पाठ 7

बीजीय व्यंजक

आइए सीखें -

- एकपदी व्यंजकों का एकपदी व्यंजकों से गुणा।
- द्विपदी व्यंजकों का एक पदीय व्यंजकों से गुणा करना।
- द्विपदी व्यंजकों का द्विपदी व्यंजकों से गुणा।
- द्विपदी व्यंजकों का त्रिपदीय व्यंजकों से गुणा।
- सर्वसमिकाएँ
  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- सर्वसमिकाओं का अनुप्रयोग।

हमने बीजीय व्यंजकों के योग एवं घटाने को समझा है। हम पुन: इसे कुछ उदाहरणों से समझते हैं।

$$2x + 3y^2$$

एक बीजीय व्यंजक है क्योंकि इसमें अचर संख्याओं 2 और 3 तथा चर संख्याओं x और y को अंकगणितीय संक्रियाओं द्वारा संयोजित किया गया है। चूँकि दिये गये बीजीय व्यंजक में दो पद $2x$ एवं $3y^2$ है अत: यह द्विपदीय बीजीय व्यंजक है।

इसी प्रकार

$$3x + 5$$

भी एक द्विपदीय बीजीय व्यंजक है जिसमें दो पद $3x$ और 5 है।

इन बीजीय व्यंजकों को निम्नानुसार जोड़ते हैं

$$\begin{aligned}(2x + 3y^2) + (3x + 5) &= 2x + 3y^2 + 3x + 5\\ &= 2x + 3x + 3y^2 + 5\\ &= 5x + 3y^2 + 5\end{aligned}$$

स्पष्ट है कि एक नया बीजीय व्यंजक $5x + 3y^2 + 5$ मिलता है जिसमें तीन पद है। यह त्रिपदीय बीजीय व्यंजक है।

इसी प्रकार उक्त दोनों बीजीय व्यंजकों को निम्नानुसार घटाया जा सकता है

$$(2x + 3y^2) - (3x + 5) = 2x + 3y^2 - 3x - 5$$
$$= 2x - 3x + 3y^2 - 5$$
$$= - x + 3y^2 - 5$$

कुछ और उदाहरणों द्वारा अभ्यास करते हैं

प्रश्नावली 7.1

1. निम्नांकित बीजीय व्यंजकों में एकपदी, द्विपदी एवं त्रिपदी बीजीय व्यंजक बताइए।

   (i) $3x$ (ii) $2x^2 + 5y$ (iii) $3 + 4y$

   (iv) $x + y + z$ (v) $5a^2 + 6b^3$ (vi) $3b$

   (vii) $3a + 4b^2 + 6$ (viii) $2x + 7y^3 + 3$

2. प्रश्न (1) में दिए गए बीजीय व्यंजकों में अचर और चर मानों को बताइए।

3. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों को जोड़िए।

   (i) $x + y$ और $2x + 5y^2$ (ii) $3x^2 + 5$ और $4x + 7y$

   (iii) $2x$ और $4y$ (iv) $2x - 5$ और $3x + 7$

4. निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों में प्रथम से द्वितीय को घटाइए।

   (i) $5a + 3b$ और $2a + b$ (ii) $3x^2 + 5$ और $2x - 4$

   (iii) $a + b$ और $x + yz$ (iv) $3ab$ और $5a + 7$

5. निम्नांकित में से प्रत्येक पद का संख्यात्मक गुणांक लिखिए।

   (i) $3x^2 + 5xy$ (ii) $2x^2 + 32$

   (iii) $10x^2y^2$ (iv) $8x^3y^2 + 3xy$ (v) $10xy + 12y + 13$

5.1 एक पदियों का गुणन

हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1. $2x$ और 5 का गुणा कीजिए।

हल : $2x$ और 5 दिए गए एक पदीय बीजीय व्यंजक है जिनका गुणा किया जाना है, यह निम्नांकित प्रकार से होगा।

$$2x \times 5 = 2 \times x \times 5$$
$$= 10x$$

यहाँ पर बीजीय व्यंजक $2x$ के संख्यात्मक मान 2 का गुणा अन्य के संख्यात्मक मान 5 से हुआ है और गुणनफल $10x$ होता है।

उदाहरण 2. $3x^2$ और x^3 का गुणा कीजिए।

हल :

$$3x^2 \times x^3 = 3 \times x^2 \times x^3$$

$$= 3 \times x^{2+3}$$

$$= 3x^5$$

यहाँ पर बीजीय व्यंजक $3x^2$ का चर x^2 तथा अन्य बीजीय व्यंजक का चर x^3 का गुणा, उनके समान आधार होने पर घातांकों 2 और 3 के योग के रूप में x^5 होता है।

उदाहरण 3. $\frac{5}{3}x^3y$ और $4xy^2$ का गुणा कीजिए।

हल :

$$\frac{5}{3}x^3y \times 4xy^2 = \frac{5}{3} \times x^3 \times y \times 4 \times x \times y^2$$

$$= \frac{5}{3} \times 4 \times x^3 \times x \times y \times y^2$$

$$= \frac{20}{3} \times x^{3+1} \times y^{1+2}$$

$$= \frac{20}{3}x^4y^3$$

यहाँ पर बीजीय व्यंजक $\frac{5}{3}x^3y$ का अन्य बीजीय व्यंजक $4xy^2$ के साथ गुणा में अचर $\frac{5}{3}$ का अचर 4 के साथ, समान आधार के चर x^3 का x के साथ तथा अन्य समान आधार वाले चर y का गुणा y^2 से किया गया है।

इस प्रकार गुणनफल $\frac{20}{3}x^4y^3$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 4. $-4xy$ और $7y^2$ का गुणा कीजिए।

