पाठ 2

पूर्णांक

आइए सीखें-

- पूर्णांकों की आवश्यकता
- ऋणात्मक संख्याएँ
- ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक-एक धनात्मक पूर्णांक
- किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान।
- पूर्णांकों का क्रम

अभी तक हम प्राकृत संख्याओं और पूर्ण संख्याओं को सीख चुके हैं। हमारे दैनिक जीवन की जरूरतों की पूर्ति प्राकृत संख्याओं और पूर्ण संख्याओं से नहीं होती है। इस समस्या के हल के लिये पूर्ण संख्याओं का आगे विस्तार जरूरी हो गया।

पूर्णांकों की आवश्यकता

हमने देखा है कि यदि एक पूर्ण संख्या में से दूसरी पूर्ण संख्या घटाएँ तो परिणाम पूर्ण संख्या होना आवश्यक नहीं है।

जैसे : पूर्ण संख्या 6 में से 9 घटाने पर हमें एक पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।

$$6 - 9 = ?$$

आइए प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 .... पर विचार करें और प्रत्येक प्राकृत संख्या (शून्य के अलावा पूर्ण सख्या) के समान एक नई संख्या नीचे बताए अनुसार बनाएँ।

1 के लिये -1 बनाते हैं। जिसे ऋणात्मक (negative) एक या ऋण (minus) एक कहा जाता है, ताकि $1+(-1) = 0$ हो। -1 और 1 विपरीत (Opposite) कहते हैं।

2 के लिये -2

3 के लिये -3

....

....

इस प्रकार प्राप्त $-2, -3, -4, -5$ .... को ऋणात्मक या ऋण पूर्णांक (Negative Integers) 1, 2, 3, 4, 5, ... को धनात्मक पूर्णांक कहते हैं। इन सभी संख्याओं को पूर्णांक (Integers) कहते हैं।

संख्या 0 एक पूर्णांक है। यह न तो ऋणात्मक है और न ही धनात्मक है। धनात्मक पूर्णांकों को $+1$, $+2$, $+3$, $+4$ ..... भी लिखा जाता है। परन्तु प्रायः धन चिह्न (+) को नहीं लिखते है।

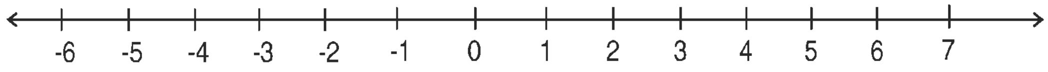
ऋणात्मक संख्याओं की आवश्यकता केवल $4-7$ जैसी परिस्थितियों के लिये ही नहीं होती बल्कि वास्तविक जीवन में जहाँ भी विपरीत स्थितियां होती है, हम धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं का उपयोग करते हैं। 0^0C से ऊपर के तापमानों को धनात्मक पूर्णांकों द्वारा तथा इसके विपरीत 0^0C से नीचे के तापमानों

को ऋणात्मक पूर्णांकों से दिखाते हैं।

जैसे- जब हम कहते हैं कि शिमला का तापमान -4^0C है। तो यहाँ केवल ऋणात्मक पूर्णांक -4 बताया गया है।

ऋणात्मक संख्या का ऋणात्मक एक धनात्मक पूर्णांक :

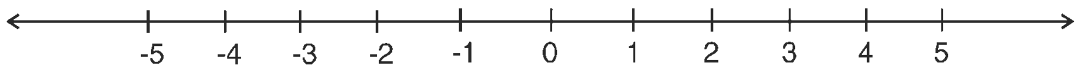
संख्या रेखा को ध्यान से देखिए



हम देखते हैं कि $+1$ की ऋणात्मक संख्या -1, $+2$ की ऋणात्मक संख्या -2, $+3$ की ऋणात्मक संख्या -3 आदि है। इसको हम कह सकते हैं कि किसी धनात्मक पूर्णांक की ऋणात्मक संख्या बायीं ओर उतनी ही इकाइयाँ होती है। जैसे 6 की ऋणात्मक संख्या -6 या $-(+6)$ तथा $+25$ की ऋणात्मक संख्या -25 या $-(+25)$ होगी।

पूर्णांकों का संख्या रेखा पर निरूपण :

ऋणात्मक पूर्णांक, धनात्मक पूर्णांकों अर्थात् प्राकृत संख्याओं के विपरीत है। इसलिए हम संख्या रेखा पर इन्हें विपरीत दिशा अर्थात् शून्य के बाँयीं ओर लिखते हैं। विपरीत पूर्णांकों उदाहरणार्थ 2 और -2 को शून्य से समान दूरी पर रखते हैं। शून्य धनात्मक और ऋणात्मक पूर्णांकों का मिलन बिन्दु है, इसलिये न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक। इस प्रकार नीचे दर्शाए अनुसार संख्या रेखा बना लेते हैं :



आइए संख्या रेखा को ध्यान से देखें। दायीं ओर स्थिति प्रत्येक पूर्ण संख्या, संख्या रेखा पर अपनी बाँई ओर की प्रत्येक पूर्ण संख्या से बड़ी है।

दायीं ओर का पूर्णांक		**बाँयीं ओर का पूर्णांक**
2		1
1	बड़ा है	0
0		-1
-1		-2

इस प्रकार हमें महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होते हैं :

- प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक, प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा है।
- शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा है।
- शून्य प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा है।
- कोई संख्या जितनी बड़ी होगी, उसकी विपरीत (ऋणात्मक) संख्या उतनी ही छोटी होगी।

उपरोक्त के आधार पर हम कह सकते हैं कि

$$5 > 2$$
$$-5 < 2$$
$$-5 < -2$$
$$3 < 5$$
$$-3 > -5$$

दूसरे शब्दों में, यदि a और b दो पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $a > b$, तो $-a < -b$ होगा।

किसी पूर्णांक का निरपेक्षमान :

संख्या रेखा को देखकर हम कह सकते हैं कि 5 का मान 0 के दायीं ओर 5 इकाइयाँ है। जबकि – 5 इकाइयाँ है – 5 का मान 0 के बायीं ओर 5 इकाइयाँ है। यदि हम दिशा पर ध्यान न दें। (चिन्ह पर विचार न करें) तो 5 और – 5 दोनों का मान 5 इकाइयाँ है यही 5 और – 5 का निरपेक्ष मान है।

किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान दर्शाने के लिए, उस पूर्णांक के दोनों ओर एक-एक खड़ी रेखा लगा देते हैं। इस प्रकार – 3 का निरपेक्ष मान $|-3| = 3$ में व्यक्त किया जाता है। हम लिख सकते हैं :

$$|+7| = 7, \qquad |-7| = 7$$
$$|-11| = 11, \qquad |+11| = 11$$

इस प्रकार, हम परिणाम प्राप्त करते हैं कि

यदि a एक पूर्णांक हो, तो $|a| = a$, जब a पूर्णांक या शून्य है। और $|-a| = a$ जब a ऋणात्मक पूर्णांक है।

