

## पाठ 8 आधारभूत ज्यामितीय संकल्पनाएँ

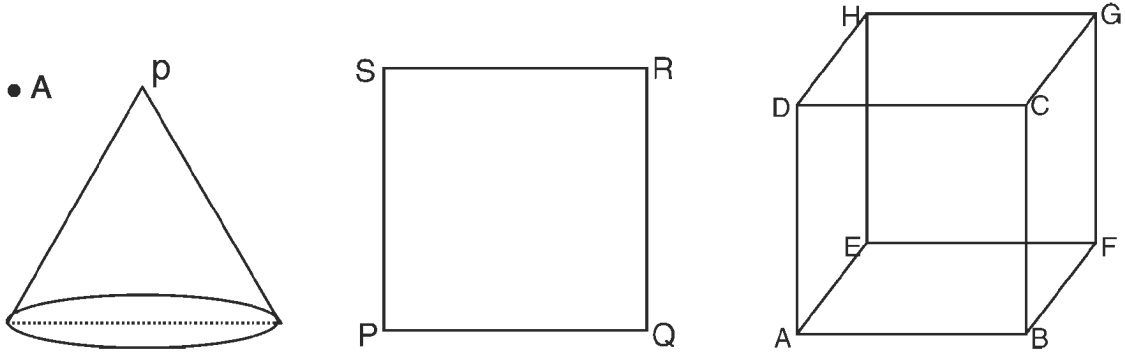
### आइए सीखें-

- बिन्दु, रेखा, तल, रेखाखण्ड, किरण एवं समान्तर रेखाओं की संकल्पना।
- समान्तर एवं प्रतिच्छेदी रेखाएँ।
- रेखाओं एवं बिन्दुओं के गुण धर्म।
- सरेख तथा असरेख बिन्दु।
- संगामी रेखाएँ।

बिन्दु, रेखा, तल और किरण को परिभाषित करने के बजाए हम इनकी संकल्पना को कुछ व्यावहारिक उदाहरणों के माध्यम से समझते हैं :-

**1. बिन्दु** - नुकीली पेंसिल की नोक से कागज पर चिन्ह बनाकर देखिए।

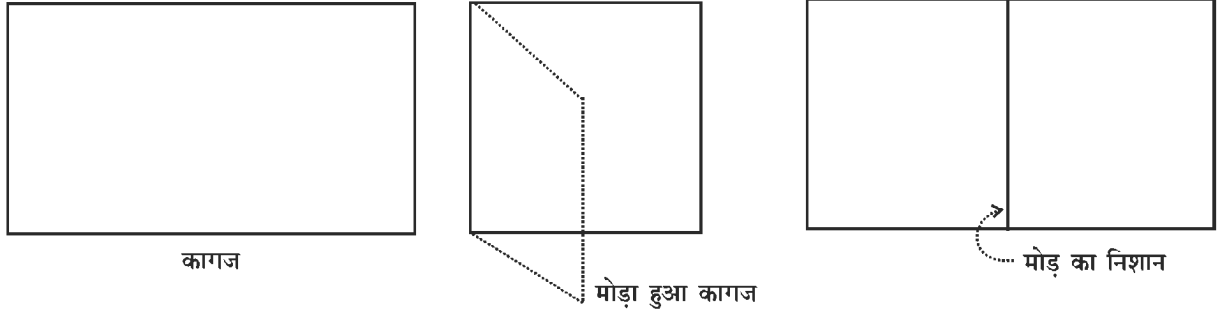
यह आकृति बिन्दु की है। नीचे दिए गए शंकु, वर्ग और घनाभ की आकृति को ध्यान से देखिए।



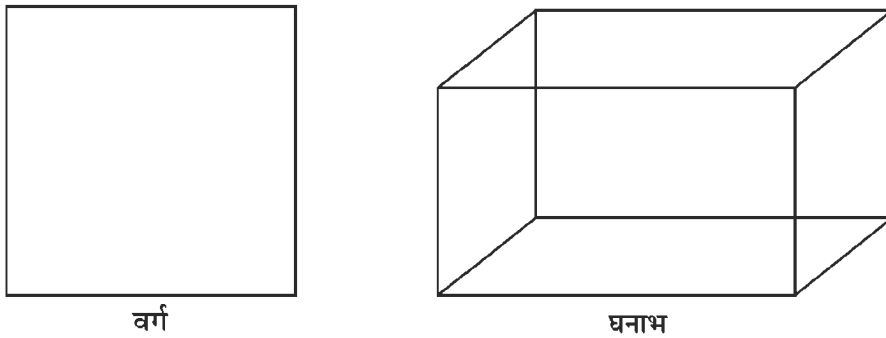
इन आकृतियों में कागज पर बना निशान A, शंकु का शीर्ष P, वर्ग के चारों कोने P, Q, R व S और घनाभ के शीर्ष A, B, C, D, E, F, G, H ये सभी बिन्दु को व्यक्त करते हैं।

बिन्दु की आदर्श संकल्पना के लिये यह कहा जाता है कि बिन्दु में लम्बाई, चौड़ाई व मोटाई नहीं होती है। बिन्दु की आकृति जितनी सूक्ष्म होगी वह बिन्दु की संकल्पना के उतने ही निकट होगी। बिन्दु को अंग्रेजी वर्णमाला के किसी एक बड़े अक्षर जैसे A, B, P, Q, T, ..... या हिन्दी वर्णमाला के किसी एक अक्षर से नामांकित करते हैं।

