पाठ 3

गुणनखण्ड एवं गुणज

आइए सीखें-

- प्राकृत संख्याओं के अपवर्तक (गुणनखण्ड) व अपवर्त्य ज्ञात करना।
- भाज्य और अभाज्य संख्याएँ पहचानना।
- विभाज्यता के नियमों का प्रयोग करना।
- महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना।
- लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करना
- लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक में सम्बन्ध।
- लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्तक का दैनिक जीवन में उपयोग करना।

गुणनखण्ड और गुणज के बारे में आप पिछली कक्षा में पढ़ चुके हैं। साथ ही भाज्य और अभाज्य संख्याओं का प्रारंभिक ज्ञान भी आप प्राप्त कर चुके हैं। इस अध्याय में हम इनसे सम्बन्धित तथ्यों के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे।

गुणनखण्ड (अपवर्तक)-

हम जानते हैं कि 6 को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्याएँ 1, 2, 3 और 6 हैं। इसी प्रकार 1, 2, 5, और 10 के द्वारा 10 पूर्णतः विभाजित हो जाती है। अतः 6 के गुणनखण्ड 1, 2, 3 और 6 हैं तथा 10 के गुणनखण्ड 1, 2, 5, 10 हैं। इसी प्रकार के उदाहरणों के लिये निम्नांकित सारणी को ध्यान से देखिए -

संख्या	**गुणनखण्ड**
2	1, 2
3	1, 3
4	1, 2, 4
15	1, 3, 5, 15
20	1, 2, 4, 5, 10, 20

उपरोक्त उदाहरणों में 1 सभी संख्याओं का गुणनखण्ड है। इसी प्रकार प्रत्येक संख्या स्वयं का भी गुणनखण्ड है। इस प्रकार हम निम्नलिखित निष्कर्षों पर पहुँचते हैं :-

- किसी संख्या को पूर्णतः विभाजित करने वाली संख्या उसका गुणनखण्ड या अपवर्तक कहलाती है। अतः किसी संख्या का अपवर्तक इसका पूर्ण भाजक होता है।
- 1 सभी संख्या का गुणनखण्ड होता है।

- प्रत्येक संख्या स्वयं का एक गुणनखण्ड होती है।
- यदि कोई प्राकृत संख्या किसी दूसरी प्राकृत संख्या का गुणनखण्ड है, तो वह इस दूसरी संख्या को पूर्णतः विभाजित करती है।

उदाहरण 1. 18 के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए?

हल- $18 = 1 \times 18$ $18 = 2 \times 9$ $18 = 3 \times 6$

$18 = 6 \times 3$ $18 = 9 \times 2$ $18 = 18 \times 1$

इस प्रकार 18 में 1, 2, 3, 6, 9 और 18 का भाग पूर्ण रूप से चला जाएगा, इसलिये 18 के गुणनखण्ड 1, 2, 3, 6, 9 और 18 हैं।

अपवर्त्य (गुणज) :-

5 में प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3, 4..... से क्रमशः गुणा करने पर गुणनफल क्रमशः 5, 10, 15, 20.... प्राप्त होता है। ये संख्याएँ 5 की अपवर्त्य या गुणज हैं। चूँकि प्राकृत संख्याएँ असीमित हैं, इसलिये किसी संख्या के अपवर्त्य भी अनन्त होते हैं। इसी प्रकार के अन्य उदाहरण सारणी में दिए गए हैं-

संख्या	अपवर्त्य (गुणज)
1	1, 2, 3, 4, 5. .....
2	2, 4, 6, 8, 10, ...
3	3, 6, 9, 12, 15, ...
10	10, 20, 30, 40, 50, ...
15	15, 30, 45, 60, 75, ...
18	18, 36, 54, 72, 90, ...

उपरोक्त सारणी में प्रत्येक संख्या का सबसे छोटा अपवर्त्य स्वयं वही संख्या है। यदि एक संख्या, दूसरी संख्या से पूरी-पूरी विभाजित हो जाए तो पहली संख्या को दूसरी संख्या का अपवर्त्य या गुणज कहते हैं।

- किसी प्राकृत संख्या में क्रमशः 1, 2, 3, ... आदि का गुणा करने पर प्राप्त संख्याएँ उस संख्या की अपवर्त्य या गुणज कहलाती हैं।
- किसी प्राकृत संख्या के अपवर्त्य अनन्त होते हैं।
- किसी प्राकृत संख्या के अपवर्त्य वे प्राकृत संख्याएँ होती हैं जो उससे पूर्ण विभाज्य होती हैं।
- किसी संख्या का अपवर्त्य उस संख्या से छोटा नहीं हो सकता।
- किसी प्राकृत संख्या का सबसे छोटा अपवर्त्य स्वयं संख्या होती है।
- प्रत्येक संख्या 1 और स्वयं का अपवर्त्य होती है।
- 2 के सभी गुणज सम संख्या 2, 4, 6, 8 .... होती है। वे संख्याएँ जो 2 की गुणज नहीं है, विषम संख्याएँ कहलाती हैं।

उदाहरण 2. 21 के प्रथम पाँच अपवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल- 21 में प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, ... का क्रमशः गुणा करने पर :

21 के अपवर्त्य $= 21 \times 1, 21 \times 2, 21 \times 3, 21 \times 4, 21 \times 5....$

$= 21, 42, 63, 84, 105.....$

उदाहरण 3. क्या 27 संख्या 6561 का एक गुणनखण्ड है?