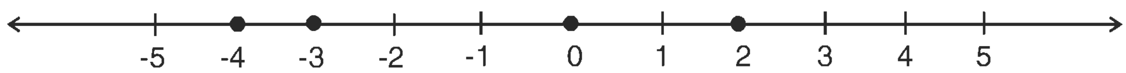
प्रश्नावली 2.1

1. नीचे दिए गए शब्दों का विलोम लिखिए -

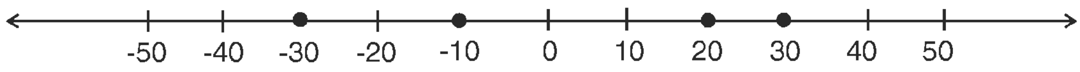
   (i) जनसंख्या वृद्धि (ii) प्रदूषणों में कमी

2. संख्या रेखा पर दिखाए गए काले बिन्दुओं वाली संख्या को लिखिए-

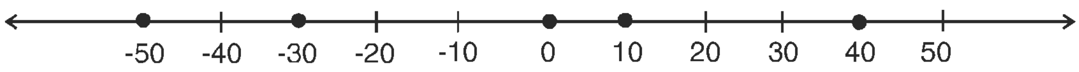
   (i)



(ii)



(iii)



3. संख्या रेखा का प्रयोग कर पूर्णांकों को लिखिए।

(i) 3 से 4 अधिक (ii) 2 से 5 कम

(iii) – 7 से 8 अधिक (iv) – 3 से 7 कम

4. संख्या रेखा का उपयोग कर नीचे दी गई संख्याओं की जोड़ियों में कौन सी संख्या, दूसरी संख्या के दाई ओर स्थित है :

(i) 1, 7, (ii) –2,–5, (iii) 0, –3, (iv) –5, 8

5. दी गई पूर्णांकों की जोड़ियों में कौन सी संख्या दूसरी से छोटी है?

(i) 5, –7, (ii) 0, –6, (iii) –10, –5, (iv) 218, –236

6. निम्न के बीच के सभी पूर्णांक लिखिए

(i) – 5 और 5 (ii) 0 और 6

(iii) – 5 और 7 (iv) –7 और 0

7. निम्न कथनों के लिए सत्य (T) अथवा असत्य (F) लिखिए :

(i) सबसे छोटा पूर्णांक शून्य है।

(ii) –18 बड़ा है –5 से।

(iii) एक धनात्मक पूर्णांक अपने ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

(iv) किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस पूर्णांक से सदैव बड़ा होता है।

(v) –396 का परवर्ती (बाद की संख्या) –395 है।

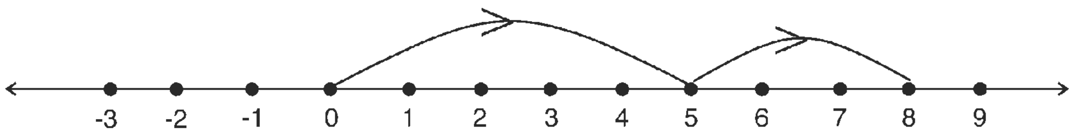
(vi) –139 का पूर्ववर्ती (पहले की संख्या) –140 है।

पूर्णांकों का योग

दो पूर्ण संख्याओं का योग करना हम सीख चुके हैं। हम जानते हैं कि पूर्णांक का निरपेक्ष मान एक पूर्ण संख्या होती है। हम जोड़ करने की प्रक्रिया को संख्या रेखा की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

दो धनात्मक पूर्णांकों का योग

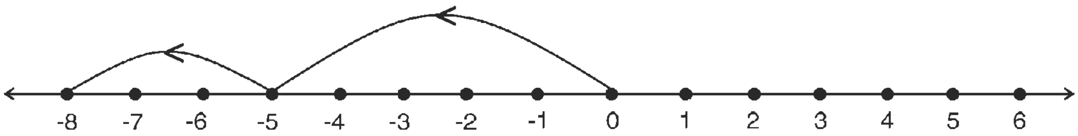
मान लीजिए कि हमें +5 और +3 का योग ज्ञात करना है



पहले हम संख्या रेखा पर शून्य के दाई ओर 5 भाग (इकाई) चल कर 5 अर्थात् 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम +5 के दाई ओर 3 भाग (इकाई) चलकर +8 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार (+5) + (+3) = 8, अर्थात् 8 है।

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग

अब मान लीजिए (–5) + (–3) ज्ञात करना है।

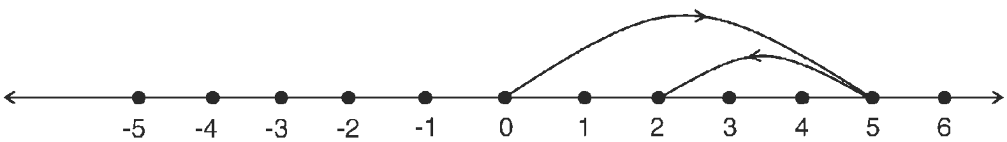


पहले संख्या रेखा पर 0 के बाई ओर 5 कदम चलकर –5 पर और फिर –5 के बाई ओर 3 कदम चलकर –8 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार (–5) + (–3) = –8 है।

धनात्मक पूर्णांकों या दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग ज्ञात करने के लिए हम उनके निरपेक्ष मानों को जोड़ते हैं और उनके योग में उन पूर्णांकों का चिह्न लगा देते हैं।

एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का योग

मान लीजिए कि हम + 5 और –3 का योग ज्ञात करना चाहते हैं

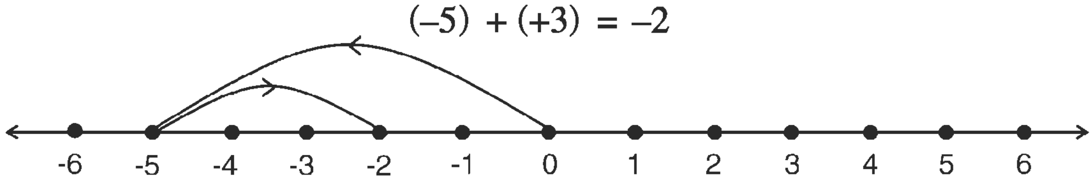


पहले हम शून्य के दाई ओर 5 कदम चलते हैं और 5 पर पहुँचते हैं। इसके पश्चात् 5 के बाई ओर 3 कदम चलते हैं और 2 पर पहुँचते हैं। इस प्रकार

$$(+5) + (-3) = 2$$

इसी प्रकार –5 व +3 का योग ज्ञात करने के लिये, हम संख्या रेखा पर पहले शून्य के बाई ओर 5 कदम चलकर –5 पर पहुँचते हैं और फिर –5 के दाई ओर 3 कदम चलकर –2 पर पहुँचेंगे। इस प्रकार

$$(-5) + (+3) = -2$$



इसे याद रखें, एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक को जोड़ने के लिए हम उनके निरपेक्ष मानों का अंतर ज्ञात करते हैं और इस अंतर में बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिह्न लगा देते हैं।

अब योग क्रिया के कुछ उदाहरणों को हल करते हैं :

उदाहरण 1. निम्न का योग ज्ञात कीजिए-

(i) 37 व 64 (ii) –74 व – 48

हल:

