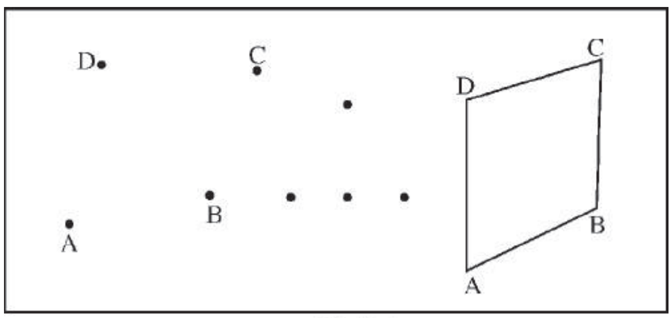
पाठ 13
चतुर्भुज

आइए सीखें-

- चतुर्भुज के शीर्ष, भुजाएँ, कोण, विकर्ण, आसन्न एवं सम्मुख भुजाएँ।
- चतुर्भुज के अन्त: एवं बाह्य भाग।
- चतुर्भुज का क्षेत्र।
- चतुर्भुज के अन्त: कोणों का योग 360^0 होता है, इसका सत्यापन।

त्रिभुज की अवधारणा में हमने अपनी कॉपी पर तीन असंरेख बिन्दु अंकित कर उन बिन्दुओं को स्केल की सहायता से एक-दूसरे को मिलाकर त्रिभुज की आकृति बनाई थी।

अब हम अपनी कॉपी पर चार बिन्दु A, B, C एवं D अंकित करें। इसमें कोई भी तीन बिन्दु संरेख नहीं है। इन बिन्दुओं का क्रम से स्केल की सहायता से एक-दूसरे से मिलाइए।



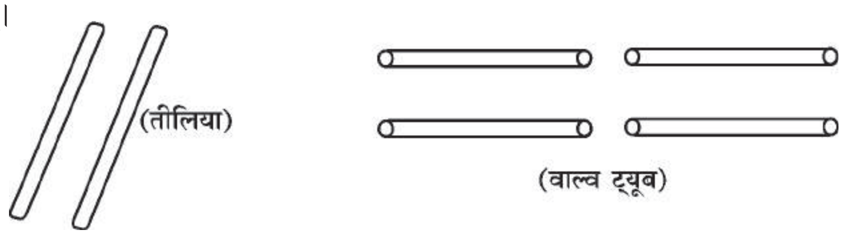
आकृति 13.1

इस प्रकार निर्मित आकृति 'चतुर्भुज' कहलाती है।

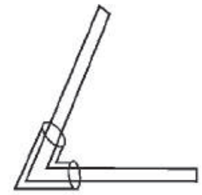
विचार कीजिए (i) कि यदि कोई तीन बिन्दु एक सरल रेखा पर स्थित हो तो क्या इन बिन्दुओं को मिलाने से चतुर्भुज बन सकता है।

(ii) यदि हम चारों बिन्दुओं को (जिसमें से तीन बिन्दु असंरेख हों) किसी भी क्रम में मिलायें तो भी क्या चतुर्भुज की आकृति बनती है।

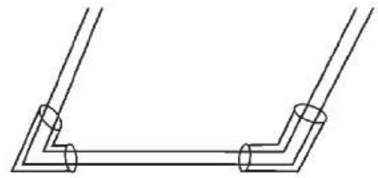
क्रियाकलाप 1. कुछ माचिस की तीलियों के टुकड़े लीजिए तथा रबर की नलिकाओं (बाल्ब ट्यूब) के भी कुछ टुकड़े लीजिए।



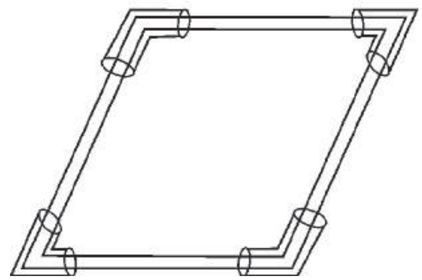
अब रबर नलिकाओं द्वारा दो तीलियों को इस प्रकार जोड़िए की एक कोई भी कोण बन जाए।



दोनों मुक्त सिरों में से एक सिरे को एक तीसरी तीली के साथ इस प्रकार जोड़िए कि कोई भी दो तीलियाँ एक रेखा में न हों।



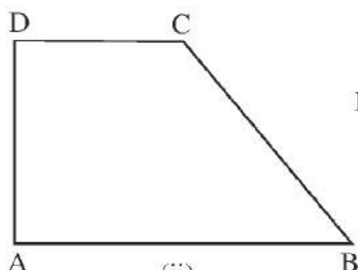
दोनों मुक्त सिरों को एक चौथी तीली के साथ इस प्रकार जोड़िए कि कोई भी दो तीलियाँ एक ही रेखा में न हों तथा तीलियाँ सिरों के अतिरिक्त किसी अन्य बिन्दु पर प्रतिच्छेद न करें। ऐसा करने पर हमें चतुर्भुज की आकृति प्राप्त होती है।