हल- 6561 में 27 का भाग देने पर यदि शेष 0 होगा तो 27 संख्या 6561 का एक गुणनखण्ड होगा :-

$$
\begin{array}{r}
27)\,6561(243 \\
-54 \\
\hline
116 \\
-108 \\
\hline
81 \\
-81 \\
\hline
0
\end{array}
$$

6561 में 27 का भाग देने पर यह 27 से पूर्णतः विभाजित हो जाती है, अतः 6561 का एक गुणनखण्ड 27 है।

उदाहरण 4. निम्नलिखित संख्याओं में से 6 और 7 के अपवर्त्य छाँटकर अलग-अलग लिखिए।

28, 18, 7, 24, 49, 14, 36, 30, 6, 35, 21, 12

हल- 6 के अपवर्त्य - = 6, 12, 18, 24, 30, 36

7 के अपवर्त्य - = 7, 14, 21, 28, 35, 49

प्रश्नावली 3.1

1. अपवर्तक और अपवर्त्य को उदाहरण सहित परिभाषित कीजिए।
2. 31 के प्रथम पाँच अपवर्त्य लिखिए।
3. 8 के वे सभी अपवर्त्य लिखिए जो 40 से कम हों।
4. 14 के केवल दो अंकों वाले सभी अपवर्त्य लिखिए।
5. 24 किन-किन संख्याओं का अपवर्त्य है?
6. निम्न में से प्रत्येक के सभी संभव गुणनखण्ड लिखिए :

   (i) 60 (ii) 64 (iii) 76

   (iv) 125 (v) 144 (vi) 729
7. क्या कोई ऐसी संख्या है, जिसके कोई गुणनखण्ड न हों?
8. 19 का सबसे छोटा अपवर्त्य लिखिए।

भाज्य और अभाज्य संख्याएँ -

नीचे की सारणी में कुछ संख्याओं के गुणनखण्ड दिए गए हैं। सारणी का अवलोकन कीजिए :-

संख्या	**गुणनखण्ड**
1	1
2	1, 2, ...
3	1, 3, ...
6	1, 2, 3,...
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

अवलोकन में हम प्राकृत संख्याओं को 3 प्रकार से बाँट सकते हैं-

(1) वे संख्याएँ, जिनके दो से अधिक अलग-अलग गुणनखण्ड हों, भाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे 6, 8, 9, 10, 12, 24 आदि।

(2) वे संख्याएँ जिनके गुणनखण्ड केवल 1 और स्वयं वही संख्या हो, अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं जैसे 2, 3, 5, 7, 11, 13 आदि।

(3) वह संख्या जिसका केवल एक ही गुणनखण्ड हो, न भाज्य होगी और न ही अभाज्य संख्या। जैसे- 1 न भाज्य है न अभाज्य।

ईसा पूर्व तीसरी शताब्दी के एक यूनानी गणितज्ञ इरेटोस्थींज (Eratosthenes) ने भाज्य और अभाज्य संख्याओं को अलग-अलग करने की एक सरल और रोचक विधि खोजी थी, जिसे 'इरेटोस्थींज की छलनी' कहते हैं। उन्होंने 1 से 100 तक की प्राकृत संख्याओं में से भाज्य व अभाज्य संख्याएँ अलग-अलग करने के लिये निम्नलिखित प्रक्रिया प्रस्तुत की -

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

(i) सर्वप्रथम 1 से 100 तक की प्राकृत संख्याएँ सारणी में लिखते हैं।

(ii) चूँकि 1 न तो भाज्य है न अभाज्य, इसलिये इसे क्रास कर देते हैं।

(iii) अब प्रथम अभाज्य संख्या 2 को घेरकर उसके सभी अपवर्त्य काट देते हैं।

(iv) अगली अभाज्य संख्या 3 को घेरकर इसके शेष बचे हुए अपवर्त्य काट देते हैं।

(v) अब अगली अभाज्य संख्या 5 को घेरकर इसके बचे हुए अपवर्त्य काट देते हैं।

यह क्रिया तब तक करते हैं जब तक सभी संख्याएँ या तो घेर दी जाएँ या काट दी जाएँ।

इस प्रकार घेरी हुई सभी संख्याएँ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.... अभाज्य संख्याएँ हैं, जबकि कटी हुई संख्याएँ भाज्य हैं।

इस क्रियाकलाप से हम निम्नलिखित निष्कर्ष प्राप्त करते है :-

- 1 न तो भाज्य है, न ही अभाज्य।
- वे संख्याएँ, जिनके केवल दो ही गुणनखण्ड 1 और स्वयं संख्या होते हैं, अभाज्य (Prime Numbers) कहलाती हैं।
- 2 सबसे छोटी सम अभाज्य संख्या है। इसके अलावा अन्य सभी सम संख्याएँ भाज्य होती हैं।
- भाज्य और अभाज्य संख्याएँ अनन्त होती हैं।
- 3 और 3 से बड़ी सभी अभाज्य संख्याएँ विषम होती हैं।
- सभी विषम संख्याएँ अभाज्य नहीं होती।

अभाज्य संख्याओं के द्वारा कुछ अभाज्य संख्याएँ ज्ञात की जा सकती हैं जैसे 2 एक अभाज्य संख्या है, इसलिये $2 + 1 = 3$ भी अभाज्य संख्या हुई। इसी प्रकार, $2 \times 3 + 1 = 7$ को 2 व 3 से प्राप्त किया गया है। अब 2, 3 व 5 अभाज्य है इसलिए $2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$ भी अभाज्य संख्या है। ऐसी कुछ और अभाज्य संख्याएँ ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

संख्या 1729 एक ऐसी सबसे छोटी संख्या हैं, जिसे दो प्राकृत संख्याओं के घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। यह रामानुजन की संख्या कहलाती है।

जैसे : $1729 = 10^3 + 9^3$ (घन अर्थात् घात 3)