(i) $37 + 64 = +(|37|) + (|64|)$

$= +(37 + 64)$

$= +101 = 101$

(ii) $(-74) + (-48) = -(|-74| + |-48|)$

$= -(74 + 48)$

$= -122$

उदाहरण 2. योग ज्ञात कीजिए

(i) 29 व –70 (ii) –37 व 42

हल-

(i) $|29| = 29$ तथा $|-70| = 70$

बड़ी संख्या 70 का निरपेक्ष मान बड़ा है और इसका चिन्ह ऋण है।

अतः $(29) + (-70) = -(70-29)$

$= -41$

(ii) $|-37| = 37$ तथा $|42| = 42$

यहाँ 42 का निरपेक्ष मान बड़ा है और इसका चिन्ह + है।

अतः $(-37) + (+42) = +(42-37)$

$= +5 = 5$

पूर्णांकों के योग के गुण

हम अपने संख्या प्रणाली का पूर्ण संख्याओं से पूर्णांकों तक विस्तार करते हैं पूर्ण संख्याओं की संक्रियाओं के समस्त गुण वही रहते हैं। इन गुणों के अतिरिक्त एक या दो नये गुण और हो सकते हैं। ऐसा इसलिए है क्योंकि सभी पूर्ण संख्याएँ पूर्णांक भी हैं। योग के कुछ गुण दिए जा रहे हैं :

गुण I. $a + b$ एक पूर्णांक है।

नीचे दिए गए उदाहरणों को देखिए :

उदाहरण 3.: (i) $2 + (-7) = -5$ एक पूर्णांक है।

(ii) $-3 + (-8) = -11$ एक पूर्णांक है।

(iii) $26 + (-11) = 15$ एक पूर्णांक है।

गुण I. यदि a, b व c पूर्णांक हों, तो $a + b = c$ भी एक पूर्णांक होगी अर्थात् दो पूर्णांकों का योग भी एक पूर्णांक संख्या होगी।

गुण II. दिए उदाहरणों को देखिए-

(i) $5 + (-4) = 1 = (-4) + 5$ (प्रत्येक + 1 के बराबर है)

(ii) $(-4) + (-8) = -12 = (-8) + (-4)$ (प्रत्येक –12 के बराबर है)

गुण II. यदि a और b कोई दो पूर्णांक हैं तो $a + b = b + a$ अर्थात् दो पूर्णांकों को क्रम बदलकर जोड़ने पर योगफल का पूर्णांक वही रहता है।

गुण III. नीचे दिए उदाहरणों को ध्यान से देखिए :

मान ले –5, –7 और 3 पूर्णांक हैं। तो

$[(-5) + (-7)] + 3 = (-12) + 3 = -9$

और $(-5) + [(-7) + 3] = -5 - 4 = -9$

$\therefore [(-5) + (-7)] + 3 = -9 = (-5) + [(-7) + 3]$

गुण III. यदि a, b, c कोई तीन पूर्णांक हैं तो $a + (b + c) = (a + b) + c = (a + c) + b$ अर्थात् तीन या अधिक पूर्णांकों को जोड़ने के लिए कोई भी दो पूर्णांकों को पहले जोड़ सकते हैं।

गुण IV. नीचे दिए उदाहरणों को ध्यान से देखिए

(i) $8 + 0 = 8 = 0 + 8$

(ii) $(-3) + 0 = -3 = 0 + (-3)$

(iii) $0 + (-5) = -5 = (-5) + 0$

गुण (IV) 0 इस प्रकार का पूर्णांक है कि किसी भी पूर्णांक a के लिए $a + 0 = 0 + a = a$ होता है। 0 योज्य तत्समक कहलाता है।

गुण (V) नीचे दिए उदाहरणों को ध्यान से देखिए :

$3 + (-3) = 0$ और $(-3) + 3 = 0$

अतः 3 का योज्य प्रतिलोम –3 है।

और –3 का योज्य प्रतिलोम 3 है।

स्पष्ट है कि 0 का योज्य प्रतिलोम 0 है।

प्रश्नावली 2.2

1. एक संख्या रेखा खींचिए और उस पर निम्न लिखित में से प्रत्येक को निरूपित कीजिए।

(i) $9 + (-6)$ (ii) $(-3) + 6$ (iii) $8 + (-8)$

(iv) $(-1) + (-3)$ (v) $(-4) + (-7)$ (vi) $(-2) + (-8) + 6$

2. संख्या रेखा का प्रयोग कर वह पूर्णांक लिखिए जो
   (i) 5 से 3 अधिक है। (ii) 3 से 9 कम है।
   (iii) –9 से 7 अधिक है। (iv) 2 से 12 कम है।
3. नीचे दिए गए पूर्णांकों का योग कीजिए :
   (i) – 365, – 87 (ii) 786, – 98 (iii) – 602, + 98
   (iv) – 103, 325 (v) 257, – 69 (vi) –5678, 0
   (vii) 3400, – 555 (viii) 3579, – 3579
   (ix) – 298, 2349, – 81, 3468
4. योग ज्ञात कीजिए :
   (i) $(-45) + (-37) + 123$
   (ii) $2372 + (-475) + (-629) + 678$
   (iii) $890 + (-6) + 0 + 1 + (-576)$
   (iv) $423 + (-364) + (-456) + 342 + 2000$
   (v) $-480 + (-58) + 7 + (-21)$
   (vi) $3000 + 145 + (-517) + (-556)$
   (vii) $1024 + 125 + (-256) + (-366) + 64$
   (viii) $(-243) + 79 + (-3) + 515 + (-5)$
   (ix) $-12 - [(-15) + (-2) - 3]$
   (x) $1056 + (-789) + (-97) + 55$
5. सत्य कथनों के लिए T और असत्य के लिए F लिखिए :
   (i) किसी पूर्णांक और उसके ऋणात्मक का योग शून्य होता है।
   (ii) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग एक धनात्मक पूर्णांक होता है।
   (iii) एक ऋणात्मक पूर्णांक और एक धनात्मक पूर्णांक का योग सदैव एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है।
   (iv) तीन भिन्न पूर्णांकों का योग कभी भी शून्य नहीं हो सकता।
   (v) क्योंकि $-4 < -3$ है तो $|-4| < |-3|$ होगा
   (vi) $|4 - 3| = |4| + |-3|$

पूर्णांकों का घटाना :

हम दो पूर्णांक संख्याओं की घटाने की क्रिया सीख चुके हैं। हमने घटाने की क्रिया को योग के विपरीत क्रिया के रूप में परिभाषित किया है। उदाहरण के लिए 9 में से 4 घटाना ठीक उसी प्रकार है कि 4 में क्या जोड़ा जाए कि 9 प्राप्त हो। उत्तर स्पष्ट ही 5 है।

अतः $9 - 4 = 5$ या $4 + 5 = 9$

इसी विचार को पूर्णांकों के घटाने की क्रिया में प्रयोग करते हैं। कल्पना करें कि 6 में से (– 4) घटाना है। इसे हम दो प्रकार से कर सकते हैं।

(i) संख्या रेखा की सहायता लेकर। हम विचार करते हैं कि -4 में क्या जोड़ें कि 6 हो जाए। अब -4 से प्रारम्भ कर कितने भाग (इकाई) गिनें कि 6 पर पहुँच जाएँ। स्पष्ट है 10 इकाई गिनने पर हम 6 पर पहुँचते हैं।

अतः $6-(-4) = 10$ क्योंकि $(-4) + 10 = 6$

(ii) $6-(-4)$ को हल करने के लिये हम -4 के विपरीत अंक को लेते हैं। -4 का विपरीत अंक पूर्णांक $+4$ है।

अतः $= 6-(-4)$
$= 6+4$
$= 10$

> **नियम :** दो पूर्णांकों में घटाने की क्रिया के लिए घटाए जाने वाले पूर्णांक के प्रतिलोम को दूसरे पूर्णांक में जोड़ देते हैं।

