पाठ 10

त्रिभुज

आइए सीखें-

- त्रिभुज के गुणधर्म।
- समद्विबाहु त्रिभुज के अधोलिखित गुणों का सत्यापन।
  (i) समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।
  (ii) समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
- पाइथागोरस प्रमेय एवं उसके विलोम का सत्यापन।
- त्रिभुज की माध्यिकाएँ, शीर्ष लम्ब एवं त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक।
- त्रिभुज के लम्ब केन्द्रक, केन्द्रक, परिकेन्द्र व अन्तः केन्द्र।

10.1 त्रिभुज के गुणधर्म

पिछली कक्षा में हम त्रिभुजों और उनके कुछ अधोलिखित गुणों के बारे में सीख चुके हैं।

(i) त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग 180^0 होता है।

(ii) त्रिभुज का बाह्य कोण अपने दोनों अभिमुख अंत:कोणों के योग के बराबर होता है।

(iii) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

हम भुजाओं तथा कोणों के आधार पर त्रिभुजों के वर्गीकरण के बारे में भी सीख चुके हैं। त्रिभुज के और भी बहुत से रोचक गुणधर्म हैं। इनमें से एक गुण, जो भुजाओं एवं सम्मुख कोणों से संबंधित है इस प्रकार है : ''एक त्रिभुज में बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।'' इस कथन का विलोम भी सत्य है। इसी प्रकार का एक अन्य गुण समकोण त्रिभुज से संबंधित है। त्रिभुजों से जुड़ा एक और महत्वपूर्ण गुण कुछ रेखाखण्डों के संगामी होने से है। इस अध्याय में हम इन सभी गुणों का अध्ययन करेंगे।

समद्विबाहु त्रिभुज

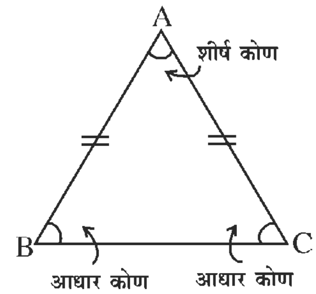
वह त्रिभुज जिसकी कोई दो भुजाएँ समान लम्बाई (बराबर) की होती हैं। उसे समद्विबाहु त्रिभुज कहते हैं।

आकृति 10.1 में ΔABC को ध्यान से देखिए

यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है, जिसमें

$$AB = AC$$

समद्विबाहु त्रिभुज में दो बराबर भुजाओं के अतिरिक्त तीसरी भुजा को त्रिभुज का आधार कहते हैं। समद्विबाहु त्रिभुज के आधार के सामने का कोण शीर्ष कोण कहलाता है। आधार पर त्रिभुज के जो कोण होते हैं वे आधार कोण कहलाते हैं।



आकृति 10.1

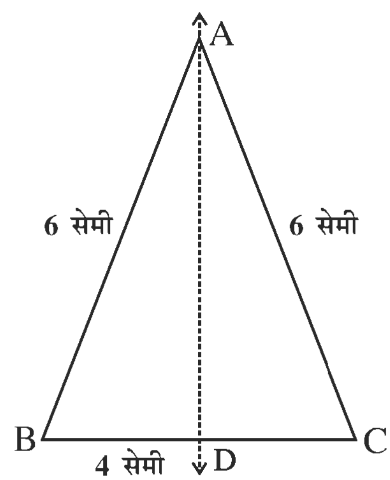
आकृति 10.1 में भुजा BC आधार भुजा है, $\angle A$ शीर्ष कोण तथा $\angle B$ व $\angle C$ आधार कोण हैं।

समद्विबाहु त्रिभुज के गुण

(i) समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं के सम्मुख कोण समान होते हैं।

क्रियाकलाप 1 : एक त्रिभुज ABC खीचिए जिसमें $AB = AC = 6$ से.मी. तथा $BC = 4$ सेमी. है। (आकृति 10.2)

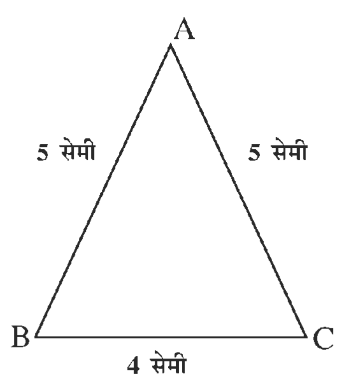
ΔABC का अक्स (ट्रेस) कागज पर एक अक्स बनाइए तथा कागज को इस प्रकार मोड़िए कि भुजा AC, भुजा AB पर पड़े। कागज को दबाकर मोड़ का निशान बनाइए। कागज को खोलकर मोड़ के निशान के ऊपर एक रेखा AD खींचिए, जो BC को D पर मिलती है। अब कागज को पुन: AD के अनुदिश मोड़िए, जिसमें AB भुजा AC पर तथा CD, BD पर पड़े। हम देखते हैं कि $\angle C$ ने $\angle B$ को पूरी तररह ढक लिया है।



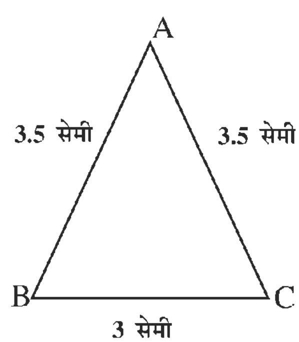
आकृति 10.2

अर्थात् $\angle ABD = \angle ACD$ है।

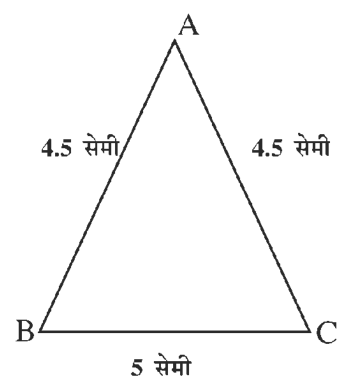
क्रियाकलाप 2 : नीचे दिए गए त्रिभुजों के कोणों की माप व भुजाओं की माप तालिका में लिखिए।



T1



T2



T3

तालिका

त्रिभुज	भुजाओं की माप (सेमी.)			कोणों की माप			
	AB	BC	CA	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle B - \angle C$
T1							
T2							
T3							

हम देखते हैं कि अंतर $\angle B - \angle C$ प्रत्येक स्थिति में शून्य है या नगण्य।

अत: $\angle B = \angle C$

- यदि किसी त्रिभुज में दो भुजाएँ बराबर हों, तो इन भुजाओं के सम्मुख कोण भी बराबर होते हैं।

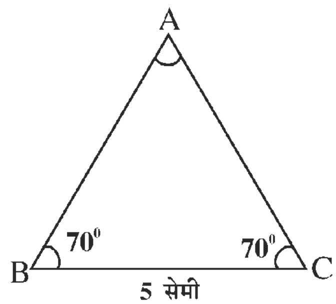
  अथवा
- समद्विबाहु त्रिभुज में (i) बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