$1729 = 12^3 + 1^3$

श्रीनिवास रामानुजन

श्रीनिवास रामानुजन का जन्म 22 दिसम्बर 1887 को तमिलनाडु प्रांत के कुंभकोणम के पास एक छोटे से गाँव इरोद में हुआ था।

रामानुजन विलक्षण बुद्धि के धनी थे दसवीं में पढ़ते समय ही उन्होंने बी.ए. की त्रिकोणमिति का अभ्यास पूरा कर लिया था।

श्रीनिवास रामानुजन का मुख्य कार्य संख्याओं की प्रकृति एवं

संख्या सिद्धांत से संबंधित है। जैसे 1729 एक ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो प्राकृत संख्याओं के घनों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, यह संख्या रामानुजन संख्या कहलाती है।

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

श्रीनिवास रामानुजन 1914 से 1918 तक कैम्ब्रिज विश्व विद्यालय में शोध करते रहे। इस अवधि में उनके 24 शोध पत्र प्रकाशित हुए। सन् 1917 में उन्हें रायल सोसाइटी की फैलोशिप प्रदान की गई।

27 मार्च 1919 को वे भारत वापस पहुँचे। 26 अप्रैल 1920 को मात्र लगभग 33 वर्ष की अल्पायु में ऐसे विलक्षण गणितज्ञ का निधन हो गया।

सह अभाज्य संख्याएँ - (Coprimes)

निम्नलिखित सारणी को ध्यानपूर्वक देखिए :-

संख्या	गुणनखण्ड
3	1, 3
5	1, 5
8	1, 2, 4, 8
15	1, 2, 3, 5, 15

3 और 5 ऐसी अभाज्य संख्याएँ हैं जिनके मध्य केवल एक भाज्य संख्या 4 है। ऐसी अभाज्य संख्याओं को यमज अभाज्य संख्याएँ (twin primes) कहते हैं। इसी प्रकार यमज अभाज्य संख्याओं के अन्य जोड़े 5 और 7, 11 और 13, 17 और 19 आदि हैं।

सारणी में 8 और 15 ऐसी संख्याएँ हैं जिनका उभयनिष्ठ गुणनखण्ड केवल 1 है। ये सह अभाज्य संख्याएँ हैं।

- यदि दो संख्याओं में 1 के अलावा कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो वे सहअभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं।
- सहअभाज्य संख्याएँ भाज्य या अभाज्य हो सकती हैं।
- सह अभाज्य संख्याओं में दोनों सम नहीं हो सकतीं।
- दो अभाज्य संख्याएँ सदैव सह-अभाज्य होती हैं।
- वे अभाज्य संख्याएँ, जिनके मध्य केवल एक ही भाज्य संख्या हो, यमज अभाज्य कहलाती हैं।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित की परिभाषा स्पष्ट कीजिए :-

    (i) अभाज्य संख्याएँ

    (ii) सहअभाज्य संख्याएँ

    (iii) यमज अभाज्य संख्याएँ

2. छलनी-विधि से 2 से 50 तक की भाज्य और अभाज्य संख्याएँ अलग-अलग कीजिए।
3. दो अंकों की सबसे छोटी अभाज्य संख्या लिखिए।
4. 50 और 100 के बीच की अभाज्य संख्याएँ लिखिए।
5. ऐसी अभाज्य संख्याएँ लिखिए जो सम हों?
6. क्या कोई भाज्य संख्या विषम हो सकती है? यदि हाँ तो सबसे छोटी विषम भाज्य संख्या लिखिए।
7. 100 से छोटी सात क्रमागत भाज्य संख्याएँ लिखिए जिनके मध्य कोई अभाज्य संख्या न हो।
8. 150 और 200 के बीच की वे संख्याएँ, जिनमें इकाई के स्थान पर 5 हो। बताइए कि ये भाज्य है या अभाज्य?

विभाज्यता के नियम-

भाज्य संख्याओं के दो से अधिक भिन्न-भिन्न गुणनखंड होते हैं। किसी भाज्य संख्या के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए भाग की क्रिया भी करना पड़ती है, जिसमें समय और परिश्रम लगता है। कोई संख्या 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 में से किस-किससे पूर्ण विभाजित हो सकती है, इस संबंध में यहाँ कुछ रोचक और सरल नियम दिए जा रहे हैं।

(i) **2 से विभाज्यता-** यदि किसी संख्या के इकाई का अंक 0, 2, 4, 6 या 8 हो, तो वह संख्या 2 से पूर्णतः विभाजित होगी। जैसे- 62, 1080, 5736 आदि।

(ii) **3 से विभाज्यता-** यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से पूर्ण विभाजित हो जाए, तो वह संख्या भी 3 से पूर्ण विभाजित हो जाएगी। जैसे 5034 के अंकों का योग $5 + 0 + 3 + 4 = 12$ है। अंकों का योग 12, 3 से विभाजित हो जाता है, इसलिये संख्या 5034 भी 3 से विभाजित हो जाएगी।

(iii) **4 से विभाज्यता :-** यदि किसी संख्या के इकाई और दहाई के दोनों अंक 0 हों या इकाई और दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाज्य हो, तो वह संख्या भी 4 से पूर्ण विभाजित होगी। उदाहरणार्थ 9500 के इकाई और दहाई के अंक 0 हैं, इसलिए यह 4 से विभाज्य होगी। संख्या 5816 के इकाई

और दहाई के अंकों से बनी संख्या 16, 4 से पूर्ण विभाज्य है, इसलिए 5816 भी 4 से पूर्ण विभाजित होगी।

(iv) 5 से विभाज्यता- यदि किसी संख्या के इकाई का अंक 0 या 5 हो तो वह संख्या 5 से पूर्ण विभाज्य होगी जैसे 7960, 75435 आदि।

