पाठ 8
बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्ड

आइए सीखें-

- दो, तीन अथवा अधिक पदों से एक सार्व गुणनखण्ड लेकर गुणनखण्ड।
- पदों के समूह में से एक सार्व गुणनखण्ड निकालकर गुणनखण्ड।
- तीनों सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्ड।

8.1 गुणनखण्ड

पिछली कक्षाओं में हम किसी संख्या का गुणनखण्ड निकालना सीख चुके हैं। जब हम किसी संख्या को दो या तीन संख्याओं के गुणा के रूप में लिखते हैं तो प्रत्येक संख्या दी गई संख्या का एक गुणनखण्ड होती है। निम्नलिखित उदाहरण से हम समझने का प्रयास करते हैं।

42 को गुणा के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$42 = 2 \times 3 \times 7$

अतः हम कह सकते हैं कि 2, 3, 7, 42 के गुणनखण्ड हैं।

किसी संख्या में जिन संख्याओं का पूरा-पूरा भाग चला जाता है, वे संख्याएँ उस संख्या का एक गुणनखण्ड होती हैं। जैसे 42 में 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 का पूरा-पूरा भाग चला जाता है, अतः ये सभी संख्याएँ 42 का एक गुणनखण्ड है।

8.2 बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड

जिस प्रकार किसी संख्या के गुणनखण्ड निकालने के लिए हम उस संख्या को दो या तीन संख्याओं के गुणा के रूप में लिखते हैं। उसी प्रकार बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड निकालने के लिए उस व्यंजक को गुणा के रूप में लिखेंगे।

इसको समझने के लिए एक सरल एकपदीय व्यंजक 5ab लेते हैं।

5ab को गुणा के रूप में निम्नानुसार लिख सकते हैं

$5ab = 5ab \times 1$ $\quad\therefore$ 1 एवं 5ab दोनों 5ab के गुणनखण्ड हैं।

$5ab = 5a \times b$ $\quad\therefore$ 5a एवं b दोनों 5ab के गुणनखण्ड हैं।

$5ab = 5 \times ab$ $\quad\therefore$ 5, ab दोनों 5ab के गुणनखण्ड हैं।

$5ab = 5 \times a \times b$ $\quad\therefore$ 5, a, b तीनों 5ab के गुणनखण्ड हैं।

$5ab = a \times 5b$ $\quad\therefore$ a, 5b दोनों 5ab के गुणनखण्ड हैं।

किसी बीजीय व्यंजक को गुणनफल के रूप में व्यक्त करने पर गुणनफल का प्रत्येक व्यंजक दिए गए व्यंजक का गुणनखण्ड होता है।

उदाहरण 1. $3xy$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $3xy$ को हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

$3xy = 3 \times x \times y$

अत: 3, x एवं y, $3xy$ के गुणनखण्ड हैं।

उदाहरण 2. $4x^2y$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $4x^2y$ को हम गुणा के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं।

$4x^2y = 4 \times x^2 \times y$

अत: 4, x^2 एवं y तीनों $4x^2y$ के गुणनखण्ड हैं।

8.3 सार्व गुणनखण्ड

सार्व गुणनखण्ड समझने के लिए हम निम्नलिखित उदाहरण को देखते हैं।

उदाहरण 3. $3xy$ एवं $7x$ के सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $3xy$ के सभी गुणनखण्ड $\underline{1}, 3, \underline{x}, y, 3x, 3y, xy, 3xy$

$7x$ के सभी गुणनखण्ड $\underline{1}, 7, \underline{x}, 7x$

हम देखते हैं कि $3xy$ और $7x$ दोनों में गुणनखण्ड 1 एवं x है। अत: $3xy$ और $7x$ के सार्व गुणनखण्ड 1 और x हैं।

चूँकि 1 सभी का गुणनखण्ड होता है इसलिए इसे हम नहीं लिखते हैं। इसलिए $3xy$ और $7x$ का सार्व गुणनखण्ड x है।

ऐसा व्यंजक जो दिए गए सभी व्यंजकों का एक गुणनखण्ड होता है सार्व गुणनखण्ड कहलाता है।

एकपदी व्यंजकों के सार्व गुणनखण्ड इस विधि से भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

उदाहरण 4. $9xy^2$, $9xy^2z$, $18x^3y^3$ के सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : हम इन व्यंजकों को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$9xy^2 = 3 \times 3 \times x \times y \times y$

