

पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन

आइए सीखें-

- घनाभ एवं घन के पृष्ठ, कोर एवं शीर्ष।
- घनाभ एवं घन के पृष्ठों का क्षेत्रफल।
- आयतन एवं इसकी इकाई।
- घनाभ एवं घन का आयतन।
- क्षेत्रफल एवं आयतन आधारित दैनिक जीवन से संबंधित साधारण प्रश्न।

पिछली कक्षा में हम परिमाप तथा क्षेत्रफल की अवधारणाओं को समझ चुके हैं एवं आयत और वर्ग जैसी सरल समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल निकालना भी सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम कुछ ऐसी आकृतियों का अध्ययन करेंगे जो समतलीय नहीं होती। जैसे घनाभ और घन।

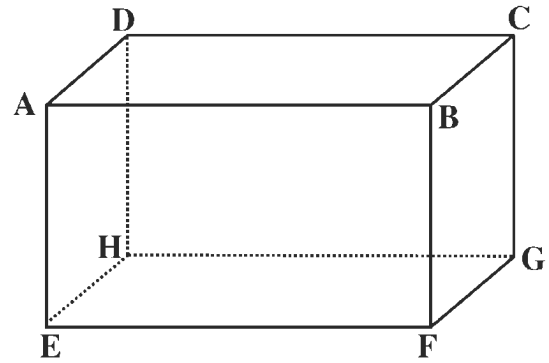
17.1 घनाभ तथा घन

दैनिक जीवन में काम आने वाली वस्तुओं जैसे माचिस, मिठाई का डिब्बा, चॉक का डिब्बा, संदूक, अलमारी, ईट, चाय का डिब्बा आदि वस्तुएँ घनाभ कहलाने वाली एक ज्यामितीय आकृति के उदाहरण हैं।

आकृति 17.1 एक घनाभ का रेखाचित्र है।

घनाभ (Cuboids)

एक घनाभ छः आयताकार क्षेत्रों से बना होता है। प्रत्येक क्षेत्र घनाभ का एक फलक कहलाता है। इस प्रकार किसी भी घनाभ के छः फलक (face) होते हैं। आकृति 17.1 से ऊपर (ABCD) और नीचे वाले (EFGH) फलकों से सम्मुख फलकों का एक युग्म (जोड़ा) बनता है। इसी प्रकार आगे (ABFE) और पीछे (CDHG) एवं दाएँ (BFGC) बाएँ (ADHE) वाले पार्श्व फलकों से सम्मुख फलकों के दो युग्म बनते हैं।



आकृति 17.1

इस प्रकार किसी भी घनाभ में फलकों के तीन युग्म होते हैं। प्रत्येक युग्म में एक फलक दूसरे फलक के सर्वांगसम होती है।

किन्हीं भी ऐसे दो फलकों को, जो सम्मुख फलक नहीं है। आसन्न फलक कहते हैं। ये एक रेखाखण्ड में मिलते हैं, जिन्हें कोर कहते हैं।

एक घनाभ में बारह कोरें होती हैं। ये तीन भिन्न-भिन्न लम्बाई की कोरों में बँटी होती हैं। चूँकि आयत की आमने-सामने की भुजाएँ बराबर होती हैं।

अतः आकृति की कोरें

$$AB = DC = HG = EF$$

$$BC = AD = FG = EH$$

$$AE = BF = CG = DH$$

दिए गए प्रत्येक फलक के लिए सम्मुख फलक को छोड़कर शेष चार फलक दिए गए फलक के आसन्न फलक होते हैं। इस प्रकार प्रत्येक फलक के चार आसन्न फलक होते हैं।

घनाभ की कोई तीन कोरे जिस स्थान पर मिलती हैं वह घनाभ का शीर्ष (कोना) कहलाता है। इस प्रकार एक घनाभ में आठ शीर्ष होते हैं। आकृति 17.1 में A, B, C, D, E, F, G और H घनाभ के शीर्ष हैं।