**2. रेखा** - एक कागज को मोड़ कर दबाइए। उसे खोलने पर मोड़ का जो निशान बनता है, वह रेखा (Line) की आकृति है। जो दोनों ओर अनंत तक जाती है।



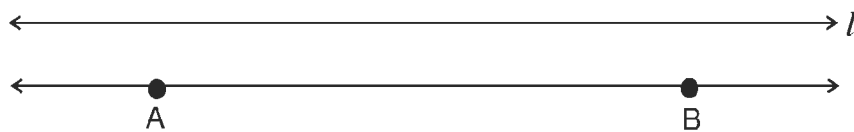
एक वर्ग के किनारों तथा एक घनाभ के किनारों को देखिए प्रत्येक किनारा रेखा के एक भाग का उदाहरण है।



रेखा की संकल्पना समझने के लिये हम कल्पना करें कि इन किनारों को दोनों ओर अनंत तक बढ़ाया गया है।

**रेखा की आधारभूत संकल्पना-** रेखा का अपरिमित रूप से (अनंत तक) दोनों दिशाओं में विस्तार होता है। इसकी चौड़ाई व मोटाई नहीं होती।

नीचे दी गई रेखा की आकृतियों को ध्यान से देखिए-

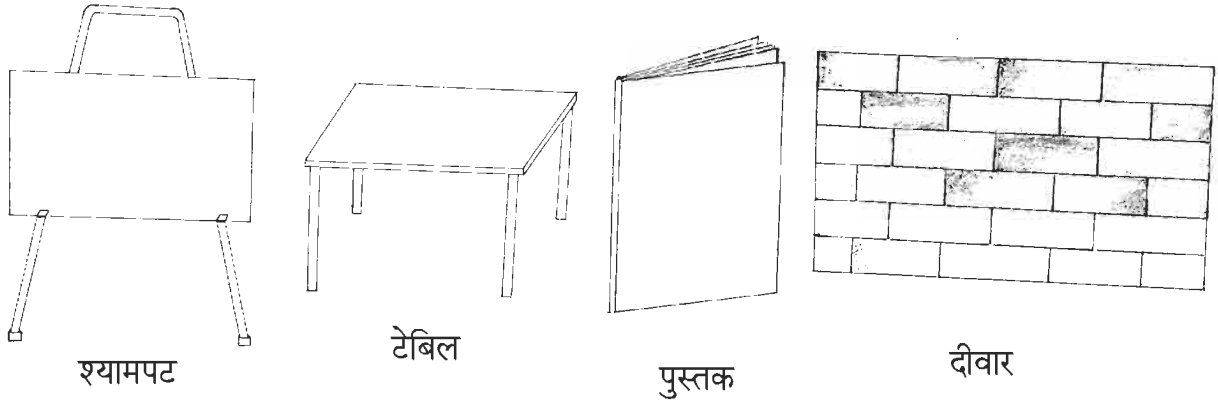


हम देखते हैं कि रेखा के दोनों सिरों पर तीर के निशान बने हैं, यह रेखा के दोनों ओर अनंत विस्तार को दर्शाते हैं।

**विशेष :** रेखा में कोई अंतिम बिन्दु नहीं होता, रेखा में अनंत बिन्दु होते हैं। रेखा को दर्शाने के लिये दो तरीके प्रचलन में हैं-

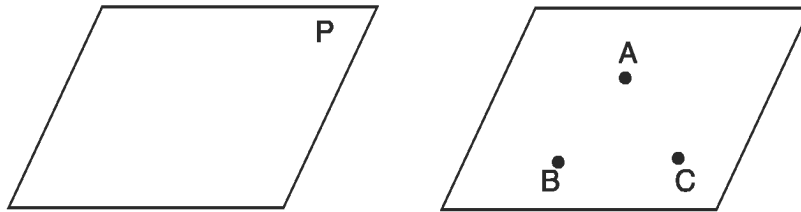
- (1) रेखा के एक सिरे पर अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर  $l, m, n, p$  आदि लिखकर व्यक्त करते हैं।
- (2) अंग्रेजी वर्णमाला के दो बड़े अक्षर  $A, B$  लेकर  $\overleftrightarrow{AB}$  द्वारा या  $P, Q$  लेकर  $\overleftrightarrow{PQ}$  द्वारा व्यक्त करते हैं।

3. तल- अपनी कक्षा की दीवारों, श्यामपट, टेबल और पुस्तक की सतह को छूकर ध्यान से देखें। ये सभी सतह सपाट हैं। ये सपाट पृष्ठ (सतह) समतल (Plane) के एक भाग को बतलाते हैं।



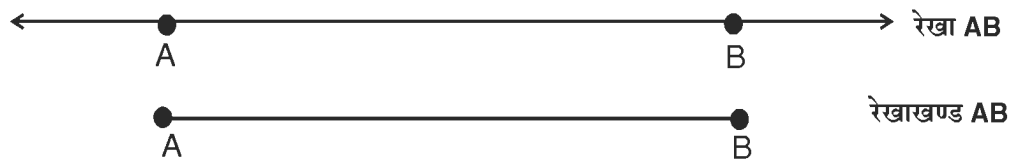
समतल एक ऐसा सपाट पृष्ठ है जिसे चारों तरफ अनंत तक बढ़ाया जा सकता है, इस प्रकार समतल का विस्तार चारों तरफ अनंत तक होता है। यह माना जाता है कि तल की असीमित लम्बाई और चौड़ाई होती है, परन्तु इसकी मोटाई नहीं होती है।