(v) 6 से विभाज्यता- यदि कोई संख्या 2 और 3 से विभाज्य हो, तो वह 6 से भी पूर्ण विभाज्य होगी। जैसे संख्या 42150 को 2 व 3 से पूर्ण विभाजित किया जा सकता है, अतः यह 6 से पूर्ण विभाज्य है।

(vi) 8 से विभाज्यता- यदि किसी संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़े के सभी तीनों स्थानों पर 0 हों या इन तीनों स्थानों के अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य हो, तो वह संख्या 8 से विभाज्य होगी। जैसे 5000 तथा 25664 दोनों ही 8 से विभाज्य हैं क्योंकि 5000 के इकाई, दहाई और सैकड़ें के अंकों के स्थान पर 0 हैं तथा 25664 के इकाई, दहाई व सैकड़े के अंकों से बनी संख्या 664, 8 से विभाज्य है।

(vii) 9 से विभाज्यता- यदि किसी संख्या के अंकों का योग 9 से विभाज्य हो, तो वह संख्या भी 9 से विभाज्य होगी। इस प्रकार 9 के अपवर्त्य 9 से विभाज्य होते हैं। जैसे 32418 के अंकों का योग $3 + 2 + 4 + 1 + 8 = 18$ है जो 9 का अपवर्त्य है, इसलिये संख्या 32418 को 9 से पूर्णतः विभाजित किया जा सकता है।

(viii) 10 से विभाज्यता- यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 0 हो, तो वह संख्या 10 से पूर्ण विभाज्य होगी। जैसे 60, 240, 4100 संख्याओं का इकाई का अंक 0 है, इसलिये ये 10 से पूर्ण विभाज्य है।

(ix) 11 से विभाज्यता- यदि किसी संख्या में इकाई की ओर से विषम स्थानों पर स्थित अंकों के योग और सम स्थानों पर स्थित अंकों के योगफलों का अन्तर 0 हो या 11 से विभाजित हों, तो उस पूरी संख्या में 11 का भाग पूर्ण रूप से चला जाएगा। इस सम्बन्ध में निम्नलिखित उदाहरणों को देखिए:-

क्र.	**संख्या**	**विषम स्थानों के अंकों का योग**	**सम स्थानों के अंकों का योग**	**दोनों योगफलों का अंतर**
1.	121	$1 + 1 = 2$	2	$2 - 2 = 0$
2.	1331	$1 + 3 = 4$	$3 + 1 = 4$	$4 - 4 = 0$
3.	1727	$7 + 7 = 14$	$2 + 1 = 3$	$14 - 3 = 11$
4.	92829	$9 + 8 + 9 = 26$	$2 + 2 = 4$	$26 - 4 = 22$

(x) 12 से विभाज्यता- वे संख्याएँ जो 3 और 4 दोनों से पूर्ण विभाजित हो जाएँ, वे 12 से भी पूर्ण विभाजित होंगी। जैसे 36, 182112 आदि। इनकी विभाज्यता की जाँच भाग-क्रिया द्वारा करके देखिए।

प्रायः किसी संख्या की विभाज्यता की जाँच अभाज्य संख्याओं द्वारा ही की जाती है, क्योंकि यदि कोई संख्या किसी भाज्य संख्या से विभाजित होगी तो वह किसी अभाज्य संख्या से भी अवश्य विभाजित होगी।

विभाज्यता के कुछ व्यापक गुण :-

1. चूँकि $72 = 12 \times 6$ है, इसलिए 72 क्रमशः 12 और 6 से विभाजित है, इसलिए 72 को 12 और 6 के गुणनखण्डों 2, 3, 4, 6, 12 से भी विभाजित किया जा सकता है।

   अतः यदि एक संख्या किसी दूसरी संख्या से विभाजित हो, तो वह दूसरी संख्या के सभी गुणनखंडों से भी विभाजित होती है।

2. चूँकि $56 = 4 \times 14 = 7 \times 8 = 28 \times 2$

   अतः 56 के गुणनखण्ड 4, 7, 14, 28 हुए, जिनमें से 4 और 7 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं।

   अब $4 \times 7 = 28$ है जो 56 को विभाजित करती है।

   अतः यदि कोई संख्या दो या अधिक सह अभाज्य संख्याओं से विभाज्य हों तो वह संख्या उन सह-अभाज्य संख्याओं के गुणनफल से भी विभाज्य होती है।

3. 14 और 21 दोनों का गुणनखण्ड 7 है। अब 14 और 21 का योगफल 35 है। इनके योगफल 35 का भी एक गुणनखण्ड 7 है। अतः यदि कोई संख्या दो दी हुई संख्याओं का गुणनखण्ड हो, तो वह संख्या उनके योगफल का भी गुणनखंड होती है।

4. 36 और 24 का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 6 है। अब 36 व 24 का अंतर 12 है। हम देखते हैं कि 6, इनके अन्तर का भी गुणनखण्ड है।

   अतः यदि कोई संख्या दो दी हुई संख्याओं का गुणनखण्ड हो तो वह संख्या उनके अन्तर का भी गुणनखंड होती है।

5. 6 के सभी संभव गुणनखंडों 1, 2, 3, 6 का योग 12 है,जो 6 का दुगुना है। यहाँ 6 को सम्पूर्ण संख्या कहते हैं।

   अतः यदि किसी संख्या के सभी गुणनखण्डों का योग उस संख्या से दुगुना हो, तो वह संपूर्ण संख्या (Perfect Number) कहलाती है।

विभाज्यता के कुछ व्यापक गुण-

3 और 9 की विभाज्यता का एक और सरल नियम-

(1) 3 की विभाज्यता - जिन संख्याओं का बीजांक 3, 6 या 9 होता है वे संख्याएँ 3 से विभाजित होती है।

(2) 9 की विभाज्यता- जिन संख्याओं का बीजांक 9 हो वह संख्या 9 से विभाजित होती है।

प्रश्नावली 3.3

1. विभाज्यता के नियमों का प्रयोग करके जाँच कीजिए कि निम्नांकित संख्याओं में से कौन-कौन सी संख्याएँ 2 से विभाज्य हैं -

   79, 32, 33, 340, 481, 786, 54338

2. बिना भाग दिए निम्नांकित संख्याओं की 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए-

   21801, 4561, 61506, 340

3. निम्नांकित संख्याओं में कौन सी संख्याएँ 4 से विभाज्य हैं?