अब कुछ उदाहरण हल करते हैं

उदाहरण 4. : घटाइए (i) $2-7$ (ii) 5 में से -8

हल-

(i) $2-7 = 2+(-7) = -5$ (7 का ऋणात्मक पूर्णांक लेने पर)

(ii) $5-(-8) = 5+8 = 13$ (-8 का ऋणात्मक पूर्णांक)

हम जानते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं पर घटाने की संक्रिया करने पर यह आवश्यक नहीं है कि पूर्ण संख्या ही प्राप्त हो। परन्तु पूर्णांक में से पूर्णांक को घटाने पर सदैव एक पूर्णांक ही प्राप्त होता है।

पूर्णांकों में घटाने (व्यवकलन) के गुण

गुण I. आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं :

(i) $8-(+5) = 3$ एक पूर्णांक

(ii) $15-20 = -5$ एक पूर्णांक

(iii) $-3-(-7) = -3+7 = +4$ एक पूर्णांक

> **गुण I.** दो पूर्णांकों को घटाने पर सदैव एक पूर्णांक प्राप्त होता है।
> यदि a और b दो पूर्णांक हों, तो उनका व्यवकलन $a-b=c$ भी एक पूर्णांक होता है।

गुण II. अब नीचे दिए गए उदाहरणों को ध्यान से देखिए :

$15-0 = 15$

$-9-0 = -9$

गुण II. यदि a कोई भी पूर्णांक हो तो 0 घटाने पर वही पूर्णांक प्राप्त होता है।

$a - 0 = a$

गुण III. नीचे दिए गए उदाहरणों को देखिए :

(i) $15 > 8$ अतः $15 - 6 > 8 - 6$ या $9 > 2$

(ii) $-5 > -9$ अतः $-5 - 3 > -9 - 3$ या $-8 > -12$

(iii) $-16 > -20$ अतः $-16 - (-9) > -20 - (-9)$ या $-7 > -11$

(iv) $-3 < 5$ अतः $-3 - (6) < 5 - (6)$ या $-9 < -1$

(v) $-5 < -4$ अतः $-5 - (-11) < -4 - (-11)$ या $6 < 7$

गुण III. यदि a, b, c तीन पूर्णांक हों और $a > b$ तब $a - c > b - c$ अर्थात् दो पूर्णांक के बीच का संबंध, किसी एक पूर्णांक को दोंनों में से घटाने पर अपरिवर्तित रहता है।

प्रश्नावली 2.3

1. घटाइए :

(i) -34 से 18 (ii) 25 से -15 (iii) -43 से -28

(iv) -37 से 68 (v) 0 से 219 (vi) -100 से -200

(vii) -6 से 8650 (viii) 3126 से -812 (ix) 0 से -155

(x) 40321 से 83241

2. (-5060) में 381 जोड़कर -73 घटाइए।
3. (-270) और 395 के जोड़ में से -25 घटाइए।
4. 33 और -47 के योग में से -75 घटाइए।
5. -8 और -86 के अंतर में -36 जोड़िए।
6. दो पूर्णांकों का योग 54 है। यदि उसमें से एक पूर्णांक -27 हो, तो दूसरा पूर्णांक ज्ञात करो।
7. 7 में से -5 को घटाइए। -5 में से 7 को घटाइए। क्या दोनों परिणाम समान हैं?
8. सत्य कथन के सामने (T) और असत्य कथन के सामने (F) का चिन्ह लगाइए :

(i) दो पूर्णांकों का योग हमेशा एक पूर्णांक होता है।

(ii) दो पूर्णांकों का अंतर हमेशा एक पूर्णांक होता है।

(iii) $-14 > -8 - (-7)$

(iv) $-5 - 2 > -8$

(v) $(-7) - 3 = (-3) - (-7)$

पूर्णांकों का गुणन :

आपको याद होगा कि गुणन क्रिया एक प्रकार से बार-बार योग की संक्रिया है।

उदाहरणार्थ, $3 \times 5 = 5 + 5 + 5 = 15$ होता है।

इसी प्रकार

$3 \times (-5) = (-5) + (-5) + (-5) = -15$........... (1)

हम यह भी जानते हैं कि $3 \times 5 = 5 \times 3$ तथा $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

अतः $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$

इसी प्रकार $(-3) \times 5 = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$ होगा .... (2)

अब (1) व (2) से

$3 \times (-5) = (-3) \times 5 = -15 = -(3 \times 5)$

इस उदाहरण से पूर्णांकों के गुणनफल के नियम नीचे दिए जा रहे हैं

नियम (1) : विपरीत चिन्हों वाले दो पूर्णांकों का गुणनफल प्राप्त करने के लिए हम उन पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों का गुणनफल प्राप्त कर उसमें ऋण का चिन्ह लगाते हैं।

अब (–3) व (–5) का गुणनफल ज्ञात करते हैं अर्थात् दो ऋणणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल निकालना।

हम देख चुके हैं कि

	$3 \times (-5)$	$= -(3 \times 5)$ .... A	
तथा	$(-3) \times 5$	$= -(3 \times 5)$ .... B	
अतः	$(-3) \times (-5)$	$= -[-3 \times 5]$	A के अनुसार
		$= -[-(3 \times 5)]$	B के अनुसार

साथ ही, हम जानते हैं कि $-(-a) = a$ है।

अतः $(-3) \times (-5) = 3 \times 5 = 15$

नियम (2) दो धनात्मक अथवा दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल ज्ञात करने के लिए हम उन दोनों पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों का गुणनफल ज्ञात करते हैं और उसमें धन का चिह्न लगा देते हैं।

इस नियम के आधार पर कुछ उदाहरण हल करते हैं

उदाहरण 5. : गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(-4) \times (-5)$ (ii) $(-15) \times 35$ (iii) $139 \times (-7)$

हल :

(i) $(-4) \times (-5) = |-4| \times |-5| = 4 \times 5 = 20$

(ii) $(-15) \times 35$

$= -(15 \times 35)$

$= -525$

(iii) $139 \times (-7)$

$= -(139 \times 7)$

$= -973$

गुणन के गुण

पूर्ण संख्याओं के गुणन के सभी गुण, पूर्णांकों के लिए भी सत्य हैं। इन गुणों को संक्षेप में एक बार फिर नीचे दे रहे हैं। जबकि a, b, c पूर्णांक हैं।

गुण I. दिए गए उदाहरणों को देखिए-

(i) $(-3) \times 4 = -12$ — -12 एक पूर्णांक है।

(ii) $(-2) \times (-3) = 6$ — 6 एक पूर्णांक है।

> **गुण I.** यदि a और b पूर्णांक संख्या हैं तो $a \times b = c$ भी एक पूर्णांक है। अर्थात् दो पूर्णांकों का गुणनफल एक पूर्णांक संख्या है।

गुण II. दिए गए उदाहरणों को देखिए-

(i) $4 \times (-5) = (-5) \times 4$ (प्रत्येक $= -20$)

(ii) $(-4) \times (-5) = (-5) \times (-4)$ (प्रत्येक $= 20$)

> **गुण II.** यदि a और b पूर्णांक संख्याएँ हैं तो $a \times b = b \times a$ अर्थात् दो पूर्णांक संख्याओं का गुणनफल, क्रम बदलने पर भी अपरिवर्तित रहता है।