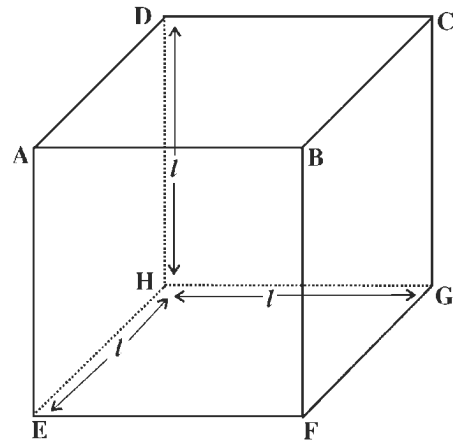
किसी शीर्ष पर मिलने वाली तीनों कोरों में से प्रत्येक कोर शेष दो कोरों पर लम्ब होती है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि घनाभ की बारह कोरों की केवल तीन अलग-अलग लम्बाइयाँ हो सकती हैं। प्रायः इनमें से दीर्घतम को घनाभ की लम्बाई कहा जाता है इसे l से दर्शाते हैं। शेष दो में से एक को चौड़ाई जिसे b से दर्शाते हैं तथा दूसरी को घनाभ की ऊँचाई (या गहराई या मोटाई) कहते हैं इसे h से दर्शाते हैं। सामान्यतः ऊर्ध्वाकार कोरों की लम्बाई को घनाभ की ऊँचाई मान लिया जाता है। घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई को घनाभ की तीन विमाएँ भी कहा जाता है।

सामान्यतः घनाभ शब्द खोखले और ठोस दोनों प्रकार के घनाभों के लिए किया जाता है।


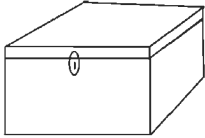
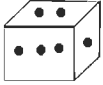
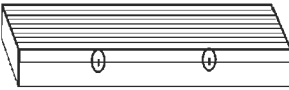


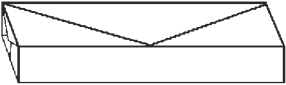
17.2 घन (Cube) जिस घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर हो उसे घन कहते हैं। घन में 12 कोरें होती हैं, ये आपस में बराबर होती हैं। इसमें 8 शीर्ष तथा 6 फलक होते हैं। प्रत्येक फलक वर्ग होता है। घन की कोर को l से प्रदर्शित करते हैं। (आकृति 17.2)

घनाभ की तरह घन शब्द का प्रयोग ठोस और खोखले दोनों प्रकार के लिए किया जाता है।



आकृति 17.2

क्रियाकलाप 1. निम्नलिखित तालिका में आकृतियों को पहचान कर इसे भरिए।

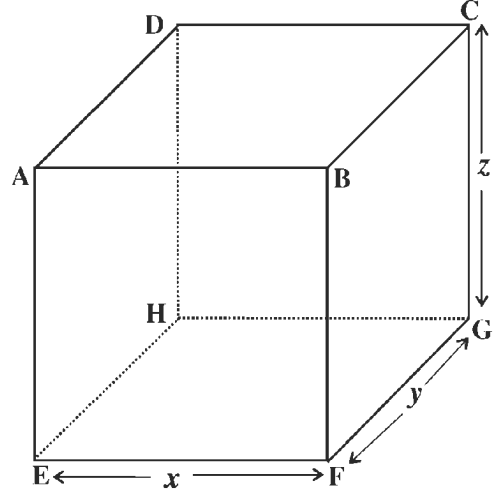
| क्रमांक | आकृति | आकृति नाम | शीर्षों की संख्या | कोर की संख्या | फलक (तल) की संख्या | पहचान घन या घनाभ |
|---------|---|-----------------|-------------------|---------------|--------------------|------------------|
| 1. |  | ईट | | | | |
| 2. |  | संदूक | | | | |
| 3. |  | पॉसा | | | | |
| 4. |  | लंच बॉक्स | | | | |
| 5. |  | चॉक का डिब्बा | | | | |
| 6. |  | माचिस का डिब्बा | | | | |
| 7. |  | मिठाई का डिब्बा | | | | |

- घनाभ एवं घन में 6 फलकें होती हैं।
- घनाभ एवं घन में 12 कोरें होती हैं।
- घनाभ एवं घन में 8 शीर्ष होते हैं।
- घनाभ में सर्वांगसम आयताकार सम्मुख फलकों के तीन युग्म होते हैं।
- घन की सभी 6 फलकें सर्वांगसम एवं वर्गाकार होती हैं।
- घन एवं घनाभ के किसी शीर्ष पर मिलने वाली तीनों कोरों में से प्रत्येक कोर शेष दो कोरों पर लम्ब होती है।

प्रश्नावली 17.1

1. अपने आस-पास की चार ऐसी वस्तुओं के नाम बताइए, जिनकी आकृति हो (i) घनाभ जैसी (ii) घन जैसी।
2. एक घनाभ की आकृति बनाइए। इसके शीर्षों को P, Q, R, S, T, U, V तथा W नाम दीजिए। अब इसके (i) फलकों के नाम लिखिए। (ii) कोरों के नाम लिखिए।
3. एक घन की आकृति बनाइए। इसके शीर्षों को नामांकित कर उसके (i) फलकों, (ii) कोरों के नाम लिखिए।

