

पाठ 12

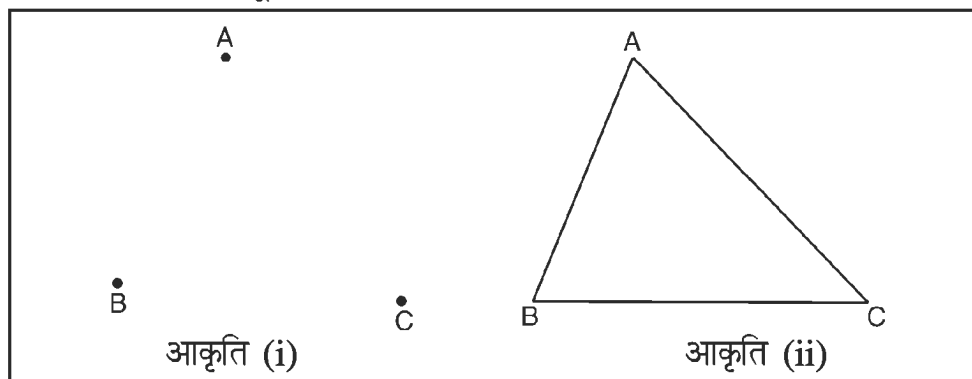
त्रिभुज

आइए सीखें-

- त्रिभुज की समझ।
- त्रिभुज की भुजाएँ, शीर्ष एवं कोण।
- त्रिभुज का अभ्यांतर व बर्हिभाग।
- त्रिभुजों के प्रकार।
- त्रिभुज के गुण धर्म का सत्यापन।
- त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180°
- त्रिभुज के बाह्य कोण एवं इनका अंतः कोणों से संबंध।
- दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

1. त्रिभुज की अवधारणा-

आप अपनी कॉपी पर तीन A, B तथा C असरेख बिन्दु अंकित करें [आकृति (i)] इन बिन्दुओं को स्केल की सहायता से एक दूसरे से मिलाइए [आकृति (ii)]।



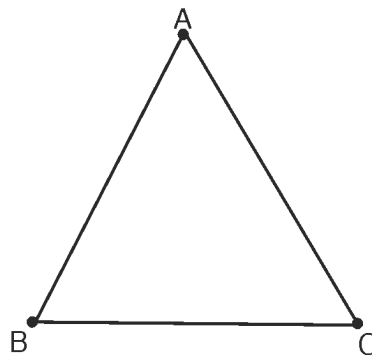
इस प्रकार निर्मित आकृति त्रिभुज कहलाती है।

विचार कीजिए- यदि तीनों बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित हों तो क्या इन बिन्दुओं को मिलाने से त्रिभुज बनता है?

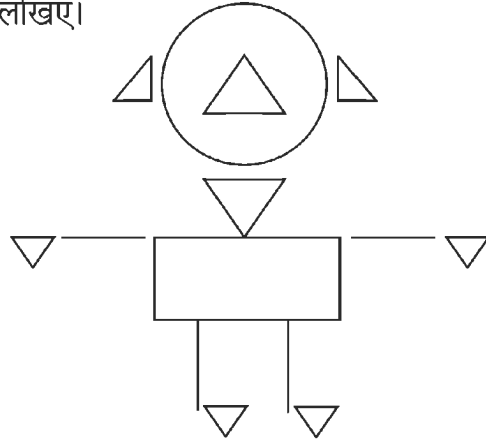
क्रियाकलाप 1.

माचिस की तीलियों से एक त्रिभुज बनाइए। इस आकृति को ध्यान से देखिए। आप पाएँगे-

- (i) यह एक बंद आकृति है।
- (ii) इसमें तीन भुजाएँ हैं।
- (iii) इसके तीन कोने हैं।



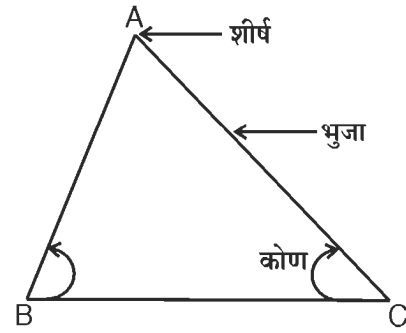
उदाहरण 1. निम्नलिखित आकृति को ध्यान से देखिए एवं इसमें बने त्रिभुजों को गिनिए तथा रिक्त स्थान में लिखिए।