गुण III. $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

नीचे दिए उदाहरणों को देखिए-

(i) $(-2) \times [(-3) \times (-4)] = [(-2) \times (-3)] \times (-4)$

यहाँ $(-2) \times [(-3) \times (-4)] = (-2) \times 12 = -24$

और $[(-2) \times (-3)] \times (-4) = 6 \times (-4) = -24$

(ii) $(-4) \times [(-5) \times 6)] = [(-4) \times (-5)] \times 6$

यहाँ $(-4) \times [(-5) \times 6)] = (-4) \times (-30) = 120$

और $[(-4) \times (-5)] \times 6 = 20 \times 6 = 120$

> **गुण III.** यदि a, b, c पूर्णांक संख्याएँ हों तो $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ अर्थात् यदि हम तीन या अधिक पूर्णांकों के गुणनफल में पूर्णांकों का क्रम बदल दें तो भी गुणनफल के मान में कोई अन्तर नहीं होगा।

दिए गए उदाहरणों पर विचार कीजिए-

गुणनफलों $(-3) \times (-2) \times (-3) \times 4$, $(-2) \times 4 \times 3$,

$(-4) \times (-3) \times (-1) \times (-5) \times (-5)$ प्रत्येक में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम होने से गुणनफल ऋणात्मक होगा और $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (5)$ तथा $(-7) \times (-8) \times (-9) \times (-10) \times (11) \times (12)$ में से प्रत्येक में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम होने से गुणनफल धनात्मक होगा।

स्मरणीय-

1. यदि किसी गुणनफल में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या विषम हो तो गुणनफल ऋणात्मक होगा।
2. यदि किसी गुणनफल में ऋणात्मक पूर्णांकों की संख्या सम हो, तो गुणनफल धनात्मक होगा।

गुण (IV) : $a \times 0 = 0 \times a = 0$ यहाँ a एक पूर्णांक है अर्थात् किसी पूर्णांक को शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है।

इस नियम के लिए दिए गए उदाहरणों को देखिए-

$15 \times 0 = 0$, $\quad -8 \times 0 = 0$

$0 \times 25 = 0$, $\quad 0 \times (-42) = 0$

गुण (V) $a \times 1 = 1 \times a$ अर्थात् किसी भी पूर्णांक को 1 से गुणा करने पर गुणनफल वही पूर्णांक होता है।

गुण V के लिए दिये गए उदाहरणों को देखिए-

$7 \times 1 = 7$, $\quad (-9) \times 1 = -9$

$-1 \times 36 = -36$, $\quad (-1) \times 17 = -17$

गुण (VI) ऊपर दिए गए उदाहरणों के आधार पर $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$ हम जानते हैं कि a और $-a$ एक दूसरे के विपरीत हैं। इस प्रकार, किसी पूर्णांक का ऋणात्मक ज्ञात करने के लिए हमें उसे (-1) से गुणा करना होगा।

गुण (VII) उदाहरणों को ध्यान से देखिए

(i) $(-3) \times [(-5) + 4] = (-3) \times (-5) + (-3) \times 4$
$= 15 - 12 = 3$

ii) $(-8) \times (7 - 4) = (-8) \times (7) - (-8 \times 4)$
$= -56 + 32 = -24$

गुण (VII)

(i) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

(ii) $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

प्रश्नावली 2.4

1. नीचे दिए प्रश्नों में गुणनफल का चिन्ह क्या होगा?
   (1) दो धनात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
   (2) दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
   (3) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
   (4) 8 ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
   (5) 5 ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
   (6) 11 ऋणात्मक और 2 धनात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
   (7) 8 धनात्मक और 1 ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणा करने पर।
2. गुणा करो -
   (i) 16×8 (ii) $19 \times (-6)$ (iii) $39 \times (-12)$ (iv) -18×14
   (v) $(-65) \times 17$ (vi) $23 \times (-21)$ (vii) $(-75) \times 0$ (viii) $0 \times (-13)$
3. गुणनफल ज्ञात करिए :
   (i) $(3) \times 4 \times (-5)$ (ii) $3 \times (-6) \times -7$
   (iii) $(-9) \times 4 \times 6$ (iv) $9 \times 8 \times (-11)$
   (v) $(-4) \times (-8) \times (-7)$ (vi) $(-9) \times (-4) \times (-8)$
4. एक पूर्णांक में (–1) का गुणा करने पर गुणनफल
   (1) कब ऋणात्मक आएगा? (3) कब न तो धनात्मक हो न ही ऋणात्मक आएगा?
   (2) कब धनात्मक आएगा? (4) कब 100 आएगा?
5. नीचे दिए प्रश्नों की सत्यता ज्ञात कीजिए-
   (i) $17 \times [8 + (-7)] = 17 \times 8 + 17 \times (-7)$
   (ii) $-14 \times [(-15) + (-18)] = (-14) \times (-15) + (-14) \times (-18)$
6. हल कीजिए -
   (i) $(-8) \times 7 + (-8) \times 3$ (ii) $9 \times (-11) + 6 \times (-11)$
   (iii) $40 \times (-25) + 40 \times 20$ (iv) $(-13) \times (-14) + (-13) \times (-14)$
7. हाँ या नहीं में उत्तर लिखिए :
   (1) प्रत्येक पूर्णांक को (-1) से गुणा करने पर विपरीत पूर्णांक प्राप्त होता है।
   (2) दो धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल ऋणात्मक प्राप्त होता है।
   (3) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल धनात्मक होता है।
8. हल करो-
   (i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$

(ii) $(-3) \times (-6) \times (-9) \times (-12) \times (-9)$

(iii) $(-8) \times 0 \times 37 \times (-38087)$

(iv) $(-181) \times (-44) + (-181) \times (-56)$

(v) $(-45) \times (66) \times (-15)$

9. नीचे दी गई गुणन सारणी को पूरा कीजिए-

द्वितीय संख्या

प्रथम संख्या

×	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4
– 4	16								
– 3									
– 2									
– 1									
0									
1									
2									
3									
4									

पूर्णांकों में विभाजन

हम जानते हैं कि एक पूर्ण संख्या को दूसरी पूर्ण संख्या से किस प्रकार विभाजित किया जाता है। हमें यह भी ज्ञात है कि विभाजन संक्रिया गुणन की विपरीत संक्रिया है। यदि हम एक गुणन तथ्य तथा उससे संबंधित दो विभाजन तथ्यों को ध्यान में रखें, तो पूर्णांकों के विभाजन के नियम पूर्णांकों के गुणन के नियमों से प्राप्त किए जा सकते हैं। उदाहरणार्थ,

गुणन तथ्य	विभाजन के संगत, तथ्य	
$2 \times 4 = 8$	$8 \div 2 = 4$,	$8 \div 4 = 2$
$(-3) \times (-6) = 18$	$18 \div (-3) = -6$,	$18 \div (-6) = -3$
$7 \times (-4) = -28$	$-28 \div 7 = -4$,	$-28 \div (-4) = 7$

उपर्युक्त उदाहरणों से हम पूर्णांकों के विभाजन के लिए निम्नलिखित नियम प्राप्त करते हैं