तल को दो प्रकार से दर्शाते हैं जो निम्न हैं।



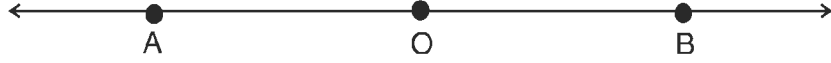
- (1) समतल को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर p, q, r, .... को इसके चित्र के एक सिरे पर लिखकर दर्शाते हैं।
- (2) समतल के चित्र में तीन अलग-अलग (असरेख) बिन्दु लिखकर जैसे- A, B, C द्वारा दर्शाते हैं।

4. रेखाखण्ड - चित्र में रेखा  $\overleftrightarrow{AB}$  को दिखाया गया है। रेखा से एक भाग AB को अलग कर लें तो वह रेखाखण्ड AB हो जाता है।

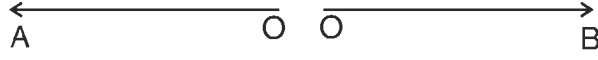


रेखाखण्ड AB, रेखा AB का एक भाग है। रेखाखण्ड के दो अंत बिन्दु होते हैं। उक्त रेखाखण्ड के दो अंत बिन्दु A तथा B हैं।

5. किरण- नीचे दी गयी रेखा  $\overleftrightarrow{AB}$  के चित्र को ध्यान से देखिए।  $\overleftrightarrow{AB}$  रेखा पर कोई बिन्दु  $O$  है।



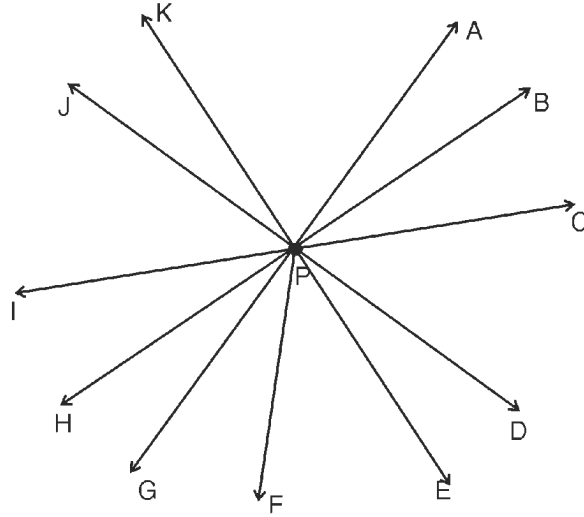
रेखा पर बिन्दु  $O$  लेने से रेखा दो भागों में विभाजित हो जाती है।  
जो निम्न है



यह दोनों भाग  $OA$  और  $OB$  किरण (Ray) कहलाते हैं।

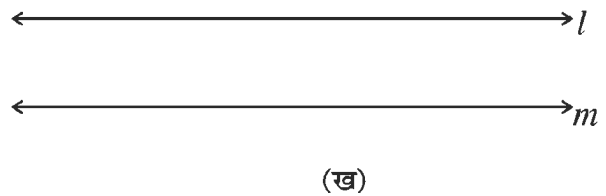
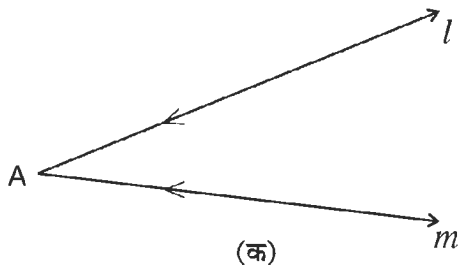
किरण में एक अंत बिन्दु होता है और दूसरी ओर इसका अनन्त तक विस्तार होता है।

सूर्य, बल्ब, मोमबत्ती, दीपक आदि से आने वाला प्रकाश, किरणों के रूप में आता है। नीचे दिए गए चित्र में एक बिन्दु  $P$  से निकलने वाली कई किरणें दिखाई गयी हैं।



चित्र में  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PB}$ ,  $\overrightarrow{PC}$ ,  $\overrightarrow{PD}$ ,  $\overrightarrow{PE}$ , ..... आदि किरणों को दर्शाया गया है।

6. समान्तर रेखाएँ - नीचे दिए गए चित्र में रेखाओं के दो जोड़े दिखाए गए हैं।



हम देखते हैं कि चित्र 'क' में रेखा  $l$  और  $m$  को दाहिनी ओर कितना भी बढ़ाएँ वे कभी नहीं मिलेंगी। परन्तु बायीं ओर बढ़ाने पर दोनों रेखाएँ  $A$  बिन्दु पर मिलती हैं।

जबकि चित्र 'ख' में दोनों रेखाएँ  $l$  तथा  $m$  को दायीं ओर अथवा बायीं ओर कितना भी बढ़ाएँ वे कभी भी नहीं मिलेंगी, ये समान्तर रेखाएँ हैं।

**7. समान्तर रेखाएँ-** वे रेखाएँ जिनको कितना भी बढ़ाया जाय एक दूसरे को कभी नहीं काटतीं परस्पर समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं।