हल :

$$-4xy \times 7y^2 = -4 \times x \times y \times 7 \times y^2$$

$$= -4 \times 7 \times x \times y \times y^2$$

$= -28 \times x \times y^3$

$= -28xy^3$

यहाँ पर बीजीय व्यंजक $-4xy$ का अन्य बीजीय व्यंजक $7y^2$ के साथ चिह्न (–) का गुणा (+) से कर गुणनफल (–) होता है तथा अचर 4 का गुणा अचर 7 से किया जाता है और गुणनफल 28 होता है। इसी प्रकार चर y का गुणा चर y^2 से कर y^3 गुणनफल होता है। इस प्रकार गुणनफल $-28xy^3$ होगा।

उदाहरण 5. $-x^2y$ और $-x^3y^2$ का गुणा कीजिए।

हल : $(-x^2y) \times (-x^3y^2) = (-x^2) \times y \times (-x^3) \times y^2$

$= (-x^2) \times (-x^3) \times y \times y^2$

$= +x^{2+3} \times y^{1+2}$

$= x^5y^3$

यहाँ पर बीजीय व्यंजक $-x^2y$ का अन्य बीजीय व्यंजक $-x^3y^2$ के साथ गुणन में चिह्न का गुणा $(-) \times (-) = (+)$ प्राप्त है। चर x^2 का चर x^3 के साथ गुणनफल x^5 और y का y^2 के साथ गुणनफल y^3 होता है। इस प्रकार गुणनफल x^5y^3 प्राप्त होता है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

एकपदी बीजीय व्यंजकों में गुणन की क्रिया निम्नानुसार होती है।

(i) चिह्न का चिह्न के साथ गुणा किया जाता है।

इस प्रकार $(+) \times (+) = (+)$

$(+) \times (-) = (-)$

$(-) \times (-) = (+)$

$(-) \times (+) = (-)$

(ii) अचर या संख्यात्मक मान का गुणा संख्यात्मक मान के साथ किया जाता है।

(iii) चर का गुणा अन्य सजातीय चर के साथ किया जाता है

(a) समान आधार वाले चरों के गुणनफल में चर की घात, उस चर पर लगी घातांकों के योग के बराबर मिलता है।

अर्थात् $x^m \times x^n = x^{m+n}$

(b) असमान चर या असमान आधार वाले चरों का गुणा उन चरों के बीच गुणन चिह्न (.) या बिना चिह्न लगाये सीधे लिखकर प्राप्त किया जाता है। अर्थात

$x^m \times y^n = x^m.y^n$ या x^my^n

प्रश्नावली 7.2

निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1) $2x^2y$ और $-3xy^2$ (2) $2xy$ और $-y^2$

(3) $\left(\frac{4}{9}a^5b\right),\left(10a^2b\right)$ (4) $(15x) \times (-23x^2y)$

(5) $(4s^2t)\ (3s^3t^3)$ (6) $(3uv)\ (-4gh)$

(7) $(-4lm)\ (lm)\ (-2l^2m)$ (8) $(\frac{1}{2}pq)\ (-q^2)\ (2r^2)$

रिक्त स्थानों में उचित बीजीय व्यंजक भरिए।

(9) $3a \times ...... = 6a^2$ (10) $....... \times 5x^3 = 10x^4$

(11) $2x \times .... = -6x^3$ (12) $...... \times 5ab = 30a^2b^2$

सरल कीजिए।

(13) $(-2x^2) \times (\frac{1}{5}xy) \times (-\frac{2}{3}y^2z)$

(14) $(5x^6) \times (-10xy^4) \times (2x^6y^6)$

(15) $(7y^2) \times (\frac{1}{7}a^2y^2) \times (6a^2x^5)$

(16) यदि $(3x^2y^3) . (-7xy^2z) = -21x^3y^5z$ हो तो $x=1$, $y=1$ तथा $z=2$ लेकर कथन की सत्यता की जाँच कीजिए।

(17) $\frac{1}{2}a^2b$ और $3ab - 5a^3b^4$ का गुणन कीजिए तथा $a=2$, $b=1$ के लिये सत्यापन कीजिए।

5.2 एकपदी और द्विपद का गुणन

अब हम किसी एकपदी बीजीय व्यंजक का किसी द्विपदी बीजीय व्यंजक से गुणन करना सीखेंगे। निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण 6. $3x$ और $(5y + 8z)$ का गुणा कीजिए।

हल : $3x \times (5y + 8z)$

$= (3x \times 5y) + (3x \times 8z)$ (वितरण के नियम से)

$$= (3 \times x \times 5 \times y) + (3 \times x \times 8 \times z)$$

$$= (3 \times 5 \times x \times y) + (3 \times 8 \times x \times z)$$

$$= 15xy + 24xz$$

उपरोक्त उदाहरण में बीजीय व्यंजक 3x का गुणा द्विपदी बीजीय व्यंजक (5y + 8z) से किया गया है। वितरण नियम के प्रयोग के उपरान्त हमें यह गुणन एकपदी गुणन के योग के रूप में मिल जाता है और इसे आसानी से हल किया जाता है।

इन बीजीय व्यंजकों को क्रमश: P, Q और R से दर्शाया जाये तो,

$$3x \times (5y + 8z) = 3x \,.\, 5y + 3x \,.\, 8z$$

या, $\boxed{P \times (Q + R) = P.Q + P.R}$

इस प्रकार

एक पदी बीजीय व्यंजक का गुणन जब द्विपदी बीजीय व्यंजक के साथ किया जाता है तो

(i) एक पदी बीजीय व्यंजक का गुणा द्विपदी बीजीय व्यंजक के प्रथम पद के साथ किया जाता है। अर्थात $P \times (Q+R) \rightarrow PQ$