  (ii) समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

(ii) समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती है।

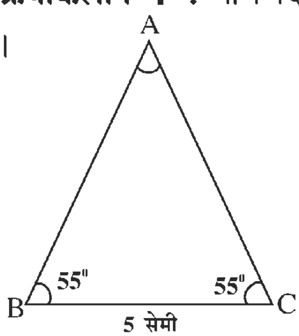
क्रियाकलाप 3 : ΔABC बनाइए, जिसमें $\angle B = 70^0$, $\angle C = 70^0$ तथा BC = 5 सेमी. है।

ट्रेस कागज (अक्स कागज) पर आकृति 10.3 में ΔABC को बनाइए। इसे इस प्रकार मोड़िए कि C तो B के ऊपर आए और BC के दोनों भाग एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लें। दबाकर मोड़ का निशान बनाइए। हम देखते हैं कि मोड़ का निशान शीर्ष A से होकर जाता है तथा भुजा AC ने भुजा AB को पूरी तरह ढक रखा है। अत: AC = AB

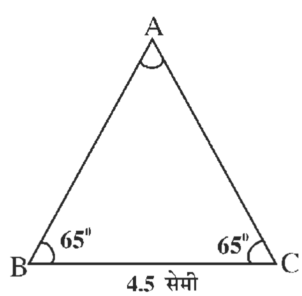


आकृति 10.3

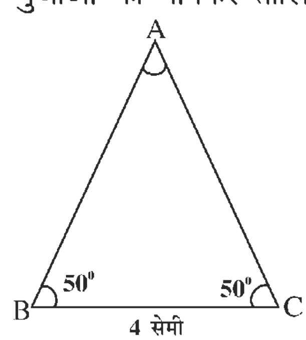
क्रियाकलाप 4 : नीचे दिए गए त्रिभुजों के कोणों की माप तथा भुजाओं को नापकर तालिका में लिखिए।



X1



X2



X3

तालिका

त्रिभुज	ΔABC में	भुजाओं की माप (से.मी.)		
		AB	AC	AB – AC
X1	$\angle B = \angle C$ ...., BC = ... से.मी.	......	......	......
X2	$\angle B = \angle C$ ......, BC = ... से.मी.	......	....	....
X3	$\angle B = \angle C$ ...., BC = ... से.मी.	....	....	....

हम देखते हैं कि अंतर AB – AC प्रत्येक स्थिति में शून्य अथवा नगण्य है।

अत: $AB = AC$

यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हैं, तो उनकी सम्मुख भुजाएँ भी बराबर होती हैं।

उदाहरण 1. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें भुजा $AB = AC$ हैं। यदि $\angle B = 50^0$ है, तो शेष दो कोण ज्ञात कीजिए।

हल : ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है। जिसमें $AB = AC$ तथा $\angle B=50^0$ (आकृति 10.4)

अत: $\angle B = \angle C$

$C = 50^0$

हम जानते हैं कि

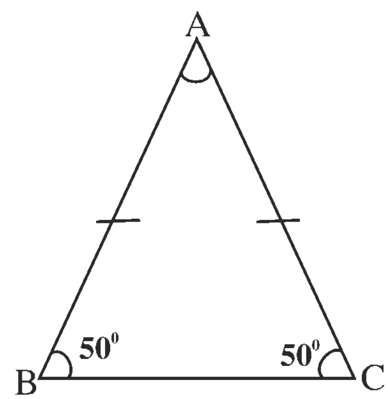
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$\angle A + 50^0 + 50^0 = 180^0$

$\angle A + 100^0 = 180^0$

$\angle A = 180^0 - 100^0$

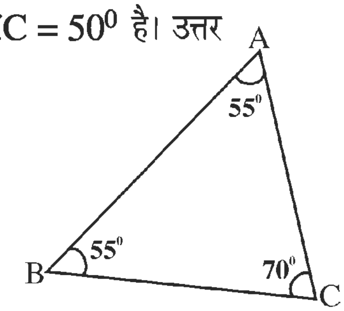
$\angle A = 80^0$



आकृति 10.4

अत: ΔABC के वांछित कोण $\angle A = 80^0$ व $\angle C = 50^0$ है। उत्तर

उदाहरण 2. ΔABC में, $\angle A = 55^0$, $\angle B = 55^0$ और $\angle C = 70^0$ हैं। आकृति 10.5 में बने इस त्रिभुज की कौन सी दो भुजाएँ बराबर हैं।



आकृति 10.5

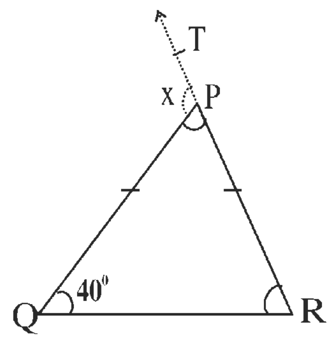
हल : दिया है $\angle A = \angle B = 55^0$ है।

अत: इन कोणों की सम्मुख भुजाएँ बराबर होनी चाहिए।

$\angle A$ की सम्मुख भुजा BC और $\angle B$ की सम्मुख भुजा AC है।

अत: ΔABC में $AC = BC$ **उत्तर**

उदाहरण 3. आकृति 10.6 में दिए गए समद्विबाहु ΔPQR में, x का मान ज्ञात कीजिए, जब $PQ = PR$ है।



आकृति 10.6

हल : आकृति 10.6 में, दिया है

$PQ = PR$

अत: $\angle R = \angle Q$

परन्तु $\angle Q = 40^0$ (दिया है)

अब, त्रिभुज के अन्त: कोणों के योग के गुण के अनुसार,

$\angle P + \angle Q + \angle R = 180^0$

$\angle P + 40^0 + 40^0 = 180^0$

$\angle P + 80^0 = 180^0$

$\angle P = 180^0 - 80^0$

$\angle P = 100^0$

$\angle QPR = 100^0$

$\angle TPQ + \angle QPR = 180^0$ [क्योंकि यह एक रैखिक युग्म बनाते हैं]

$\angle TPQ + 100^0 = 180^0$

$\angle TPQ = 180^0 - 100^0 = 80^0$ **उत्तर**

प्रश्नावली 10.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) जिस त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों, उसे .... कहते हैं।

   (ii) किसी त्रिभुज में बराबर भुजाओं के .... कोण बराबर होते हैं।

   (iii) यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों, तो इनके सामने की .... भी बराबर होती है।

   (iv) त्रिभुज के तीनों अंत: कोणों का योग .... होता है।

(v) त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से .... होता है।

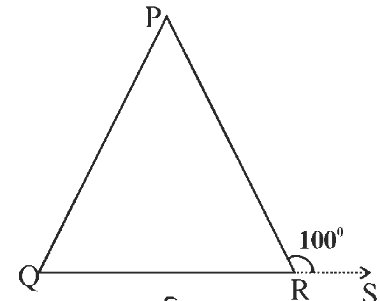
2. ΔABC एक त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$ है। यदि $A = 80^0$ है, तो $\angle B$ की माप क्या है?

