

पाठ 12

ज्यामितीय रचनाएँ

आइए सीखें-

- त्रिभुज की रचना करना जबकि
 - (i) उसकी तीनों भुजाएँ ज्ञात हो।
 - (ii) दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण ज्ञात हो।
 - (iii) दो कोण एवं उनके बीच की भुजा ज्ञात हो।
 - (iv) एक भुजा एवं कर्ण ज्ञात होने पर समकोण त्रिभुज की रचना।

12.1 हम त्रिभुज के बारे में जानते हैं, त्रिभुज में तीन रेखाखण्ड या भुजाएँ होती हैं तथा तीन शीर्ष होते हैं, प्रत्येक शीर्ष पर एक-एक कोण बना होता है। किसी भी त्रिभुज के छः अवयव होते हैं, तीन भुजाएँ एवं तीन कोण।

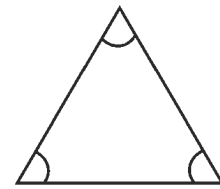
यदि हमें इन छः अवयवों में से कोई तीन स्वतंत्र अवयव ज्ञात हो तब त्रिभुज की रचना की जा सकती है। यहाँ हम निम्न स्थितियों में त्रिभुज की रचना करेंगे।

- (i) जब त्रिभुज की तीनों भुजाओं का माप दिया गया है।
- (ii) जब त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का माप एवं उनके बीच के कोण का माप दिया है।
- (iii) जब त्रिभुज की किसी एक भुजा का माप एवं किन्हीं दो कोणों का माप दिया गया है।
- (iv) समकोण त्रिभुज की रचना जब कर्ण तथा एक भुजा का माप दिया है।

क्या त्रिभुज के तीनों कोणों का माप दिए जाने पर त्रिभुज की रचना संभव है?

यहाँ त्रिभुज के केवल दो कोण ज्ञात होने पर तीसरे कोण की माप ज्ञात हो जाती है। अतः हमें तीन स्वतंत्र अवयव नहीं दिये गये हैं।

अतः ऐसे अनेक त्रिभुज बनेंगे। इस प्रकार यहाँ एक निश्चित त्रिभुज नहीं होगा। चित्र देखिए तथा समझिए।



आकृति 12.1

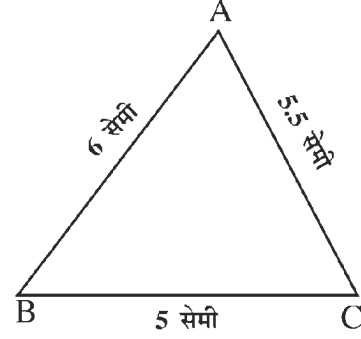
किसी भी त्रिभुज के छः अवयव होते हैं तीन भुजा एवं तीन कोण। किसी त्रिभुज के इन छः अवयवों में से किन्हीं तीन स्वतंत्र अवयव ज्ञात होने पर इस त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

12.2 त्रिभुज की तीनों भुजाओं की माप ज्ञात होने पर त्रिभुज की रचना करना (SSS स्थिति)

उदाहरण 1. उस त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाओं की माप क्रमशः 6 सेमी., 5 सेमी. तथा 5.5 सेमी. है।

हल : ΔABC की रचना करना है जहाँ माना कि भुजा $AB = 6$ सेमी., भुजा $BC = 5$ सेमी. तथा भुजा $CA = 5.5$ सेमी. है।

टीप वास्तविक रचना आरम्भ करने से पहले एक अनुमानित चित्र बनाकर उसमें दिये माप लिख दें। इसके बाद इसकी सहायता से नीचे दिये गये अनुसार रचना आरम्भ कीजिए।