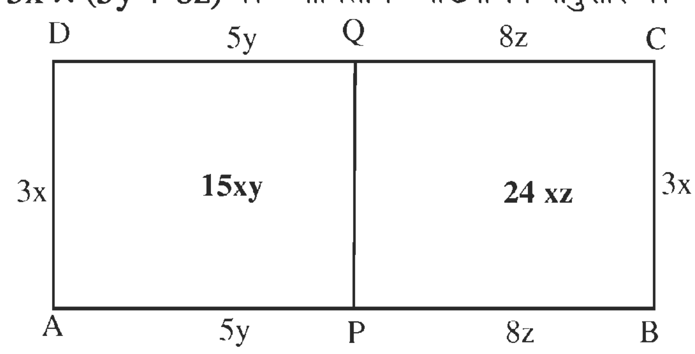
(ii) एकपदी बीजीय व्यंजक का गुणा द्विपदी बीजीय व्यंजक के द्वितीय पद के साथ किया जाता है। अर्थात् $P \times (Q+R) \rightarrow PR$

(iii) (i) और (ii) को जोड़कर/घटाकर प्राप्त व्यंजक वांछित गुणनफल होता है। अर्थात् $P \times (Q+R) \rightarrow PQ,\ PR$

अत: $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R, \ \therefore P \times (Q+R) = PQ + PR$

इसी प्रकार $P \times (Q - R) = P \times Q - P \times R, \ \therefore P \times (Q-R) = PQ - PR$

ज्यामितीय व्याख्या 3x × (5y + 8z) की ज्यामितीय व्याख्या निम्नानुसार की जा सकती है



एक आयत ABCD को लेते हैं। यदि एक भुजा AD = 3x है तथा भुजा CD के बीच एक बिन्दु Q इस प्रकार लिया जाये कि DQ = 5y तथा QC = 8z हो इसी प्रकार आयत की भुजा AB में एक बिन्दु P ऐसा लें कि AP = 5y तथा PB = 8z होगा।

स्पष्ट है कि रेखा PQ आयत ABCD को दो भागों में विभक्त करती है और तब,

(आयत ABCD का क्षेत्रफल) = (आयत APQD का क्षेत्रफल) + (आयत PBCQ का क्षेत्रफल)

$$= (3x \times 5y) + (3x \times 8z)$$

$$= 15xy + 24xz$$

इस प्रकार आयत ABCD का क्षेत्रफल, गुणनफल के परिणाम को सत्यापित करता है।

उदाहरण 7. $-4y$ और $(3x - z)$ का गुणा कीजिए।

हल : $-4y \times (3x - z) = (-4y) \times 3x + (-4y) \times (-z)$

$$= -12xy + 4yz$$

अथवा

इसे स्तम्भ विधि से भी किया जा सकता है

$$\begin{array}{r} 3x - z \\ \times \quad -4y \\ \hline \boxed{-12xy + 4yz} \end{array}$$

$(3x) \times (-4y)$ $\qquad$ $(-4y) \times (-z)$

इस प्रकार दोनों ही विधियों में गुणनफल $-12xy + 4yz$ आता है।

कुछ विशेष गुणनफल

$P(Q-R) = PQ-PR$ का अनुप्रयोग समझिए जो कि आगे दी गई विधि का आधार है

$54 \times 99 = 54 \times (100-1)$

$= 5400 - 54$

$= 5300 + 100 - 54$

अर्थात् $= 5300 + 46$

$= 5346$

संख्या के सभी अंक 9 हों तब इस सूत्र के प्रयोग से प्रश्न को सरलता से हल कर इससे सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखा जा सकता है।

जब गुण्य और गुणक में अंकों की संख्या समान हो।

उदाहरण 8. 54×99

हल : 54×99

(1) उत्तर का बायां भाग 54 का एक न्यून अर्थात् एक कम 53 होगा।

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{54 \times 99} \\ \hline 53 & \end{array}$$

(2) उत्तर का दायां भाग

3 को अंतिम 9 में से (अर्थात् इकाई में स्थित 3 को इकाई में स्थित 9 में से घटाने पर 6 प्राप्त होगा तथा 5 को 9 में से (दहाई में से दहाई) घटाने पर 4 प्राप्त होगा अत:

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{54 \times 99} \\ \hline 53 & 46 \end{array}$$

अतः $54 \times 99 = 5346$, उत्तर

उदाहरण 9. 3452×9999

हल : (1) बायीं ओर की संख्या 3452 का एक न्यून 3451 यह उत्तर का बायां भाग है।

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{3452 \times 9999} \\ \hline 3451 & 6548 \end{array}$$

(2) उत्तर के दांये भाग को प्राप्त करने के लिये उत्तर के बायें भाग के प्रत्येक अंक को नौ में से घटाकर दायीं ओर क्रमशः लिख देते हैं। = 34516548 उत्तर

जब गुणक में 9 की संख्या गुण्य के अंकों की संख्या से अधिक हों

उदाहरण 10. 43×999

हल : (1) गुण्य 43 के बायीं ओर एक शून्य रखकर दोनों संख्याओं में अंक बराबर करते हैं।

(2) बायीं ओर एक न्यूनेन करने पर 042 प्राप्त हुआ।

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{043 \times 999} \\ \hline 042 & \end{array}$$

(3) उत्तर का दायां भाग

$$\begin{array}{r} 999 \\ -042 \\ \hline 957 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{043 \times 999} \\ \hline 042 & 957 \end{array}$$

= 42957 उत्तर

जब गुणक में 9 की संख्या गुण्य के अंकों की संख्या से कम हो

उदाहरण 11. गुणा कीजिए

हल : 13×9

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{13 \times 9} \\ \hline 12 & 9 \\ -1 & 2 \\ \hline 11 & 7 \end{array}$$

13 का एक न्यून 12 बायीं ओर लिखे तथा दायीं ओर 9 को लिखें प्राप्त 129 में से बायीं ओर की संख्या 12 को घटा दें।

$129 - 12 = 117$

उत्तर 117

उदाहरण 12. गुणा कीजिए।

438×99

हल :

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{c}{438 \times 99} \\ \hline 437 & 99 \\ -\quad 4 & 37 \\ \hline 433 & 62 \end{array}$$