8

2. त्रिभुज के शीर्ष, भुजाएँ एवं कोण-

माना A, B एवं C तीन असरेख बिन्दु हैं। इन तीनों बिन्दुओं के युग्मों से बने रेखाखण्डों AB, BC, CA को खींचने (जोड़ने) से $\triangle ABC$ बन रहा है। यह तीनों बिन्दु A, B तथा C त्रिभुज ABC के शीर्ष कहलाते हैं तथा उक्त तीनों रेखाखण्ड AB, BC तथा CA त्रिभुज ABC की भुजाएँ कहलाते हैं। $\angle ABC$ या $\angle B, \angle BCA$ या $\angle C, \angle CAB$ या $\angle A$ इस त्रिभुज के कोण या अंतः कोण कहलाते हैं। त्रिभुज की तीनों भुजाएँ एवं तीनों कोण मिलकर त्रिभुज के अवयव कहलाते हैं।

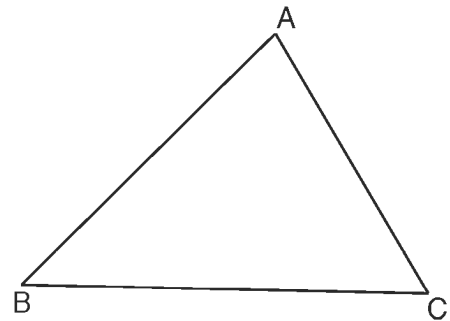


1. प्रत्येक त्रिभुज की तीन भुजाएँ होती हैं।
2. प्रत्येक त्रिभुज के तीन कोण होते हैं।
3. प्रत्येक त्रिभुज के तीन शीर्ष होते हैं।
4. त्रिभुज की भुजाओं का प्रत्येक युग्म जिस बिन्दु पर मिलता है वे बिन्दु ही त्रिभुज के शीर्ष होते हैं।
5. त्रिभुज की भुजाओं का प्रत्येक युग्म उसके एक कोण को निर्धारित करता है।

3. त्रिभुज की भुजाएँ एवं इनके सम्मुख शीर्ष-

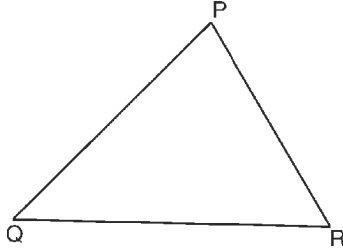
दिये गये चित्र को ध्यान से देखिये -

हम देखते हैं कि त्रिभुज ABC की तीन भुजाएँ AB, BC एवं AC में से युग्म (AB, BC) B बिन्दु पर मिल रहा है, यह बिन्दु B त्रिभुज का शीर्ष है तथा शेष तीसरी भुजा AC इसके सामने है, अतः भुजा AC शीर्ष B की सम्मुख



भुजा कहलाती है। इसी प्रकार भुजा AB शीर्ष C की एवं भुजा BC शीर्ष A की सम्मुख भुजा है।

उदाहरण 2. निम्नांकित आकृति को देखकर पास बनी हुई तालिका को भरिए-



त्रिभुज के शीर्ष	P
त्रिभुज की भुजाएँ	PQ
त्रिभुज के कोण	$\angle QRP$

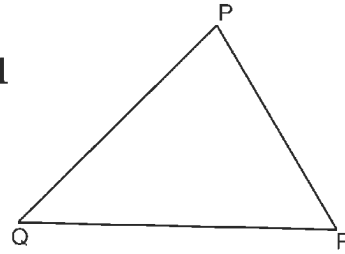
4. संकेतन पद्धति- बिन्दुओं A, B, C से बने त्रिभुज को निम्न प्रकार लिखते हैं।

(1) $\triangle ABC$ इसे त्रिभुज ABC पढ़ते हैं।

(2) इस त्रिभुज के कोणों को $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$ लिखते हैं। संक्षेप में इन्हें क्रमशः $\angle B$, $\angle C$ एवं $\angle A$ लिखते हैं।

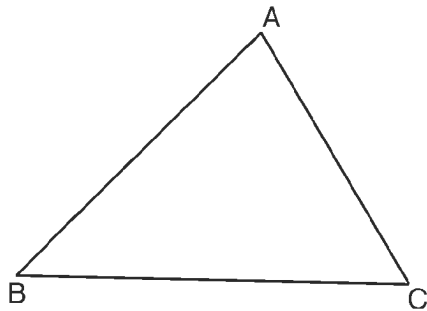
प्रश्नावली 12.1

1. एक $\triangle PQR$ को ध्यान से देखिए एवं निम्नांकित तालिका को भरिए (उचित प्रविष्टि द्वारा)।



शीर्ष	शीर्ष पर मिलने वाली भुजाओं के नाम	शीर्ष की सम्मुख भुजा
P	PQ एवं PR	QR
Q	----	----
R	----	---

2. एक त्रिभुज ABC नीचे बनाया गया है। इसे ध्यान से देखिए एवं निम्नांकित तालिका भरिए।