3. ΔPQR एक त्रिभुज है, जिसमें $PQ = PR$ है। यदि $\angle Q = 44^0$ हो, तो शेष दो कोणों की मापों को ज्ञात कीजिए।

4. ΔABC में $\angle A = \angle B = 50^0$ है। दोनों बराबर भुजाओं के नाम बताइए।

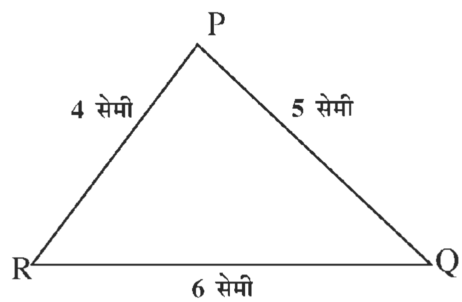
5. ΔXYZ में, $\angle X = \angle Z = 40^0$ है, तो इस त्रिभुज की कौन-सी दो भुजाएँ बराबर हैं?

6. आकृति 10.7 में दिए गए ΔPQR में, $\angle PRQ$ और $\angle QPR$ के मान ज्ञात कीजिए, जबकि $PQ = PR$ है।



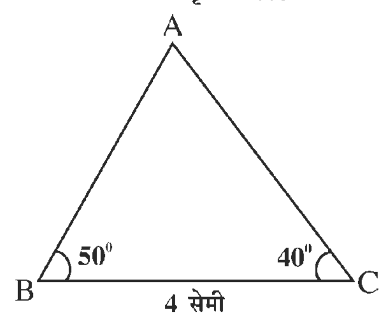
आकृति 10.7

7. आकृति 10.8 द्वारा प्रदर्शित ΔPRQ में $PQ = 5$ सेमी. $QR = 6$ सेमी. तथा $PR = 4$ सेमी. है।
   (i) क्या $\angle Q = \angle R$ है?
   (ii) यदि नहीं, तो कौन-सा कोण बड़ा है?
   (iii) बड़ा कोण बड़ी भुजा के सम्मुख है या छोटी भुजा के?



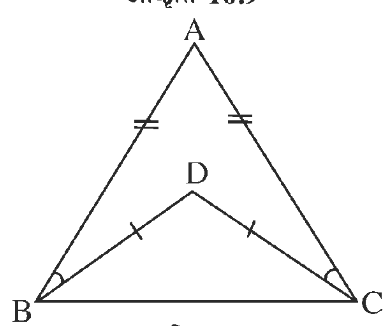
आकृति 10.8

8. ΔABC में, $BC = 4$ सेमी., $\angle C = 40^0$ एवं $\angle B = 50^0$ है (आकृति 10.9)
   (i) क्या $AB = AC$ है? यदि नहीं, तो क्यों?
   (ii) AB और AC में से कौन-सी भुजा बड़ी है?
   (iii) बड़ी भुजा छोटे कोण के सम्मुख है या बड़े कोण के?



आकृति 10.9

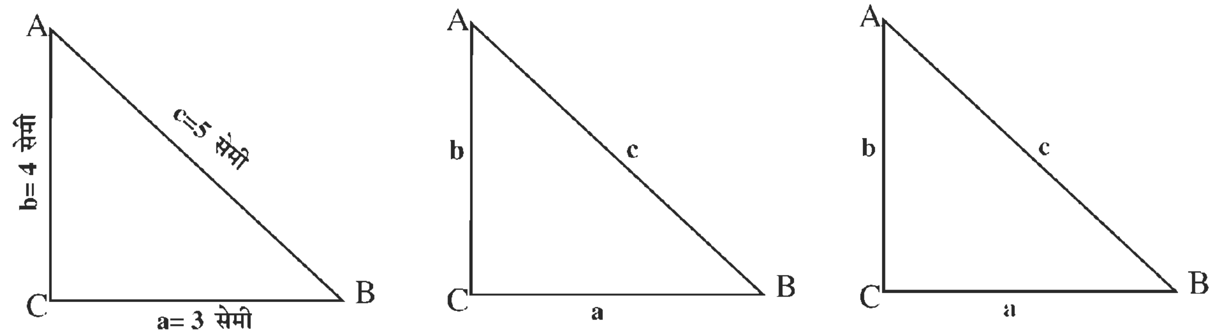
9. ΔABC और ΔDBC दोनों ही समद्विबाहु त्रिभुज हैं। दोनों का एक ही आधार BC है। क्या $\angle ABD$ और $\angle ACD$ बराबर हैं? कारण सहित उत्तर दीजिए। (आकृति 10.10)



आकृति 10.10

10.2 पाइथागोरस प्रमेय

क्रियाकलाप 5. नीचे तीन समकोण त्रिभुज दिए गए हैं। प्रत्येक का नाम ACB है। तीनों में कोण C समकोण है। तीनों त्रिभुजों की भुजाएँ नाप कर निम्नांकित सारणी में लिखिए।



आकृति 10.11

T1 T2 T3

सारणी

त्रिभुज	भुजाओं के माप			वर्ग				अंतर
	a	b	c	a^2	b^2	a^2+b^2	c^2	$c^2-(a^2+b^2)$
T1								
T2								
T3								

सारणी से हम देखते हैं कि अंतर $c^2-(a^2+b^2)$ या तो शून्य है या नगण्य।

अर्थात् $c^2 = a^2 + b^2$

तो $c^2 > a^2$ तथा $c^2 > b^2$

अत: $c > a$ तथा $c > b$

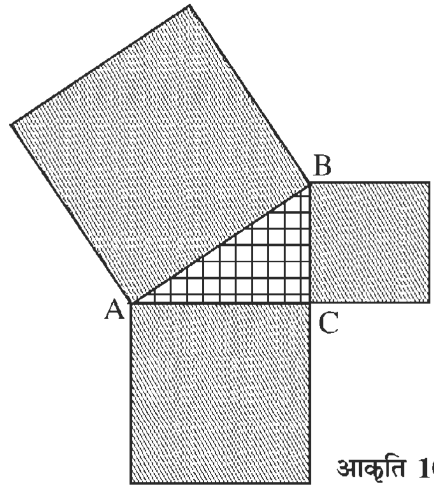
कर्ण, समकोण त्रिभुज की सबसे लम्बी भुजा होती है।

उक्त क्रियाकलाप से हम निष्कर्ष निकालते हैं।

समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

दूसरे शब्दों में, समकोण त्रिभुज ABC में कोण C समकोण है, जिसमें AB कर्ण, तथा AC एवं BC शेष दो भुजाएँ हैं। (आकृति 10.12)

तो $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$



आकृति 10.12

समकोण त्रिभुज की भुजाओं के बीच यह संबंध पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem) के नाम से जाना जाता है।

प्रसिद्ध यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस का जीवनकाल ईसा के 572 वर्ष पूर्व से 501 वर्ष पूर्व तक माना जाता है। ईसा से लगभग 800 वर्ष पूर्व एक भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने इस प्रमेय को इसके सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया था और उसे संख्यात्मक उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया था। बौधायन प्रमेय को सुल्व सूत्र 48(1) बौधायन शुल्व सूत्र में दिया गया है मूल सूत्र इस प्रकार है-