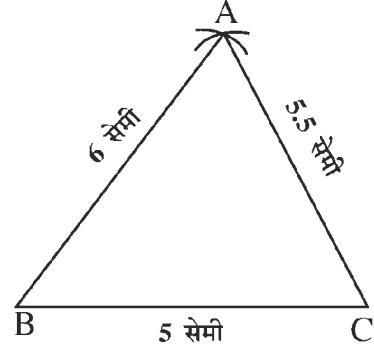


आकृति 12.2

रचना के पद

- (i) 5 सेमी. लम्बाई का एक रेखाखण्ड BC खींचिए।
- (ii) बिन्दु B को केन्द्र मानकर 6 सेमी. की त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।
- (iii) बिन्दु C को केन्द्र मानकर 5.5 सेमी. की त्रिज्या लेकर एक चाप खींचिए।
- (iv) यह चाप पहले चाप को A बिन्दु पर काटता है।
- (v) बिन्दु A को बिन्दु B तथा बिन्दु C से मिलाइए।

इस प्रकार प्राप्त ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 12.3

उदाहरण 2. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जहाँ भुजा $AB = 7.2$ सेमी., भुजा $BC = 3$ सेमी. तथा भुजा $CA = 4$ सेमी. है।

हल : पूर्व में हम पढ़ चुके हैं कि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

यदि किसी त्रिभुज में दो भुजाओं की माप का योग तीसरी भुजा से कम हो तो त्रिभुज की रचना सम्भव नहीं है।

यहाँ भुजा $BC +$ भुजा $CA = 3$ सेमी. $+ 4$ सेमी.

$= 7$ सेमी., यह तीसरी से कम है।

भुजा $AB = 7.2$ सेमी.

अतः $BC + CA < AB$

इसलिये दिये गये त्रिभुज ABC की रचना संभव नहीं है।

प्रश्नावली 12.1

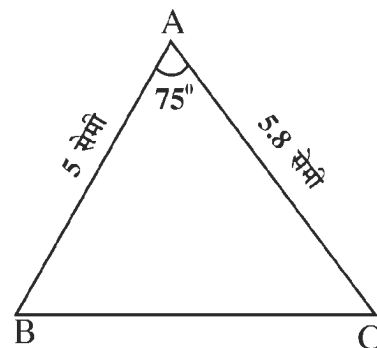
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए जहाँ $AB = 7.2$ सेमी., $BC = 6$ सेमी. तथा $AC = 5.5$ सेमी.।
2. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जहाँ $PQ = 5$ सेमी., $QR = 5.4$ सेमी. तथा $PR = 4.4$ सेमी. $\angle P$ तथा $\angle Q$ की माप नापकर लिखिए।
3. एक समबाहु त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 5.6 सेमी. है। इसका एक कोण नाप कर लिखिए।
4. Δxyz की रचना कीजिए, जहाँ $yz = 5$ सेमी., $xy = xz = 6.2$ सेमी.।
5. ΔABC की रचना कीजिए, जहाँ $AB = 3$ सेमी., $BC = 2.5$ सेमी. तथा $AC = 6.2$ सेमी.। क्या दिए गए ΔABC की रचना संभव है? कारण सहित लिखिए।

12.3 यदि किसी त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का माप एवं उनके बीच के कोण का माप ज्ञात हो तो त्रिभुज की रचना करना (स्थिति SAS)।

उदाहरण 3. एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी दो भुजाएँ क्रमशः 5 सेमी. तथा 5.8 सेमी. है तथा इनके बीच का कोण 75° है।

हल : माना कि ΔABC में $AB = 5$ सेमी., $AC = 5.8$ सेमी. तथा $\angle A = 75^\circ$ है। त्रिभुज की रचना करना है।

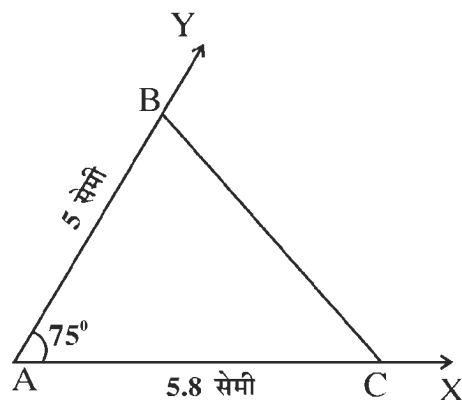
सबसे पहले हम ΔABC की हाथ से अनुमानित आकृति बनाकर उसमें दिए माप दर्शाएँ, तदनुसार