भुजा	सम्मुख शीर्ष
AB	C
BC	
CA	

5. किसी त्रिभुज का अभ्यंतर एवं बहिर्भाग-

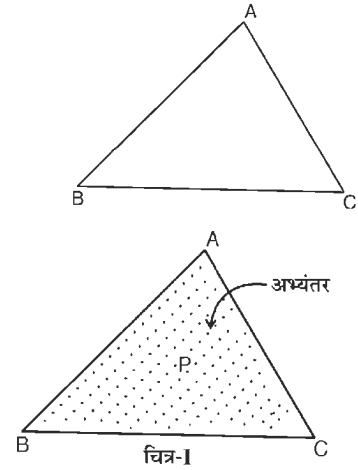
हम प्रायः स्कूल, कक्षा, घर, खेल के मैदान आदि के अंदर या बाहर की बात करते हैं। हम किसी बच्चे के कक्षा के अंदर या बाहर जाने की बात करते हैं। हम देखते हैं कि स्कूल, कक्षा, घर, खेल के मैदान आदि की एक परिसीमा होती है।

इस परिसीमा के जो अंदर है वह उसके अभ्यंतर में है तथा जो परिसीमा के बाहर हैं वह उसके बहिर्भाग में है।

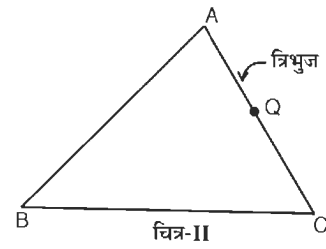
आइए अब हम त्रिभुज के अभ्यंतर व बहिर्भाग पर चर्चा करें-

नीचे बने त्रिभुज ABC की आकृति को ध्यान से देखिए-
 ΔABC की आकृति तल को तीन भागों में बाँट रही है-

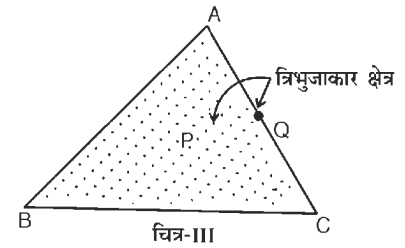
(i) तल का वह भाग जो ΔABC के अन्दर घिरा है जिसमें बिन्दु P जैसे सभी बिन्दु हैं, त्रिभुज का अभ्यंतर (Interior) कहलाता है। (चित्र I)



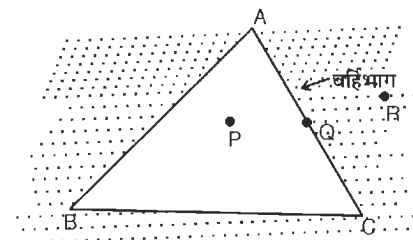
(ii) तल का वह भाग जो त्रिभुज ABC को बनाता है, जिसमें Q जैसे सभी बिन्दु हैं, त्रिभुज कहलाता है। (चित्र II)



(iii) त्रिभुज ABC का अभ्यंतर एवं स्वयं त्रिभुज मिलकर त्रिभुजाकार क्षेत्र (Triangular region) कहलाता है।



(iv) तल का वह भाग जो ΔABC के बाहर है जिसमें बिन्दु R जैसे सभी बिन्दु सम्मिलित हैं। त्रिभुज का बहिर्भाग (exterior) कहलाता है।

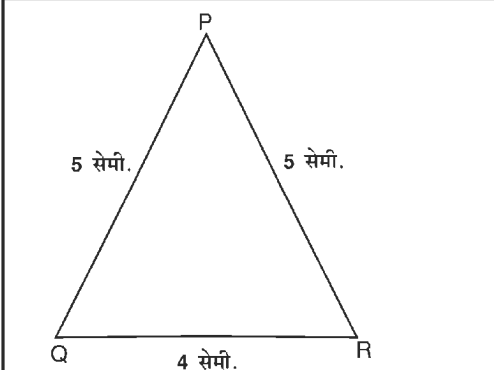


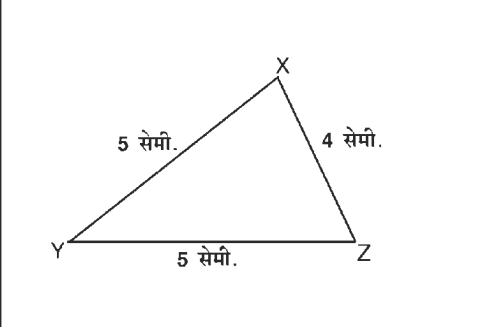
प्रश्नावली 12.2

निम्नलिखित त्रिभुजों की भुजाओं की माप देखकर तालिका में लिखिए-

1.

