पाठ 4
घातांक

आइए सीखें-

- घातांक, आधार की परिभाषा।
- धनात्मक पूर्णांक घातवाली परिमेय संख्याओं का विस्तारित रूप।
- घातांक के नियम एवं शून्य घातांक।
- ऋणात्मक पूर्णांक घातांक के रूप में।
- बड़ी एवं छोटी संख्याओं को घातांक का उपयोग करते हुए लिखना।
- संख्याओं का वैज्ञानिक संकेतन।

हम संख्याओं के गुणन से परिचित हो चुके हैं। यदि एक ही संख्या को उसी संख्या से बार-बार गुणा किया जाये तो इसे अलग प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है। इस पाठ में हम घातांक एवं उससे संबंधित नियमों का अध्ययन करेंगे।

4.1 घातांक

हम जानते हैं कि $10 \times 10 \times 10 = 1000$

यहाँ 10 का 10 से 3 बार गुणा किया गया है।

इसे 10^3 के रूप में भी लिखते हैं। इस प्रकार

$$10^3 = 1000$$

इसी प्रकार

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$(-5)^3 = (-5) \times (-5) \times (-5)$$

$$p^4 = p \times p \times p \times p$$

10^3 को हम 10 की घात 3 कहते हैं।

इसी प्रकार

$$p \times p \times p \times p \times p = p^5$$

p^5 में p आधार (base) तथा 5 को घातांक (index) कहते हैं। इसी प्ररकार a^m में a आधार तथा m घातांक है।

4.2 धनात्मक पूर्णांक घातांक वाली परिमेय संख्याएँ एवं उनका विस्तारित रूप

किसी परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ को उसी संख्या से गुणा करें तब इसे निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2^2}{3^2}$$

इसी प्रकार, यदि इसे 4 बार गुणा करें तब

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}$$

अथवा $$\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=\frac{(-2)^3}{3^3}=\frac{2^3}{(-3)^3}$$

अत: हम कह सकते हैं कि यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या है, और m कोई धनात्मक पूर्णांक हो, तो

$$\left[\frac{p}{q}\right]^m=\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\dots\dots\ m \text{ बार}$$

$$=\frac{p\times p\times p\dots m \text{ बार}}{q\times q\times q\dots m \text{ बार}}=\frac{p^m}{q^m}$$

अत: $$\left[\frac{p}{q}\right]^m=\frac{p^m}{q^m}$$

इस प्रकार (1) किसी परिमेय संख्या की किसी भी घात का मान परिमेय संख्या होती है।

जैसे $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$ (परिमेय संख्या)

(2) किसी परिमेय संख्या की जो घात होती है वही उसके हर व अंश की घात भी होती है।

उदाहरण 1. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ एवं $\left(-\frac{3}{5}\right)^5$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{4\times4\times4}{5\times5\times5}$

$$= \frac{64}{125}$$

$$\left(\frac{-3}{5}\right)^5 = \frac{(-3)^5}{(5)^5} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{5\times5\times5\times5\times5}$$

$$= \frac{-243}{3125}$$

उदाहरण 2. निम्नलिखित को घातांक के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $-\frac{1}{243}$ (ii) $\frac{343}{512}$ (iii) $-\frac{27}{125}$

हल : (i) $\left(-\frac{1}{243}\right) = \frac{(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)}{3\times3\times3\times3\times3}$

$$= \frac{(-1)^5}{3^5} = \left(\frac{-1}{3}\right)^5 = \left(-\frac{1}{3}\right)^5$$

(ii) $\frac{343}{512} = \frac{7\times7\times7}{8\times8\times8} = \frac{7^3}{8^3} = \left(\frac{7}{8}\right)^3$

(iii) $\left(\frac{-27}{125}\right) = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{5\times5\times5}$

$$= \left(\frac{-3}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{5}\right)^3$$

(1) यदि किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का विस्तार धनात्मक हो तो उसकी घातांक सम होगी।

(2) यदि किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का विस्तार ऋणात्मक हो तो उसकी घातांक विषम होगी।

उदाहरण 3. निम्नलिखित के व्युत्क्रम ज्ञात कर उनको घातीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 3^5 (ii) $\frac{1}{256}$ (iii) $\left(-\frac{5}{9}\right)^{99}$

हल : (i) 3^5 का व्युत्क्रम $=\frac{1}{3^5}=\frac{1^5}{3^5}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$

(ii) $\frac{1}{256}$ का व्युत्क्रम $= 256$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^8$

(iii) $\left(\frac{-5}{9}\right)^{99}$ का व्युत्क्रम $=\left(\frac{9}{-5}\right)^{99}=\left(-\frac{9}{5}\right)^{99}$