4. आकृति 17.3 में EFGH को यदि आधार माने, तो चारों फलकों के नाम बताइए।



आकृति 17.3

5. आकृति 17.3 में कुछ कोरों की लम्बाइयाँ संकेतों x , y और z से दिखाई गई हैं। शेष कोरों की लम्बाइयाँ लिखिए।
6. आकृति 17.3 में EFGH को यदि आधार मानें, तो घनाभ की ऊँचाई बताने वाले किसी रेखाखण्ड का नाम बताइए।
7. आकृति के आधार पर निम्नांकित के नाम बताइए।
 - (i) AEHD के सम्मुख फलक का।
 - (ii) BFGC के आसन्न फलकों का।
 - (iii) कोर AB में मिलने वाले फलकों का।
 - (iv) शीर्ष H पर मिलने वाली तीनों कोरों के।
8. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
 - (i) घनाभ के फलकों की संख्या होती है।
 - (ii) घनाभ के पार्श्व फलकों की संख्या होती है।
 - (iii) घनाभ के दो आसन्न फलक एक रेखाखण्ड में मिलते हैं, जिसे कहते हैं।
 - (iv) घनाभ की तीन विमाएँ लम्बाई, चौड़ाई और।
 - (v) घनाभ की तीन संगामी कोरें एक बिन्दु पर मिलती हैं, जिसे घनाभ का कहते हैं।
 - (vi) वह घनाभ है जिसके सभी छः फलक वर्ग होते हैं।

(vii) घनाभ में कोरों की संख्या होती है.

(viii) घनाभ में शीर्षों की संख्या होती है।

(xi) घन के प्रत्येक शीर्ष से निकलने वाली कोई दो कोरें एक-दूसरे के साथ का कोण बनाती हैं।

17.3 घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल

हमने देखा है कि बाजार में बहुत सी वस्तुएँ टीन, लकड़ी, गत्ते या मोटे कागज के बने डिब्बों (बाक्सों) में रखकर बेची जाती है। इनमें से अधिकांश डिब्बे घनाभ के आकार के होते हैं। संदूक, आलमारियों आदि की आकृति भी घनाभ जैसी होती है। निर्माता को यह जानना आवश्यक हो जाता है कि इनके बनाने में उन्हें कितनी व किस आकार की टीन या स्टील की चद्दरों, लकड़ी, गत्ते, कागज आदि की आवश्यकता होगी। यह जानने के लिए, घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालना पड़ता है।

हम जानते हैं कि घनाभ का पृष्ठ छः आयताकार फलकों से बना होता है (आकृति 17.4)।

इन छः आयताकार फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल (Total Surface area) कहलाता है।

अब हम इन पृष्ठीय तलों का क्षेत्रफल निकालने का सूत्र प्राप्त करेंगे।

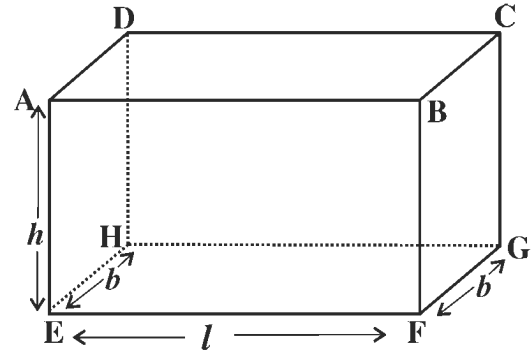
माना कि घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई (सेमी. में) क्रमशः l , b और h है।

नीचे (आधार) EFGH और ऊपर ABCD के फलकों का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= (EF \times EH + AB \times AD) \\ &= (l \times b + l \times b) \text{ सेमी.}^2 \\ &= 2lb \text{ सेमी.}^2 \end{aligned}$$

दाई BFGC और बाई AEHD के फलकों का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= (FG \times BF + EH \times AE) \\ &= (b \times h + b \times h) \text{ सेमी.} \\ &= 2bh \text{ सेमी.}^2 \end{aligned}$$



आकृति 17.4

सामने AEFB और पीछे DHGC के फलकों का क्षेत्रफल

$$= (AE \times EF + CG \times CD)$$

$$= (h \times l + h \times l) \text{ सेमी.}^2$$

$$= 2hl \text{ सेमी.}^2$$

घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = इसके सभी फलकों के क्षेत्रफल का योग

$$= (2lb + 2bh + 2hl) \text{ सेमी.}^2$$

$$= 2 (lb + bh + hl) \text{ सेमी.}^2$$

| |
|---|
| घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 (लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + ऊँचाई × लम्बाई) |
|---|