438 का एक न्यून 437 किया 437 के बाद 99 यथावत लिख दें। प्राप्त हुआ 43799 इसमें से 437 घटा दें।

उत्तर 43362

प्रश्नावली 7.3

निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1) $(5x + 6)$ और $3x$

(2) $-2xy$ और $(x + 3y)$

(3) $\frac{1}{2}x$ और $\frac{3}{4}xy^2 + x^2y$

(4) $3pq^2$ और $\frac{7}{9}p^2q^3 - \frac{2}{3}p^3q^2$

(5) $\frac{1}{2}x^3y^3$ और $(2x^2 + 6y^2)$

(6) $(x^3 - y^3)$ और $-3xy$

सरल कीजिए।

(7) $x(x - y) + y(x - y)$

(8) $x^2 - y^2 + x(x + y)$

(9) $-x(x^3 - y^3) + y(xy + 7x)$

(10) $2x^2(3xy + 4z) + 5y^2(3z^3 + y^3)$

(11) यदि $(-3xy)(x^3 - y^2) = -3x^4y + 3xy^3$ तो $x = 1$ तथा $y = 2$ के लिये समीकरण का सत्यापन कीजिए।

(12) $pq(4p^2 - 7qr)$ को हल कीजिए तथा $p = 1, q = 1$ एवं $r = 2$ के लिये परिणाम को सत्यापित कीजिए।

(13) $x(2x + 5y)$ के गुणनफल को प्राप्त कर इसकी ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

(14) $2x(x + z)$ के गुणनफल को प्राप्त कर इसकी ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

हल कीजिए (एक न्यूनेन पूर्वेण विधि द्वारा)।

(15) 57×99	(16) 4378×9999	(17) 87×999
(18) 999×999	(19) 48×9	(20) 9457×999

5.3 द्विपदों का गुणन

किसी एक द्विपदी बीजीय व्यंजक का गुणा किसी अन्य द्विपदी बीजीय व्यंजक के साथ किस प्रकार होता है इसे हम एक उदाहरण से समझते हैं।

उदाहरण 13. $(2x + 3y)$ और $(x + 5y)$ का गुणा कीजिए।

हल : $(2x + 3y)$ द्विपदी बीजीय व्यंजक का एक अन्य द्विपदीय बीजीय व्यंजक $(x + 5y)$ का गुणन निम्नानुसार है

प्रथम चरण $(2x + 3y)$ बीजीय व्यंजक के प्रथम पद का गुणा अन्य बीजीय व्यंजक $(x + 5y)$ से किया जाता है।

तथा इसी प्रकार $(2x + 3y)$ के द्वितीय पद का गुणा अन्य बीजीय व्यंजक $(x + 5y)$ से किया जाता है। अर्थात्

$$(2x + 3y) \times (x + 5y) = 2x \times (x + 5y) + 3y \times (x + 5y)$$

द्वितीय चरण अब प्रथम बीजीय व्यंजक के प्रथम पद का गुणा द्वितीय बीजीय व्यंजक के दोनों पदों के साथ किया जाता है। इसी प्रकार प्रथम बीजीय व्यंजक के द्वितीय पद का द्वितीय बीजीय व्यंजक के दोनों पदों के साथ किया जाता है अर्थात्

$$= 2x \times (x + 5y) + 3y \times (x + 5y)$$

$$= 2x \times x + 2x \times 5y + 3y \times x + 3y \times 5y$$

तृतीय चरण इस प्रकार प्राप्त गुणनफल को आवश्यकतानुसार सरल कर लिखा जाता है अर्थात्

$$= 2x^2 + 10xy + 3xy + 15y^2$$

$$= 2x^2 + 13xy + 15y^2$$

इस प्रकार,

$(2x + 3y) \times (x + 5y) = 2x^2 + 13xy + 15y^2$

गुणनफल प्राप्त होता है।

इसे स्तम्भ विधि से भी हल कर सकते हैं

$$\begin{array}{rl}
x + 5y & \\
\times\ 2x + 3y & \\
\hline
3xy + 15y^2 & \text{(x + 5y) को 3y से गुणा करने पर} \\
2x^2 + 10xy & \text{(x + 5y) को 2x से गुणा करने पर} \\
\hline
2x^2 + 13xy + 15y^2 & \text{ऊपर के दोनों गुणनफल को जोड़ने पर}
\end{array}$$

अत: $(x + 5y) \times (2x + 3y) = 2x^2 + 13xy + 15y^2$

इस प्रकार,

द्विपदों के बीजीय व्यंजकों का गुणनफल

(i) प्रथम बीजीय व्यंजक के पहले पद का द्वितीय बीजीय व्यंजकों के दोनों पदों के गुणनफल अर्थात $(a + b)(c + d)$ ac ad

(ii) प्रथम बीजीय व्यंजक के दूसरे पद का द्वितीय बीजीय व्यंजकों के दोनों पदों के गुणनफल अर्थात् bc bd $(a + b)(c + d)$

(iii) उक्त (i) व (ii) का योगफल होता है अर्थात्

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

ऊर्ध्व-तिर्यक विधि

सूत्र ऊर्ध्व-तिर्यक विधि की सहायता से बीजगणित में गुणा के प्रश्न सरलता से हल हो जाते हैं

उदाहरण 14. $(2x + 1)$ को $(3x + 2)$ से गुणा कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r}
2x + 1 \\
\times \quad 3x + 2 \\
\hline
6x^2 + 7x + 2
\end{array}$$

ऊर्ध्व गुणा | तिर्यक् गुणा कर जोड़िए | ऊर्ध्व गुणा

1. इसमें हासिल नहीं लेना पड़ता अतः उत्तर सीधे बायें से दायें (→) लिख सकते हैं।

2.
$$\begin{array}{r} 2x \\ \times\ 3x \\ \hline 6x^2 \end{array}$$
↑ ऊर्ध्व गुणा