प्रश्नावली 4.1

1. परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\left(\frac{3}{8}\right)^3$ (ii) $\left(-\frac{7}{5}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{9}{6}\right)^4$

2. घातीय संकेतन के रूप में लिखिए।

(i) $\frac{7}{11}\times\frac{7}{11}\times\frac{7}{11}\times\frac{7}{11}\times\frac{7}{11}$ (ii) $\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(-\frac{3}{7}\right)$

(iii) $\frac{256}{169}$ (iv) $\frac{(-x)}{y}\times\frac{(-x)}{y}\times\frac{(-x)}{y}$

3. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\frac{7}{5}\times 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (ii) $\left(4^2-2^3\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3$

4. निम्नलिखित का व्युत्क्रम ज्ञात कर परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) 7^3 (ii) $\left(-\frac{5}{9}\right)^2$ (iii) $\left(\frac{1}{11}\right)^4$ (iv) $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

4.3 घातांक के नियम

प्राय: हमें समान आधार की विभिन्न घात वाली संख्याओं का गुणा करना होता है।

जैसे $2^3 \times 2^5 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^8$

$(-7)^4 \times (-7)^3 = [(-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7)] \times [(-7) \times (-7) \times (-7)]$

$= (-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7)\times(-7) = (-7)^7$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left[\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]\times\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\right]^9$$

$x^6 \times x^5 = (x \times x \times x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x \times x)$

$= x^{6+5} = x^{11}$

इस प्रकार स्पष्ट है कि

नियम 1 यदि x कोई शून्येत्तर परिमेय संख्या हो और m तथा n धनात्मक पूर्णांक हों, तो

$$\boxed{x^m \times x^n = x^{m+n}}$$

पुनः ध्यान दीजिए

$2^5 \div 2^3 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2}$

$= 2^{5-3}$

$= 2^2$

$= 2 \times 2$

$= 4$

$$(-3)^7 \div (-3)^5 = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}$$

$$= \frac{(-3)^7}{(-3)^5}$$

$$= (-3)^{7-5}$$

$$= (-3)^2$$

$$= 9$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^6 \div \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)}{\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)\times\left(\frac{5}{7}\right)}$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)^{6-3}$$

$$= \left(\frac{5}{7}\right)^3$$

$$= \frac{125}{343}$$

इस प्रकार स्पष्ट है कि

नियम 2 यदि x कोई शून्येत्तर परिमेय संख्या हो और m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हों, कि **m>n,** तब

$$\boxed{x^m \div x^n = x^{m-n} \text{ जबकि } m > n}$$

आइये उपरोक्त नियम की उस स्थिति पर विचार करें जब $m < n$

$$2^3 \div 2^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{2\times2\times2}{2\times2\times2\times2\times2}$$

$$= \frac{1}{2^{5-3}}$$

$$= \frac{1}{2^2} \quad = \frac{1}{4}$$

$$(-5)^4 \div (-5)^7 = \frac{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)}{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)}$$

$$= \frac{1}{(-5)^{7-4}}$$

$$= \frac{1}{(-5)^3} \qquad = -\frac{1}{125}$$

स्पष्ट है कि

नियम 3 यदि x कोई शून्येत्तर परिमेय संख्या हो और m तथा n ऐसे धनात्मक पूर्णांक हों कि $m<n$, तब

$$\boxed{x^m \div x^n = \frac{1}{x^{n-m}} \text{ जहाँ } m < n}$$

पुनः ध्यान दीजिए

$$(7^3)^4 = 7^3 \times 7^3 \times 7^3 \times 7^3 = 7^{3+3+3+3}$$

$$= 7^{3\times4}$$

$$= 7^{12}$$

$$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^4\right]^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{4+4+4+4+4}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{5\times4}$$

स्पष्ट है कि $\quad = \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$

नियम 4 यदि x कोई शून्येत्तर परिमेय संख्या हो और m तथा n धनात्मक पूर्णांक हों, तब

$$\boxed{(x^m)^n = x^{mn}}$$

शून्य घातांक हमने पूर्व में वर्णित नियम (2) व (3) में क्रमशः $m > n$ एवं $m < n$ की स्थिति का अध्ययन किया। अब यदि $m = n$ हो तब क्या परिणाम प्राप्त होगा? आइये, इस पर विचार करें।

$$3^5 \div 3^5 = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3}$$

$$= \frac{3^5}{3^5}$$

$$= 3^{5-5} = 3^0$$

पुनः $3^5 \div 3^5 = \dfrac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3}$

$$= 1$$

$$\boxed{\text{अतः } 3^0 = 1}$$

अतः यदि x कोई शून्येत्तर परिमेय संख्या हो तथा m धनात्मक पूर्णांक हो,

तो $x^m \div x^m = x^{m-m}$

$$= x^0 = 1$$

अतः $\boxed{x^0 = 1}$

उदाहरण 4. सरल कीजिए।

(i) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^9 \div \left(\frac{-4}{7}\right)^7$ (iii) $(-7)^8 \div (-7)^5$