बौधायन का सूत्र

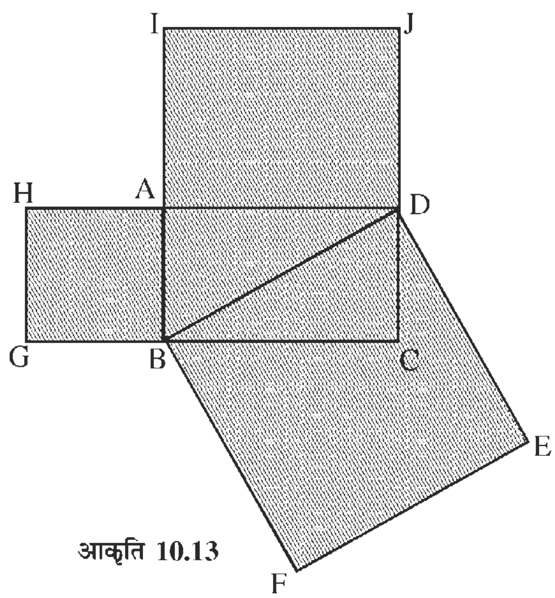
दीर्घ चतुरस्रस्य अक्षण्या रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यक् मानी च
यत् पृथग्भूते कुरुतः तत् उभयं करोति (इति क्षेत्र ज्ञानम)

।। 48(1) बौधायन शुल्व सूत्र ।।

इसका आशय है :

एक आयत के विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल आयत की दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है।

इस प्रकार आयत ABCD (आकृति 10.13) में विकर्ण BD पर बने वर्ग का क्षेत्रफल भुजाओं AB एवं AD पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होगा।

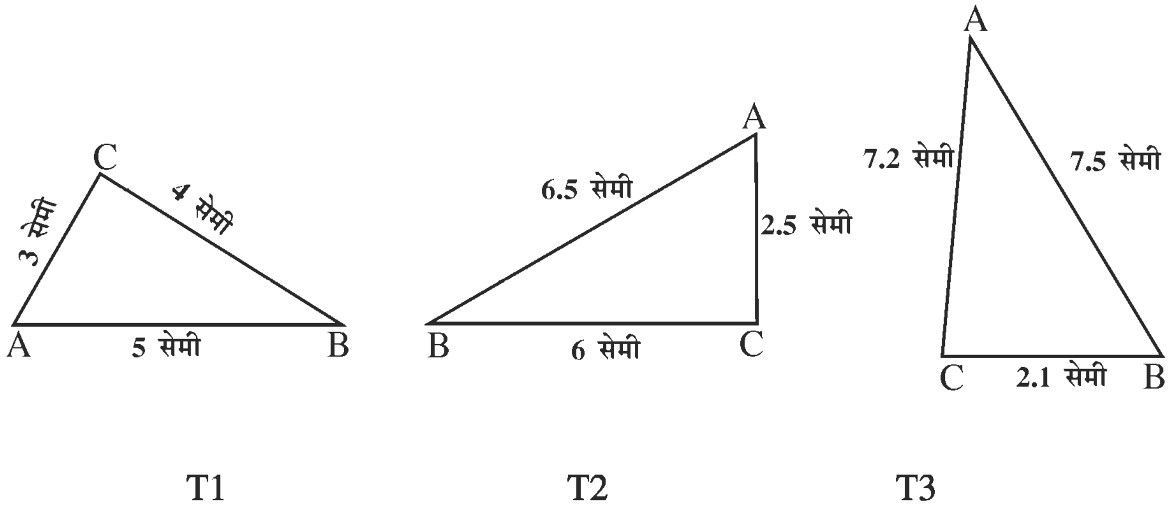


आकृति 10.13

पाइथागोरस प्रमेय का विलोम

यदि किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ a, b तथा c हो और $c^2 = a^2 + b^2$ हो तो वह एक समकोण त्रिभुज होगा और लम्बाई c वाली भुजा उसका कर्ण होगी।

क्रियाकलाप 6. नीचे तीन त्रिभुज दिए गए हैं, जिनकी भुजाओं की माप दी है। प्रत्येक का नाम ABC है। $\angle C$ को मापिए तथा सारणी में लिखिए



आकृति 10.14

सारिणी

त्रिभुज	भुजाओं के माप			कोणों की माप			$AB^2 = AC^2 + BC^2$
	AB	BC	CA	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	
T1							
T2							
T3							

सारणी से हम देखते हैं कि $AB^2 = AC^2 + BC^2$ के मान लगभग बराबर है तथा $\angle C$ समकोण (लगभग) है। अत: ΔABC समकोण त्रिभुज है।

> यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर है, तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होता है।

अर्थात् पाइथागोरस प्रमेय का विलोम सत्य है।

पाइथागोरीय त्रिक

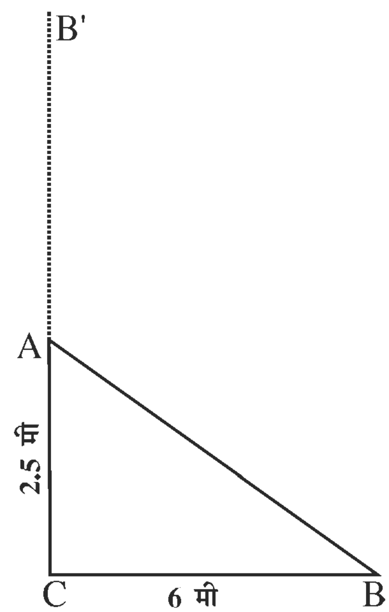
तीन धनात्मक पूर्णांक a, b, c इसी क्रम में पाइथागोरीय त्रिक कहलाते है, यदि $a^2 + b^2 = c^2$ हो।

(3, 4, 5) एक पाइथागोरीय त्रिक है। इसी प्रकार (6, 8, 10) एवं (9, 12, 15) भी पाइथागोरीय त्रिक हैं।

यदि (a, b, c) एक पाइथागोरीय त्रिक हैं और $K > O$ एक अचर है, तो (a', b', c') भी एक पाइथागोरीय त्रिक होगी, जहाँ $a' = ka$, $b' = kb$ तथा $c' = kc$ है। यदि m एवं n दो धनात्मक पूर्णांक हैं एवं $n > m$ हैं, तो $a = (n^2 - m^2)$, $b = 2mn$, $c = n^2 + m^2$ लेने पर भी हमें एक पाइथागोरीय त्रिक प्राप्त हो जाएगी। यदि $m = 1$, $n = 2$ ले तो प्राप्त पाइथागोरीय त्रिक (3, 4, 5) होगी। इसी प्रकार $m = 2$, $n = 3$ लेने पर (5, 12, 13) तथा $m = 3$, $n = 4$ लेने पर (7, 24, 25) पाइथागोरीय त्रिक प्राप्त होते हैं।

उदाहरण 4. एक खंबा भूमि से 2.5 मी. की ऊँचाई से टूटा, परन्तु दो टुकड़े अलग नहीं हुए। जिस स्थान पर खंबे की चोटी ने भूमि को छुआ, वह खंबे के आधार से 6.0 मी. दूर था। टूटने के पहले खंबा कितना लम्बा था?