नियम (1) यदि भाजक और भाज्य का चिन्ह समान (अर्थात् दोनों ही धनात्मक है अथवा दोनों ही ऋणात्मक) है, तो भागफल सदैव धनात्मक होता है।   (2) यदि भाजक और भाज्य विपरीत चिन्ह वाले हैं, तो भागफल सदैव ऋणात्मक होता है।

अब हम विभाजन संक्रिया के गुणों को सूचिबद्ध करेंगे। इसके लिए नीचे दिए गए उदाहरणों को देखिए।

उदाहरण (i) $14 \div 3,\ -15 \div 7$ पूर्णांक नहीं हैं

उदाहरण (ii) $15 \div 15 = 1, 0 \div 0$ सार्थक नहीं

उदाहरण (iii) $25 \div 1 = 25, -10 \div 1 = -10$

उदाहरण (iv) $0 \div 11 = 0, 0 \div (-21) = 0$

उदाहरण (v) $(24 \div 6) \div 2 \neq 24 \div (6 \div 2)$

$$4 \div 2 \neq 24 \div 3$$

$$2 \neq 8$$

उदाहरण (i) से-	गुण I यदि a तथा b दो पूर्णांक हों तो $a \div b$ का पूर्णांक होना आवश्यक नहीं है।
उदाहरण (ii) से-	गुण II यदि a एक पूर्णांक है और $a \neq 0$ तो $a \div a = 1$
उदाहरण (iii) से-	गुण III किसी भी पूर्णांक a के लिए $a \div 1 = a$ होता है।
उदाहरण (iv) से-	गुण IV यदि a एक पूर्णांक है तथा $a \neq 0$ तो $0 \div a = 0$ परन्तु $a \div 0$ सार्थक नहीं है।
उदाहरण (V) से-	गुण V यदि $c \neq 1$ तथा $a \neq 0$ है तो $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ होगा।

अब नीचे दिए गए उदाहरणों को देखिए :

(i) $24 > 16$ है तथा 8 धनात्मक है।

साथ ही, $24 \div 8 = 3, 16 \div 8 = 2$ और $3 > 2$ है।

इस प्रकार $24 \div 8 > 16 \div 8$ है।

(ii) $24 > 16$ है तथा -8 ऋणात्मक है।

साथ ही $24 \div (-8) = -3, 16 \div (-8) = -2$ और $-3 < -2$ है।

इस प्रकार $24 \div (-8) < 16 \div (-8)$ है। अतः

गुण VI-यदि $a > b$ है, तो   (i) $a \div c > b \div c$ है, यदि c धनात्मक है,   (ii) $a \div c < b \div c$ है, यदि c ऋणात्मक है।

प्रश्नावली 2.5

1. भागफल ज्ञात कीजिए -

(i)	$27 \div (-3)$	(ii)	$(-27) \div 3$
(iii)	$(-27) \div (-3)$	(iv)	$72 \div (-9)$
(v)	$(-144) \div (-12)$	(vi)	$0 \div (-12)$
(vii)	$(-1728) \div 12$	(viii)	$(-15625) \div (-125)$
(ix)	$(-729) \div (-81)$	(x)	$410569 \div (-1)$
(xi)	$200000 \div (-100)$	(xii)	$97699 \div (-97699)$

2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i)	$696 \div$ .... $= 696$	(ii)	$-8785 \div$ ....$=1$
(iii)	.... $\div 3578 = 0$	(iv)	........$\div 1 = -30655$
(v)	.... $\div 156 = -2$	(vi)	.... $\div 5671 = -1$

3. सत्य कथनों के लिए (T) अथवा असत्य कथन के लिए (F) लिखए :

(i)	$0 \div (-9) = 0$	(ii)	$(-7) \div 0 = 0$
(iii)	$(-48) \div (-6) = -8$	(iv)	$23 \div (-1) = -23$
(v)	$(-79) \div (-1) = -79$	(vi)	$(+20) \div (-5) = 4$

पूर्णांकों के घात

यदि हम दो समान संख्याओं का गुणा करें, अर्थात् किसी पूर्णांक a के लिये हमारे पास, गुणनफल $a \times a$ है, तो हम इसे a^2 लिखते हैं तथा 'a का वर्ग', 'a की घात दो' या 'a की दूसरी घात' पढ़ते हैं। इसी प्रकार, $a \times a \times a$ को संक्षेप में हम a^3 लिखते हैं और 'a का घन', 'a की घात 3' अथवा 'a की तीसरी घात' पढ़ते हैं। इसी प्रकार, a^5, a^6 क्रमशः $a \times a \times a \times a \times a$ तथा $a \times a \times a \times a \times a \times a$ के संक्षिप्त रूप हैं। a^5 को 'a की घात 5' तथा a^6 को 'a की घात 6' पढ़ा जाता है।

उदाहरण के लिए, $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, $5^4 = 5\times5\times5\times5= 625$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) =9$, $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$ आदि है।

व्यंजक a^6 में संख्या a को आधार (base) तथा 6 को घातांक (exponent) कहते हैं।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि यदि आधार ऋणात्मक पूर्णांक है और घातांक सम धनात्मक पूर्णांक है, तो मान धनात्मक है और यदि ऋणात्मक आधार का घातांक विषम धनात्मक पूर्णांक है, तो मान ऋणात्मक है। साथ ही,

$(-1)^{\text{विषम धनात्मक पूर्णांक}} = -1$

$(-1)^{\text{सम धनात्मक पूर्णांक}} = 1$

प्रश्नावली 2.6

1. निम्न में से प्रत्येक के लिए आधार और घातांक लिखिए :

(i) 5^5 (ii) $(-2)^6$ (iii) 1^{11}

(iv) $(-6)^1$ (v) $(-27)^2$ (vi) 10^8

2. घात संकेतन का प्रयोग करके लिखिए :

(i) $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$

(ii) $(-13) \times (-13) \times (-13) \times (-13) \times (-13)$

3. मान ज्ञात कीजिए :

(i) 50^4 (ii) $(-1)^{53}$ (iii) $(-1)^{20}$

(iv) $(-2)^8$ (v) $2^3 \times 3^2$ (vi) $2^3 \times 2^5$

(vii) $(-2)^5 \div (-2)^2$ (viii) $(-4)^5 \div (-4)^3$ (ix) $(-2)^4 \times (-3)^3 \times (-1)^9$

(x) $(-1)^3 \times (-10)^4$ (xi) $2^3 \times (-3)^2 \times 8$

4. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के वर्ग लिखिए। उनके इकाई के अंकों पर ध्यान दीजिए। आप क्या देखते हैं?