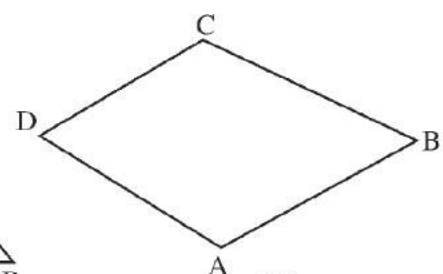
त्रिभुज की तरह चतुर्भुज का आकार स्थिर नहीं है। दो विपरीत कोनों पर दबाव लगाकर हम इस चतुर्भुज का आकार बदल सकते हैं।

निम्नांकित आकृतियों को ध्यान से देखिए

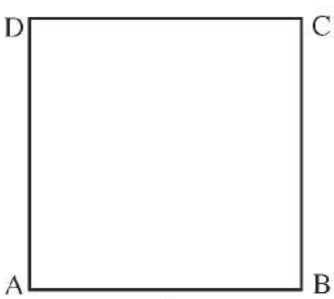
(i)



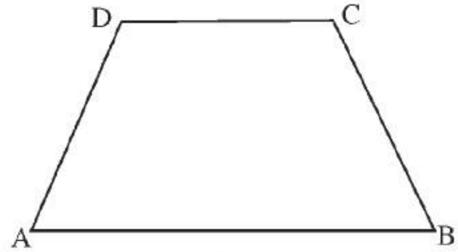
(ii)



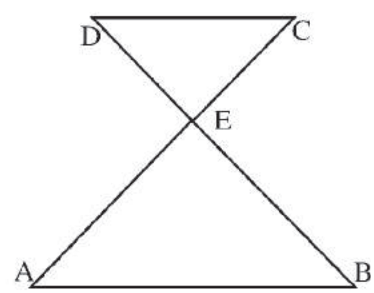
(iii)



(iv)



(v)



(vi)

उपरोक्त आकृतियों में निम्नांकित विशेषताएँ हैं।

(i) सभी आकृतियों में चार रेखाखण्ड है।

(ii) सभी आकृतियाँ चार रेखाखण्डों के इस प्रकार जुड़ने से बनी है कि कोई भी दो रेखाखण्ड समरैखिक नहीं है।

(iii) ये सभी बन्द आकृतियाँ हैं।

(iv) आकृतियों (i) से (v) तक में कोई भी दो रेखाखण्ड आपस में नहीं काटते। परन्तु आकृति (vi) के दो रेखाखण्ड AC और BD आपस में एक-दूसरे को E बिन्दु पर काटते हैं।

(v) आकृति (i) से (v) तक प्रत्येक दो-दो भुजाओं के जोड़ पर एक बिन्दु है। इस प्रकार इन आकृतियों में ऐसे चार बिन्दु है। परन्तु आकृति (vi) में ऐसे पाँच बिन्दु हैं।

(vi) आकृतियों के चारों बिन्दु एक ही रेखा में नहीं है किन्तु वे सभी एक ही समतल में है।

इस प्रकार

> ''एक ही तल में चार रेखाखण्डों से बनी एक सरल बन्द आकृति को चतुर्भुज (quadrilateral) कहते हैं।''

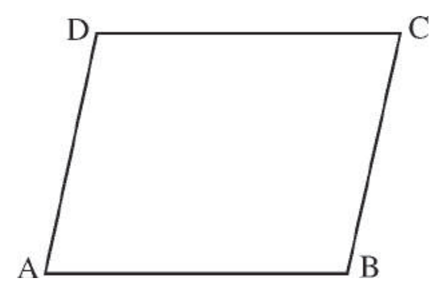
ऊपर की आकृतियों में आकृति (i) से (v) तक चतुर्भुज की आकृतियाँ हैं। परन्तु आकृति (vi) चतुर्भुज की आकृति नहीं है। क्योंकि यह एक तल में चार भुजाओं वाली एक बन्द आकृति तो है परन्तु यह सरल नहीं है।

गणित की भाषा में हम एक चतुर्भुज को इस प्रकार समझेंगे

यदि हम किसी तल में चार बिन्दु A, B, C एवं D इस प्रकार लें कि

(i) इनमें से कोई भी तीन बिन्दु एक रेखा में स्थित न हों, तथा

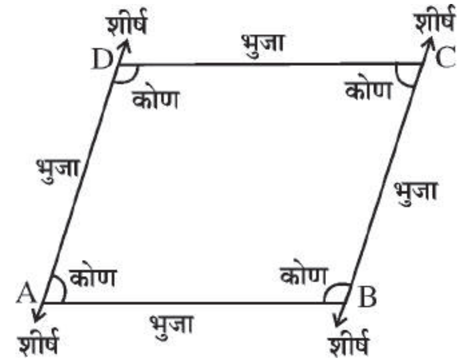
(ii) रेखाखण्ड AB, BC, CD एवं DA अन्त बिन्दुओं को छोड़कर किसी अन्य बिन्दु पर प्रतिच्छेद न करें, तो इन चारों रेखाखण्डों से बनने वाली आकृति को चतुर्भुज (Quadrilateral) कहते हैं।