हल : माना कि टूटने के पहले खंभा x मी. लम्बा था। टूटने के बाद उसका 2.5 मी. भाग बचा रहा। उसका ऊपरी सिरा आधार से 6.0 मी. दूरी पर भूमि से स्पर्श कर रहा है।



आकृति 10.15

आकृति 10.15 में ACB एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें कोण C समकोण है।

अत: BC=6.0 मी., AC= 2.5 मी.

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 2.5^2 + 6.0^2$$
$$= 6.25 + 36.00$$
$$= 42.25$$
$$AB^2 = (6.5)^2$$
$$AB = 6.5 \text{ मी.}$$

आकृति 10.15 का B'A ही टूट कर गिरा है और समकोण ACB में AB' कर्ण को व्यक्त कर रहा है।

टूटने से पहले खंभे की पूरी ऊँचाई AB' + AC = 6.5 + 2.5

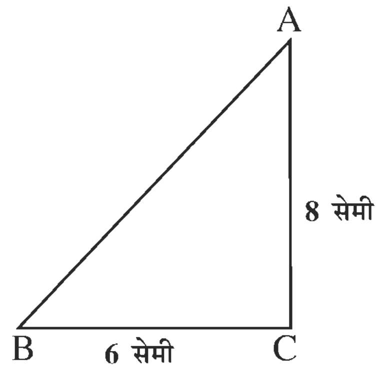
$$x = 9.0 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 5. एक समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी. एवं 8 सेमी. हैं। इसका कर्ण क्या होगा?

हल : समकोण त्रिभुज ACB में $\angle C$ समकोण है तथा भुजाएँ BC = 6 सेमी. एवं AC = 8 सेमी. है। (आकृति 10.16 में)

पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$
$$= 8^2 + 6^2$$
$$= 64 + 36$$
$$= 100$$
$$= (10)^2$$



आकृति 10.16

अतः AB = 10 सेमी.

अर्थात् त्रिभुज का कर्ण 10 सेमी है। **उत्तर**

उदाहरण 6. एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी., 4.5 सेमी. एवं 7.5 सेमी. है। क्या यह त्रिभुज समकोण त्रिभुज है? यदि हाँ तो इसका कर्ण क्या है?

हल : यहाँ त्रिभुज की भुजाएँ 6 सेमी., 4.5 सेमी. एवं 7.5 सेमी. हैं।

$$6^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25$$
$$= 56.25$$

तथा $(7.5)^2 = 56.25$

इस प्रकार $(7.5)^2 = 6^2 + (4.5)^2$

अतः पाइथागोरस प्रमेय के विलोम के अनुसार इन भुजाओं वाला त्रिभुज एक समकोण त्रिभुज है। साथ ही 7.5 सेमी. लम्बी सबसे बड़ी भुजा इसका कर्ण है।

प्रश्नावली 10.2

1. ΔABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C = 90^0$, $AC = 12$ सेमी. तथा $BC = 9$ सेमी हों, तो पाइथागोरस प्रमेय द्वारा AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
2. निम्नलिखित में से प्रत्येक में समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं के माप दिए हैं। प्रत्येक में कर्ण का वर्ग ज्ञात कीजिए।

   (i) $a = 10$ सेमी, $b = 24$ सेमी, (ii) $a = 1.5$ सेमी., $b = 2$ सेमी.

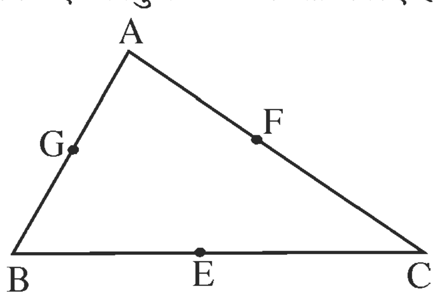
   (iii) $a = 2.5$ सेमी., $b = 6$ सेमी., (iv) $a = 7.5$ सेमी., $b = 18$ सेमी.
3. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण 13 सेमी. है। यदि एक भुजा 12 सेमी. है, तो दूसरी भुजा बताइए?
4. जब 17 मी. लम्बी एक सीढ़ी को किसी घर की दीवार से लगाते हैं, तो वह केवल खिड़की तक ही पहुँच पाती है। यदि खिड़की भूमि से 15 मी. ऊँची है, तो बताइए की सीढ़ी का निचला सिरा दीवार के आधार से कितनी दूरी पर है?
5. एक समकोण त्रिभुज का कर्ण 50 सेमी. है। अन्य दोनों भुजाएँ आपस में बराबर हैं। इन भुजाओं की लम्बाई बताइए।
6. ज्ञात कीजिए की निम्नलिखित में कौन-सी भुजाएँ समकोण त्रिभुज की भुजाएँ हो सकती है?

   (i) 1, 1, 2 (ii) 27, 36, 45 (iii) 7, 24, 25 (iv) 15, 10, 25 (v) 15, 36, 39
7. एक त्रिभुज की भुजाएँ 11 सेमी., 60 सेमी. और 61 सेमी. है। दिखाइए कि यह एक समकोण त्रिभुज है।
8. यदि एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के कर्ण का वर्ग 200 सेमी^{2} है, तो प्रत्येक भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

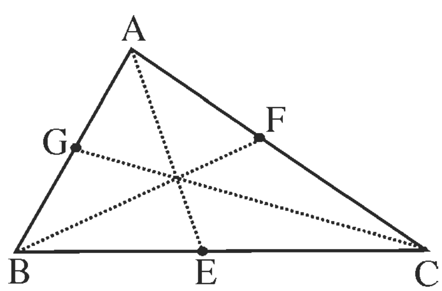
10.3 त्रिभुज की माध्यिकाएँ

त्रिभुज के किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य-बिन्दु से जोड़ने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की माध्यिका (mediam) कहते हैं।

प्रत्येक त्रिभुज में तीन भुजाएँ होती हैं। भुजा के मध्य बिन्दु को शीर्ष से जोड़ने पर एक माध्यिका प्राप्त होती है। अत: एक त्रिभुज की तीन माध्यिकाएँ होती है।



आकृति 10.17



आकृति 10.18

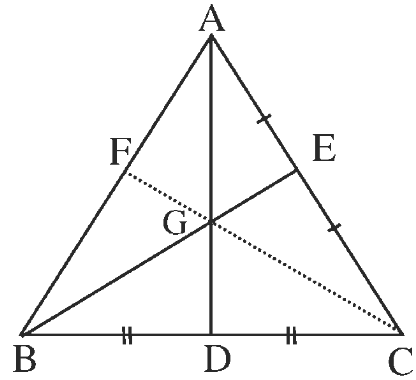
आकृति 10.17 में एक त्रिभुज ABC की आकृति इस त्रिभुज की भुजाएँ BC, CA तथा AB के मध्य बिन्दु क्रमशः E, F तथा G है। मध्य बिन्दु E, F तथा G को क्रमशः शीर्ष A, B तथा C से मिलाते हैं। आकृति (10.18)। इस प्रकार त्रिभुज ABC की तीन माध्यिकाएँ AE, BF तथा CG है।