   360, 5240, 22800, 493

4. निम्नांकित में से कौन सी संख्याएँ 8 से विभाज्य हैं?

   1728, 2496, 57000, 6926

5. निम्नलिखित संख्याओं में 11 की विभाज्यता की जाँच कीजिए।

   5335, 10824, 9020814, 3178965

6. सत्य और असत्य लिखिए -

   (i) यदि कोई संख्या 3 से विभाजित है, तो वह 9 से भी विभाजित होगी।

   (ii) यदि कोई संख्या 9 से विभाजित है, तो वह 3 से भी विभाजित होगी।

   (iii) वे संख्याएँ जो 8 से विभाजित हैं, 4 से भी विभाजित होंगी।

   (iv) एक संख्या 18 से विभाजित होगी, यदि वह 3 और 6 दोनों से विभाजित हो।

   (v) यदि कोई संख्या दो संख्याओं के योग को पूर्णतः विभाजित करे, तो वह उन संख्याओं को पृथक-पृथक भी पूर्णतः विभाजित करेगी।

   (vi) यदि एक संख्या तीन संख्याओं को पूर्णतः विभाजित करे तो वह उनके योग को भी पूर्णतः विभाजित करेगी।

   (vii) यदि दो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं तो उनमें से एक अवश्य अभाज्य होगी।

   (viii) दो क्रमागत विषम संख्याओं का योग सदैव 4 से विभाजित होता है।

अभाज्य गुणनखण्डन -

किसी भाज्य संख्या का गुणनखण्डन कई प्रकार से किया जा सकता है। जैसे 24 के गुणनखण्ड निम्न प्रकार से हो सकते हैं

$$\begin{aligned} 24 &= 2 \times 12 \\ &= 2 \times 2 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 24 &= 3 \times 8 \\ &= 3 \times 2 \times 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 24 &= 4 \times 6 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 2 \end{aligned}$$

यदि किसी भाज्य संख्या के गुणनखण्डों के भी गुणनखण्ड करते जाएँ और भाज्य संख्या को उसके गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करें तो हमें संख्या के गुणनखण्डों में केवल अभाज्य संख्याएँ ही प्राप्त होती हैं। इस प्रकार का गुणनखण्डन, अभाज्य-गुणनखण्डन कहलाता है।

- कोई गुणनखण्डन अभाज्य गुणनखण्डन होगा, यदि उसके सभी गुणनखंड अभाज्य हों।
- किसी अभाज्य संख्या का केवल एक ही अभाज्य गुणनखण्डन होता है, चाहे अभाज्य गुणनखण्डों का क्रम कोई भी क्यों न हो। इस गुण को अभाज्य गुणनखण्डन गुण या अंकगणित का मूलभूत प्रमेय कहते हैं।

अभाज्य गुणनखण्डन हेतु आइए निम्न उदाहरण को समझें :-

उदाहरण 5. 540 के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए?

हल- 540 के अभाज्य गुणनखंड विभाज्यता के नियमों का प्रयोग करके ज्ञात करते हैं। इसका इकाई का अंक 0 है। इसमें 2 का भाग देने पर 270 प्राप्त होता है। पुनः 2 का भाग देने पर 135 प्राप्त होता है। संख्या 135 के अंकों का योग 9 है, इसमें 3 का भाग चला जाता है, इसलिए 135 में भी 3 का भाग पूर्ण रूप से चला जाता है। इससे 45 प्राप्त होता है जिसे 3 से विभाजित करने पर 15 प्राप्त होता है। अन्ततः अभीष्ट अभाज्य गुणनखण्ड निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं :-

2	540
2	270
3	135
3	45
3	15
5	5
	1

$540 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

महत्तम समापवर्तक -

दो या अधिक संख्याओं का महत्तम समापवर्तक वह बड़ी से बड़ी संख्या होती है जिसका भाग दी हुई संख्याओं में पूर्ण रूप से चला जाए। यहाँ महत्तम का अर्थ है सबसे बड़ा तथा समापवर्तक का अर्थ है उभयनिष्ठ अपवर्तक है। इस प्रकार महत्तम समापवर्तक (म.स.) को दी गई संख्याओं का सबसे बड़ा समान अपवर्तक कहते हैं। 12 और 16 का महत्तम समापवर्तक 4 होगा क्योंकि 4 ही वह बड़ी से बड़ी संख्या है, जिसका भाग 12 व 16 में पूर्ण रूप से चला जाता है।

साथ ही 12 व 16 के उभयनिष्ठ गुणनखंडों 1, 2, 4 में 4 सबसे बड़ा गुणनखण्ड है, इसलिए 12 व 16 का म.स. 4 है।

म.स. ज्ञात करने की निम्नलिखित विधियाँ हैं :-

(1) अपवर्तक विधि

(2) अभाज्य गुणनखण्डन विधि

(3) सतत् विभाजन विधि

1. अपवर्तक विधि

6, 12 और 18 का म.स. अपवर्तक विधि से निम्नानुसार ज्ञात करते हैं।

6 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6

12 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6, 12

18 के अपवर्तक = 1, 2, 3, 6, 9, 18

6, 12, 18 के समापवर्तक = 1, 2, 3, 6

इन समापवर्तकों में सबसे बड़ा समापवर्तक 6 है।

अतः वांछित म.स. = 6

यहाँ 6 का भाग दी हुई तीनों संख्याओं में पूर्ण रूप से चला जाता है।

2. अभाज्य गुणनखण्ड विधि-

144, 180 और 192 का म.स. ज्ञात कीजिए?