$9xy^2z = 3 \times 3 \times x \times y \times y \times z$

$18x^3y^3 = 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times x \times y \times y \times y$

गुणनखण्ड $3 \times 3 \times x \times y \times y$ सभी व्यंजकों में है

इसलिए, $9xy^2$, $9xy^2z$, $18x^3y^3$ का सार्व गुणनखण्ड $9xy^2$ होगा।

सार्व गुणनखण्ड $= 9xy^2$, उत्तर

हम देखते हैं कि 9 संख्यात्मक गुणांकों 9, 9, 18 का महत्तम समापवर्तक है। सार्व गुणनखण्ड में केवल वही अक्षर संख्याएँ आई हैं, जो तीनों व्यंजकों में हैं एवं उनकी घातांक तीनों व्यंजकों में न्यूनतम है।

अत: सार्व गुणनखण्ड निकालने के लिए एक व्यवहारिक नियम इस प्रकार बना सकते हैं :

चरण 1 : दिये गये एकपदीय व्यंजकों के गुणांकों का महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करते हैं।

चरण 2 : दिये गये एकपदीय सभी व्यंजकों में आने वाली प्रत्येक अक्षर संख्या का न्यूनतम घातांक ज्ञात कर, उस अक्षर संख्या के ऊपर लगाकर लिखते हैं।

चरण 3 : चरण 1 से प्राप्त संख्या का गुणा चरण 2 से प्राप्त अक्षर संख्या से कीजिए यही सार्व गुणनखण्ड होगा।

सार्व गुणनखण्ड निकालकर गुणनखण्ड करना

उदाहरण 5. $6xy^3 + 15x^2y^2$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया द्विपद $6xy^3$ और $15x^2y^2$ का योगफल है।

अत: इनका सार्व गुणनखण्ड निकालने के लिए ऊपर दिये गये नियम का प्रयोग करेंगे।

चरण 1 : $6xy^3$, $15x^2y^2$ के गुणांकों 6 एवं 15 का महत्तम समापवर्तक 3 होगा।

चरण 2 : दोनों एकपदी व्यंजकों में x एवं y अक्षर संख्याएँ हैं। इसलिए दोनों पदों में से इनकी न्यूनतम घात को देखेंगे।

दोनों पदों में x की न्यूनतम घात 1 एवं y की न्यूनतम घात 2 है, इसलिए xy^2 दोनों का एक गुणनखण्ड होगा।

चरण 3 : (चरण 1 से प्राप्त संख्या) $\times$ (चरण 2 से प्राप्त संख्या)

$$= 3 \times x \times y^2$$

अत: दोनों पदों का सार्व गुणनखण्ड $3xy^2$ होगा। अब दिये गये द्विपद को गुणा के रूप में इस प्रकार लिखेंगे।

$$\begin{aligned} 6xy^3 + 15x^2y^2 &= 3xy^2 \times 2y + 3xy^2 \times 5x \\ &= 3xy^2 \times (2y + 5x) \end{aligned}$$

अत: दिये गये द्विपद के सार्व गुणनखण्ड

$= 3xy^2 (2y + 5x)$, उत्तर

उदाहरण 6. $2ab^3 + 18a^2b^3 + 16a^3b^2$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

इस व्यंजक में तीन पद $2ab^3$, $18a^2b^3$ और $16a^3b^2$ है।

चरण 1 : व्यंजक के पदों के गुणांक 2, 18, 16 हैं इनका म.स.व. 2 है।

चरण 2 : तीनों पदों में आने वाली अक्षर संख्याएँ a और b है।

तीनों पदों में a की न्यूनतम घात एक है इसलिए a लेंगे।

तीनों पदों में b की न्यूनतम घात 2 है इसलिए b^2 लेंगे।

चरण 3 : (चरण 1 से प्राप्त संख्या) × (चरण 2 से प्राप्त अक्षर संख्या)

$= 2 \times ab^2$

$= 2ab^2$

अत: दिये गये तीन पदों का सार्व गुणनखण्ड $2ab^2$ होगा।

हम व्यंजकों को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$2ab^3 + 18a^2b^3 + 16a^3b^2 = 2ab^2 \times b + 2ab^2 \times 9ab + 2ab^2 \times 8a^2$$

$$= 2ab^2 \times (b + 9ab + 8a^2)$$

इस प्रकार दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड $2ab^2$ और $(b + 9ab + 8a^2)$ होंगे।

संक्षिप्त विधि

$2ab^3 + 18a^2b^3 + 16a^3b^2$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $2ab^3 + 18a^2b^3 + 16a^3b^2$