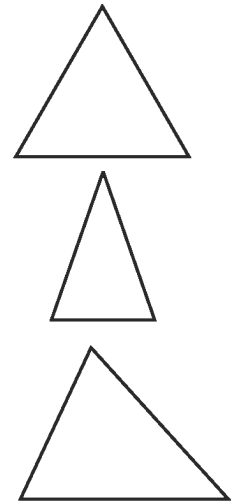
	भुजा लम्बाई से.मी. में AB BC CA
--	---

2.		भुजा लम्बाई से.मी. में PQ QR RP
----	---	---

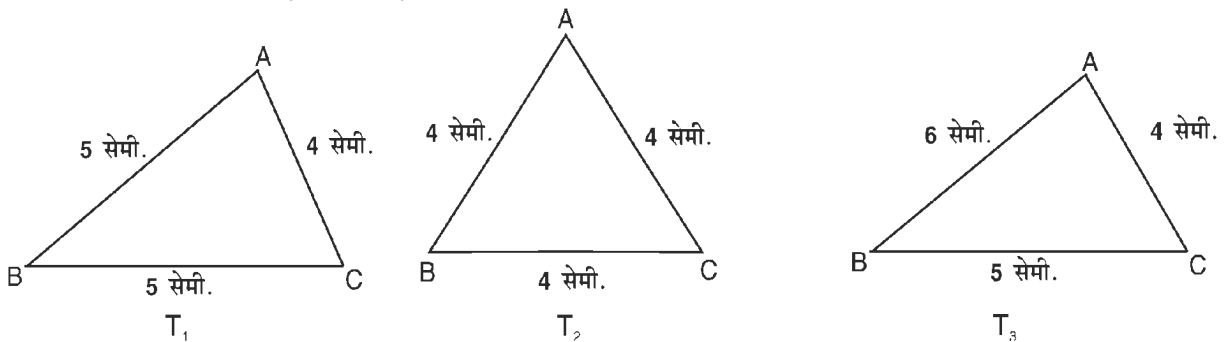
3.		भुजा लम्बाई से.मी. में xy yz zx
----	---	---

6. त्रिभुज के प्रकार -

- समबाहु त्रिभुज-** वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ समान लम्बाई की होती हैं, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- समद्विबाहु त्रिभुज-** वह त्रिभुज जिसकी कोई दो भुजाएँ समान लम्बाई की होती हैं एवं तीसरी भुजा भिन्न लम्बाई की होती है, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।
- विषमबाहु त्रिभुज-** वह त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ असमान लम्बाई की होती हैं, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।



- त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में संबंध-**
नीचे दिए गए त्रिभुजों की भुजाओं एवं कोणों की नाप तालिका में लिखिए-



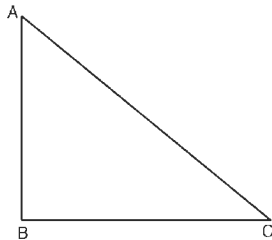
त्रिभुज	भुजाओं की माप			कोणों की माप		
	AB	BC	CA	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
T_1						
T_2						
T_3						

हम देखते हैं कि-

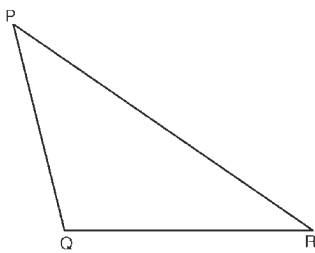
- (i) आकृति T_1 में दो भुजाएँ तथा दो कोण एक समान माप के हैं। अतः हम कह सकते हैं कि यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है। अर्थात् “समद्विबाहु त्रिभुज की दो भुजाएँ समान लम्बाई की तथा दो कोण समान माप के होते हैं।”
- (ii) आकृति T_2 में प्रत्येक भुजा की लम्बाई एवं प्रत्येक कोण की माप समान है। अतः हम कह सकते हैं कि यह एक समबाहु त्रिभुज है। अर्थात् “समबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ समान लम्बाई की एवं तीनों कोण समान माप के होते हैं।”
- (iii) आकृति T_3 में तीनों भुजाएँ तथा तीनों कोणों की माप असमान है। अतः यह विषमबाहु त्रिभुज है। अर्थात् “विषमबाहु त्रिभुज की तीनों भुजाएँ भिन्न लम्बाई की एवं तीनों कोण भिन्न माप के होते हैं।”

8. कोणों की माप के अनुसार त्रिभुज के प्रकार-

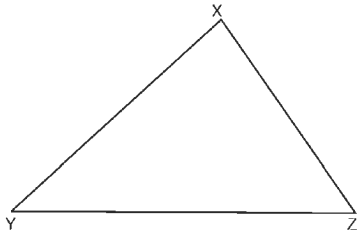
निम्नांकित त्रिभुजों के कोणों को चाँदे की सहायता से नापकर तालिका में लिखिए।