13.1 शीर्ष (Vertices) किसी चतुर्भुज ABCD में बिन्दु A, B, C एवं D चतुर्भुज के शीर्ष कहलाते हैं। चतुर्भुज में चार शीर्ष होते हैं।

13.2 भुजाएँ (Sides) रेखाखण्ड AB, BC, CD तथा DA चतुर्भुज ABCD की भुजाएँ कहलाती हैं। चतुर्भुज में चार भुजाएँ हैं।

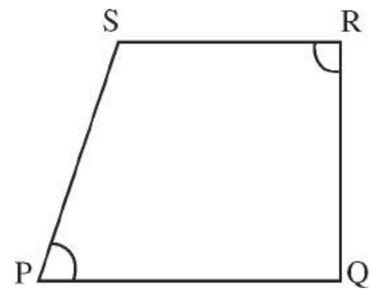
13.3 कोण (angles) चतुर्भुज ABCD में रेखाखण्डों द्वारा शीर्ष पर निर्मित कोण $\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ तथा $\angle CDA$ चतुर्भुज के कोण कहलाते हैं। इन कोणों को हम संक्षिप्त में क्रमश: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ एवं $\angle D$ कहेंगे।



13.4 सम्मुख शीर्ष चतुर्भुज PQRS में शीर्ष (P व R) तथा (Q व S) सम्मुख शीर्ष हैं।

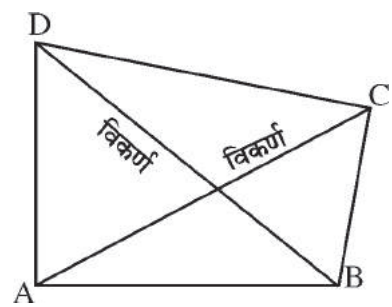
(i) P का सम्मुख शीर्ष R है, व R का P

(ii) Q का सम्मुख शीर्ष S है S का Q



13.5 चतुर्भुज के विकर्ण (diagonals)

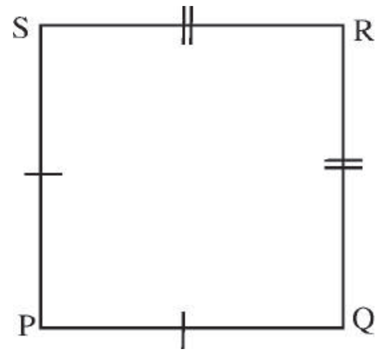
सम्मुख शीर्षों A एवं C तथा B एवं D को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AC एवं BD चतुर्भुज ABCD के विकर्ण कहते हैं। चतुर्भुज में दो विकर्ण होते हैं जो एक-दूसरे को मात्र एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं।



13.6 आसन्न भुजाएँ (adjacent Sides)

चतुर्भुज की जिन दो भुजाओं में एक उभयनिष्ठ अन्त बिन्दु हो। उन भुजाओं को चतुर्भुज की आसन्न भुजाएँ कहते हैं।

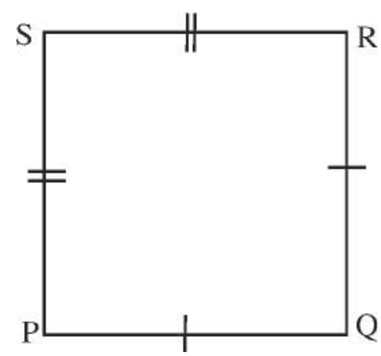
चतुर्भुज PQRS में दो भुजाओं PQ तथा SP जिसका शीर्ष बिन्दु P उभयनिष्ठ है आसन्न भुजाएँ हैं। इसी प्रकार QR तथा SR भी आसन्न भुजाएँ हैं।



इसी प्रकार चतुर्भुज की अन्य आसन्न भुजाएँ PQ व QR तथा RS व PS हैं।

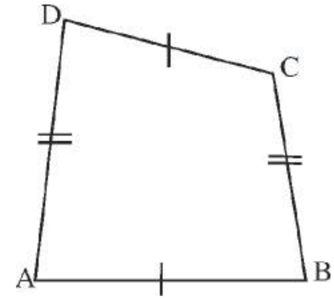
13.7 सम्मुख भुजाएँ (opposite Sides)

चतुर्भुज की वे भुजाएँ जिनके कोई शीर्ष बिन्दु उभयनिष्ट नहीं हों सम्मुख भुजाएँ (आमने-सामने) कहलाती हैं।



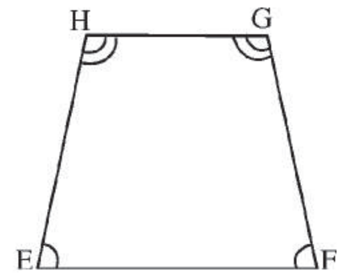
चतुर्भुज ABCD में दो भुजाओं AB तथा DC में कोई उभयनिष्ठ शीर्ष नहीं है। अत: ये सम्मुख