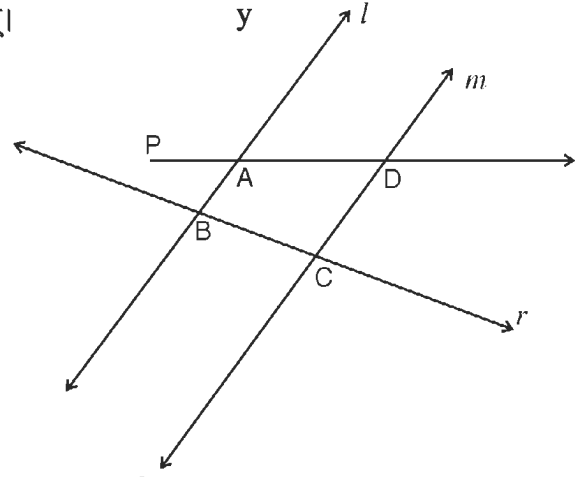
रेल की पटरियाँ, श्यामपट या टेबल के आमने-सामने के किनारे, समान्तर रेखाओं के उदाहरण हैं।

**8. प्रतिच्छेदी रेखाएँ-** वे सरल रेखाएँ जो एक-दूसरे से किसी एक बिन्दु पर मिलती हैं। प्रतिच्छेदी रेखाएँ कहलाती हैं तथा यह बिन्दु प्रतिच्छेद बिन्दु कहलाता है।

### प्रश्नावली 8.1

1. आकृत को देखकर निम्नलिखित के नाम लिखिए।

- (1) बिन्दु ....
- (2) रेखा ....
- (3) किरण ....
- (4) समान्तर रेखाएँ ....
- (5) रेखाखण्ड ....
- (6) तल ....
- (7) प्रतिच्छेदी रेखाएँ ....
- (8) प्रतिच्छेद बिन्दु ....

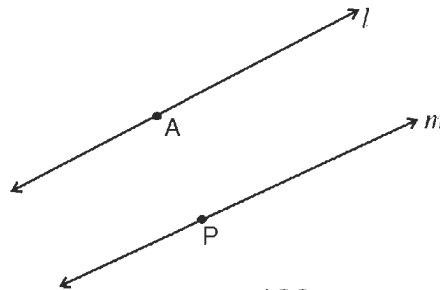


2. नीचे दिए गए शब्दों में से सही शब्द चुनकर खाली स्थानों को भरिए।

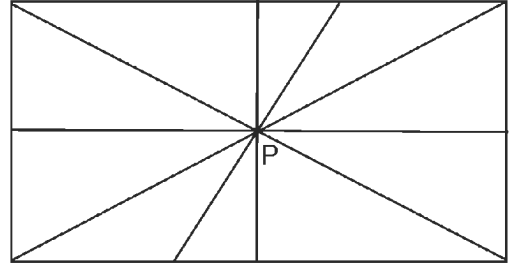
(किरण, तल, बिन्दु, समान्तर, दो, प्रतिच्छेद, रेखा, समतल)

- (1) शंकु का शीर्ष ..... का उदाहरण है।
- (2) वह ज्यामितीय आकृति जिसमें लम्बाई होती है चौड़ाई या मोटाई नहीं होती को .....
- माना जाता है।
- (3) दो रेखाओं के कटान बिन्दु को उन रेखाओं का ..... बिन्दु कहते हैं।
- (4) ..... का एक अंत बिन्दु होता है।
- (5) रेखाखण्ड में ..... अंत ..... होते हैं।
- (6) कभी भी न मिलने वाली दो रेखाओं को ..... रेखाएँ कहते हैं।
- (7) ऐसा सपाट पृष्ठ जिसका विस्तार चारों ओर अनंत तक होता है ..... कहलाता है।

**9. रेखाओं और बिन्दुओं के गुण-धर्म** - यदि एक बिन्दु A, रेखा  $l$  पर स्थित है या रेखा  $m$  बिन्दु P से होकर जाती है। ऐसे संबंध जिनमें “पर स्थित है” या “से होकर जाती है” का बोध होता है, आपतन गुण कहलाते हैं।

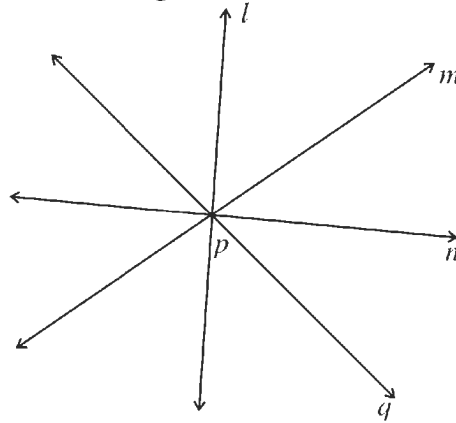


**गतिविधि 1.** एक कागज लेकर उस पर P बिन्दु अंकित कीजिए, अब इस बिन्दु से कागज को बार-बार मोड़कर चित्र में दिखाए अनुसार मोड़ बनाइए। हम देखते हैं कि एक बिन्दु P से होकर मोड़ के अनेक निशान बनाए जा सकते हैं।