(iv) $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^3\right]^2$ (v) $11^{11} \div 11^{11}$

हल : (i) $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^{3+4} = \left(\frac{5}{6}\right)^7 = \frac{78125}{279936}$ उत्तर

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^9 \div \left(-\frac{4}{7}\right)^7 = \left(-\frac{4}{7}\right)^{9-7} = \left(-\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$ उत्तर

(iii) $(-7)^8 \div (-7)^5 = (-7)^{8-5} = (-7)^3 = -343$ उत्तर

(iv) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3\times2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$ उत्तर

(v) $11^{11} \div 11^{11} = 11^{11-11} = 11^0 = 1$ उत्तर

उदाहरण 5. 2^{-7} को किस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल 2 प्राप्त हो?

हल : माना कि वह संख्या 2^x है।

तब, $2^{-7} \times 2^x = 2^1$

या $2^{-7+x} = 2^1$

$\therefore -7 + x = 1$ (आधार समान होने पर घात समान होंगी)

या $x = 8$

अत: वांछित संख्या 2^8 है। उत्तर

प्रश्नावली 4.2

1. सरल कीजिए।

(i) $\left(\frac{7}{8}\right)^3 \times \left(\frac{7}{8}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{-5}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-5}{8}\right)$ (iii) $\left(\frac{9}{5}\right)^{-6} \times \left(\frac{9}{5}\right)^3$

(iv) $(-6)^{12} \div (-6)^9$ (v) $\left(\frac{3}{2}\right)^7 \div \left(\frac{3}{2}\right)^8$ (vi) $\left(-\frac{8}{7}\right)^{21} \div \left(-\frac{8}{7}\right)^{19}$

(vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^3$ (viii) $\left(x^7\right)^4$ (ix) $23^{49} \div 23^{49}$

(x) 19^0

2. x का मान ज्ञात कीजिए, यदि $\left(\frac{7}{5}\right)^4 \times \left(\frac{7}{5}\right)^3 = \left(\frac{7}{5}\right)^{x-1}$

3. 3^{-5} को किस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल 3 प्राप्त हो?

4. $(-4)^4$ को किस संख्या से भाग दें कि भागफल 4 प्राप्त हो?

4.4 ऋणात्मक पूर्णांक घातांक के रूप में

हम जानते हैं कि शून्येत्तर परिमेय संख्या x के व्युत्क्रम को x^{-1} या $\frac{1}{x}$ लिख सकते हैं अर्थात् 3^{-1} का तात्पर्य 3 का व्युत्क्रम या $\frac{1}{3}$ होगा। तब उसे 3 की घात -1 पढ़ा जाएगा। इसी प्रकार $\left(-\frac{7}{8}\right)^{-1}$ से तात्पर्य $\left(-\frac{7}{8}\right)$ का व्युत्क्रम अर्थात् $\left(-\frac{8}{7}\right)$ से है और इसे $\left(\frac{-7}{8}\right)$ की घात (–1) पढ़ा जाएगा। इस प्रकार "यदि x कोई शून्येत्तर संख्या है, तो x^{-1} से तात्पर्य x के व्युत्क्रम $\left(\frac{1}{x}\right)$ से होता है और इसे x की घात (–1) पढ़ा जाता है।"

इसी प्रकार 3^2 के व्युत्क्रम $\left(\frac{1}{3^2}\right)$ को 3^{-2} लिखते हैं तथा 3 की घात (–2) पढ़ते हैं। $(-7)^5$ के व्युत्क्रम $\frac{1}{(-7)^5}$ को $(-7)^{-5}$ लिखेंगे तथा (–7) की घात (–5) पढ़ेंगे।

नियम यदि x कोई शून्येत्तर परिमेय संख्या है तथा m धनात्मक पूर्णांक है, तो x^m के व्युत्क्रम $\frac{1}{x^m}$ को x^{-m} लिखते हैं एवं 'x की घात (–m)' पढ़ते हैं।

अर्थात् $\boxed{x^{-m} = \frac{1}{x^m}}$

उदाहरण 6. परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $(4)^{-1}$ (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-2}$

हल : (i) $(4)^{-1} = \frac{1}{4}$ उत्तर

(ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} = \left(-\frac{3}{2}\right)$ उत्तर

(iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{5}\right)^{2} = \frac{49}{25}$ उत्तर