5. प्रथम दस प्राकृत संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए।

6. मान ज्ञात कीजिए।

(i) 20^2 (ii) $(-100)^2$ (iii) 200^2

(iv) 70^2 (v) $(-150)^2$ (vi) 1000^2

7. घन ज्ञात कीजिए।

(i) -12 (ii) -14 (iii) -15

(iv) 11 (v) 100 (vi) 1000

8. प्रत्येक की घात 4 ज्ञात कीजिए।

(i) 1 (ii) 2 (iii) 3

(iv) -1 (v) -2 (vi) -3

9. प्रत्येक की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $(-2)^4 \times (-2)^3 = (-2)^7$ (ii) $10^2 \times 10^3 = 10^5$

(iii) $(-4)^5 \div (-4)^2 = (-4)^3$ (iv) $3^7 \div 3^2 = 3^5$

10. सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $3^2 + 4^2 = 5^2$ (ii) $12^2 + 5^2 = 13^2$

(iii) $10^2 - 8^2 = 6^2$ (iv) $15^2 - 9^2 = 12^2$

11. प्रत्येक सत्य कथन के लिए (T) अथवा असत्य कथन के लिए (F) लिखिए :

(i) 6^5 और 5^6 का अन्तर शून्य है।

(ii) किसी भी पूर्णांक का वर्ग ऋणात्मक होता है।

(iii) एक ऋणात्मक पूर्णांक का घन ऋणात्मक होता है।

(iv) $3^6 \div 3^5 = 3^{6-5}$

(v) $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4}$

(vi) $2^3 + 2^2 = 2^5$

(vii) $3^3 - 3^2 = 3$

(viii) $(-1)^{11} = 1$

कोष्ठक :

जब किसी व्यंजक में दो या दो से अधिक आधारभूत संक्रियाएँ संबद्ध होती हैं, तो व्यंजक को सरल करने के लिए हम एक परिपाटी का पालन करते हैं, जिसे उदाहरण में समझाया गया है :

हम क्रमानुसार भाग, गुणन, योग और घटाने (भागुयोघ) की संक्रियाएँ बाई से दाई ओर की दिशा में करते हैं।

उदाहरण 6. नीचे दिए गए व्यंजकों को सरल कीजिए :

(i) $60 \div 6 + 2$

(ii) $10 - 6 \div 3$

(iii) $88 - 9 \times 3 + 10 - 9$

हल- (i) सबसे पहले हम संक्रिया $\div$ की जाँच कर इसे हल करते हैं इस प्रकार

$60 \div 6 + 2 = (60 \div 6) + 2 = 10 + 2 = 12$

(ii) $10 - 6 \div 3 = 10 - (6 \div 3) = 10 - 2 = 8$

(iii) इस प्रश्न में भाग की संक्रिया नहीं है। अतः हम पहले गुणन की क्रिया करेंगे।

इस प्रकार, $88 - 9 \times 3 + 10 - 9 = 88 - (9 \times 3) + 10 - 9$

$= 88 - 27 + 10 - 9$

$= 88 + 10 + (-27 - 9)$ (समान चिह्न वाली संक्रियाओं को साथ-साथ रखने पर)

$= 98 - 36$

$= 62$

इन उदाहरणों से ज्ञात होता है कि-

- सबसे पहले भाग की क्रिया करते हैं।
- भाग की संक्रिया के बाद गुणन की संक्रिया करते हैं।
- गुणन की संक्रिया करने के बाद जोड़ने व घटाने की संक्रिया करते हैं। यह भागुयोघ (DMAS) नियम है।

अब इन उदाहरणों को देखिए :

$36 \div 9 + 3$ में भागुयोघ नियम से पहले 36 को 9 से भाग करते हैं, फिर उसमें 3 जोड़ देते हैं।

परन्तु यदि जोड़, बाकी, गुणा की क्रिया पहले करना हो तो प्रश्न में कोष्ठक का प्रयोग करते हैं। जैसे- $36 \div (9+3)$ या, $36 \div (9-3)$, या $36\div (3\times3)$ इन प्रश्नों में भाग की क्रिया बाद में होगी। जैसे- $36 \div 12 = 3$, $36 \div 6 = 6$ और $36 \div 9 = 4$ कोष्ठक हल करने के नियमों को जानने के लिये नीचे दिए गए प्रश्न के हल को देखिए-

$(-13) + (-4) \div 2 -3 [-\{(-3)\times (-7) - (3+5)\}]$

$= (-13) + (-4) \div 2 -3 [-\{+21 -3 -5\}]$ सबसे पहले छोटा कोष्ठक हटाया। कोष्ठक के बाहर '–' चिन्ह होने से अंदर की संख्याओं के चिन्ह बदल दिए।

$= -13 + (-4) \div 2 -3 [-21+3+5]$ मझले या धनु कोष्ठक के बाहर – चिन्ह होने से

$= -13 + (-4) \div 2-3 [-13]$ सभी संख्याओं में - चिन्ह को '+' और '+' चिन्ह को – में बदला।

$= -13 + (-4) \div 2 + 39$ बड़े कोष्ठक के बाहर - चिन्ह होने से सभी संख्याओं के चिन्ह बदले गए।

$= -13 - 2 + 39$ अब पहले भाग की संक्रिया की गई।

$= -15 + 39 = 24$

इस प्रश्न के अनुसार कोष्ठक हल करने के नियम हैं :

कोष्ठक तीन प्रकार के हैं :-

- (1) बड़ा या वर्ग [ ] (2) मझला या धनु { }, (3) छोटा ( )
- सबसे पहले छोटे कोष्ठक को फिर मझले या धनु कोष्ठक को फिर अन्त में बड़े या वर्ग कोष्ठक को हल करते हैं।
- कोष्ठक के बाहर + चिन्ह हो तो बिना चिन्ह बदले कोष्ठक को हटा देते हैं।
- कोष्ठक के बाहर (-) चिन्ह हो तो कोष्ठक के अन्दर की सभी संख्याओं के चिन्ह बदल देते हैं '+' को '–' में और '–' को '+' में।
- किसी संख्या और कोष्ठक के बीच कोई चिन्ह न हो तो '×' का चिन्ह मान कर हल करते हैं। (भाग, गुणा, योग, घटाना)
- कोष्ठक हटाने के बाद 'भागुयोघ' नियम लगाते हैं।

'का' की संक्रियां को समझने के लिए नीचे दिए उदाहरण को ध्यान से देखिए :

$[60 - \{7\times8 + (13-2$ का $5)\}]$ का 81

$= [60 -\{7\times8 + (13-10)\}]$ का 81 छोटे कोष्ठक में का होने से पहले का अर्थात् गुणा करते हैं।

$= [60 -\{7\times8 + 3\}]$ का 81 छोटे कोष्ठक को हल करते हैं।

$= [60 -\{56 + 3\}]$ का 81 मझले कोष्ठक के अन्दर '+' के पहले गुणा की क्रिया करते हैं।

$= [60 -56-3]$ 'का 81 मझले कोष्ठक के बाहर '-' चिन्ह होने से +56 और +3 के चिन्ह बदलते हैं।

$= [1]$ का 81 बड़े कोष्ठक के अन्दर की संक्रियाएँ करते हैं।

$= 1\times 81$ अब का को गुणा में बदलते हैं।

$= 81$

इस प्रश्न के आधार पर हम कह सकते है -

> **का करके पुनि भाग कर, फिर गुण लेहू सुजान,**
> **ता पीछे धन, ऋण कर, भिन्न रीति यह जान।**

- 'का' का अर्थ गुणा की संक्रिया करना है।
- सबसे पहले कोष्ठक को हल करते हैं।
- कोष्ठक के बाद 'का' की संक्रिया करते हैं।
- इसके बाद भागुयोघ के क्रमानुसार संक्रिया करते हैं। अर्थात् पहले भाग, फिर गुणा, फिर योग और घटाने की संक्रिया करते हैं।
- हल करने के इस नियम को `BODMAS' या 'कोकाभागुयोघ' अर्थात् कोष्ठक → का → भाग → गुणा → योग → घटाना की संक्रियाएँ करते हैं।