क्रियाकलाप 7

ΔABC बनाइए।

भुजा BC व भुजा CA का लम्ब समद्विभाजन विधि से मध्य बिन्दु D तथा बिन्दु E निकालिए।

- माध्यिका AD तथा माध्यिका BE खींचिए।
- माध्यिका AD व माध्यिका BE के प्रतिच्छेद बिन्दु को G से अंकित कीजिए। शीर्ष C से बिन्दु G को मिलाते हुये इतना बढ़ाइए कि वह भुजा AB को बिन्दु F पर मिले।
- AF व BF को नापकर इनमें संबंध ज्ञात कीजिए।
- हम पाते हैं कि AF = BF अर्थात् F, AB का मध्य बिन्दु है।



आकृति 10.19

अतः CF त्रिभुज की तीसरी माध्यिका है।

यही क्रियाकलाप समद्विबाहु एवं समबाहु त्रिभुजों के साथ दोहराइए, प्रत्येक स्थिति में तीनों माध्यिकाओं का एक प्रतिच्छेद बिन्दु होता है। अतः हम कह सकते हैं कि-

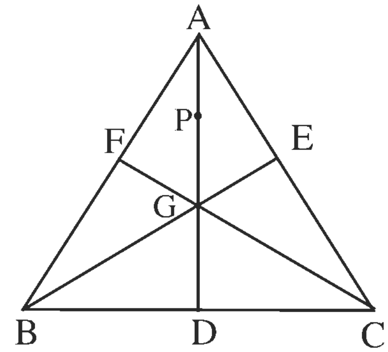
त्रिभुज की माध्यिकाएँ संगामी होती है।

केन्द्रक (Centroid)

वह बिन्दु जिस पर त्रिभुज की तीनों माध्यिकाएँ मिलती है। केन्द्रक कहलाता है या तीनों मध्यिकाओं का संगमन बिन्दु त्रिभुज का केन्द्रक होता है। आकृति 10.19 में G त्रिभुज का केन्द्रक है।

क्रियाकलाप 8

- ABC बनाइए।
- तीनों माध्यिकाएँ बिन्दु G पर मिलती है। (आकृति 10.20)
- GD के बराबर GP लीजिए।
- नापकर ज्ञात कीजिए कि AP = PG = GD है।



आकृति 10.20

$$GA = GP + PA$$
$$= GD + GD$$
$$GA = 2GD$$
$$GA : GD = 2:1$$

त्रिभुज का केन्द्रक प्रत्येक माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्नावली 10.3

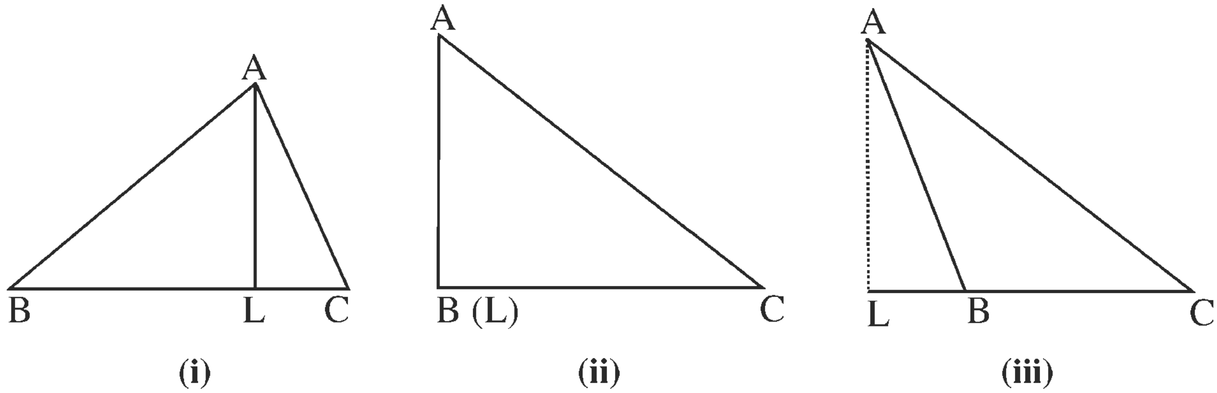
1. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।
   (i) त्रिभुज की माध्यिकाएँ .... होती है।
   (ii) त्रिभुज की माध्यिकाओं के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का .... कहते हैं।
   (iii) त्रिभुज का केन्द्रक उसके .... में स्थित होता है।
   (iv) त्रिभुज का केन्द्रक उसकी प्रत्येक माध्यिका को .... के अनुपात में विभाजित करता है।
2. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींजिए, जिसमें AB = AC। आधार BC पर माध्यिका AD भी खींचिए। बताइए कि क्या निम्नलिखित कथन सत्य है या नहीं :
   (i) AD, BC पर लम्ब है।
   (ii) AD, $\angle A$ को समद्विभाजित नहीं करता है।
   (iii) AD, BC का लंब समद्विभाजक है।
3. ΔABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें AB = AC है। BE और CF (बराबर भुजाओं से संबंधित) दो माध्यिकाएँ हैं। क्या ΔBCE व ΔCBE में निम्नलिखित कथन सत्य हैं?
   (i) CE = BF
   (ii) $\angle ACB = \angle ABC$

   प्रत्येक के लिए कारण दीजिए।

   मापकर यह भी सत्यापित कीजिए कि BE = CF है।
4. AD, BE व CF किसी ΔABC की माध्यिकाएँ है और G इसका केन्द्रक है। यदि BE = CF हो तो ΔGBC किस प्रकार का त्रिभुज है?

   (i) विषमबाहु त्रिभुज (ii) समद्विबाहु त्रिभुज (iii) समबाहु त्रिभुज।

10.4 त्रिभुज के शीर्षलंब



आकृति 10.21

आइए हम आकृति 10.21 (i), (ii), (iii) में दिखाए गए तीन त्रिभुज ABC पर विचार करें। आकृति 10.21 (i) में ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है। आकृति 10.21 (ii) में ABC एक समकोण त्रिभुज है तथा आकृति 10.21 (iii) में ABC एक अधिक कोण त्रिभुज है। तीनों त्रिभुजों में रेखाखण्ड AL शीर्ष A से रेखा BC पर लम्ब है। तीनों त्रिभुजों में L की स्थितियाँ भिन्न है। न्यूनकोण त्रिभुज (i) में बिन्दु L त्रिभुज की भुजा BC पर स्थित है, समकोण त्रिभुज (ii) में बिन्दु L शीर्ष B के संपाती है तथा अधिक कोण त्रिभुज (iii) में बिन्दु L, भुजा BC के बाहर, परन्तु रेखा BC पर स्थित है। रेखाखण्ड AL शीर्ष A से भुजा BC पर शीर्षलंब कहलाता है।