कोण	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$
माप			



कोण	$\angle P$	$\angle Q$	$\angle R$
माप			

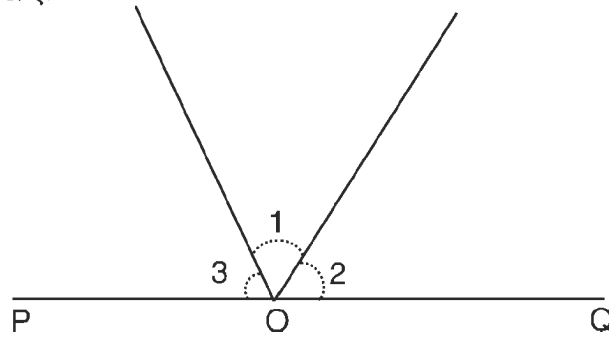
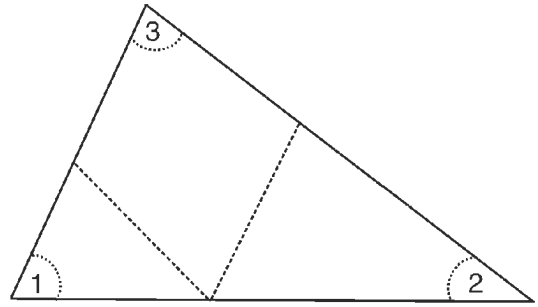


कोण	$\angle x$	$\angle y$	$\angle z$
माप			

- (1) **समकोण त्रिभुज-** वह त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 होता है, समकोण त्रिभुज कहलाता है।
- (2) **अधिक कोण त्रिभुज-** वह त्रिभुज जिसका एक कोण 90^0 से अधिक होता है, अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।
- (3) **न्यून कोण त्रिभुज-** वह त्रिभुज जिसका प्रत्येक कोण 90^0 से छोटा होता है, न्यून कोण त्रिभुज कहलाता है।

9. त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग-

- (1) मोटे कागज जैसे पुराना पोस्टकार्ड या प्रीटिंग कार्ड आदि पर एक त्रिभुज बनाएँ।
- (2) खींचे गये (बनाये गये) त्रिभुज को कैंची की सहायता से काटकर अलग करें।
- (3) इस त्रिभुज के कोणों को चित्रानुसार 1, 2, 3 से नामांकित कीजिए।
- (4) आकृति के अनुसार इस त्रिभुज को तीन टुकड़ों में कैंची से काटिए।
- (5) एक रेखा POQ खींचिए। अब इस रेखा पर काटे हुये कोणों को नामांकन के अनुसार रखिए।

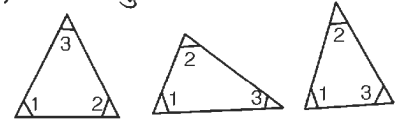


हम देखते हैं कि-

- त्रिभुज के तीनों कोण मिलकर एक बड़ा कोण POQ बना रहे हैं।
- चूँकि POQ एक सरल कोण है तथा सरल कोण 180^0 का होता है, अतः त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180^0 होता है।

क्रियाकलाप-2

- (1) तीन त्रिभुज खींचिए। इनके नाम T_1 , T_2 , T_3 रखिए,
- (2) प्रत्येक त्रिभुज के कोणों को नापिए तथा निम्नांकित तालिका में भरिए एवं तालिका पूर्ण कीजिए।



त्रिभुज	कोणों की माप			योगफल
	$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	$S = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$
T_1				

T_2				
T_3				

निष्कर्ष- किसी त्रिभुज ABC में

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

किसी त्रिभुज के तीनों अंतः कोणों का योग 180° अथवा दो समकोण होता है।

क्रियाकलाप 3. खींचे गए तीनों त्रिभुज T_1, T_2, T_3 की प्रत्येक भुजा की लम्बाई नापिए एवं निम्नांकित तालिका में लिखिए। तालिका पूर्ण करिए।

माना त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः a, b, c हैं।

त्रिभुज	त्रिभुज की भुजाएँ			त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग एवं तीसरी से उसका अंतर					
	a	b	c	a+b	a+b>c	b+c	b+c>a	c+a	c+a >b
T_1									
T_2									
T_3									

(i) यहाँ

$$a + b > c$$

(ii)

$$b + c > a$$

(iii) तथा

$$c + a > b$$

प्रत्येक त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

10. संकेतन-

(i) $\angle BAC$ उस कोण को व्यक्त करता है जो भुजा AB तथा AC से बनता है।

(ii) $\angle BAC$ की माप को $m \angle BAC$ से व्यक्त करते हैं।

नोट- सुविधा की दृष्टि से हम अक्षर m को छोड़ देते हैं तथा $\angle BAC$ की माप भी केवल $\angle BAC$ लिखकर व्यक्त करते हैं।

उदाहरण 3.