अतः लम्बाई l , चौड़ाई b और ऊँचाई h मात्रक वाले घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2 ($lb + bh + hl$) वर्ग मात्रक होता है।

स्पष्टतः घनाभ का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= (2lh + 2bh) \text{ वर्ग मात्रक}$$

$$= 2 (l + b)h \text{ वर्ग मात्रक}$$

$$= \text{आधार का परिमाप} \times \text{ऊँचाई}$$

| |
|--|
| कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल = 2 ($l + b$) h |
|--|

$$= 2 (\text{लम्बाई} + \text{चौड़ाई}) \text{ ऊँचाई}$$

| |
|--|
| यदि दीवारों में दरवाजे, खिड़कियाँ आदि हो, तो दीवारों का शुद्ध क्षेत्रफल निकालने के लिए ऊपर के सूत्र से चारों दीवारों का क्षेत्रफल निकालकर उसमें से उन सभी दरवाजों और खिड़कियों के क्षेत्रफल का योग घटा देना चाहिए। |
|--|

17.4 घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

हम सीख चुके हैं कि घन के सभी छः पृष्ठ एक ही माप के वर्ग होते हैं। यदि घन की एक कोर l मात्रक हो, तो

$$\text{घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2 (l \times l + l \times l + l \times l) \text{ वर्ग मात्रक (चूँकि } l = b = h)$$

$$= 2 (l^2 + l^2 + l^2) = 2 (3l^2)$$

$$= 6l^2 \text{ वर्ग मात्रक}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 6l^2 \\ &= 6 \times (\text{भुजा})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2 (l \times l + l \times l) \\ &= 2 (l^2 + l^2) \\ &= 2 (2l^2) \\ &= 4l^2 \text{ वर्ग मात्रक} \end{aligned}$$

- पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालते समय लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई एक ही मात्रक में होना आवश्यक है।
- 'कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल' के लिए 'सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल' या केवल 'सम्पूर्ण पृष्ठ' शब्द का ही प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार 'पार्श्वीय पृष्ठीय क्षेत्रफल' के लिए 'पार्श्वीय पृष्ठ' का प्रयोग किया जाता है।

आइए अब कुछ उदाहरणों द्वारा इन सूत्रों का प्रयोग समझा जाए।

उदाहरण 1. एक घनाभ की लम्बाई 10 सेमी., चौड़ाई 8 सेमी. और ऊँचाई 5 सेमी. है। घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है लम्बाई (l) = 10 सेमी.

चौड़ाई (b) = 8 सेमी.

और ऊँचाई (h) = 5 सेमी.

$$\begin{aligned} \text{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2 (lb + bh + lh) \\ &= 2 (10 \times 8 + 8 \times 5 + 5 \times 10) \text{ सेमी.}^2 \\ &= 2 (80 + 40 + 50) \text{ सेमी.}^2 \\ &= 340 \text{ सेमी.}^2 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण 2. तेल का एक घनाभाकार डिब्बा 30 सेमी.x40 सेमी.x50 सेमी. माप का है। टिन की चादर का मूल्य यदि 15 रुपये प्रति वर्ग मीटर हो, तो 20 ऐसे डिब्बों के बनाने में लगी टिन का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $l = 30$ सेमी., $b = 40$ सेमी, $h = 50$ सेमी.

$$\begin{aligned} \text{एक डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2 (lb + bh + lh) \text{ सेमी.}^2 \\ &= 2 (30 \times 40 + 40 \times 50 + 50 \times 30) \text{ सेमी.}^2 \end{aligned}$$

$$= 2 (1200 + 2000 + 1500) \text{ सेमी.}^2$$

$$= 9400 \text{ सेमी.}^2$$

$$\therefore 20 \text{ डिब्बों का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 20 \times 9400 \text{ सेमी.}^2$$

$$= 188000 \text{ सेमी.}^2$$

$$= 18.8 \text{ मी.}^2$$

$$[\therefore 10000 \text{ सेमी.}^2 = 1 \text{ मी.}^2]$$

$$1 \text{ मी.}^2 \text{ टीन की चादर का मूल्य} = 15 \text{ रुपये}$$

$$18.8 \text{ मी.}^2 \text{ टीन की चादर का मूल्य} = 15 \times 18.8 \text{ रु.}$$

$$= 282.00 \text{ रुपये}$$

अतः 20 डिब्बों में लगी टीन का मूल्य = 282 रुपये, उत्तर

उदाहरण 3.