**गतिविधि 2.**

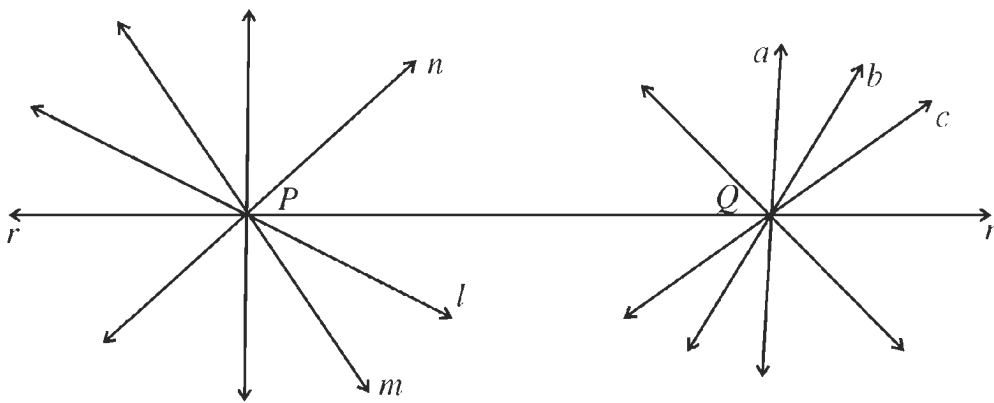
कागज पर एक बिन्दु P लीजिए (बनाइए) अब पटरी की सहायता से चित्र में बताए अनुसार रेखाएँ  $l, m, n, q$  खींचिए। हम देखते हैं कि बिन्दु P से जाने वाली अनन्त रेखाएँ खींची जा सकती हैं।



किसी तल में स्थित एक ही बिन्दु से असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

**गतिविधि 3 :** एक कागज पर बिन्दु P और Q अंकित कीजिए। अब बिन्दु P से होकर पटरी की सहायता से असंख्य रेखाएँ  $l, m, n, \dots$  आदि खींचिए। अब बिन्दु Q से भी इसी प्रकार असंख्य रेखाएँ खींचिए। इन खींची गयी रेखाओं को ध्यान से देखिए-

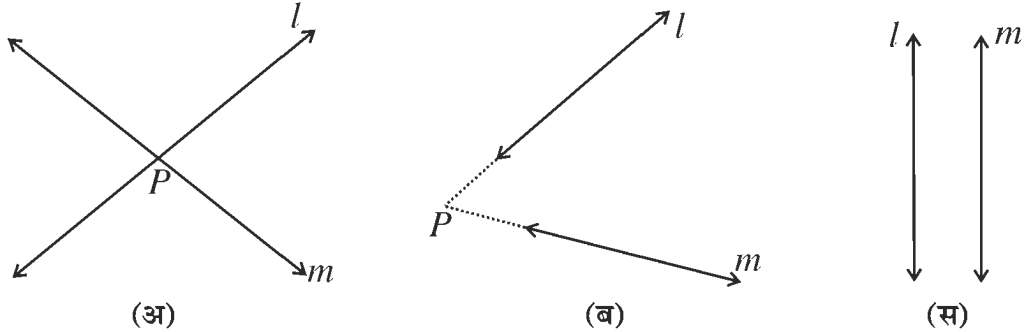
हम देखते हैं कि इन रेखाओं में केवल एक ही रेखा  $r$  ऐसी है जो P तथा Q दोनों बिन्दुओं से होकर जाती है।



किसी तल में स्थित दो बिन्दुओं से होकर केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।

दो बिन्दु अद्वितीय रूप से एक रेखा को निर्धारित करते हैं जो पूर्णतः तल में स्थित होती है।

10. एक ही तल में दो रेखाएँ - एक ही तल में स्थित दो रेखाओं की निम्न तीन स्थितियाँ हो सकती हैं।



रेखाओं के जोड़े एक ही तल में स्थित हैं-

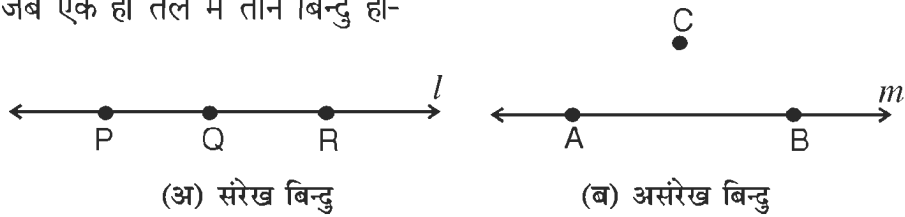
- (1) चित्र 'अ' में रेखाएँ  $l$  और  $m$  एक दूसरे को  $P$  बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।
- (2) चित्र 'ब' में रेखा  $l$  और  $m$  को बायीं ओर बढ़ाने पर रेखाएँ  $P$  बिन्दु पर मिलती हैं।
- (3) चित्र 'स' में रेखा  $l$  तथा  $m$  किसी भी ओर बढ़ाने पर कभी भी नहीं मिलतीं। ये रेखाएँ समान्तर रेखाएँ हैं।