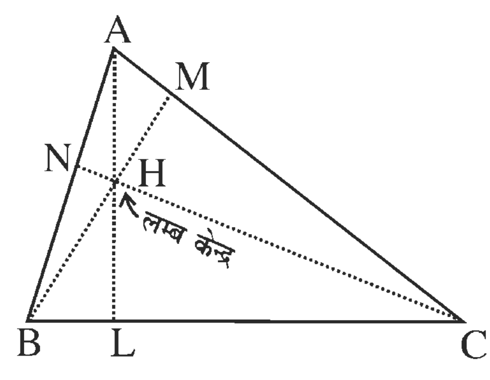
> किसी त्रिभुज के शीर्ष से सम्मुख भुजा पर डाले गए लम्ब रेखाखण्ड को त्रिभुज का शीर्षलंब कहते हैं।

लम्ब केन्द्र

क्रियाकलाप 8. त्रिभुज ABC बनाइए।

शीर्षों B और C से शीर्षलंब खींचिए। शीर्षलंब BM और CN बिन्दु H पर प्रतिच्छेद करते हैं। अब AH को जोड़िए और बढ़ाकर BC पर मिलाइए, जो L बिन्दु पर मिलता है। $\angle ALB$ को मापिए, हम देखते हैं कि $\angle ALB = 90^0$ है।

अत: $AL \perp BC$ है। इस प्रकार AL तीसरा शीर्षलंब है तथा यह पहले दो शीर्षलंबों के प्रतिच्छेद बिन्दु H से होकर जाता है। (आकृति 10.22)



आकृति 10.22

इसी क्रिया को और अधिक त्रिभुजों पर दोहराने पर भी हमें यही तथ्य प्राप्त होता है। अत: हम कह सकते हैं कि त्रिभुज के शीर्षलंब संगामी (Concurrent) होते हैं।

त्रिभुज के शीर्षलंबों के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लंबकेन्द्रक (Orthocentre) कहते हैं।

प्रश्नावली 10.4

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   - (i) त्रिभुज का शीर्षलंब वह .... है, जो इसके किसी शीर्ष से सम्मुख भुजा पर .... है।
   - (ii) जहाँ त्रिभुज के शीर्षलंब आपस में मिलते हैं, यदि आवश्यक हो तो बढ़ाकर वह बिन्दु त्रिभुज का .... कहलाता है।
   - (iii) यदि ΔABC में $\angle C$ समकोण है, तो इसके दो शीर्षलंब .... और .... होंगे।
   - (iv) यदि त्रिभुज ΔABC अधिक कोण त्रिभुज है, तो इसका लंब केन्द्रक त्रिभुज के .... स्थित होगा।
   - (v) यदि H, ΔABC का लंबकेन्द्रक है, तो BH .... पर लंब होगा।
2. ΔABC का $\angle C$ समकोण है। क्या आप बिना शीर्षलंब खींचे, इसका लंबकेन्द्र ज्ञात कर सकते हैं? यदि हाँ, तो इसे नामांकित कीजिए।
3. एक त्रिभुज PQR इस प्रकार खींचिए कि $\angle Q = 105^0$ हो। इसके शीर्षलंब PL एवं QM खींचिए। माना कि ये H पर मिलते हैं। RH को जोड़िए जो PQ (बढ़ाने पर) के साथ N पर मिलती है।

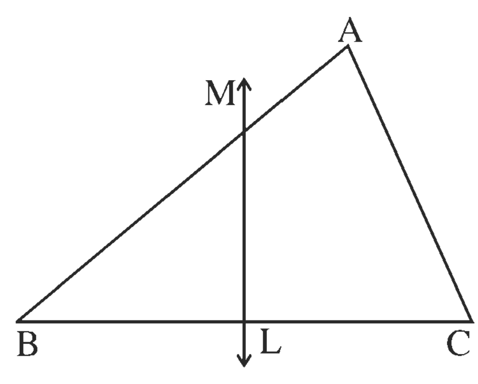
   (i) क्या $\angle RNQ = 90^0$ है?

   (ii) लंब केन्द्रक H त्रिभुज के कौन से क्षेत्र में स्थित है?
4. कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा दिखाइए कि त्रिभुज के शीर्षलंब संगामी होते हैं।
5. कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा किसी समबाहु त्रिभुज का लंब केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

10.5 त्रिभुज की भुजाओं के लंब समद्विभाजक

आइए हम एक त्रिभुज ABC पर विचार करें। भुजा BC के मध्य बिन्दु L से BC पर एक लंब ML खींचिए (आकृति 10.23)। LM भुजा BC का लंब समद्विभाजक (Perpendicular bisector) कहलाता है।

एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ होती है। अत: इसमें तीन लंब समद्विभाजक होते हैं।

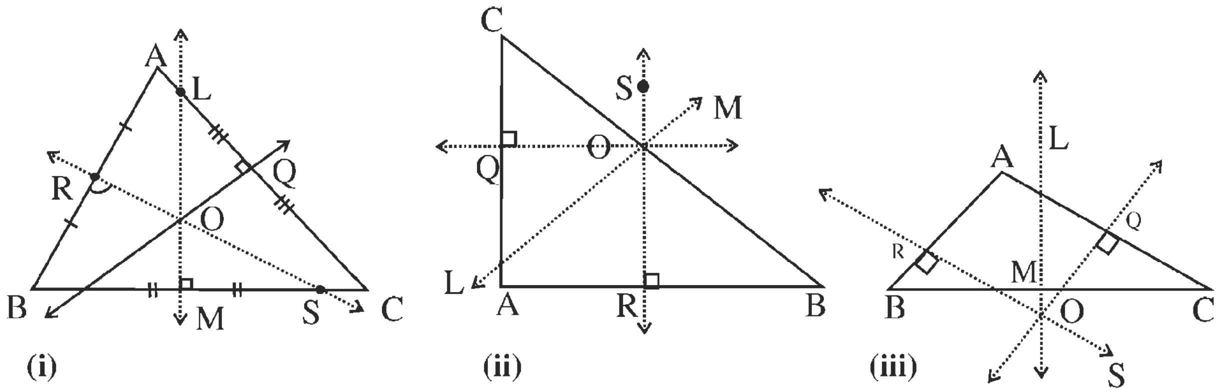


आकृति 10.23

त्रिभुज की किसी भुजा का लम्ब समद्विभाजक उस रेखा को कहते हैं जो भुजा पर लम्ब हो तथा उसका समद्विभाजन भी करे।

परिकेन्द्र

क्रियाकलाप 9.