5 मी. लम्बाई, 4 मी. चौड़ाई और 3 मी. ऊँचाई वाले कमरे में 2.5 मी. × 1.5 मी. का एक दरवाजा तथा 1.5 मी. × 1.5 मी. की दो खिड़कियाँ हैं। 8 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल :

दिया है $l = 5$ मी., $b = 4$ मी., $h = 3$ मी.

$$\text{दीवारों का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2 (l + b)h \text{ मी.}^2$$

$$= 2 (5 + 4) \times 3 \text{ मी.}^2$$

$$= 2 \times 9 \times 3 \text{ मी.}^2$$

$$= 54 \text{ मी.}^2$$

$$\text{दरवाजे का क्षेत्रफल} = 2.5 \times 1.5 \text{ मी.}^2$$

$$= 3.75 \text{ मी.}^2$$

$$\text{दो खिड़कियों का क्षेत्रफल} = 2 (1.5 \times 1.5) \text{ मी.}^2$$

$$= 2 \times 2.25 \text{ मी.}^2$$

$$= 4.50 \text{ मी.}^2$$

$$\text{सफेदी किए जाने वाले भाग का कुल क्षेत्रफल} = 54 - (3.75 + 4.50)$$

$$= 54 - 8.25$$

$$= 45.75 \text{ मी.}^2$$

एक वर्ग मीटर पर सफेदी कराने का व्यय = 8 रुपये
 45.75 वर्ग मीटर पर सफेदी कराने का व्यय = 8×45.75
 = 366.00 रुपये

अतः दीवारों पर सफेदी कराने का व्यय = 366 रुपये, उत्तर

उदाहरण 4. 8 सेमी. कोर वाले घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है घन की कोर (l) = 8 सेमी.
 \therefore घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6l^2$
 = $6 \times (8)^2$ सेमी.²
 = $6 \times 8 \times 8$ सेमी.²
 = 384 सेमी.² उत्तर

प्रश्नावली 17.2

- अपने पर्यावरण से ऐसे तीन उदाहरण दीजिए, जहाँ पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने की आवश्यकता हो।
- चॉक के उस डिब्बे का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 16 सेमी., 8 सेमी. और 6 सेमी. है।
- 25 सेमी. लम्बे, 20 सेमी. चौड़े और 15 सेमी. ऊँचे एक बंद डिब्बे को बनाने में आवश्यक गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- खाने के उस डिब्बे का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी विमाएँ 15 सेमी., 9 सेमी. और 8 सेमी. हैं।
- एक डिब्बे की विमाएँ 26 सेमी. \times 26 सेमी. \times 45 सेमी. है। इस प्रकार के 20 डिब्बों के बनाने में लगने वाली टीन की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। यदि चादर का मूल्य 20 रुपये प्रति वर्ग मीटर हो तो 20 डिब्बों में लगने वाली टीन का मूल्य ज्ञात कीजिए।
- उस घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा है :
 (i) 11 सेमी., (ii) 1.2 मी., (iii) 27 सेमी.।
- लकड़ी के एक घनाकार गुटके का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि उसकी भुजा 12 सेमी. है।
- 1.5 मी. लम्बा, 1.25 मी. चौड़ा और 65 सेमी. गहरा प्लास्टिक का एक संदूक बनाना है। इसे ऊपर से खुला रखना है। प्लास्टिक की शीट की मोटाई पर ध्यान न देते हुए ज्ञात कीजिए।

- (i) संदूक बनाने के लिए आवश्यक शीट का क्षेत्रफल।
- (ii) आवश्यक शीट का मूल्य, यदि 7 मी. \times 3.5 मी. माप वाली शीट का मूल्य 510 रुपये हो।
9. एक कक्षा का कमरा 11 मी. लम्बा, 8 मी. चौड़ा और 5 मी. ऊँचा है। इसकी चारों दीवारों व फर्श का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. तैरने का एक तालाब (तरणताल) 20 मी. लम्बा, 15 मी. चौड़ा और 4 मी. गहरा है। 120 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से इसकी दीवारों और फर्श पर सीमेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
11. एक आयताकार हॉल के फर्श का परिमाण 250 मी. है। यदि इसकी ऊँचाई 6 मी. हो, तो 20 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से उसकी चारों दीवारों पर (पेन्ट) कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
12. एक कमरे की छत और उसके फर्श पर पलस्तर कराया जाना है। कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4.5 मी., 3 मी. और 3 मी. है। 8 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से पलस्तर कराने का क्या खर्च आएगा?
13. एक कमरे की लम्बाई 9 मी., चौड़ाई 7 मी. और ऊँचाई 4 मी. है। कमरे में दो दरवाजे 2 मी. \times 1 मी 50 सेमी. और दो खिड़कियाँ 1 मी. 50 सेमी. \times 1 मी. है। कमरे की चारों दीवारों की क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