(i) $\angle BAC = 75^\circ$ का अर्थ है कि $\angle BAC$ की माप 75° है।

(ii) $\angle BAC = \angle PQR$ का अर्थ है कि दोनों कोण $\angle BAC$ और $\angle PQR$ की मापें बराबर हैं।

(iii) $\angle BEF$ ज्ञात करो का अर्थ है, $\angle BEF$ की माप ज्ञात करना।

उदाहरण 4. किसी त्रिभुज के दो कोणों की माप क्रमशः 70° एवं 50° हैं। त्रिभुज के तीसरे कोण की माप ज्ञात कीजिए।

हल-

माना

$$\triangle ABC \text{ में } \angle A = 70^\circ$$

$$\angle B = 50^\circ$$

$$\angle A + \angle B = 70^\circ + 50^\circ = 120^\circ$$

हम जानते हैं कि

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$120^\circ + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle C = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\angle C = 60^\circ$$

उदाहरण 5. एक समद्विबाहु त्रिभुज के दो बराबर कोणों में से प्रत्येक कोण तीसरे कोण का दुगुना है तो इस त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

हल- माना छोटे कोण की माप

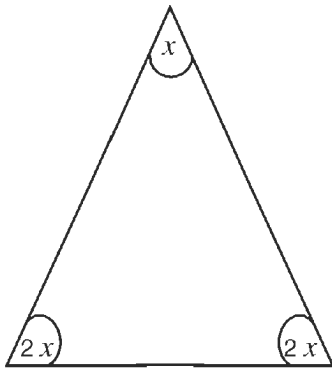
$$= x^\circ$$

अतः अन्य दो कोणों में प्रत्येक कोण की माप

$$= 2x^\circ$$

त्रिभुज के तीनों कोणों का योग

$$= 180^\circ$$



$$\text{अतः } x^\circ + 2x^\circ + 2x^\circ = 180^\circ$$

$$5x^\circ = 180^\circ$$

$$x^\circ = \frac{180}{5} = 36^\circ$$

$$2x^\circ = 2 \times 36^\circ$$

$$= 72^\circ$$

उत्तर - दिए हुए त्रिभुज के तीनों कोणों की मापें क्रमशः 36° , 72° , 72° हैं।

प्रश्नावली 12.3

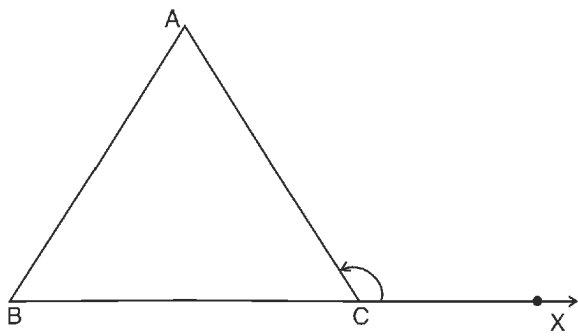
1. किसी त्रिभुज के तीनों कोण परस्पर बराबर हैं। इस त्रिभुज के प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।
2. किसी समकोण त्रिभुज का एक न्यून कोण 40° है। इसका दूसरा न्यून कोण ज्ञात कीजिए।

3. एक त्रिभुज ABC में $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 85^\circ$ तो कोण C की माप ज्ञात कीजिए।
4. एक त्रिभुज के कोणों में क्रमशः 2:3:4 का अनुपात है। इन कोणों की माप ज्ञात कीजिए।
5. एक त्रिभुज के दो कोणों का योग उसके तीसरे कोण के बराबर है तो त्रिभुज का तीसरा कोण ज्ञात कीजिए। इस त्रिभुज का प्रकार लिखिए।
6. किसी त्रिभुज का एक कोण 120° है। इसके शेष दो कोण आपस में बराबर हैं। बराबर कोणों में से प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।
7. क्या कोई ऐसा त्रिभुज हो सकता है, जिसमें
 - (i) दो कोण समकोण हों?
 - (ii) प्रत्येक कोण 60° से बड़ा हो?
 - (iii) दो कोण अधिक कोण हों?
 - (iv) प्रत्येक कोण 60° का हो?
 - (v) दो कोण न्यून कोण हों?
 - (vi) प्रत्येक कोण 60° से छोटा हो?