3.
$$\begin{array}{r} 2x+1 \\ \times\ 3x+2 \\ \hline (2x \times 2)+(3x \times 1) \\ = 4x+3x = 7x \end{array}$$
तिर्यक गुणा कर जोड़िए

4.
$$\begin{array}{r} 1 \\ \times\ 2 \\ \hline 2 \end{array}$$
↑ ऊर्ध्व गुणा

कुछ विशेष गुणनफल

उदाहरण 15. (1) प्रथम स्तंभ (इकाई का इकाई से) का ऊर्ध्व गुणा

हल :
$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 21 \\ \hline 483 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times\ 1 \\ \hline 3 \end{array}$$
↑ (इकाई स्थान के नीचे लिखें)

(2) दोनों स्तंभों का (इकाई एवं दहाई स्थान) तिर्यक गुणा कर जोड़िए।

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$
$(2 \times 3)+(2 \times 1)$

$6+2 \quad = 8$ (दहाई स्थान पर लिखिए)

(3) द्वितीय स्तंभ (दहाई का दहाई से) ऊर्ध्वगुणा-

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times\ 2 \\ \hline 4 \end{array}$$
↑ (सैकड़ा स्थान पर लिखिए)

उदाहरण 16. ऊर्ध्व तिर्यक विधि के प्रयोग से हल कीजिए।

हल :
$$\begin{array}{r|r|r} & 2 & 3 \\ \times & 4 & 5 \\ \hline 10 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & \end{array}$$
$= 1035$ उत्तर

चरण (1)
$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ & \times 5 \\ \hline & 5 \\ 1 & \end{array}$$
ऊर्ध्वगुणा (अतिरिक्त अंक आगे)

(हासिल को अतिरिक्त अंक कहते हैं)

चरण (2) $\quad 2 \quad 3$ तिर्यक गुणा कर जोड़िए।

$\quad\quad\quad\quad 4 \quad 5$ (अतिरिक्त अंक हो तो उसे भी जोड़िए)

$(2 \times 5) + (3 \times 4) + 1$ (अतिरिक्त अंक)

$10 \quad + \quad 12 \quad + 1 = 23$

चरण (3) $\quad 2$

$\times 4$ $\quad \uparrow$ ऊर्ध्व गुणा

$8 + 2$ (अतिरिक्त अंक) $= 10$

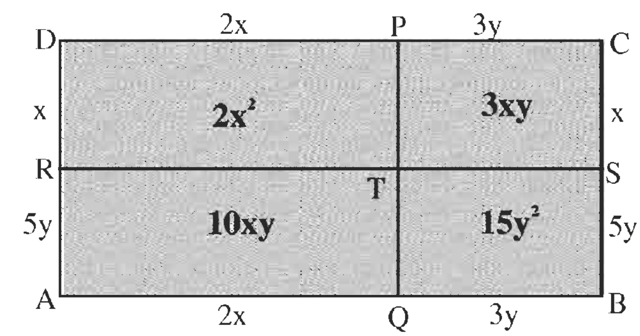
अतः

$$
\begin{array}{r|r|l}
2 & 3 & \\
\times 4 & 5 & \\
\hline
10 & 3 & 5 \\
2 & 1 &
\end{array}
$$

बच्चों को समझाएँ कि उपर्युक्त विधि
$(x+a)\,(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$ पर आधारित है।

ज्यामितीय व्याख्या

हम दो द्विपदी बीजीय व्यंजकों के गुणनफल $(2x+3y)\times(x+5y)$ की ज्यामितीय व्याख्या करते हैं।



एक आयत ABCD को लिया जिसमें एक भुजा $AB = 2x + 3y$ तथा अन्य भुजा $BC = x + 5y$ है। आयत की भुजा AB को बिन्दु Q, AQ तथा QB में विभाजित करता है जिनके लिये $AQ = 2x$ तथा

शिक्षण संकेत : प्रश्न को हल करने में उपर्युक्त चरण लिखने की आवश्यकता नहीं है। हल कीजिए तथा सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखिए।

QB = 3y है। इसी प्रकार भुजा BC में एक बिन्दु S ऐसा है कि BS = 5y और SC = x है।

तब,

आयत ABCD का क्षेत्रफल = आयत AQTR का क्षेत्रफल

+ आयत QBST का क्षेत्रफल

+ आयत TSCP का क्षेत्रफल

+ आयत RTPD का क्षेत्रफल

$= 10xy + 15y^2 + 3xy + 2x^2$

$= 2x^2 + 13xy + 15y^2$

इस प्रकार आयत ABCD का क्षेत्रफल, गुणनफल के परिणाम को सत्यापित करता है।

प्रश्नावली 7.4

1. गुणा कीजिए।

   (i) $(3x + 4)$ और $(2x + y)$ (ii) $(x - 3y)$ और $(x + 2y)$

   (iii) $\frac{3}{2}(p - 5q)$ और $(6p + \frac{1}{3}q)$ (iv) $(1.2x + .7y)$ और $(.3x - y)$

   (v) $(2pq + 3q^2)$ तथा $(3pq + 2q^2)$ (vi) $\left(\frac{1}{8}s + \frac{1}{3}t\right)$ और $(s^2 - t^2)$

   (vii) $(3m^2 + 2mn)$ और $(2m^2 + mn)$

2. नीचे दिये गये बीजीय व्यंजकों का गुणा कीजिए तथा $x = 2$, $y = 1.15$ तथा $z = 0.01$ के लिए प्रत्येक गुणनफल की सत्यता की जाँच कीजिए।