17.5 आयतन

समतल क्षेत्रों की भाँति ही एक ठोस का भी कुछ परिमाण या आकार होता है। किसी ठोस के माप या परिमाण को उसका आयतन कहते हैं। दूसरे शब्दों में, किसी ठोस द्वारा घेरे गये आकार या अन्तरिक्ष या स्थान (वास्तव में ठोस) के माप को उसका आयतन कहते हैं।

किसी ठोस का आयतन उसके पृष्ठों के बीच घिरे हुये स्थान के माप को कहते हैं।

आयतन की धारणा दैनिक जीवन में अत्यन्त उपयोगी है।

उदाहरण(i) घरों में पानी एकत्र करने के लिए एक आयताकार टंकी बनाई जाती है। टंकी का आकार (लम्बाई, चौड़ाई व गहराई) जितना बड़ा होगा उतना ही अधिक पानी एकत्र किया जा सकेगा।

(ii) तेल रखने के लिए टीन का एक आयताकार डिब्बा बनाया जाता है। डिब्बे के घनाभाकार का आयतन जितना अधिक होगा, उतना ही अधिक तेल उसमें रखा जा सकेगा।

(iii) चॉक स्टिक, गत्ते के आयताकार डिब्बों में रखकर बेची जाती है।

ऊपर के सभी उदाहरणों से हमारा अभिप्राय घनाभाकार वस्तु से ही है, परन्तु व्यवहार में अन्य प्रकार के ठोसों को भी नापना आवश्यक होता है, जैसे बेलनाकार, शंक्वाकार, गोल आदि।

आयतन की माप और उसका मात्रक

आइए, आकृति 17.5 में दिखाए गए क्षेत्रों A और B की तुलना करें। आकारों के देखने से A, B से बड़ा है। A, B से कितना गुना बड़ा है। इसे जानने के लिए खाली ड्रम A में बाल्टी B से पानी डालिए।

माना कि 20 बाल्टियाँ पानी डालने से ड्रम भर जाता है।

∴ A का आयतन = 20 × (B का आयतन)

यदि B को एक मात्रक माने तो

A का आयतन = 20 मात्रक

20 मात्रक आयतन A का माप कहलाता है।

इस प्रकार, यदि प्रत्येक व्यक्ति अपना-अपना मात्रक चुने तो आवश्यक नहीं कि एक व्यक्ति द्वारा ज्ञात आयतन वही हो जो कोई अन्य व्यक्ति प्राप्त करता है। इस कारण आयतन का कोई ऐसा मानक मात्रक होना चाहिए, जिसे सभी समझ सकें।

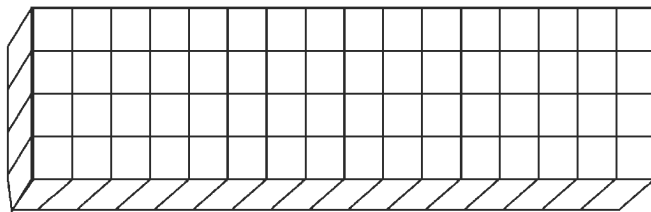
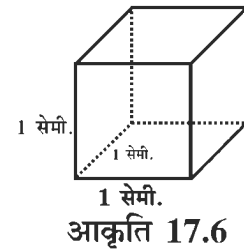
17.6 आयतन के मानक मात्रक

हमने पिछली कक्षा में क्षेत्रफल मापने के लिए 1 सेमी., 1 मिमी. या 1 मी. भुजा वाले वर्ग को मानक मात्रक में और क्षेत्रफलों को सेमी.², मिमी.² या मी.² आदि में व्यक्त करना सीखा है।

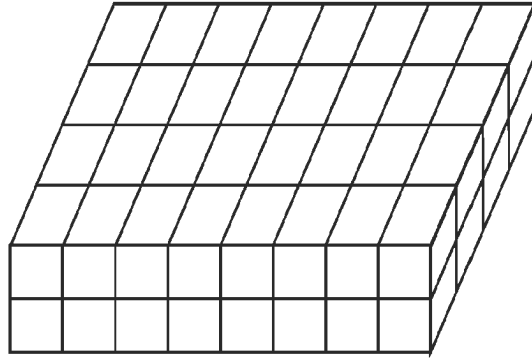
इसी प्रकार आयतन को मापने के लिए भुजा 1 सेमी. या 1 मिमी. या 1 मी. वाले घन को मानक मात्रक माना जाता है (आकृति 17.6). आयतन को घन सेमी. या (सेमी³) या घन मि.मी. (मि.मी.³) या घन मी. (मी.³) में दर्शाया जाता है।