प्रश्नावली 4.3

1. मान ज्ञात कीजिए।

(i) 7^{-1} (ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ (iii) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-3}$

2. धनात्मक पूर्णांक वाली परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-9}$ (ii) $\left[\left(\frac{11}{13}\right)^{-2}\right]^{3}$ (iii) $\left(2^{3} \div 2^{5}\right) \times 2^{-3}$

3. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \div \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

बड़ी तथा छोटी संख्याओं को व्यक्त करने में घातांकों का प्रयोग

सूर्य से पृथ्वी की औसत दूरी लगभग 150,000,000 कि.मी. है। पृथ्वी का द्रव्यमान लगभग 5980,000,000,000,000,000,000 मीट्रिक टन या 5.98×10^{24} किग्रा है। इस प्रकार की अनेक स्थितियों में हमें बहुत बड़ी संख्याओं का सामना करना पड़ता है। इसी प्रकार एक एंगस्ट्रांम (तरंग दैर्ध्य का मात्रक) का मान $\frac{1}{10,000,000,000}$ मी. जैसी बहुत छोटी संख्याओं को भी व्यक्त करना होता है। इन्हें सामान्य रूप से लिखने में अधिक समय लगता है एवं कठिनाई आती है। घातांकीय संकेतन में इन संख्याओं को सुविधाजनक रूप में लिखा जा सकता है। इस प्रकार की बड़ी तथा छोटी संख्याओं को व्यक्त करने के लिए सामान्यत: 10 आधार वाले घातांकों का प्रयोग किया जाता है। नीचे कुछ बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्याओं के उदाहरण दिए गए हैं। देखिए, इन्हें घातांकीय रूप में कैसे लिखा गया है-

1. सूर्य से पृथ्वी की औसत दूरी = 150,000,000 किमी.

= 15×10^{7} किमी

= 1.5×10^{8} किमी

2. प्रकाश की गति = 300,000,000 मी/सेकेण्ड

= 3×10^{8} मी/से.

3. 1 एंगस्ट्राम = $\frac{1}{10,000,000,000}$ मी = 1×10^{-10} मी

वैज्ञानिक संकेतन

संख्या 300,000,000 को निम्नानुसार दस के घातांक के रूप में लिखा जा सकता है।

$300{,}000{,}000 = 3 \times 10^8 = 30 \times 10^7 = 300 \times 10^6$ ....

इसी प्रकार $0.000000008 = 8 \times 10^{-9} = 80 \times 10^{-10} = 800 \times 10^{-11}$

इस प्रकार सभी बड़ी तथा छोटी संख्याएँ $k \times 10^n$ के रूप में व्यक्त की जा सकती हैं, जहाँ k कोई सांत दशमलव संख्या है तथा n पूर्णांक है। संकेतन पद्धति में एकरूपता लाने हेतु हम k को इस प्रकार लेते हैं कि $1 \leq k < 10$ हो।

वैज्ञानिक संकेतन पद्धति में निम्नानुसार मानक रूप प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 7. (i) $30{,}00{,}00{,}000 = 3 \times 10^8$

(ii) $70{,}00{,}00{,}00{,}00{,}00{,}000 = 7 \times 10^{14}$

(iii) $\dfrac{1}{1{,}00{,}000{,}000} = 1 \times 10^{-8}$

(iv) $0.0000087 = 8.7 \times 10^{-6}$

(i) दशमलव बिन्दु की बायीं तरफ केवल एक अंक लिखते हैं।

(ii) जब दी गयी संख्या 1 या 1 से बड़ी होती है, तब 10 का घातांक धनात्मक पूर्णांक होता है। जितने स्थान दशमलव बिन्दु को बायीं ओर हटाया जाता है, वही 10 का घातांक होता है। [उदाहरण (i) व (ii)]

(iii) जब दी गयी संख्या का मान 1 से कम होता है तब 10 का घातांक ऋणात्मक पूर्णांक होता है। जितने स्थान दशमलव बिन्दु को दायीं ओर हटाया जाता है, वही 10 का ऋणात्मक पूर्णांक घातांक होता है। [उदाहरण (iii) एवं (iv)]

प्रश्नावली 4.4

1. निम्नलिखित संख्याओं को वैज्ञानिक संकेतन में लिखिए।

   (i) 15400000000 (ii) 0.0000000075

   (iii) सात करोड़ बारह लाख (iv) एक अरब

2. नीचे दी गयी संख्याओं को सामान्य रूप में लिखिए।

   (i) 9.8×10^7 (ii) 6.8×10^{-9} (iii) 1.03×10^6

3. ध्वनि की गति लगभग 33000 सेमी/सेकेण्ड है। इसे वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त कीजिए।