आकृति 12.4

रचना के पद

- (i) एक किरण AX खींचिए।
- (ii) बिन्दु A पर 75° का कोण बनाती हुई AY किरण खींचिए।
- (iii) किरण AX से रेखाखण्ड $AC = 5.8$ सेमी. काटिए।
- (iv) किरण AY से रेखाखण्ड $AB = 5$ सेमी. काटिए।
- (v) BC को मिलाइए। इस प्रकार प्राप्त ΔABC हमारा वांछित त्रिभुज है।



आकृति 12.5

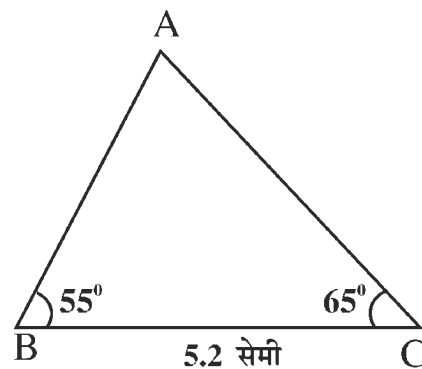
प्रश्नावली 12.2

- निम्नलिखित प्रश्नों में दिए अवयवों के आधार पर ΔABC की रचना कीजिए।
 - $AB = 6.8$ सेमी., $BC = 7.4$ सेमी. तथा $\angle B = 70^\circ$
 - $\angle C = 108^\circ$, $BC = 5.3$ सेमी. तथा $AC = 6$ सेमी.
 - $AB = AC = 5.2$ सेमी. तथा $\angle A = 120^\circ$
 - $BC = 7.1$ सेमी., $BA = 5.7$ सेमी. $\angle B = 20^\circ$
- ΔPQR की रचना कीजिए, जहाँ $PQ = 7$ सेमी., $PR = 6.5$ सेमी. तथा कोण $P = 65^\circ$ । शेष भुजा तथा कोणों को नाप कर लिखिए।

12.4 त्रिभुज के दो कोण तथा उनके बीच की भुजा ज्ञात होने पर त्रिभुज की रचना करना (ASA स्थिति)।

उदाहरण 4. त्रिभुज की रचना कीजिए, जहाँ कोण क्रमशः 55° तथा 65° है तथा इनके बीच भुजा की माप 5.2 सेमी. है।

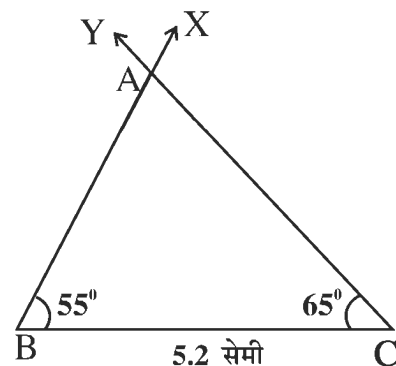
हल : माना कि ΔABC में $\angle B = 55^\circ$, $\angle C = 65^\circ$ तथा भुजा $BC = 5.2$ सेमी. है।
पहले ΔABC की हाथ से अनुमानित आकृति बनाकर मापों को दर्शाते हैं।
इसकी सहायता से नीचे दिए गए अनुसार ΔABC की रचना करेंगे।



आकृति 12.6

रचना के पद

- 5.2 सेमी. का रेखाखण्ड BC खींचिए।
- बिन्दु B पर BC के साथ 55° का कोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए।
- बिन्दु C पर CB के साथ 65° का कोण बनाती हुई एक किरण CY खींचिए।
- किरण BX तथा CY का प्रतिच्छेदन बिन्दु A है, इस प्रकार बना ΔABC अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 12.7

12.5 त्रिभुज के दो कोण तथा एक भुजा ज्ञात होने पर त्रिभुज की रचना करना (AAS स्थिति)।

किसी त्रिभुज के तीनों कोण का योग 180^0 होता है। यदि हमें त्रिभुज के दो कोण ज्ञात है तो इन कोणों के योग को 180^0 से घटा कर तीसरा कोण ज्ञात किया जा सकता है। तीनों कोण तथा एक भुजा ज्ञात होने पर त्रिभुज की रचना की जा सकती है।

उदाहरण 5. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $\angle A = 65^0$, $\angle B = 75^0$ तथा $BC = 4.5$ सेमी.