घनाभ और घन का आयतन

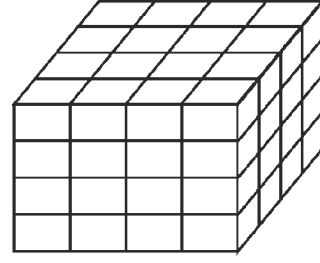
क्रियाकलाप 2



आकृति 17.7 (i)



(ii)



(iii)

आइए हम 64 बराबर घन ले जिनकी भुजा माना कि 1 सेमी. है और इन्हें एक घनाभ के रूप में रखें। इन घनों से कई भिन्न-भिन्न घनाभ बनाए जा सकते हैं (आकृति 17.7)।

इनमें से प्रत्येक घनाभ के आयतन के विषय में क्या कहा जा सकता है? क्योंकि इनमें से प्रत्येक 64 मात्रक (unit) घनों को एक साथ रखकर बनाया गया है।

प्रत्येक घन का आयतन = 64 घन मात्रक या 64 सेमी.³ है। उपरोक्त आकृतियों से निम्नतालिका में प्रेक्षणों को प्रस्तुत किया जा सकता है

सारणी : घनाभ का आयतन

| घनाभ की आकृति | लम्बाई (l) (सेमी. में) | चौड़ाई (b) (सेमी. में) | ऊँचाई (h) (सेमी. में) | आयतन ($l \times b \times h$) (सेमी ³ में) |
|---------------|-------------------------------|-------------------------------|------------------------------|---|
| I | 16 | 4 | 1 | 64 |
| II | 8 | 4 | 2 | 64 |
| III | 4 | 4 | 4 | 64 |

हम इसी प्रकार का क्रियाकलाप कर अपने प्रेक्षणों/परिणामों को ऊपर जैसी सारणी में लिख सकते हैं।

यदि लम्बाई l , चौड़ाई b और ऊँचाई h है, तो

$$\begin{aligned} \text{घनाभ का आयतन } V &= l \times b \times h \\ &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} \end{aligned}$$

यदि l , b और h सेमी. में हो तो आयतन (v) सेमी³ में होगा। इसी प्रकार अन्य मात्रकों के लिए भी होता है।

घन का आयतन

$$\begin{aligned}\text{घन का आयतन} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} \\ &= l \times l \times l \quad (\because l = b = h) \\ &= l^3\end{aligned}$$

| |
|---|
| $\begin{aligned}\text{घन का आयतन } V &= l^3 \\ &= (\text{भुजा})^3\end{aligned}$ |
|---|

यहाँ l घन की कोर (भुजा) तथा V घन का आयतन है।

- लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई के गुणा के लिए उनका एक ही मात्रक में होना आवश्यक है।
- घनाभ के सूत्र से यह भी ज्ञात किया जा सकता है।

$$(i) \text{ लम्बाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}}$$

$$(ii) \text{ चौड़ाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{ऊँचाई}}$$

$$(iii) \text{ ऊँचाई} = \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}}$$

| |
|-------------------------|
| (i) 1 सेमी. = 10 मि.मी. |
|-------------------------|

$$\therefore 1 \text{ सेमी.}^3 = 10 \times 10 \times 10 \text{ मि.मी.}^3 = 1000 \text{ मिमी.}^3$$

| |
|------------------------|
| (ii) 1 मी. = 100 सेमी. |
|------------------------|

$$\therefore 1 \text{ मी.}^3 = 100 \times 100 \times 100 \text{ सेमी}^3 = 1000000 \text{ सेमी.}^3 = 10^6 \text{ सेमी.}^3$$

- द्रवों के आयतन मापने के लिए, हम प्रायः लीटर (l) और मिलीलीटर (ml) मात्रकों का प्रयोग करते हैं।

$$1 \text{ सेमी}^3 = 1 \text{ मिली (ml)}$$

$$1000 \text{ सेमी}^3 = 1 \text{ ली (l)}$$

$$1 \text{ मी}^3 = 1000000 \text{ सेमी}^3 = 1000 \text{ ली} = 1 \text{ किली (kl) (किलोलीटर)}$$

- किसी बर्तन के आयतन को लीटर, मिलीलीटर आदि के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में इस आयतन को धारिता (Capacity) कहा जाता है।

● घनाभाकार वस्तुओं की संख्या = $\frac{\text{बड़े घनाभ का आयतन}}{\text{एक छोटे घन/घनाभ का आयतन}}$

उदाहरण 5. लकड़ी के ऐसे टुकड़े का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 10 सेमी., 5 सेमी. और 3 सेमी. है।

हल : दिया है $l = 10$ सेमी., $b = 5$ सेमी., $h = 3$ सेमी.

$$\begin{aligned} V &= l \times b \times h \\ &= 10 \times 5 \times 3 \text{ सेमी}^3 \\ &= 150 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

अतः टुकड़े का आयतन 150 सेमी.³ उत्तर

उदाहरण 6. 20 सेमी. की कोर वाले घन में से 5 सेमी. कोर वाले कितने घन काटे जा सकते हैं?