अभाज्य गुणनखण्डन विधि से सर्वप्रथम दी हुई संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं :-

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

तीनों संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2, 2 व 3 हैं। अतः वांछित म.स. $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

यहाँ 12 दी हुई संख्याओं का पूर्ण भाजक है।

3. सतत् विभाजन विधि द्वारा म.स. ज्ञात करना-

(1) दी गई संख्याओं में से बड़ी संख्या को छोटी संख्या से विभाजित कर शेष ज्ञात करते हैं।

(2) यदि शेष शून्य है तो छोटी संख्या म.स. है। यदि शेष शून्य नहीं हैं, तो छोटी संख्या में शेष का भाग देकर नया शेष प्राप्त करते हैं।

(3) यदि नया शेष शून्य है तो पिछला भाजक म.स. है। यदि शेष शून्य नहीं है तो इस शेष से पिछले भाजक में भाग देते हैं।

भाग की यह क्रिया शून्य प्राप्त होने तक करते रहते हैं। शेष शून्य प्राप्त होने पर अंतिम भाजक म.स. होगा। इस विधि को उदाहरण की सहायता से समझते हैं।

उदाहरण 6. 81 और 117 का म.स. ज्ञात कीजिए?

सतत् विभाजन विधि द्वारा सर्वप्रथम 117 में 81 का भाग देकर शेष प्राप्त करेंगे

81) 117 (1
– 81
36) 81 (2
– 72
9)36(4
–36
0

अंतिम भाजक 9 है। इसलिये अभीष्ट म.स. = 9

यदि दो से अधिक संख्याओं का म.स. ज्ञात करना हो तो सर्वप्रथम उन्हें बढ़ते क्रम में लिखकर प्रथम दो संख्याओं का म.स. ज्ञात करते हैं। इस प्रकार तीन संख्याओं का म.स. ज्ञात हो जाता है। यह प्रक्रिया तब तक दोहराते हैं, जब तक सभी संख्याएँ शामिल न हो जाए?

उदाहरण 7. 150, 140 और 210 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल- दी गई संख्याएँ = 140, 150, 210

140) 150 (1
– 140
10) 140 (14
– 10
40
– 40
0

140 व 150 का म.स. = 10

अब 10 और 210 का म.स. ज्ञात करेंगे।

10) 210 (21
– 20
10
– 10
0

अंतिम भाजक 10 है। अतः 140, 150, 210 का म.स. = 10

विशेष-

(1) जब दो संख्याओं में कोई भी गुणनखण्ड उभयनिष्ठ न हो, तो उनका म.स. 1 होता है।

(2) दी हुई संख्याओं का म.स. उनमें सबसे छोटी संख्या के बराबर या उससे छोटा होता है।

(3) दी हुई संख्याओं का म.स. उन संख्याओं का महत्तम पूर्ण भाजक होता है। म.स. से बड़ी अन्य संख्या नहीं होती जो दी हुई संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर सके।

उदाहरण 8. वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जिससे 280 और 1245 को भाग देने पर क्रमशः 4 और 3 शेष बचे?

हल- दी गई संख्याएँ 280 और 1245 वांछित संख्या से विभाजित करने पर शेष क्रमशः 4 और 3 बचे। अतः दी गई संख्याओं में से 4 और 3 घटाने पर शेषफल 280 – 4=276 तथा 1245 – 3 = 1242 वांछित संख्या से पूर्ण विभाजित होंगे। अतः 276 और 1242 का म.स. ही वांछित संख्या होगी।

276)1242(4
– 1104
138)276(2
– 276
0

276 और 1242 का म.स. = 138

अतः वांछित संख्या = 138

प्रश्नावली 3.4

1. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा निम्न में से प्रत्येक का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
   (i) 144, 198 (ii) 81, 117
   (iii) 47, 61 (iv) 13, 39, 273
   (v) 120, 144, 204 (vi) 101, 573, 1079
2. सतत् विभाजन विधि द्वारा निम्न संख्याओं का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए
   (i) 300, 450 (ii) 442, 1261
   (iii) 252, 576 (iv) 1624, 522, 1276
3. दो क्रमागत संख्याओं का महत्तम समापवर्तक क्या होगा?
4. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 245 एवं 1029 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में 5 शेष बचे।
5. दो टंकियों में क्रमशः 850 एवं 680 लीटर दूध आता है मापने वाले ऐसे वर्तन की अधिकतम धारिता ज्ञात कीजिए जिससे प्रत्येक टंकियों का दूध पूरा-पूरा मापा जा सके।
6. वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 398, 436 और 542 को भाग देने पर क्रमशः 7, 11 और 15 शेष बचे।
7. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई क्रमश 8 मी., 6 मी. और 4 मीटर है। बड़ा से बड़ा मापने का ऐसा फीता ज्ञात कीजिए जिससे कमरे की तीनों मापों को पूरा पूरा मापा जा सके।