नोट- प्रत्येक स्थिति में अपने उत्तर के समर्थन में तर्क दीजिए।

8. पटरी की सहायता से एक समद्विबाहु त्रिभुज खींचिए।
9. पटरी की सहायता से एक विषमबाहु त्रिभुज खींचिए।
10. तीन संरेख बिन्दु A, B, C लीजिए, AB, BC तथा CA को मिलाकर इनके मिलाने से बनी आकृति क्या त्रिभुज है? यदि नहीं तो क्यों?
11. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए -
 - (i) एक त्रिभुज में शीर्ष होते हैं।
 - (ii) एक त्रिभुज में भुजाएँ होती हैं।
 - (iii) एक त्रिभुज में अंतः कोण होते हैं।
 - (iv) तीन भुजाओं से निर्मित बंद आकृति को कहते हैं।

11. त्रिभुज का बाह्य कोण एवं अभिमुख अंतः कोण-



- (i) एक त्रिभुज ABC लेकर इसकी भुजा BC को X तक आगे बढ़ाएँ।
- (ii) विचार कीजिए ACX त्रिभुज ABC के बाह्य भाग में स्थित है।
- (iii) $\angle ACX$ त्रिभुज के बाह्य भाग में स्थित है। अतः इसे ΔABC का बाह्य कोण कहते हैं।

“त्रिभुज के किसी भी शीर्ष पर उसकी किसी एक भुजा को आगे बढ़ाने पर इसके द्वारा त्रिभुज के बाह्य भाग में आसन्न भुजा के साथ बनाया गया कोण उस त्रिभुज का बाह्य कोण कहलाता है।”

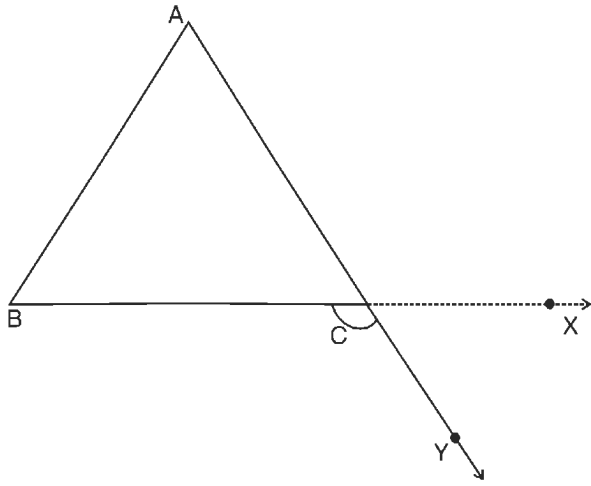
विचार करें -

- (i) $\angle ACB$, बाह्य कोण $\angle ACX$ का आसन्न कोण है।
- (ii) $\angle A$ तथा $\angle B$, बाह्य कोण $\angle ACX$ के आसन्न कोण नहीं हैं।

ΔABC में-

- (i) कोण $\angle ACB$, बाह्य कोण $\angle ACX$ का आसन्न अंतः कोण (Interior adjacent angle) कहलाता है।
- (ii) $\angle A$ तथा $\angle B$ बाह्य कोण $\angle ACX$ के अभिमुख अंतः कोण (Interior opposite angles) कहलाते हैं।

अभिमुख अंतः कोणों को सुदूर अंतः कोण भी कहते हैं।



- (i) ΔABC की भुजा AC को y तक बढ़ाया।
- (ii) $\angle BCY$ भी त्रिभुज के बाह्य भाग में स्थित है। $\angle BCY$, ΔABC के शीर्ष C पर स्थित बाह्य कोण है।

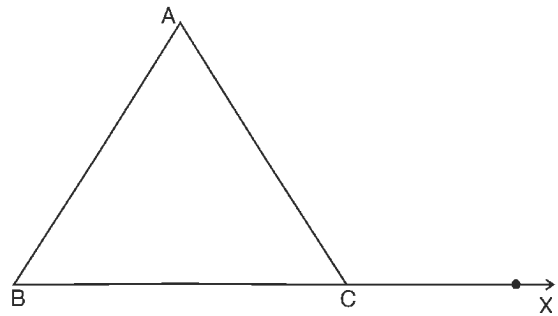
उपरोक्तानुसार ही-

- (i) $\angle ACB$, बाह्य कोण $\angle BCY$ का आसन्न अंतः कोण कहलाता है।
- (ii) $\angle A$ तथा $\angle B$, बाह्य कोण $\angle BCY$ के अभिमुख अंतः कोण अथवा सुदूर अंतः कोण कहलाते हैं।
- (iii) बाह्य कोण $\angle ACX$ एवं $\angle BCY$ परस्पर शीर्षाभिमुख कोण हैं।