हल : दिया है घन की भुजा = 20 सेमी.

$$\begin{aligned} \text{घन का आयतन} &= (\text{भुजा})^3 \\ &= 20^3 \text{ सेमी}^3 \\ &= 20 \times 20 \times 20 \text{ सेमी}^3 \\ &= 8000 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

छोटे घन की भुजा = 5 सेमी (दिया है)

$$\begin{aligned} \text{छोटे घन का आयतन} &= 5^3 \text{ सेमी}^3 \\ &= 5 \times 5 \times 5 \text{ सेमी}^3 \\ &= 125 \text{ सेमी}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{काटे जा सकने वाले घनों की संख्या} &= \frac{\text{बड़े घन का आयतन}}{\text{एक छोटे घन का आयतन}} \\ &= \frac{8000}{125} \\ &= 64, \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

उदाहरण 7. एक टंकी की धारिता 60 कि.ली. है। यदि टंकी की लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 5 मी. 4 मी. हो, तो उसकी गहराई ज्ञात कीजिए।

हल : टंकी का आयतन = 60 कि.ली.

$$\begin{aligned} &= 60000 \text{ ली.} \\ &= 60 \text{ मी}^3 \quad [1000 \text{ ली} = 1 \text{ मी}^3] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{टंकी की गहराई} &= \frac{\text{आयतन}}{\text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई}} \\ &= \frac{60}{5 \times 4} \text{ मी.} \\ &= 3 \text{ मी.}\end{aligned}$$

टंकी की गहराई 3 मी. है। उत्तर

प्रश्नावली 17.3

- उस घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी :
 - लम्बाई = 10 सेमी., चौड़ाई = 8 सेमी. और ऊँचाई = 3 सेमी. है।
 - लम्बाई = 8 सेमी., चौड़ाई = 2.5 सेमी. और ऊँचाई = 1 सेमी. है।
 - लम्बाई = 1.5 मी., चौड़ाई = 25 सेमी. और ऊँचाई = 15 सेमी. है।
- उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा है :
 - 8 सेमी
 - 3.5 सेमी.
 - 25 मिमी.
- एक घनाभाकार ठोस लकड़ी के टुकड़े में 36 सेमी^3 लकड़ी है। यदि उसकी लम्बाई 4 सेमी. और चौड़ाई 3 सेमी. हो, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
- एक माचिस की डिब्बी के माप 4 सेमी. \times 2.5 सेमी. \times 1.5 सेमी. है। ऐसी 12 डिब्बियों वाले एक पैकेट का आयतन क्या होगा?
- घनाभाकार पानी की एक टंकी 3 मी. लम्बी, 2 मी. चौड़ी और 1 मी. गहरी है। इसमें कितने लीटर पानी आ सकता है।
- एक घनाभाकार बर्तन 10 मी. लम्बा और 8 मी. चौड़ा है। उसकी ऊँचाई क्या हो कि उसमें 480 घन मी. द्रव समा सके?
- एक घनाभाकार टंकी की धारिता 50000 ली. पानी के बराबर है। यदि उसकी लम्बाई और गहराई क्रमशः 2.5 मी. और 10 मी. हो, तो उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
- लोहे के एक आयताकार ठोस की माप 6 मी. \times 6 सेमी. \times 2 सेमी. है। यदि 1 घन सेमी. लोहे के टुकड़े का भार 8 ग्राम हो तो इस लोहे के ठोस का भार ज्ञात कीजिए।
- चाय के पैकेट की माप 10 सेमी. \times 6 सेमी. \times 4 सेमी. है, 50 सेमी. \times 30 सेमी. \times 0.2 मी. विमाओं वाली एक गत्ते की पेटी में ऐसे कितने पैकेट आ सकते हैं?
- एक घन मी. बर्फ का भार 1000 किलोग्राम हो तो 50 सेमी. कोर वाले बर्फ के एक घनाकार टुकड़े का भार ज्ञात कीजिए।