भुजाएँ है। इस चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म BC तथा AD है।



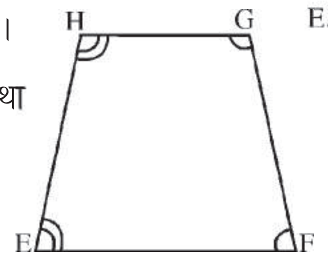
इस प्रकार चतुर्भुज में सम्मुख (आमने-सामने की) भुजाओं के दो युग्म होते हैं।

13.8 आसन्न कोण (adjacent angles)



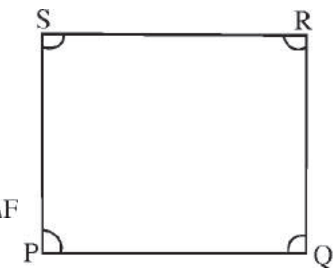
किसी चतुर्भुज के उन कोणों को आसन्न कोण कहते हैं। जिनकी एक भुजा उभयनिष्ठ हो।

चतुर्भुज EFGH में उभयनिष्ठ भुजा EF पर बने $\angle E$ व $\angle F$ आसन्न कोण है। इसी प्रकार उभयनिष्ठ भुजा GH पर $\angle G$ व $\angle H$ आसन्न कोण है।



इसी प्रकार भुजा FG पर $\angle F$ व $\angle G$ तथा भुजा EH पर $\angle E$ व $\angle H$ आसन्न कोण हैं।

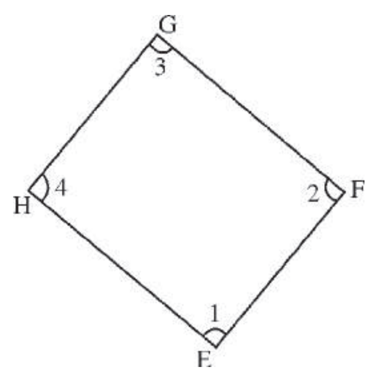
13.9 सम्मुख कोण (opposite angles)



किसी चतुर्भुज के उन कोणों को सम्मुख कोण कहते हैं जिनकी कोई भुजा उभयनिष्ठ नहीं हो।

चतुर्भुज PQRS में $\angle P$ व $\angle R$ तथा $\angle Q$ व $\angle S$ सम्मुख कोणों के दो युग्म है।

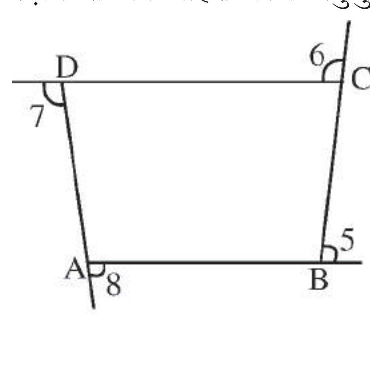
13.10 अन्तः कोण (interior angles)

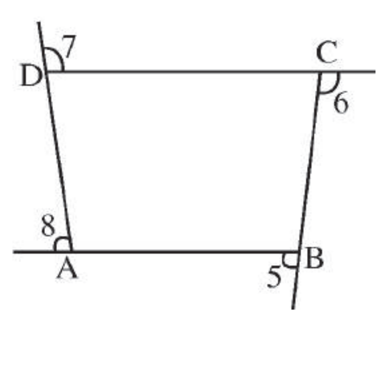


चतुर्भुज के शीर्ष पर बने कोण अन्तः कोण कहलाते हैं। इन्हें हम चतुर्भुज के कोण भी कहते हैं।

चतुर्भुज EFGH में $\angle HEF$ या $\angle E$ या $\angle 1$, $\angle EFG$ या $\angle F$ या $\angle 2$, $\angle FGH$ या $\angle G$ या $\angle 3$ तथा $\angle GHE$ या $\angle H$ या $\angle 4$ चतुर्भुज के अन्तः कोण हैं।

13.11 बाह्य कोण (exterior angles) किसी चतुर्भुज की सभी भुजाओं को वामावर्त या दक्षिणावर्त्त क्रम में बढ़ाने से बने बाहरी कोण चतुर्भुज के बाह्य कोण या बहिष्कोण कहलाते हैं।





चतुर्भुज ABCD की दी गयी आकृतियों में $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$ व $\angle 8$ बाह्य कोण या बहिष्कोण है।

प्रश्नावली 13.1

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति उचित संख्या लिखकर कीजिए।

   (i) चतुर्भुज में .... शीर्ष होते हैं।

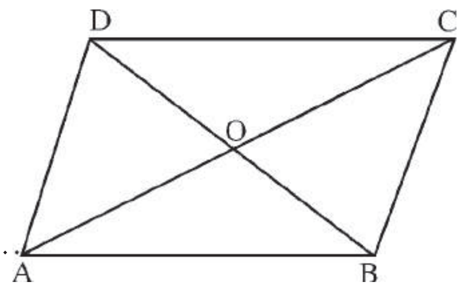
   (ii) चतुर्भुज में .... भुजाएँ होती हैं।

   (iii) चतुर्भुज में .... कोण होते हैं।

   (iv) चतुर्भुज में .... विकर्ण होते हैं।

   (v) चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के .... युग्म होते हैं।

2. चित्र के आधार पर बताइए।



   (i) चतुर्भुज के शीर्ष के नाम ....