8. निम्न कथनों में सत्य कथन के लिये T और असत्य कथन के लिये F लिखिए।

(i) दो भिन्न अभाज्य संख्याओं का म.स. 1 होता है।

(ii) दो असहभाज्य संख्याओं का म.स. 1 होता है।

(iii) एक सम संख्या एवं एक विषम संख्या का म.स. एक सम संख्या होती है।

(iv) दो क्रमागत सम संख्याओं का म.स. 2 होता है।

(v) दो क्रमागत विषम संख्याओं का म.स. 2 होता है।

लघुत्तम समापवर्त्य -

हम पहले पढ़ चुके हैं कि किसी संख्या में 1, 2, 3, 4 .... आदि प्राकृत संख्याओं का क्रमशः गुणा करने पर उस संख्या के अपवर्त्य (गुणज) प्राप्त होते हैं।

दो या अधिक संख्याओं के अपवर्त्यों में जो उभयनिष्ठ समान अपवर्त्य होते हैं, उन्हें उनका समान अपवर्त्य कहते हैं। दी हुई संख्याओं के समान अपवर्त्य में से सबसे छोटा समान अपवर्त्य उन संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य कहलाता है। दी हुई संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य ल.स. (LCM) दी हुई संख्याओं से पूर्ण विभाजित हो जाता है।

दो या अधिक संख्याओं का ल.स. वह छोटी से छोटी संख्या होती है, जिसमें दी हुई संख्याओं का भाग पूर्ण रूप से चला जाए।

इसको हम एक उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण के लिए -	12 के अपवर्त्य	= 12, 24, 36, 48, 60,....
	30 के अपवर्त्य	= 30, 60, 90, 120, 150, ...
	12 और 30 के समापवर्त्य	= 60, 120....
अतः 12 व 30 का लघुत्तम समापवर्त्य		= 60

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ :-

(1) अपवर्त्य विधि

(2) अभाज्य गुणनखण्डन विधि

(3) सर्वनिष्ठ विभाजन विधि

(1) लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की अपवर्त्य विधि-

(i) दी गई संख्याओं के अपवर्त्य ज्ञात करते हैं।

(ii) इन अपवर्त्यों में से उभयनिष्ठ अपवर्त्य (समापवर्त्य) ज्ञात करते हैं।

(iii) इन समापवर्त्यों में से सबसे छोटा समापवर्त्य ही वांछित ल.स. होता है।

उदाहरण 9. 12 और 30 का ल.स. हम ऊपर ज्ञात कर चुके हैं।

(2) ल.स. ज्ञात करने की अभाज्य गुणनखण्ड विधि-

(i) सर्वप्रथम दी गई संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं।

(ii) इन अभाज्य गुणनखंडों में से उभयनिष्ठ गुणनखंड ज्ञात करते हैं।

(iii) उभयनिष्ठ गुणनखंड अलग लिखने के बाद शेष बचे गुणनखंड भी लेकर इन सभी प्राप्त गुणनखंडों का गुणा करने पर दी हुई संख्याओं का ल.स. प्राप्त होता है।

इस प्रकार इस विधि में दी हुई संख्याओं को घात के रूप में लिखा जाए फिर गुणनखण्डों की अधिकतम घात लेकर उनका गुणनफल ही अभीष्ट ल.स. होगा।

उदाहरण 10. 25, 48 और 75 का ल.स. ज्ञात कीजिए?

$$25 = 5 \times 5 = 5^2$$
$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3^1$$
$$75 = 3 \times 5 \times 5 = 3^1 \times 5^2$$

यहाँ अभाज्य गुणनखण्डों 2, 3 और 5 की अधिकतम घातें क्रमशः 4, 1 और 2 हैं।

अतः अभीष्ट ल.स. $= 2^4 \times 3^1 \times 5^2$

$= 16 \times 3 \times 25$

$= 1200$ है।

प्राप्त ल.स. 1200 दी गई संख्याओं 25, 48 व 75 से पूर्ण विभाजित हो जाता है।

(3) ल.स. ज्ञात करने की सर्वनिष्ठ विभाजन विधि-

इस विधि का अध्ययन आप पिछली कक्षा में कर चुके हैं। इस विधि को स्पष्ट करने के लिये यहाँ उदाहरण दिया जा रहा है। इसका अवलोकन कीजिए।

उदाहरण 11. 15, 20, 25 और 30 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल-

2	15, 20, 25, 30
2	15, 10, 25, 15
3	15, 5, 25, 15
5	5, 5, 25, 5
5	1, 1, 5, 1
	1, 1, 1, 1

ल.स. $= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

$= 300$

(1) दी हुई संख्याओं का ल.स. उन संख्याओं से पूर्ण विभाजित हो जाता है।

(2) दी हुई संख्याओं का ल.स. उन संख्याओं में सबसे बड़ी संख्या के बराबर या उससे बड़ा होता है।

(3) दो असहभाज्य संख्याओं का ल.स. उनके गुणनफल के बराबर होता है।

(4) दी हुई संख्याओं का ल.स. उनका एक गुणज होता है और उनके सर्वनिष्ठ गुणजों में सबसे छोटा होता है।

(5) यदि दो संख्याओं का म.स. उन दोनों संख्याओं में से किसी एक के बराबर हो, तो उनका ल.स. दूसरी संख्या के बराबर होगा।

दो संख्याओं के म.स. और ल.स. में सम्बन्ध-

दो संख्याओं के ल.स. और म.स. का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।

अर्थात् ल.स. × म.स. = पहली संख्या × दूसरी संख्या

उदाहरण 12. 25 और 40 म.स. = 5

हल- 25 और 40 का ल.स. = 200

ल.स. × म.स. = 5 × 200 = 1000

पहली संख्या × दूसरी संख्या = 25 × 40 = 1000

इस प्रकार, $\boxed{\text{ल.स.} \times \text{म.स.} = \text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}$