**निष्कर्ष :** किसी तल में स्थित दो रेखाएँ या तो समान्तर होती हैं या प्रतिच्छेदी होती हैं।

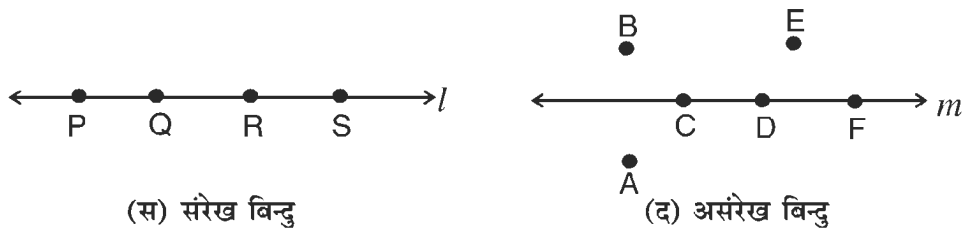
11. संरेख बिन्दु - हम सीख चुके हैं कि

- (1) किसी तल में स्थित एक बिन्दु से असंख्य रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
  - (2) किसी तल में स्थित दो बिन्दुओं से होकर एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है।
- अब हम किसी तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दुओं की स्थिति पर विचार करते हैं। इनके लिये नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए।

(i) जब एक ही तल में तीन बिन्दु हों-



(ii) जब एक ही तल में तीन से अधिक बिन्दु हों-



चित्र 'अ' में तीन बिन्दु P, Q और R एक ही रेखा  $l$  पर स्थित हैं। अतः यह तीनों बिन्दु संरेख बिन्दु हैं।

चित्र 'ब' में बिन्दु A और B तो रेखा  $m$  पर स्थित हैं। परन्तु बिन्दु C रेखा  $m$  पर स्थित नहीं है।

चित्र 'स' में बिन्दु P, Q, R तथा S एक ही रेखा  $l$  पर स्थित हैं। अतः यह चारों बिन्दु संरेख बिन्दु हैं।

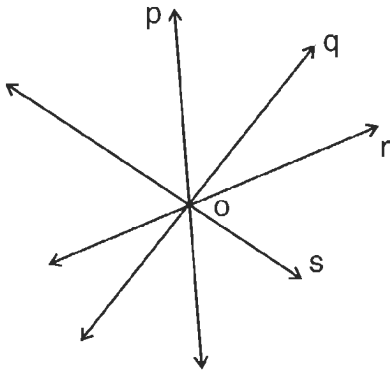
चित्र 'द' में बिन्दु A, B, C, D, E तथा F में से बिन्दु C, D, F रेखा  $m$  पर स्थित हैं परन्तु बिन्दु A, B, E रेखा पर स्थित नहीं है। अतः ये सभी असंरेख बिन्दु हैं।

**इस प्रकार हम कह सकते हैं कि -**

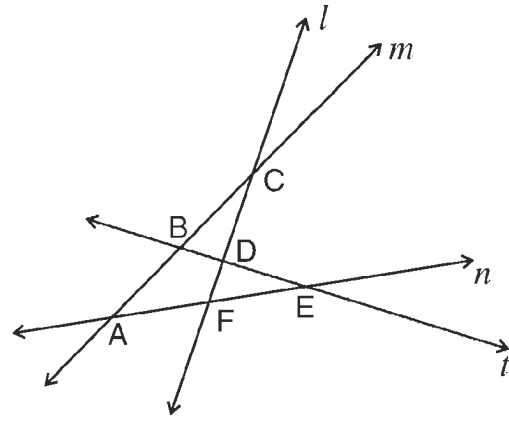
1. एक ही तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु संरेख होते हैं, यदि वे सभी एक ही रेखा पर स्थित हों।
2. एक ही तल में स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु असंरेख होते हैं, यदि वे एक ही रेखा पर स्थित न हों।

**ध्यान रखें** - दो बिन्दु हमेशा संरेखीय होते हैं परन्तु बिन्दु तीन या अधिक हों तो वे एक ही रेखा पर हो भी सकते हैं और नहीं भी इसलिए संरेखता तीन या अधिक बिन्दुओं पर देखी जाती है।

**12. संगामी रेखाएँ** - जिस प्रकार हम कई बिन्दुओं को एक ही रेखा पर स्थित होने की बात करते हैं। इसी प्रकार हम अनेक रेखाओं के एक ही बिन्दु से जाने की स्थिति पर विचार करते हैं। इसके लिये नीचे दिए गए चित्रों को ध्यान से देखिए-



(अ) संगामी रेखाएँ



(ब) असंगामी रेखाएँ

चित्र 'अ' में एक ही तल में स्थित रेखाएँ  $p, q, r$  तथा  $s$  एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं तथा बिन्दु 'o' संगमन बिन्दु कहलाता है।

चित्र 'ब' में एक ही तल में स्थित सभी रेखाएँ  $l, m, n$  तथा  $t$  किसी एक बिन्दु पर नहीं मिलती हैं। अतः ये असंगामी रेखाएँ कहलाती हैं।

**इस प्रकार हम कह सकते हैं कि -**

- (1) यदि एक ही तल में स्थित तीन या तीन से अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से होकर जाती हैं तो वे रेखाएँ संगामी रेखाएँ कहलाती हैं और उस बिन्दु को संगमन बिन्दु कहते हैं।