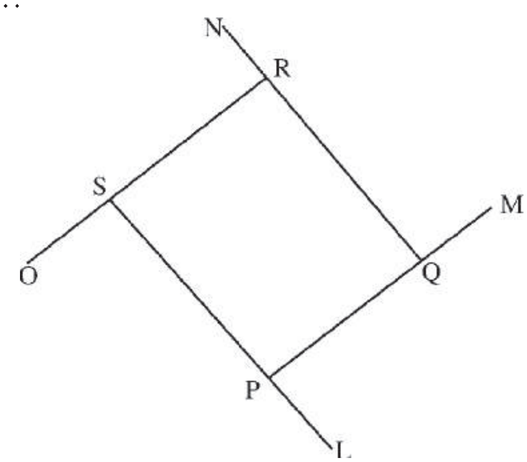
   (ii) समस्त भुजाओं के नाम ....

   (iii) समस्त आसन्न भुजाओं के जोड़ों के नाम ....

   (iv) सम्मुख भुजाओं के जोड़ों के नाम ....

   (v) विकर्णों के नाम ....

   (vi) सम्मुख कोणों के नाम ....



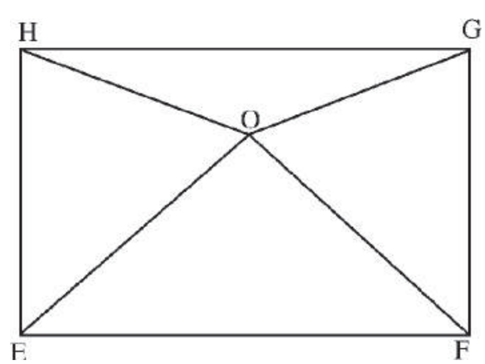
3. चतुर्भुज PQRS की भुजाओं को चित्रानुसार बढ़ाया गया है। बाह्य कोणों के नाम लिखिए।

4. एक चतुर्भुज PQRS तथा उसका एक विकर्ण PR खींचिए। विकर्ण चतुर्भुज को किन आकृतियों में विभाजित करता है? उनके नाम लिखिए। इस प्रकार की कितनी आकृतियाँ बनती हैं लिखिए?

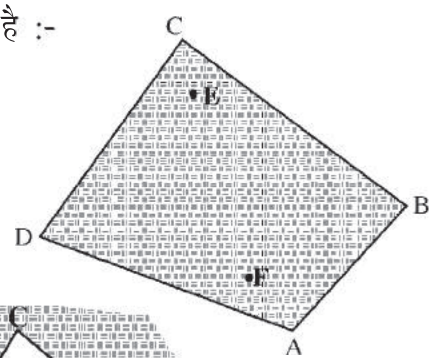
5. चित्र में चतुर्भुज EFGH के अन्दर एक बिन्दु O लिया गया है तथा इस बिन्दु को शीर्षों E, F, G एवं H से मिलाया गया है। इस चित्र को देखकर बनने वाली आकृतियों के नाम लिखिए।

   त्रिभुज ....

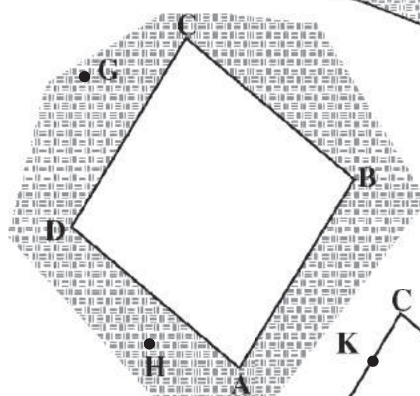
   चतुर्भुज ....



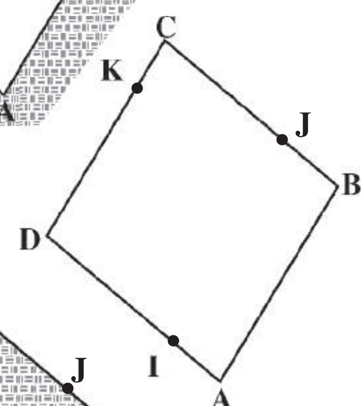
13.12 चतुर्भुज का अन्त: तथा बाह्य भाग चतुर्भुज चार भुजाओं वाली एक समतल आकृति है। यह आकृति तल को तीन भागों में निम्न प्रकार से विभाजित करती है :-