त्रिभुज ABC पर विचार करिए

- (i) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$
- (ii) $\angle C +$ बाह्य $\angle ACX = \angle BCX$

अतः (iii) $\angle C +$ बाह्य $\angle ACX = 180^\circ$



(i) एवं (iii) के दायें पक्ष समान हैं। अतः इनके बायें पक्ष भी समान होंगे।

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle C + \text{बाह्य कोण } \angle ACX$$

$$\text{या } \angle A + \angle B = \text{बाह्य कोण } \angle ACX$$

किसी भी त्रिभुज में प्रत्येक बाह्य कोण अपने दोनों अभिमुख अंतः कोणों के योग के बराबर होता है।

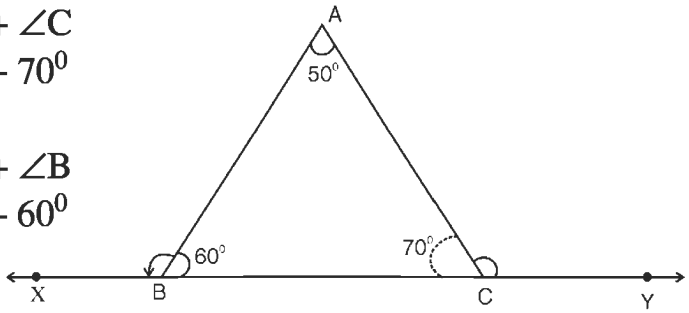
बाह्य कोण $\angle ACX = \angle A + \angle B$

अतः बाह्य कोण $\angle ACX > \angle A$, बाह्य कोण $\angle ACX > \angle B$

किसी भी त्रिभुज में प्रत्येक बाह्य कोण अपने किसी भी अभिमुख अंतः कोण से बड़ा होता है।

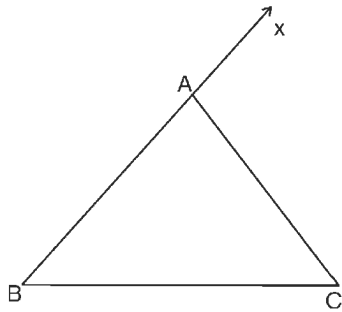
उदाहरण 6. एक त्रिभुज ABC में $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, तथा $\angle C = 70^\circ$ है। इसकी भुजा BC को क्रमशः दोनों ओर X तथा Y तक बढ़ाया गया है। बाह्य कोण $\angle ABX$ एवं $\angle ACY$ को ज्ञात करिए।

- हल-** (i) बाह्य कोण $\angle ABX = \angle A + \angle C$
 बाह्य कोण $= 50^\circ + 70^\circ$
 बाह्य कोण $= 120^\circ$
- (ii) बाह्य $\angle ACY = \angle A + \angle B$
 $= 50^\circ + 60^\circ$
 $= 110^\circ$



प्रश्नावली 12.4

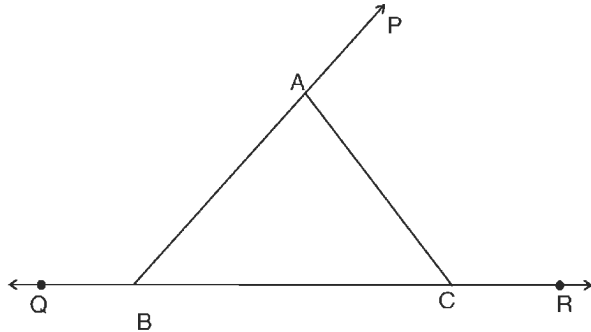
1. आकृति में $\angle CAX$ त्रिभुज ABC का बाह्य कोण है।



- (i) $\angle CAX$ का आसन्न अंतः कोण लिखिए।
 (ii) $\angle CAX$ के अभिमुख अंतः कोणों के नाम लिखिए।
 (iii) $\angle B$ पर बाह्य कोण के सुदूर अंतः कोणों के नाम लिखिए।

2. किसी त्रिभुज में एक बाह्य कोण 110° है उसके सुदूर अंतः कोण परस्पर बराबर हैं। इन बराबर कोणों में से प्रत्येक की माप ज्ञात कीजिए।

3. संलग्न आकृति में अवलोकन करके रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-



- (i) $\angle ABQ = \angle A + \angle \dots\dots\dots$
 (ii) $\angle ACR = \angle B + \angle \dots\dots\dots$
 (iii) $\angle ACR + \angle \dots\dots\dots = 180^\circ$
 (iv) $\angle PAC = \angle C + \angle \dots\dots\dots$
 (v) $\angle PAC + \angle ACR + \angle ABQ = \dots\dots\dots$