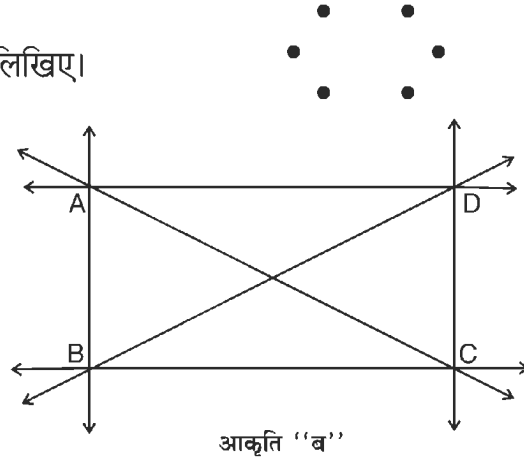
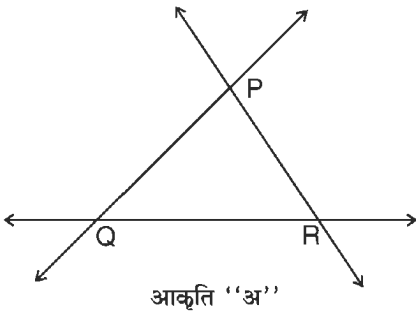
(2) यदि एक ही तल में स्थित तीन या अधिक रेखाएँ एक ही बिन्दु से नहीं जाती हैं तो वे असंगामी रेखाएँ कहलाती हैं।

**ध्यान रखें** - (1) तीन या तीन से अधिक रेखाओं का संगमन बिन्दु उनका प्रतिच्छेद बिन्दु होता है परन्तु तीन या अधिक रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु रेखाओं का संगमन बिन्दु भी हो यह आवश्यक नहीं है।

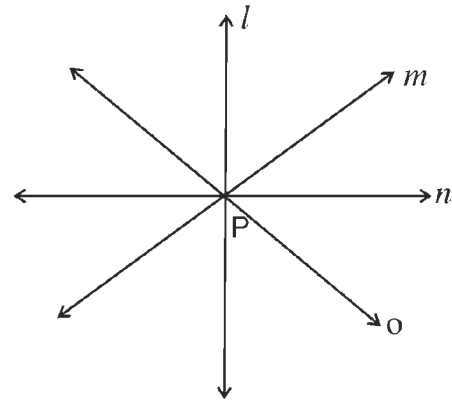
इसे हम ऊपर दिए गए चित्रों से समझ सकते हैं। चित्र 'अ' में संगमन बिन्दु 'o' रेखा p, q, r तथा s का प्रतिच्छेद बिन्दु भी है। परन्तु चित्र 'ब' में रेखा l तथा m का प्रतिच्छेद बिन्दु C, n और t का E, n और l का प्रतिच्छेद बिन्दु F, n और m का प्रतिच्छेद बिन्दु A तथा m और t का प्रतिच्छेद बिन्दु B है परन्तु इनमें से कोई भी बिन्दु रेखा l, m, n तथा t का संगमन बिन्दु नहीं है।

### प्रश्नावली 8.2

- नीचे दिये गये बिन्दुओं को नामांकित कीजिए तथा उनको क्रम में जोड़िए। निर्मित रेखाखण्डों की संख्या लिखिए।
- आकृति में दी गयी रेखाओं को पहचानकर लिखिए।



- अपने पर्यावरण से रेखा के दो उदाहरण दीजिए।
- आकृति को देखिए। बिन्दु P से होकर रेखाएँ l, m, n, o खींची गयी हैं। क्या P से होकर और भी रेखाएँ खींची जा सकती हैं यदि हाँ तो कितनी?
- A तथा B एक तल में स्थित दो भिन्न बिन्दु है। इन बिन्दुओं से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

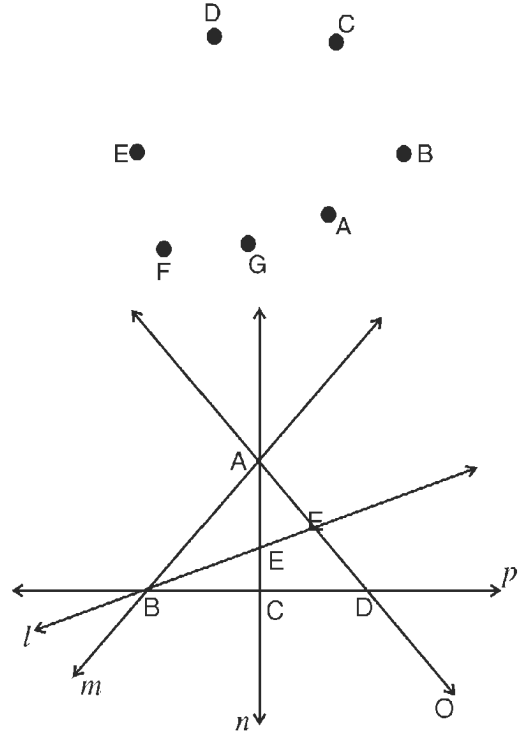


- सही शब्द चुनकर रिक्त स्थान में भरिए-

(असंख्य, समान्तर, रेखा, प्रतिच्छेद, बिन्दु, सरेख, प्रतिच्छेद, संगामी)