कोकाभागुयोघ (BODMAS) नियम

अक्षर श्रृंखला 'कोकाभागुयोघ' में को कोष्ठक के लिए, का संक्रिया 'का' के लिए, भा संक्रिया भाग के लिए, गु गुणन के लिए, यो योग के लिए तथा घ घटाने (व्यवकलन) की संक्रिया के लिए प्रयुक्त किया गया है। ये अक्षर जिस क्रम में लिखे गए हैं उसी क्रम में संगत संक्रियाएँ व्यंजक को सरल करने में सम्पन्न की जाती हैं। अर्थात् किसी व्यंजक में सबसे पहले कोष्ठक (यदि कोई है तो) हटाए जाते हैं। कोष्ठक हटाने के नियम हम पहले पढ़ चुके हैं। इसके बाद संक्रिया 'का' सम्पन्न की जाती है। उसके पश्चात् भाग और फिर गुणन किया जाता है। तत्पश्चात् हम योग तथा घटाने की संक्रियाएँ इसी क्रम में संपन्न करते हैं।

विभिन्न संक्रियाओं के नियम संक्षेप में इस प्रकार हैं :

कोष्ठक नियम-

(i) कोष्ठक क्रम ( ), { }, [ ] में हटाए जाते हैं। कोष्ठक हटाने का अर्थ है 'कोष्ठक के अन्दर के व्यंजक को सरल कर एक पूर्णांक बनाना तथा उपयुक्त चिन्ह लगाना'।

(ii) यदि कोष्ठकों से पहले + चिन्ह है, तो कोष्ठकों के अन्दर प्राप्त अन्तिम पूर्णांक का चिन्ह बदले बिना कोष्ठकों को हटा दिया जाता है।

(iii) यदि कोष्ठकों से पहले - चिन्ह है, तो कोष्ठकों को हटा कर उनके अन्दर प्राप्त अन्तिम पूर्णांक का चिन्ह बदल दिया जाता है।

(iv) यदि कोष्ठकों से पहले कोई संख्या है, तो कोष्ठकों के अन्दर प्राप्त अन्तिम पूर्णांक का उस संख्या से गुणा करके कोष्ठकों को हटा दिया जाता है।

'का' के नियम :

'का' का अर्थ है गुणा और उसके नियम गुणा जैसे ही हैं। यह संक्रिया अन्य सभी अंकगणितीय संक्रियाओं से पहले की जाती है।

भाग, गुणा, योग व घटाना ये सभी संक्रियाएँ इसी क्रम में की जाती है। इन संक्रियाओं को संपन्न करने के नियम आप पहले ही पढ़ चुके हैं।

इन नियमों का प्रयोग कर हम किसी भी व्यंजक को सरल कर सकते हैं, और उसका मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 7. मान ज्ञात कीजिए-

$30 - 5 \times 2$ का $3 + (19 - 3) \div 8$

हल- $30 - 5 \times 2$ का $3 + (19 - 3) \div 8$

$= 30 - 5 \times 2$ का $3 + 16 \div 8$ (संक्रिया को अर्थात् कोष्ठक () हटाना)

$= 30 - 5 \times 6 + 16 \div 8$ (संक्रिया 'का' अर्थात् 2 का 3 $= 2 \times 3$)

$= 30 - 5 \times 6 + 2$ (संक्रिया भा, अर्थात् $16 \div 8$)

$= 30 - 30 + 2$ (संक्रिया गु, अर्थात् 5×6)

$= 30 - 28$ (संक्रिया यो, अर्थात् $-30 + 2$)

$= 2$ (संक्रिया घ, अर्थात् घटाना)

प्रश्नावली 2.7

1. मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $120 - 20 \div 2$ (ii) $28 - 5 \times 6 + 2$

   (iii) $27 + 20 \div 5$ (iv) $(-29)(-1) + (-34) + 2$

   (v) $17 + (-3) \times (-5) - 6$ (vi) $(-5) - (-48) \div (-16) + (-2) \times 6$

   (vii) $(-15) + 4 \div (5-3)$ (viii) $3 - (5 - 6 \div 3)$

2. सरल कीजिए :

   (i) $28 - 5$ का $2 + 2$

   (ii) (-40) का $(-1) + 28 \div 7$

   (iii) $7 - \{13 - 2\ (-4$ का $4)\}$

   (iv) $[59 - \{7 \times 8 + (13 - 2$ का $5)\}]$ का 81

3. सरल कीजिए :

   (i) $20 + \{10 - 5 + (7 - 3)\}$

   (ii) $7 - \{13 - 2\ (4 \times -4)\} - 15 \div 3$

   (iii) $3\ [18 + \{3 + 4\ (4 - 2)\}]$

   (iv) $2 - [2 - \{2 - (2 - 2 - 2)\}]$

   (v) $18 + \{1 + (15 - 2) \times 4)\}]$

   (vi) $(14 - 7) \times \{8 + (3 + 7 - 1)\}]$

   (vii) $121 \div [17 - \{15 - 3\ (7 - 4)\}]$

   (viii) $15 - (-3)\ (4 - 4) \div 3\ (5 + (-3) \times (-6)$

   (ix) $(-1)\ \{(-5) + (-25)\} \times (-7) - (8 - 10)\ (-4)$

   (x) $118 - \{121 \div (11 \times 11) - (-4) - (+3 - 7)\}$

हमने सीखा है :

1. प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

2. शून्य प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक से छोटा परन्तु प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।

3. कोई संख्या जितनी बड़ी होगी उसका विपरीत (ऋणात्मक) उतना ही छोटा होगा। (अर्थात् यदि $a > b$ है, तो $-a < -b$ है।)

4. किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस संख्या के चिन्ह पर बिना कोई ध्यान दिए उसका संख्यात्मक मान होता है।

5. दो ऋणात्मक पूर्णांकों का योग एक ऋणात्मक पूर्णांक होता है जिसका निरपेक्ष मान उन पूर्णांकों के निरपेक्ष मानों के योग के बराबर होता है।

6. एक धनात्मक पूर्णांक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का योग ज्ञात करने के लिए, हम उनके निरपेक्ष मानों का अन्तर लेकर बड़े निरपेक्ष मान वाले पूर्णांक का चिन्ह लगा देते हैं।

7. पूर्ण संख्याओं की संक्रियाओं के समस्त गुण, पूर्णांकों में भी सत्य होते हैं। उनके अतिरिक्त कुछ गुण निम्न हैं :

   (i) यदि a और b पूर्णांक हों, तो $a-b$ सदैव एक पूर्णांक होगा।

   (ii) प्रत्येक पूर्णांक a के लिए $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$

   (iii) पूर्णांकों में कोई सबसे छोटा पूर्णांक नहीं होता।

8. किसी पूर्णांक b को पूर्णांक a में से घटाने के लिये, हम b का चिन्ह परिवर्तित करके उसे a में जोड़ देते हैं $[a - b = a + (-b)]$.

9. एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणनफल प्राप्त करने के लिए, हम उनके निरपेक्ष मानों का गुणनफल प्राप्त करके परिणाम में ऋण चिन्ह लगा देते हैं।

10. दो धनात्मक या दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनफल उनके निरपेक्ष मानों के गुणनफल के बराबर होता है।

11. एक धनात्मक व एक ऋणात्मक पूर्णांक का भागफल प्राप्त करने के लिये, हम उनके निरपेक्ष मानों का भागफल प्राप्त कर उसमें ऋण चिन्ह लगा देते हैं।