   (i) $27x^2(1 - 3x)$ (ii) $xz(x^2 + y^2)$

   (iii) $z^2(x - y)$ (iv) $(2z - 3x)(5x + 3)$

3. सरल कीजिए।

   (i) $15a^2 - 6a(a - 2) + (3 + 7a)$

   (ii) $(3x^2 + y^2)(\frac{1}{4}x^3 + .5y^3)$

   (iii) $(a - 1)(0.1a^2 + 3)$

(iv) $17x^2 - 16x(2 + 3x) + 12(x^2 - 3^2)$

(v) $\frac{1}{7}x^2(2x + 3) + 102(x - y) + 13(2x - y)$

4. $(x + y)(5x + 7y)$ का गुणनफल ज्ञात कर इसकी ज्यामितीय व्याख्या कीजिए।

5. $(m^2 - 2n)(-3m - 4n^2) + 3m^3$ को सरल करते हुए $m = 2$ तथा $n = 1$ के लिये गुणनफल का सत्यापन कीजिए।

6. $\left(y + \frac{2}{7}y^2\right)$ तथा $(7y - y^2)$ का गुणा कीजिए और $y = 3$ के लिए परिणाम का सत्यापन कीजिए।

ऊर्ध्व तिर्यक विधि से गुणा कीजिए।

(1) $(2x + 2)(x + 1)$ (2) $(3x + 1)(2x - 2)$

(3) $(3y^2 + 2)(2y + 3)$

ऊर्ध्व तिर्यक विधि के प्रयोग से सीधे एक पंक्ति में उत्तर लिखिए।

(1) $\begin{array}{r} 3\,2 \\ \times\ 2\,2 \\ \hline \end{array}$ (2) $\begin{array}{r} 2\,3 \\ \times\ 2\,2 \\ \hline \end{array}$ (3) $\begin{array}{r} 3\,1 \\ \times\ 1\,3 \\ \hline \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} 4\,2 \\ \times\ 2\,1 \\ \hline \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} 5\,3 \\ \times\ 1\,2 \\ \hline \end{array}$ (6) $\begin{array}{r} 2\,3 \\ \times\ 2\,3 \\ \hline \end{array}$

5.4 किसी द्विपद और किसी त्रिपद का गुणन

किसी द्विपदी बीजीय व्यंजक का अन्य द्विपदी बीजीय व्यंजक के साथ गुणन की तरह ही द्विपदी बीजीय व्यंजक का त्रिपदी बीजीय व्यंजक के साथ गुणा एक उदाहरण से समझते हैं

उदाहरण 17. $(x + y)$ और $(x^2 + xy + y^2)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : $(x + y)$ द्विपदी बीजीय व्यंजक का त्रिपदी व्यंजक $(x^2 + xy + y^2)$ के साथ निम्नानुसार है।

प्रथम चरण $(x + y)$ बीजीय व्यंजक को प्रथम पद का गुणा त्रिपदीय बीजीय व्यंजक $(x^2 + xy + y^2)$ के प्रत्येक पद से किया जाता है। ये पद

x^3, x^2y और xy^2 मिलेंगे

$$(x + y)\,(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 \qquad x^2y \qquad xy^2$$

द्वितीय चरण $(x + y)$ बीजीय व्यंजक का द्वितीय पद का गुणा त्रिपदीय बीजीय व्यंजक (x^2+xy+y^2) के प्रत्येक पद से किया जाता है ये पद x^2y, xy^2 और y^3 मिलेंगे।

$$(x + y)\,(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^2y \qquad xy^2 \qquad y^3$$

तृतीय चरण इस प्रकार प्रथम चरण से प्राप्त तीन पदों एवं द्वितीय चरण से प्राप्त तीन पदों को जोड़कर, आवश्यकतानुसार सरल कर गुणनफल प्राप्त किया जाता है। अतः

$$\begin{aligned}(x+y)\,(x^2+xy+y^2) &= x^3+x^2y + xy^2 + x^2y + xy^2 + y^3\\ &= x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3\end{aligned}$$

अब $(x+y)\,(a+b+c)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

द्विपदी बीजीय व्यंजक का त्रिपदीय बीजीय व्यंजक के साथ गुणनफल

(i) द्विपदी बीजीय व्यंजक के पहले पद का त्रिपदी बीजीय व्यंजक के प्रत्येक पद के साथ गुणनफल अर्थात्

$$(x + y)\,(a + b + c)$$

$$xa \qquad xb \qquad xc$$

तथा

(ii) द्विपदी बीजीय व्यंजक के दूसरे पद का त्रिपदी बीजीय व्यंजक के प्रत्येक पद के साथ गुणनफल अर्थात

$$ya \qquad yb \qquad yc$$

$$(x + y)\,(a + b + c)$$

(iii) उक्त (i) व (ii) का योगफल अभीष्ट गुणनफल होता है अर्थात

$$ya \qquad yb \qquad yc$$

$$(x + y)\,(a + b + c) = xa + xb + xc + ya + yb + yc$$

$$xa \qquad xb \qquad xc$$

प्रश्नावली 7.5

निम्नलिखित के गुणनफल ज्ञात कीजिए।

1. $2x$ और $(x - 2y + 3z)$

2. $(2x - y)$ और $(2x + 3y + z)$

3. $(3xy - y^2)$ और $(5x^2 + 3xy + 7xz)$

4. $\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}y^2z\right)$ और $(4x^2y + x^3yz - 2x^3y^3)$

5. $\left(\frac{3}{2}x - 6y\right)$ और $(x^4 - y^4 + 5xyz)$

6. $[2m + (-n)]\,[-3m + (-5)]$

सरल कीजिए।

7. $\frac{1}{3}(6x^2 + 15y^2)\ (6x^2 - 15y^2 + 2z)$

8. $9x^4\ (2x^3 - 5x^4) + 5x^6\ (x^4 - 3x^2 + 5)$

9. $lm^2\ (l + m + n) - l^2n^2\ (lm + mn + nl)$

10. $(m^2 + n^2 + p^2)\ (p^2 - n^2)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए तथा इसे $m = 2,\ n = 1,\ p = 1$ के लिए सत्यापित कीजिए।