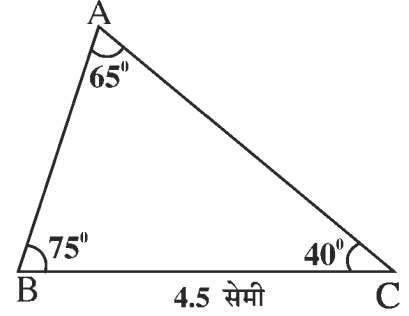
हल : हम जानते हैं कि ΔABC में $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

$$\therefore 65^0 + 75^0 + \angle C = 180^0$$

$$\angle C = 180^0 - 140^0$$

$$= 40^0$$

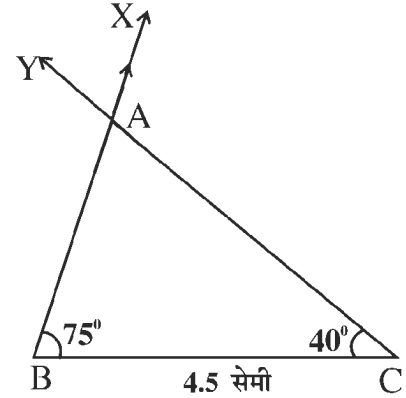
पहले ΔABC की हाथ से अनुमानित आकृति बनाकर मापों को दर्शाते हैं, तदनुसार



आकृति 12.8

रचना के पद

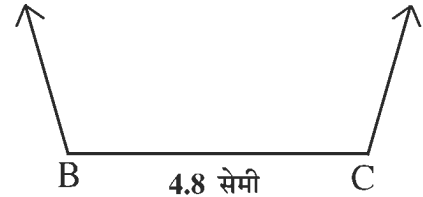
- रेखाखण्ड $BC = 4.5$ सेमी. खींचिए।
- कोण $CBX = 75^0$ का बनाइए।
- कोण $BCY = 40^0$ का खींचिए।
- माना कि किरण BX एवं CY एक दूसरे को बिन्दु A पर काटती हैं। तब ΔABC हमारा अभीष्ट त्रिभुज है।



आकृति 12.9

उदाहरण 6. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $\angle B = 92^0$, $\angle C = 100^0$ तथा भुजा $BC = 4.8$ सेमी.।

हल : यहाँ $\angle B + \angle C = 92^0 + 100^0$
 $= 192^0$



आकृति 12.10

अब 192^0 का मान 180^0 से अधिक है, जबकि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होना चाहिए अतः त्रिभुज की रचना संभव नहीं है।

यदि किसी त्रिभुज में दो कोणों की माप का योग 180^0 या अधिक है तो त्रिभुज की रचना सम्भव नहीं है।

प्रश्नावली 12.3

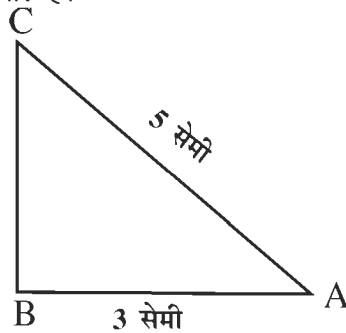
1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $AB = 4$ सेमी., $\angle A = 40^0$ तथा $\angle B = 35^0$ ।
2. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जहाँ $\angle P = 60^0$, $\angle Q = 55^0$ तथा भुजा $PQ = 4.8$ सेमी.।
3. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $\angle B = 45^0$, $\angle C = 75^0$ तथा भुजा $AB = 5.7$ सेमी.।
4. त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जहाँ $\angle P = \angle Q = 65^0$ तथा भुजा $PR = 6.3$ सेमी.।
5. त्रिभुज XYZ की रचना कीजिए, जहाँ $\angle X = 105^0$, $\angle Y = 75^0$ तथा भुजा $XY = 4.9$ सेमी.। क्या रचना संभव है? नहीं तो क्यों?
6. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ $\angle A = 110^0$, $\angle B = 90^0$ तथा भुजा $AB = 6.4$ सेमी.। क्या त्रिभुज की रचना संभव है? नहीं तो कारण बताइए।

