ कि.ग्रा. टॉफियाँ हैं। टॉफियों का $\frac{1}{5}$ भाग वह राजू को दे देता है। राजू को कितने कि.ग्रा. टॉफियाँ दी जाती हैं।

अब नीचे दिए गए उदाहरण देखिए

गुणनफल ज्ञात कीजिए

उदाहरण 32. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$

$$= \frac{2 \times 3}{3 \times 4} = \frac{6}{12} \text{ या } \frac{1}{2}$$

उदाहरण 33. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{8}$

$$= \frac{2 \times 3}{3 \times 8} = \frac{6}{24} \text{ या } \frac{1}{4}$$

उदाहरण 34. $\frac{5}{6} \times \frac{4}{5}$

$$= \frac{5 \times 4}{6 \times 5} = \frac{20}{30} \text{ या } \frac{2}{3}$$

उदाहरण 35. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए

हल : $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 3 \times 5}{3 \times 4 \times 6} = \frac{(2 \times 3) \times 5}{(3 \times 4) \times 6} = \frac{6 \times 5}{12 \times 6} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$

इस प्रकार $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{6}$ का गुणनफल $\frac{5}{12}$ है।

अभ्यास 4.10

हल कीजिए

(1) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{5}{9}$

(2) $\frac{5}{6} \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$

(3) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{8}{9}$

पूर्ण संख्या में भिन्नात्मक संख्या का भाग

पूर्ण संख्या में भाग की प्रक्रिया पर विचार करते हैं

$16 \div 16 = 1$ $16 \div \frac{1}{2} = \square ?$

$16 \div 8 = 2$ $16 \div \frac{1}{4} = \square ?$

$16 \div 4 = 4$

$16 \div 2 = 8$

$16 \div 1 = 16$

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि भाजक के आधे हो जाने पर भागफल पहले की तुलना में दो गुना हो जाता है। इन उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि-

$$16 \div \frac{1}{2} = 16 \times 2 = 32$$

$$16 \div \frac{1}{4} = 16 \times 4 = 64$$

इसी प्रकार

$$27 \div 27 = 1$$

$$27 \div 9 = 3$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$27 \div \frac{1}{3} = \square$$

$$27 \div 1 = 27$$

$$27 \div \frac{1}{9} = \square$$

भाजक के एक तिहाई होने पर भागफल पहले की तुलना में तीन गुना हो जाता है।

इस प्रकार $27 \div \frac{1}{3} = 81$

अतः $27 \div \frac{1}{3} = 27 \times 3 = 81$

$$27 \div \frac{1}{9} = 243$$

अतः $27 \div \frac{1}{9} = 27 \times 9 = 243$

इन उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि

- भाजक के आधे होने पर भागफल दो गुना हो जाता है।
- भाजक के एक तिहाई होने पर भागफल तीन गुना हो जाता है।
- भाजक के एक चौथाई हो जाने पर भागफल चार गुना हो जाता है।

अभ्यास 4.11

बताइए

1. $2 \div \frac{1}{2} = \square$

2. $2 \div \frac{1}{3} = \square$

3. $5 \div \frac{1}{3} = \square$

4. $5 \div \frac{1}{4} = \square$

5. $8 \div \frac{1}{6} = \square$

6. $9 \div \frac{1}{4} = \square$

7. 12 लड्डुओं को एक-एक बाँटा जाये तो कितने बच्चों को मिलेगा?

8. 12 लड्डुओं को आधा-आधा बाँटा जाये तो कितने बच्चों को मिलेगा।

9. 12 लड्डुओं को एक तिहाई करके बाँटा जाए तो कितने बच्चों को मिलेगा?

हम जानते हैं कि $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$

अतः $16 \div 2 = 16 \times \frac{1}{2}$

$16 \div \frac{1}{3} = 16 \times 3$

$16 \div \frac{2}{3} = 16 \times \frac{3}{2}$

इसी प्रकार $12 \div \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3}$

$15 \div \frac{5}{6} = 15 \times \frac{6}{5}$

$= 12 \times \frac{4}{3} = 16$

$= 15 \times \frac{6}{5} = 18$

भिन्नात्मक संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम

किसी भिन्नात्मक संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम प्राप्त करने के लिये हम उसके अंश और हर को आपस में बदल देते हैं। जैसे भिन्नात्मक संख्या $\frac{11}{5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{5}{11}$ होगा।

किसी भिन्न संख्या और उसके भिन्नात्मक प्रतिलोम का गुणा करने पर गुणनफल हमेशा 1 आएगा।

जैसे $\frac{7}{9}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{9}{7}$ है।

और $\frac{7}{9} \times \frac{9}{7} = 1$

याद रखिए 0 (शून्य) का कोई गुणात्मक प्रतिलोम नहीं होता है।

भिन्न में भिन्न से भाग

किसी भिन्न संख्या में दूसरी भिन्न संख्या का भाग देने के लिए हम पहली भिन्न संख्या में दूसरी भिन्न संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम का गुणा करते हैं।

जैसे : $\frac{5}{7} \div \frac{6}{7}$ में, $\frac{6}{7}$ भाजक है, इसका गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{7}{6}$ है।

अतः
$$\frac{5}{7} \div \frac{6}{7} = \frac{5}{7} \times \frac{7}{6} = \frac{5}{6}$$

इसी प्रकार,
$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{10}$$

और
$$\frac{6}{5} \div \frac{7}{4} = \frac{6}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{24}{35}$$

भिन्नात्मक संख्या में भिन्नात्मक संख्या का भाग देने के लिए :

- भाग देने वाली भिन्नात्मक संख्या (भाजक) का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात करते हैं।
- पहली भिन्नात्मक संख्या (भाज्य) में भाजक के गुणात्मक प्रतिलोम का गुणा करते हैं।

अभ्यास 4.12

1. सरल कीजिए

(1) $\frac{4}{5} \div 6$ (2) $\frac{3}{2} \div 8$ (3) $\frac{2}{3} \div 9$ (4) $\frac{1}{7} \div 2$

(5) $\frac{4}{6} \div 6$ (6) $\frac{3}{4} \div 8$ (7) $\frac{2}{6} \div 9$ (8) $\frac{1}{7} \div 3$

2. हल कीजिए

(1) $3 \div \frac{2}{3}$

(2) $5 \div \frac{4}{5}$

(3) $3 \div \frac{3}{5}$

(4) $6 \div \frac{4}{3}$

(5) $3 \div \frac{3}{4}$

(6) $7 \div \frac{1}{2}$

(7) $4 \div \frac{2}{5}$

(8) $10 \div \frac{5}{6}$

3. ज्ञात कीजिए

(1) $\frac{2}{3} \div \frac{6}{7}$

(2) $\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}$

(3) $\frac{2}{9} \div \frac{3}{8}$

(4) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{9}$

(5) $\frac{4}{7} \div \frac{7}{8}$

(6) $\frac{3}{10} \div \frac{2}{9}$

(7) $\frac{2}{5} \div \frac{7}{10}$

(8) $\frac{4}{5} \div \frac{8}{5}$