(i) एक भाग वह जो चतुर्भुज ABCD से घिरे E एवं F जैसे बिन्दुओं से बना है। इस भाग को चतुर्भुज ABCD का अन्त: भाग या अभ्यंतर (Interior) कहते हैं। बिन्दु E एवं F जो चतुर्भुज के अन्त: भाग में स्थित है चतुर्भुज के आन्तरिक बिन्दु (Interior point) कहलाते हैं।

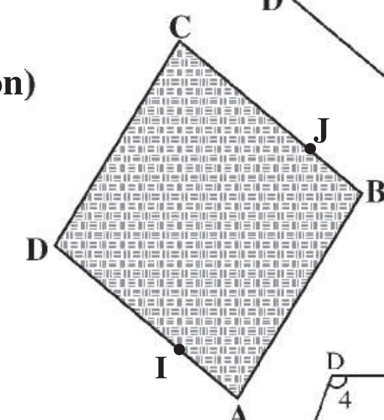


(ii) दूसरा वह भाग जिसमें G एवं H जैसे वे सभी बिन्दु हैं जो चतुर्भुज से घिरे नहीं हैं। इस भाग को बाह्य भाग या बहिर्भाग (Exterior) कहते हैं। इस प्रकार के बिन्दुओं G एवं H को चतुर्भुज के बाह्य बिन्दु (Exterior points) कहते हैं।



(iii) तीसरे भाग में बिन्दु I, J, K चतुर्भुज पर स्थित हैं। यह भाग स्वयं चतुर्भुज है।

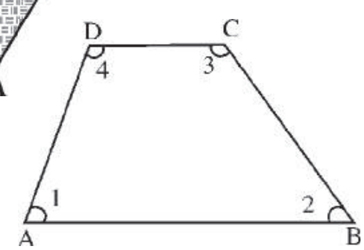
13.13 चतुर्भुज का क्षेत्र (quadrilateral region)



चतुर्भुज स्वयं और उसके अन्त: क्षेत्र से मिलकर चतुर्भुजीय क्षेत्र बनता है।

चतुर्भुज ABCD के अभ्यंतर को चतुर्भुज के साथ मिलाकर बने क्षेत्र को चतुर्भुजीय क्षेत्र ABCD कहते हैं।

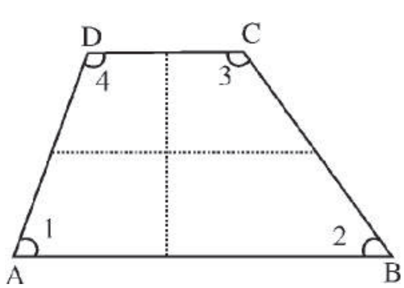
13.14 चतुर्भुज के कोणों के योग का गुण



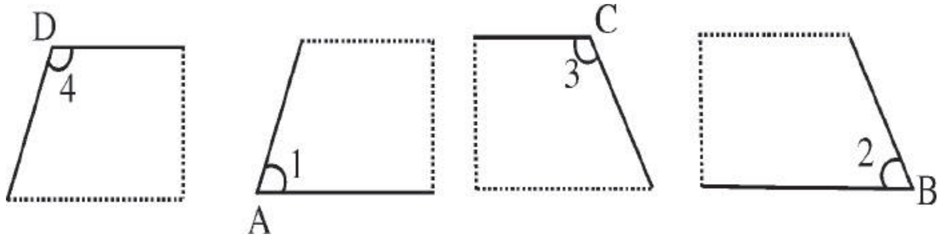
क्रियाकलाप 1.

(i) एक मोटा कागज लीजिए और उस पर एक चतुर्भुज ABCD बनाइए।

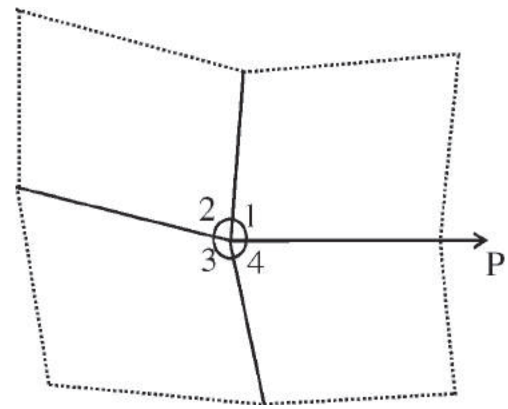
(ii) इसके कोणों पर चिह्न अंकित कर उन्हें 1, 2, 3 एवं 4 से नामांकित कीजिए। अब कैंची द्वारा चित्र में प्रदर्शित किए अनुसार काट लीजिए।



(iii) हम देखते हैं कि कटा हुआ प्रत्येक भाग में चतुर्भुज के कोण $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ व $\angle 4$ में से कोई एक कोण अवश्य है।