12.6 समकोण त्रिभुज की रचना करना यदि कर्ण तथा एक अन्य भुजा का माप दिया गया है (RHS स्थिति)।

उदाहरण 7. समकोण त्रिभुज की रचना कीजिए, जहाँ कर्ण 5 सेमी. तथा एक अन्य भुजा 3 सेमी. है।

हल : माना कि $\triangle ABC$ में $\angle B$ समकोण है अतः भुजा AC कर्ण है तथा इसकी माप 5 सेमी. है। अन्य भुजा AB की माप 3 सेमी. है।

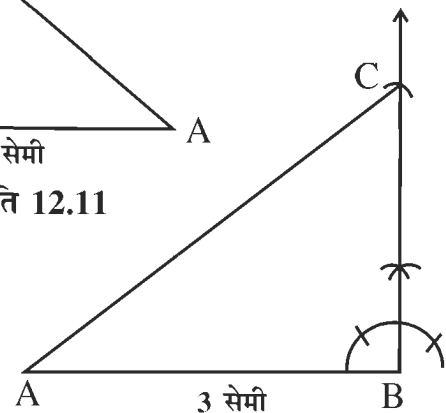
$\triangle ABC$ की हाथ से अनुमानित आकृति बना कर उसमें कर्ण तथा भुजा दर्शाते हैं, तदनुसार



आकृति 12.11

रचना के पद

- (i) रेखाखण्ड $AB = 3$ सेमी. खींचिए।
- (ii) बिन्दु B पर 'परकार व स्केल' की सहायता से समकोण बनाती किरण BX बनाइये।
- (iii) बिन्दु A को केन्द्र मानकर तथा 5 सेमी. की त्रिज्या लेकर चाप खींचिए जो किरण BX को C बिन्दु पर काटे।



आकृति 12.12

(iv) A तथा C को जोड़िए।

इस प्रकार ABC हमारा अभीष्ट त्रिभुज है।

प्रश्नावली 12.4

(समकोण स्केल तथा परकार से बनाइए)

1. त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, यदि $BC = 5$ सेमी., $CA = 7$ सेमी. तथा $\angle B = 90^\circ$ ।
2. त्रिभुज DEF की रचना कीजिए, जहाँ $\angle D = 90^\circ$, $EF = 8$ सेमी. तथा $ED = 5.5$ सेमी.।
3. समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ कर्ण $AC = 13$ सेमी., भुजा $BC = 12$ सेमी.।
4. समकोण त्रिभुज ABC की रचना कीजिए, जहाँ कर्ण $BC = 5$ सेमी. तथा भुजा $AB = 4$ सेमी.।
 AC को नापकर सत्यापन कीजिए कि $BC^2 = AB^2 + AC^2$

विविध प्रश्नावली 2

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए

1. (i) $(8x^2yz) \times (3xz)$ का मान होता है।
(ii) किसी समीकरण के किसी भी पद +3 को एक पक्ष से दूसरे पक्ष में दोनों ओर से घटाने पर पक्षांतरित किया जा सकता है।
(iii) किसी त्रिभुज की माध्यिकाएँ होती हैं।
(iv) दो कोण सर्वांगसम होते हैं, यदि उनके माप हों।
(v) त्रिभुज में भुजाएँ होती हैं।
(vi) एक अधिक कोण त्रिभुज में अधिकतम अधिककोण होता है।
(vii) त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times \dots \times$ ऊँचाई
2. सही उत्तर चयन कर लिखिए।
(i) $4a^2 - 9b^2$ का गुणनखण्ड निम्नलिखित होगा।
(a) $(2a + 3b)(2a - 3b)$ (b) $(2a - 3b)^2$
(c) $(2a + 3b)^2$ (d) $(4a + 9b)(4a - 9b)$
(ii) $\frac{x+1}{2} + 5 = \frac{x-1}{6}$ का हल है।