- (1) एक ही तल में स्थित दो बिन्दुओं से एक और केवल एक ही ..... खींची जा सकती है।

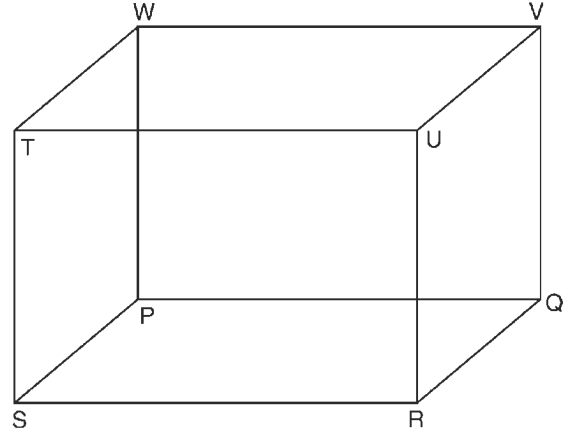
- (2) किसी तल में स्थित दो रेखाएँ या तो ..... होंगी या ..... होंगी।  
 (3) किसी तल में स्थित एक बिन्दु से ..... रेखाएँ खींची जा सकती हैं।  
 (4) एक ही तल में, एक ही रेखा पर स्थित तीन या तीन से अधिक बिन्दु ..... होते हैं।  
 (5) एक ही तल में स्थित तीन या तीन से अधिक संगामी रेखाएँ एक ही ..... से होकर जाती हैं।  
 (6) संगमन बिन्दु सदैव ..... बिन्दु भी होता है।
7. अपने पर्यावरण से निम्नलिखित के दो-दो उदाहरण दीजिए।  
 (1) असमतल पृष्ठ (2) समतल पृष्ठ (3) प्रतिच्छेदी रेखाएँ (4) समानान्तर रेखाएँ।
8. तीन असरेख बिन्दुओं से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?
9. एक आकृति बनाइए जिसमें बिन्दु A, B, C, D, E, F व G में से बिन्दु B, E व F सरेखी हों।
10. अपनी अभ्यास पुस्तिका में चार बिन्दु A, B, C व D इस प्रकार अंकित कीजिए कि उनमें से कोई भी तीन बिन्दु सरेखी न हों। ऐसी सभी रेखाएँ खींचिए जो इन बिन्दुओं को युग्मों में जोड़ने से बनती हैं।  
 (1) इस प्रकार की कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं?  
 (2) इन रेखाओं के नाम लिखिए।  
 (3) उन रेखाओं के नाम लिखिए जो C पर संगामी हैं।
11. आकृति में अंकित बिन्दुओं A, B, C, D, E, F और G में से जाँच कीजिए कि निम्न बिन्दु सरेख हैं या नहीं।  
 (1) E, D व C  
 (2) B, C व E  
 (3) D, E व F  
 (4) A, B व F  
 (5) A, G व F
12. आकृति से निम्नलिखित को लिखिए-  
 (1) सरेखी बिन्दु।  
 (2) संगामी रेखाएँ एवं उनके संगमन बिन्दु।
13. एक तल में तीन रेखाएँ इस प्रकार खींचिए कि हमें  
 (1) अधिकतम प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त हों इससे कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होंगे?  
 (2) न्यूनतम प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त हों इससे कितने प्रतिच्छेद बिन्दु प्राप्त होते हैं?



14. रेखाएँ  $l, m$  व  $n$  संगामी हैं। इसी प्रकार रेखाएँ  $l, m$  व  $p$  संगामी हैं। क्या  $l, m, n$  व  $p$  भी संगामी होंगी?

15. दी गयी घनाभकार आकृति में-

- (1) कितने बिन्दु अंकित हैं? उनके नाम लिखिए।
- (2) कितनी रेखाओं के भाग दिखाए गए हैं, उनके नाम लिखिए।
- (3) कितने तलों के भाग दिखाए गए हैं, उनके नाम लिखिए।

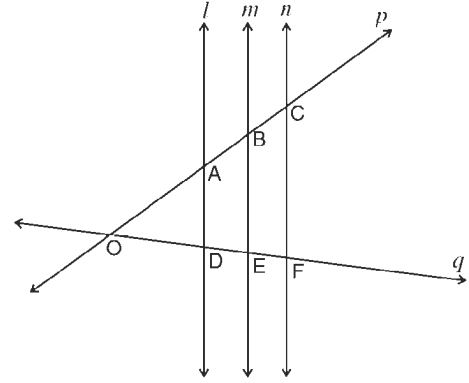


16. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए -

- (1) बिन्दु की एक स्थिति होती है। परन्तु कोई ..... नहीं होता।
- (2) तल में स्थित दो ..... रेखाएँ सदैव एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं।
- (3) दो भिन्न बिन्दुओं से होकर ..... रेखा खींची जा सकती है।
- (4) तीन बिन्दु ..... होंगे, यदि वे एक रेखा पर स्थित हैं।
- (5) एक सूक्ष्म चिन्ह हमें एक ..... का आभास कराता है।
- (6) यदि दो रेखाएँ बिन्दु P पर काटती हैं तो P दोनों रेखाओं का ..... कहलाता है।
- (7) तल में स्थित रेखाएँ जो समान्तर नहीं हैं। परस्पर ..... होंगी।
- (8) तीन या तीन से अधिक बिन्दुओं में से सभी बिन्दु एक रेखा पर स्थित नहीं हैं अतः ये बिन्दु ..... होते हैं।

17. आकृति देखकर लिखिए-

- (1) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु A है।
- (2) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु E है।
- (3) रेखाएँ जिनका प्रतिच्छेद बिन्दु O है।
- (4) सरेख बिन्दु।
- (5) सभी समान्तर रेखाओं के युग्म।
- (6) सभी प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म।



18. आकृति को देखकर लिखिए-

- (1) प्रतिच्छेदी रेखाओं के युग्म।
- (2) चार असरेख बिन्दु।
- (3) बिन्दु B पर तीन संगामी रेखाएँ।
- (4) D पर प्रतिच्छेद करने वाली तीन रेखाएँ।