(iv) अब एक कागज पर एक किरण OP खींचकर कटे हुए कोणों को इस प्रकार रखिए कि प्रत्येक का शीर्ष; किरण के बिन्दु O पर आए। इसके लिए सबसे पहले हम कोण $\angle 1$ को इस प्रकार रखते हैं कि उसकी एक भुजा OP के अनुदिश रहे। अब दूसरे अन्य कोणों को इस प्रकार रखिए कि उनके शीर्ष बिन्दु O पर पड़ें तथा न तो वे एक-दूसरे पर चढ़ें और न उनके बीच कोई खाली स्थान बचे।



(v) इस प्रकार हम देखते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोण मिलकर बिन्दु O पर एक सम्पूर्ण कोण बना रहे हैं। हम जानते हैं कि सम्पूर्ण कोण का माप 360^0 होता है।

अत: चतुर्भुज ABCD के चारों कोणों की माप का योग 360^0 है। अर्थात्

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 360^0$

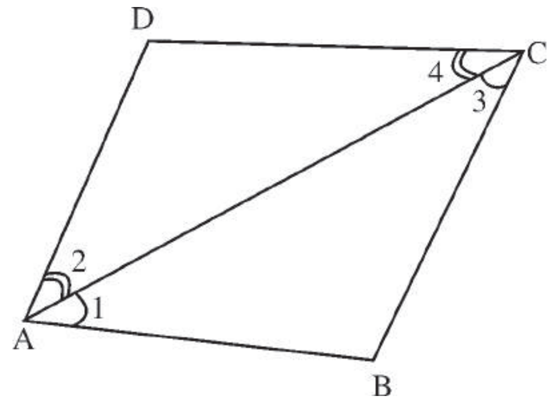
क्रियाकलाप 2

अपनी कॉपी पर चार चतुर्भुज खींचिए तथा प्रत्येक को ABCD से नामांकित कीजिए। इन्हें क्रमश: (i), (ii), (iii) एवं (iv) क्रमांक दीजिए। प्रत्येक चतुर्भुज के अन्त: कोणों को चाँदे की सहायता से मापकर, कोणों की माप को सारणी में लिखिए

चतुर्भुज का क्रमांक	कोणों का मान				$S=\angle A+\angle B+\angle C+\angle D$	360^0-S
	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$		
(i)						
(ii)						
(iii)						
(iv)						

हम देखते हैं कि $360^0 - S$ या तो शून्य है या नगण्य। यदि माप ठीक से नहीं लिया गया है तो ही $360^0 - S$ का मान शून्येत्तर प्राप्त होगा। इस प्रकार प्रत्येक सही स्थिति में

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$



क्रियाकलाप 3

(i) एक चतुर्भुज ABCD खींचिए तथा विकर्ण AC बनाइए। यह विकर्ण चतुर्भुज को दो त्रिभुजों ΔABC एवं ΔADC में विभाजित करता है।

(ii) कोणों $\angle BAC$, $\angle DAC$, $\angle BCA$ एवं $\angle DCA$ को क्रमशः 1, 2, 3 एवं 4 से नामांकित कीजिए।

(iii) ΔABC में-

$\angle 1 + \angle B + \angle 3 = 180^0$ (त्रिभुज के कोणों के योग का गुण)

ΔACD में- (1)

$\angle 2 + \angle D + \angle 4 = 180^0$ (2)

सभी (1) तथा (2) को जोड़ने पर

$\angle 1 + \angle B + \angle 3 + \angle 2 + \angle D + \angle 4 = 180^0 + 180^0$

$(\angle 1 + \angle 2) + \angle B + (\angle 3 + \angle 4) + \angle D = 360^0$

$\angle BAD + \angle B + \angle BCD + \angle D = 360^0$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

अर्थात् चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 या 4 समकोण होता है।

किसी भी चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 या चार समकोण होता है।

उदाहरण 1. एक चतुर्भुज के तीन कोण क्रमशः 70^0, 80^0 एवं 130^0 है। चौथे कोण का मान ज्ञात कीजिए।

दिया है -

$\angle A = 70^0$

$\angle B = 80^0$

$\angle C = 130^0$

$\angle D =$ ज्ञात करना है.

हल : हम जानते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360^0 होता है।

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$70^0 + 80^0 + 130^0 + \angle D = 360^0$

$280^0 + \angle D = 360^0$

$\angle D = 360^0 - 280^0$

$\angle D = 80^0$

चतुर्भुज के चौथे कोण का मान 80^0 है। उत्तर

उदाहरण 2. एक चतुर्भुज के तीन समान कोणों में प्रत्येक 70^0 का हो तो चौथे कोण का मान ज्ञात कीजिए।

हल : चतुर्भुज ABCD में तीन कोणों की माप समान है अर्थात्

$\angle A = \angle B = \angle C = 70^0$

चौथा $\angle D$ ज्ञात कना है।

हम जानते हैं किसी चतुर्भुज में

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$70^0 + 70^0 + 70^0 + \angle D = 360^0$