- (a) 17 (b) 16 (c) -17 (d) -16

(iii) त्रिभुज के अन्तः कोणों की मापों का योग होता है।

- (a) 90^0 (b) 180^0 (c) 360^0 (d) -180^0

(iv) त्रिभुज के शीर्ष होते हैं।

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

(v) यदि $x = 0$ हो तो $(2x + 1)(1 + 4x)$ का मान होगा।

- (a) 1 (b) 0 (c) 2 (d) 3

3. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $y^4 - 81$ (ii) $144a^2 + 4b^2 - 48ab$ (iii) $p^4 + 2p^2 + 1$

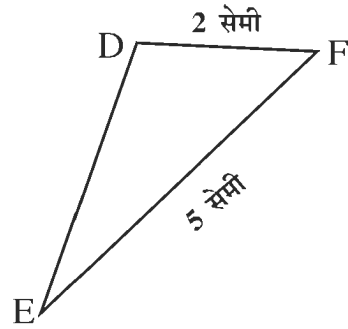
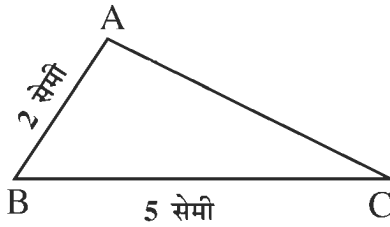
4. महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

$49x^2y^2z^4, 63x^5z^2, 105x^4y^2z^2$

5. किसी संख्या के तिगुने में से 22 घटाने पर 68 प्राप्त होता है। संख्या ज्ञात कीजिए।

6. एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी., 4.5 सेमी., एवं 7.5 सेमी. है। क्या यह समकोण त्रिभुज है? यदि हाँ, तो इसके कर्ण की लम्बाई क्या है?

7. $\triangle ABC$ एवं $\triangle DEF$ में $AB = DF$ तथा $BC = EF$ है SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध से दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, और क्या अतिरिक्त आधार चाहिए?



8. $\frac{6x+1}{2} + 1 = \frac{7x-3}{3}$ को हल कीजिए।

9. $0.6x + 0.8 = 0.28x + 1.12$ को हल कीजिए।

10. 35 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, बालिकाओं की संख्या बालकों की संख्या के $\frac{2}{5}$ है। कक्षा में बालकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

11. सरल कीजिए।

$$\left(\frac{3}{4}p^2qr\right) \times (5pq^2) \times \left(\frac{-8}{150}r^2\right)$$

12. गुणा कीजिए तथा $x = 2$, $y = 1$ तथा $z = -1$ के लिए परिणाम को सत्यापित कीजिए।

$$\frac{1}{2}x^3y^3z^3(x^2 + y^2)$$

13. सरल कीजिए।

$$x(x + y^2 + z) + y^2(x + y + z) - z(x + y^2)$$

14. उचित सर्वसमिका का प्रयोग कर मान निकालिए।

(i) 103^2

(ii) 99^2

15. एक पेड़ का तना भूमि से 12 मी. की ऊँचाई से टूटा परन्तु पेड़ से अलग नहीं हुआ। जिस स्थान पर पेड़ की चोटी ने भूमि को छुआ, वह पेड़ के तने के आधार से 5 मी. दूर था। टूटने से पूर्व पेड़ की ऊँचाई क्या थी?

16. यदि $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ तो $\angle P$, $\angle Q$, भुजा PQ, भुजा QR, भुजा PR किसके सर्वांगसम होगी?

17. मेरे पास कुछ पाँच रुपये वाले और कुछ दो रुपये वाले सिक्के हैं। दो रुपये वाले सिक्कों की संख्या पाँच रुपये वाले सिक्कों की संख्या की चार गुनी है। यदि मेरे पास कुल 117 रुपये हो, तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

18. किसी परिमेय संख्या का अंश उसके हर से 7 कम है। यदि अंश में 2 और हर में 9 जोड़ दें, तो भी यही परिमेय संख्या मिलती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

19. एक समकोण त्रिभुज बनाकर पाइथागोरस प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

20. एक त्रिभुज की भुजाएँ 11 सेमी., 60 सेमी. और 61 सेमी. हैं। दिखाइए कि यह एक समकोण त्रिभुज है।