इस संबंध से $\boxed{\text{ल.स.} = \dfrac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{उनका म.स.}}}$

किन्हीं दो संख्याओं का म.स. ज्ञात होने पर ल.स. ज्ञात किया जा सकता है। अर्थात् सूत्र रूप में इस संबंध में से 3 राशियों के मान पता होने से चौथी राशि का मान ज्ञात किया जा सकता है।

किन्हीं दो संख्याओं के ल.स. में उनके म.स. का भाग पूरा-पूरा चला जाता है, इसलिये उसका ल.स. उसके म.स. का गुणज होता है।

$$\boxed{\text{म.स.} = \dfrac{\text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या}}{\text{उनका ल.स.}}}$$

ल.स. और म.स. के संबंध पर आधारित एक उदाहरण को हल करते हैं :-

उदाहरण 13. वह सबसे छोटी प्राकृत संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 16, 28, 40 और 77 से भाग दें तो प्रत्येक दशा में 8 शेष बचे?

हल- हम जानते हैं कि वह सबसे छोटी संख्या जिसे 16, 28, 40 और 77 से पूर्णतः विभाजित किया जा सके, इनका ल.स. ही होता है। इसलिये अभीष्ठ संख्या इन संख्याओं के ल.स. से 8 अधिक होगी। अतः 16, 28, 40 व 77 का ल.स. ज्ञात करेंगे :-

2	16,	28,	40,	77
2	8,	14,	20,	77
2	4,	7,	10,	77
2	2,	7,	5,	77
5	1,	7,	5,	77
7	1,	7,	1,	77
11	1,	1,	1,	11
	1,	1,	1,	1

16, 28, 40 व 77 का ल.स. $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 11$

$= 6160$

अतः अभीष्ट संख्या $= 6160 + 8 = 6168$

प्रश्नावली 3.5

1. निम्न में से प्रत्येक का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।
   (i) 48, 60 (ii) 12, 15, 45
   (iii) 45, 105, 165 (iv) 180, 384, 144
   (v) 108, 135, 162 (vi) 240, 420, 660
2. संख्याओं 117, 221 के लिये सिद्ध करो कि 'संख्याओं का गुणनफल उनके म.स. एवं ल.स. के गुणनफल के बराबर होता है।
3. दो संख्याओं का म.स. 16 है। यदि इन संख्याओं का गुणनफल 6400 है, तो उनका लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करो।
4. दो संख्याओं के म.स. एवं ल.स. क्रमशः 13 एवं 1989 है। यदि उनमें से एक संख्या 117 हो तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।
5. क्या दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक 14 तथा लघुत्तम समापवर्त्य 204 हो सकता है? कारण सहित उत्तर लिखो।
6. एक विद्यालय में कक्षा 6 के दो सेक्शन **A** तथा **B** हैं। सेक्शन **A** में 32 विद्यार्थी एवं सेक्शन **B** में 36 विद्यार्थी हैं। उनके पुस्तकालय में न्यूनतम कितनी पुस्तकें हों कि उन्हें सेक्शन **A** एवं सेक्शन **B** के विद्यार्थियों में समान रूप से बाँटा जा सके?
7. एक सड़क के किनारे प्रत्येक 220 मी. की दूरी पर टेलीफोन के खंभे स्थित हैं और उसी सड़क के किनारे प्रत्येक 300 मी. की दूरी पर पत्थरों के ढेर पड़े हैं। यदि पत्थरों की पहली ढेरी पहले खंभे के पाद पर हो तो उससे कितनी दूरी पर पत्थरों की ढेरी एवं किसी खंभे का पाद एक साथ आयेंगे?
8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 25, 40 एवं 60 से भाग देने पर प्रत्येक स्थिति में 7 शेष बचे।
9. तेज चलने की स्पर्धा में तीन व्यक्ति एक साथ चलता प्रारंभ करते हैं। उनके पगों के चलने की दूरी क्रमशः 80 सेमी., 85 सेमी. और 90 से.मी. है। प्रारंभिक स्थान से कितनी दूरी पर वे एक साथ पग रखेंगे?
10. 10000 के निकटतम एक ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए जो 8, 15 एवं 21 प्रत्येक से पूर्णतः विभाज्य है तथा 10000 से बड़ी है।

याद रखने योग्य बातें

1. किसी संख्या का गुणनखंड उस संख्या को पूर्णतः विभाजित करता है।
2. किसी संख्या का गुणज उस संख्या से पूर्णतः विभाजित होगा।
3. प्रत्येक संख्या स्वयं का ही गुणज एवं गुणनखंड होती है।
4. 1 प्रत्येक संख्या का गुणनखंड होता है।
5. 1 ऐसी संख्या है जो न तो भाज्य है और न ही अभाज्य।
6. केवल 2 ही एक सम अभाज्य संख्या है।
7. अभाज्य संख्याओं के ऐसे युग्म जिनमें संख्याओं का अंतर 2 हो अभाज्य यमज कहलाते हैं।
8. सह अभाज्य संख्याओं का म.स. 1 होता है।
9. दो संख्याओं के म.स. एवं ल.स. का गुणनफल उन संख्याओं के गुणनफल के बराबर होता है।
10. दो अभाज्य या सह अभाज्य संख्याओं का ल.स. उनके गुणनफल के बराबर होता है।
11. दो या अधिक संख्याओं का ल.स.उनमें बड़ी संख्या के बराबर या उससे बड़ा होता है।
12. दो या दो से अधिक संख्याओं का म.स. उनमें सबसे छोटी संख्या के बराबर या उससे छोटा होता है।
13. दो या अधिक संख्याओं का म.स. उनके ल.स. का एक गुणनखण्ड होता है।