5.5 मानक सर्वसमिकाएँ

हम द्विपदी बीजीय व्यंजकों के गुणनफल के एक उदाहरणों का अवलोकन करते हैं।

उदाहरण 18. $(2x + 3y)$ का गुणा $(2x + 3y)$ में कीजिए।

हल : $(2x + 3y)\ (2x + 3y) = 2x.\ 2x + 2x.3y + 3y.2x + 3y.3y$

या, $(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 6xy + 6yx + 9y^2$

या, $= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

उक्त उदाहरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(6xy) + (3y)^2$

या, $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2.\ (2x)\ (3y) + (3y)^2$

इसी प्रकार

$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b)$

$= a(a + b) + b(a + b)$ [ab = ba]

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

अत: यह संबंध एक सर्वसमिका है

$$\boxed{\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\\ &\text{या}\\ (a + b)^2 &= a^2 + b^2 + 2ab\end{aligned}}$$

उदाहरण 19. $(x + 2y)$ और $(x - 2y)$ का गुणा कीजिए।

हल : $(x + 2y)(x - 2y) = x.(x - 2y) + 2y(x - 2y)$

$= x.x - x.2y + 2y.x - 2y.2y$

$= x^2 - 2xy + 2xy - 4y^2$ [xy = yx]

$= x^2 - 4y^2$

$= x^2 - (2y)^2$

इसी प्रकार

$(a + b)(a - b)$ $a.(a - b) + b(a - b)$

$= a.a - ab + ba - b.b$ [ab = ba]

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

अत: यह संबंध एक सर्वसमिका है।

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

उदाहरण 20. $(3x - y)$ का गुणा $(3x - y)$ से कीजिए।

हल : $(3x - y)(3x - y) = 3x.(3x - y) - y(3x - y)$

$(3x - y)^2 = 3x.3x - 3x.y - y3x + y.y$

$= 9x^2 - 3xy - 3xy + y^2$

$= 9x^2 - 6xy + y^2$

उक्त उदाहरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$(3x - y)^2 = (3x)^2 - 2.(3x)(y) + (y)^2$

इसी प्रकार,

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

$= a.(a - b) - b(a - b)$

$= a.a - ab - ba + b.b$

$= a^2 - ab - ab + b^2$ [ab = ba]

$= a^2 - 2ab + b^2$

अत: यह संबंध एक सर्वसमिका है

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

या

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

उदाहरण 21. सर्वसमिका का प्रयोग कर निम्न का मान ज्ञात कीजिए।

(i) 102^2 (ii) 49^2 (iii) 8.2×7.8

हल : (i) $102^2 = (100 + 2)^2$

$= (100)^2 + 2. \times 100 \times 2 + (2)^2$

[$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का प्रयोग]

$= 10000 + 400 + 4$

$= 10404$

(ii) $49^2 = (50 - 1)^2$

$= (50)^2 - 2 \times 50 \times 1 + (1)^2$

[$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का प्रयोग]

$= 2500 - 100 + 1$

$= 2401$

(iii) $8.2 \times 7.8 = (8 + 0.2)\ (8 - 0.2)$

$= (8)^2 - (.2)^2$

[$(a - b)\ (a + b) = a^2 - b^2$ का प्रयोग]

$= 64 - 0.04$

$= 63.96$

वर्ग करने की एक अन्य विधि

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ सूत्र का चिह्न हटाकर दो अंकों की संख्या का वर्ग करने में प्रयोग कर सीधा उत्तर लिखा जा सकता है।

उदाहरण 22. 72^2 ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|c|c} (a/b)^2 = a^2 & 2ab & b^2 \\ (7/2)^2 = 51 & 8 & 4 \\ 2 & & \end{array}$$

$72^2 = 5184$

72^2 में $a = 7,\ b = 2$

प्रश्न को दायें से बायें हल करेंगे।

चरण 1. $b^2 = 2^2 = 4$

दायें से प्रथम खण्ड में लिखें।

चरण 2. $2ab = 2 \times 7 \times 2 = 28$

दो अंकों के गुणा का दुगुना कर, 28 में से 8 मध्य में रखें तथा 2 हासिल को अगले खण्ड में जोड़ेंगे।

चरण 3. $a^2 = 7^2 = 49$

$49 + 2$ हासिल $= 51$

51 को बायें खण्ड में रखें।

इस सर्वसमिका के प्रयोग से दो अंकों की संख्या का वर्ग सीधे एक पंक्ति में लिख सकते हैं।

शिक्षक संकेत : सामान्य विधि से संबंध बताते हुए बच्चों को समझाए व इसकी उपयोगिता पर चर्चा करें।

कुछ विशेष गुणनफल

12×18 हल करें

$(x + a)(x + b) \quad = x^2 + (a + b)x + ab$ पर आधारित

$(10+2)\ (10+8) \quad = 10^2 + (2+8)10 + 2 \times 8$

$= 200 + 16$

जब गुण्य, गुणक की इकाइयों का योग 10 हो तथा दहाइयों के अंक समान हों।

उदाहरण 23. 12×18 हल कीजिए

हल : 12×18

$$\begin{array}{c|c} 2 & 16 \end{array}$$

$= 216$ उत्तर

(1) उत्तर का दायां भाग $2 \times 8 = 16$ (इकाइयों का गुणा)

(2) उत्तर का बायां भाग $=$ (दहाई का एकाधिक $\times$ दहाई)

$= 2 \times 1 = 2$

(3) इकाइयों का योग (आधार संख्या) 10 है। 10 में एक शून्य है। अतः उत्तर के दायें भाग में दो अंक रखना होगा।

उदाहरण 24. 31×39 हल कीजिए

हल : 31×39

$$\begin{array}{c|c} 12 & 09 \end{array}$$

$= 1209$ उत्तर

(1) उत्तर का बायां भाग= (दहाई $\times$ दहाई का एकाधिक)