$210^0 + \angle D = 360^0$

$\angle D = 360^0 - 210^0$

$\angle D = 150^0$

चौथे कोण की माप $= 150^0$ उत्तर

उदाहरण 3. एक चतुर्भुज के तीन कोण 1:2:3 के अनुपात में हैं। यदि इनमें से सबसे छोटे तथा सबसे बड़े कोणों का योग 180^0 हो, तो चतुर्भुज के चारों कोणों के माप ज्ञात कीजिए।

हल : माना चतुर्भुज के तीन कोण क्रमशः X^0, $2X^0$ तथा $3X^0$ है (X अनुपातिक नियतांक कहलाता है)।

दिए हुए प्रतिबन्ध के अनुसार

$X^0 + 3X^0 = 180^0$

$4X^0 = 180^0$

$X^0 = \frac{180^0}{4} = 45^0$

अतः तीन कोण $X^0 = 45^0$, $2X^0 = 2\times45^0 = 90^0$, $3X^0 = 3\times45^0 = 135^0$ है।

अब चतुर्भुज के कोणों के योग-गुण से,

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$45^0 + 90^0 + 135^0 + \angle D = 360^0$

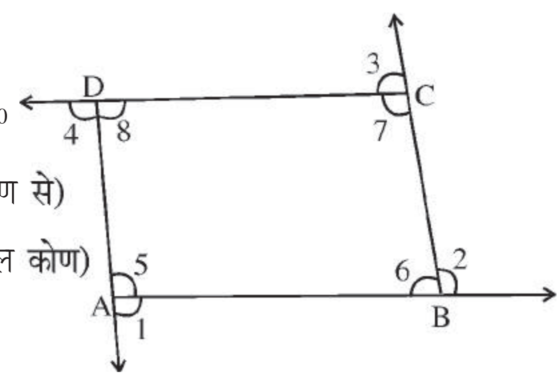
$270^0 + \angle D = 360^0$

$\angle D = 360^0 - 270^0$

$= 90^0$

अतः चतुर्भुज के चारों कोणों के माप 45^0, 90^0, 135^0 एवं 90^0 है।

उदाहरण 4. चतुर्भुज ABCD की भुजाओं को नीचे बनी आकृति में क्रमानुसार बढ़ाया गया है। जिससे बहिष्कोण $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ और $\angle 4$ बनते हैं। इन बहिष्कोणों की मापों का योगफल ज्ञात कीजिए।



हल : चतुर्भुज ABCD में

$\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360^0$

(चतुर्भुज के अन्तः कोणों के योग गुण से)

परन्तु $\angle 1 + \angle 5 = 180^0$ (सरल कोण)

$\angle 2 + \angle 6 = 180^0$

$\angle 3 + \angle 7 = 180^0$

$\angle 4 + \angle 8 = 180^0$

जोड़ने पर

$\angle 1+\angle 5+\angle 2+\angle 6+\angle 3+\angle 7+\angle 4+\angle 8 = 180^0 + 180^0 + 180^0 + 180^0$

$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) + (\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8) = 720^0$

$(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4) + 360^0 = 720^0$

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 720^0 - 360^0 = 360^0$

अतः चतुर्भुज के बहिष्कोणों को योग 360^0 होता है।

प्रश्नावली 13.2

1. यदि एक चतुर्भुज के तीन कोणों की माप 60^0, 75^0 तथा 80^0 हो तो चौथे कोण की माप बताइए।
2. चतुर्भुज ABCD का कोण $\angle D = 180^0$ तथा

   $\angle A = \angle B = \angle C$ है।

   चतुर्भुज के शेष तीनों कोण ज्ञात कीजिए।
3. किसी चतुर्भुज के चारों कोण बराबर है, तो उसके प्रत्येक कोण का मान निकालिए।
4. एक चतुर्भुज के कोणों में 1:2:3:4 का अनुपात है। इस चतुर्भुज के सभी कोण ज्ञात कीजिए।
5. एक चतुर्भुज के चार कोण 3:5:7:9 के अनुपात में हैं। ये कोण ज्ञात कीजिए।
6. चतुर्भुज के दो कोणों में से प्रत्येक का माप 65^0 है। यदि तीसरे कोण का माप 135^0 है तो चौथे कोण का माप ज्ञात कीजिए।
7. एक चतुर्भुज के दो आसन्न कोण 130^0 तथा 40^0 के है। शेष दो कोणों का योग बताइए।
8. एक चतुर्भुज के दो कोणों का मान 120^0 व 100^0 है। शेष दो कोण बराबर है। प्रत्येक कोण का मान बताइए।
9. एक चतुर्भुज की भुजाओं को क्रमानुसार बढ़ाया गया है। इनसे बने बहिष्कोणों में से तीन बहिष्कोणों के मानों का योगफल 300^0 है। चौथे बहिष्कोण का मान बताइए।
10. एक चतुर्भुज ABCD के अन्त: कोण

    $\angle A = 70^0$,

    $\angle B = 50^0$,

    $\angle C=120^0$ है।

    चौथे कोण D के अन्त: तथा बहिष्कोण का मान ज्ञात कीजिए।