आकृति 10.24

तीन त्रिभुज खींजिए तथा प्रत्येक को ABC से नामांकित कीजिए। आकृति 10.24 (i) में त्रिभुज न्यून कोण त्रिभुज है, आकृति 10.24 (ii) का त्रिभुज समकोण त्रिभुज है, जबकि आकृति 10.24 (iii) में त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज है। तीनों में भुजाओं AB एवं BC के लम्ब समद्विभाजक क्रमशः RS तथा ML खींचिए। RS एवं ML के प्रतिच्छेद बिन्दु O से $OQ \perp AC$ खींचिए जो AC के साथ Q पर मिले। AQ एवं QC को मापिए। हम देखते हैं कि $AQ = QC$ है और इस प्रकार OQ भी भुजा AC का लम्ब समद् विभाजक है। इस प्रकार O त्रिभुज ABC की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों का संगमन बिन्दु हुआ।

यही क्रिया कुछ अन्य त्रिभुजों में भी दोहराइए। प्रत्येक स्थिति में हम यही पाते हैं कि त्रिभुज की भुजाओं के तीनों लम्ब समद्विभाजक एक ही बिन्दु से होकर जाते हैं।

अर्थात् त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक संगामी होते हैं।

त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक जिस एक बिन्दु पर मिलते हैं उसे त्रिभुज का परिकेन्द्र (Circumcentre) कहते हैं।

- त्रिभुज का परिकेन्द्र ज्ञात करने के लिए किन्हीं दो भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक खींचना पर्याप्त है।
- समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण का मध्य-बिन्दु होता है।
- परिकेन्द्र से शीर्ष तक की दूरी लेकर **परिवृत्त** खींचा जा सकता है।

प्रश्नावली 10.5

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

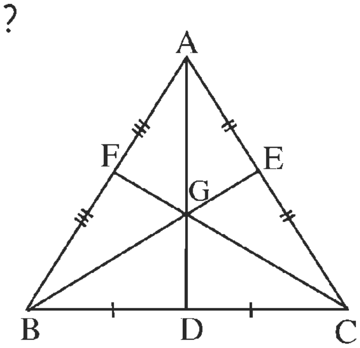
   (i) त्रिभुज की भुजाओं के लम्ब समद्विभाजक .... होते हैं।

   (ii) त्रिभुज का परिकेन्द्र उसकी भजाओं के .... का संगमन बिन्दु है।

2. एक रेखाखण्ड AB लेकर उसकी लम्ब समद्विभाजक रेखा l खींचिए। l पर कोई बिन्दु P लेकर PA और PB को मापिए। क्या PA = PB है?

3. एक त्रिभुज PQR खींचिए जिसमें QR = 4.5 सेमी., $\angle R = 110^0$ एवं PR = 7 सेमी. हो। इसका परिकेन्द्र ज्ञात कीजिए। क्या यह त्रिभुज के अभ्यंतर में स्थित है?

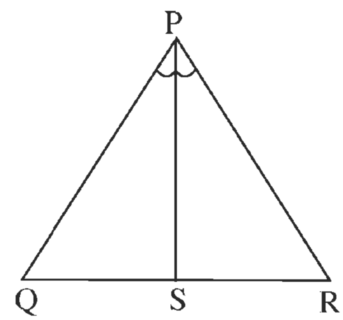
4. ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है। AD, BE एवं CF इसकी माध्यिकाएँ हैं (आकृति 10.25) तथा G इसका केन्द्रक है। इस त्रिभुज का कागज पर अक्स उतारिए। कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा दिखाइए कि G त्रिभुज का परिकेन्द्र भी है।



आकृति 10.25

10.6 त्रिभुज के कोणों के समद्विभाजक

आइए, हम त्रिभुज PQR पर विचार करें। $\angle QPR$ का समद्विभाजक खींचिए जो QR के साथ S पर मिलता है (आकृति 10.26)। PS, ΔPQR का एक कोण समद्विभाजक (या अर्धक) कहलाता है।



आकृति 10.26

त्रिभुज में तीन कोण होते हैं और प्रत्येक कोण के लिए एक कोण समद्विभाजक होता है।

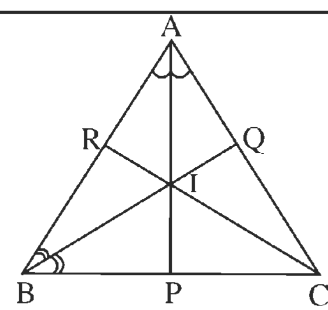
> त्रिभुज के किसी कोण का समद्विभाजक वह रेखाखण्ड होता है जो इस कोण का समद्विभाजन करे और जिसका दूसरा सिरा कोण की सम्मुख भुजा पर स्थित हो।

अन्त: केन्द्र

क्रियाकलाप 10.

एक ΔABC खींचिए। $\angle A$ और $\angle B$ के समद् विभाजक क्रमश: AP और BQ खींचिए।

माना कि ये समद्विभाजक एक दूसरे को बिन्दु I पर प्रतिच्छेद करते हैं।



आकृति 10.27

आकृति 10.27 में C और I को जोड़कर CI को बढ़ाइए ताकि यह AB को बिन्दु R पर मिलाएँ।

$\angle RCA$ व $\angle RCB$ को मापिए।

हम देखते हैं कि $\angle RCA = \angle RCB$ है। अत: रेखाखण्ड CR, $\angle C$ का समद्विभाजक है।

अन्य दो त्रिभुजों के साथ भी उक्त प्रक्रिया दोहराइए। हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में, त्रिभुज के तीनों कोण समद्विभाजक एक सार्व बिन्दु I में से होकर जाते हैं। किसी भी त्रिभुज के कोण समद्विभाजक संगामी होते हैं।

किसी त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक, जिस बिन्दु पर मिलते हैं, उसे त्रिभुज का अंत: केन्द्र (Incentre) कहते हैं।

- त्रिभुज का अंत: केन्द्र ज्ञात करने के लिए उसके दो कोणों के समद्विभाजक खींचना ही पर्याप्त है।
- अंत: केन्द्र से भुजा तक की दूरी लेकर **अंत:वृत्त** खींचा जा सकता है।

प्रश्नावली 10.6

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

   (i) त्रिभुज के कोणों के अर्धक .... होते हैं।

   (ii) त्रिभुज का अंत: केन्द्र उसके .... का संगमन बिन्दु है।

   (iii) यदि I त्रिभुज ABC का अंत: केन्द्र है, तो AI .... का समद्विभाजक है।

2. एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें AB = 5 सेमी., $\angle B = 70^0$ तथा BC = 6 सेमी. हो। इस त्रिभुज का अंत: केन्द्र ज्ञात कीजिए।

3. एक समद्विबाहु त्रिभुज PQR खींचिए जिसमें PQ = PR हो। माना कि PS, $\angle P$ का समद्विभाजक है। Δ PQR के परिकेन्द्र, लम्ब केन्द्र एवं केन्द्रक ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी PS पर स्थित है?

4. एक समबाहु त्रिभुज DEF खींचिए। इसका अंत: केन्द्र, परिकेन्द्र, लम्ब केन्द्र एवं केन्द्रक ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी संपाती हैं?

5. बिन्दु P, Δ ABC के अभ्यंतर में स्थित है। त्रिभुज को ट्रेस करिए और कागज मोड़ने के क्रियाकलाप द्वारा यह बताइए कि क्या P त्रिभुज का अंत: केन्द्र है?