$= 3 \times 4 = 12$

(2) उत्तर का दायां भाग = (इकाई $\times$ इकाई)

$= 1 \times 9 = 09$

यहाँ 9 के पहले (बायें) शून्य रखना होगा क्योंकि इकाइयों का जोड़ 10 है अर्थात् आधार 10 है। दस में एक शून्य है अतः उत्तर के दायें भाग में दो अंक होने चाहिए।

उदाहरण 25. गुणा कीजिए।

193×197

हल :

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{193 \times 197} \\ \hline 380 & 21 \end{array}$$

यहाँ इकाइयों का योग दस है तथा शेष समूह 19 समान है।

(1) उत्तर का बायां भाग $= 19$ का एकाधिक $\times 19$

$= 20 \times 19 = 380$

(2) उत्तर का दायां भाग $=$ इकाई $\times$ इकाई

$= 3 \times 7 = 21$

उदाहरण 26. 304×306 हल कीजिए

हल :

$$\begin{array}{l|l} \multicolumn{2}{l}{304 \times 306} \\ \hline 930 & 24 \end{array}$$

$= 93024$ उत्तर

(1) उत्तर का बायां भाग $= 30$ का एकाधिक $\times 30$

$= 31 \times 30 = 930$

(2) उत्तर का दायां भाग $=$ इकाई $\times$ इकाई

$= 4 \times 6 = 24$

कुछ विशेष गुणनफल जो संख्यों आधार 10, 100.... आदि के निकट होती है उनका गुणा करने हेतु इस विधि का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 27. 104 हल कीजिए

$\times 108$

हल :

$$\begin{array}{r|l} 104+04 & \\ \times 108+08 & \\ \hline 112 & 32 \end{array}$$

1. आधार 100 है। आधार में दो शून्य है उत्तर के दायें भाग में दो अंक रहेंगे। +4 एवं +08 आधार से विचलन है।
2. उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणा

   $= 04 \times 08 = 32$
3. उत्तर का बायाँ भाग = एक संख्या + दूसरी का विचलन

   $= 104 + 08 = 112$

   या $= 108 + 04 = 112$

   $= 104 \times 108 = 11232$ उत्तर

शिक्षक संकेत : सामान्य विधि से संबंध बताते हुए बच्चों को समझायें व इसकी उपयोगिता पर चर्चा करें।

उदाहरण 28. $\begin{array}{l} 103 + 03 \\ \times\ 101 + 01 \\ \hline 104 \mid 03 \end{array}$ हल कीजिए

हल : (1) आधार 100 है तथा आधार से संख्याओं का विचलन क्रमशः +03 एवं +01 है।

(2) उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणा

$= 3 \times 1 = 3$

(3) दायें भाग में दो अंक रखना होगा क्योंकि आधार में दो शून्य है अतः 3 के सामने शून्य रखा गया है।

(4) उत्तर का बायां भाग $= 103 + 01 = 104$

या $= 101 + 03 = 104$

अर्थात् $= 10403$ उत्तर

उदाहरण 29. $\begin{array}{l} 92 \ \ - 08 \\ \times\ 107 + 07 \\ \hline 99 \mid \overline{56} \end{array}$ हल कीजिए

हल : (1) आधार = 100 है तथा आधार से 92 का विचलन – 08 है अर्थात् 8 कम है। 107 का आधार 100 से विचलन +07 है।

(2) उत्तर का दायां भाग = विचलनों का गुणनफल

$= (-8) \times (+07) = -56 = \overline{56}$

(3) उत्तर का बायां भाग $= 92 + 7 = 99$

या $= 107 + (-8) = 99$

अर्थात् $= 92 \times 107$

$= 99\overline{56} = 9900 - 56$

$= 9844$ उत्तर

उपर्युक्त का आधार समझें

$92 \times 107 = (100 - 8)(100 + 7)$

$= 100^2 + (-8 + 7)\,100 + (-8) \times 7$

$= 10000 - 100 - 56$

$= 9900 - 56 = (99\,\overline{56})$

$= 9800 + (100 - 56)$

$= 9844$

प्रश्नावली 7.6

सर्वसमिकाओं के प्रयोग कर गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(1) $(a + 2)(a + 2)$ (2) $(2x + y)(2x - y)$

(3) $(2a + 3b)(2a + 3b)$ (4) $(5x - 4y)(5x - 4y)$

(5) $(l + m)(l - m)$ (6) $\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y\right)$

(7) $\left(\frac{8}{13}m - \frac{2}{3}n\right)\left(\frac{8}{13}m + \frac{2}{3}n\right)$ (8) $(7x - 2y)(7x - 2y)$

सर्वसमिकाओं का प्रयोग कर मान ज्ञात कीजिए।

(9) 32^2 (10) 59^2 (11) 93^2

(12) 71^2 (13) $51^2 - 49^2$ (14) $132^2 - 122^2$

(15) 78×82 (16) 58×62

सरल कीजिए।

(17) $(2x + 5)^2 + (2x - 5)^2$

(18) $(150m + 11n)^2 - (150m - 11n)^2$

(19) $\left(\frac{2}{3}m^2 + \frac{3}{8}n^2\right)\left(\frac{2}{3}m^2 - \frac{3}{8}n^2\right)$

(20) $(2l + 5m)^2 + (2l - 5m)^2$

(21) $(2lm + 3mn)^2 - (2lm - 3mn)^2$

(22) यदि $6x = 25^2 - 17^2$ हो तो x का मान ज्ञात कीजिए।

(23) यदि $8a = 35^2 - 27^2$ हो तो a का मान ज्ञात कीजिए।

(24) P का मान ज्ञात कीजिए यदि

(i) $98^2 - 88^2 = 4p$

(ii) $536^2 - 136^2 = 25p$

(25) हल कीजिए (सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण)

(i) 34×36 (ii) 42×48 (iii) 102×108

(iv) 81×89 (v) 204×206 (vi) 292×298