$= 2ab^2 (b + 9ab + 8a^2)$

तीनों पदों के संख्यात्मक गुणांक का महत्तम समापवर्तक 2 है एवं दोनों बीज a एवं b की न्यूनतम घात क्रमश: 1 एवं 2 है, इसलिए $2ab^2$ सार्व गुणनखण्ड होगा। इसका भाग दिये गये व्यंजक में देकर शेष को गुणा कर कोष्टक में रख देते हैं।

प्रश्नावली 8.1

1. निम्नलिखित एकपदीय व्यंजकों के सार्व गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $5x^2, 10xy$	(ii) $12p^2q, 20pq^2$
(iii) $3a^2bc, 18ab^2c$	(iv) $2a^3bc^2, 8bc^2$
(v) $3x^2, 15x^3y, 27x$	(vi) $11xyz, 13xy^2z^2, 17x^2yz$

2. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $3x + 21$	(ii) $5q - 25$
(iii) $x^2 + 6x$	(iv) $7x + 14x^2$
(v) $3a^2b + 9ab^2$	(vi) $8p^2 + 2p$
(vii) $-13m + 26m^2$	(viii) $24m^2n + 10mpn$

3. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $3a^2 - 9a^4 - 15a^3$	(ii) $5x^2y + 25y^3x + 30x^3y^2$
(iii) $4m^2n + 16n^2m + 20mn$	(iv) $xyz + xy^3 + x^3y$

8.4 पदों के पुनः समूहन द्वारा गुणनखण्ड ज्ञात करना

अभी हमने सभी पदों में से सार्व गुणनखण्ड को बाहर निकालकर गुणनखण्ड निकालना सीखा है। परन्तु कभी-कभी ऐसा संभव नहीं होता, ऐसी स्थिति में हम व्यंजक के पदों का फिर से समूहन कर प्रत्येक समूह में से एक सार्व गुणनखण्ड बाहर निकालते हैं।

उदाहरण 7. $2ab + 2a + 5b + 5$

हल : दिये गये व्यंजक में से कोई सार्व गुणनखण्ड नहीं निकाला जा सकता इसलिए हम पदों को इस प्रकार समूहित करते है जिससे एक समूह में से एक सार्व गुणनखण्ड प्राप्त हो जाए।

$(2ab + 2a) + (5b + 5)$

पहले समूह में से 2a एवं दूसरे समूह से 5 को बाहर निकाला जा सकता है। अत: व्यंजक को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$= 2a\,(b + 1) + 5\,(b + 1)$

अब हम देखते हैं कि दोनों समूह में $(b + 1)$ सार्व गुणनखण्ड हैं। इसलिए उसे बाहर लेकर इस प्रकार लिखेंगे।

$= 2a \times (b + 1) + 5 \times (b + 1)$

$= (b + 1)(2a + 5)$

अत: दिये गये व्यंजक $2ab + 2a + 5b + 5$ के गुणनखण्ड $(b+1)$ एवं $(2a+5)$ होंगे। **उत्तर**

उदाहरण 8. व्यंजक $2xy + 10x + y + 5$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : इस बीजीय व्यंजक के दो-दो के जोड़े बनाकर सार्व गुणनखण्ड लेने पर

$(2xy + 10x) + (y + 5)$

$= 2x \times (y + 5) + 1 \times (y + 5)$

$= (y + 5)(2x + 1)$

इसमें पहले एवं तीसरे पद में y एक सार्व गुणनखण्ड लेकर व दूसरे और चौथे पद में 5 सार्व गुणनखण्ड लेकर भी बना सकते हैं।

$$\begin{aligned} 2xy + 10x + y + 5 &= (2xy + y) + (10x + 5) \\ &= y \times (2x + 1) + 5 \times (2x + 1) \\ &= (2x + 1)(y + 5) \end{aligned}$$

अत: दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड $(2x + 1)$ एवं $(y + 5)$ होंगे।

हम देखते हैं कि इस प्रकार समूहित करने पर भी गुणनखण्ड वही $(2x + 1)$ एवं $(y + 5)$ होंगे।

प्रश्नावली 8.2

गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

1. $2xy + 12 + 3y + 8x$
2. $2x^2 + 2xy + 3y + 3x$
3. $ax^2 + by + ax + bxy$
4. $2ax - 21b + 3bx - 14a$
5. $3p^2 - qr - 3pq + pr$
6. $ax + bx + cy + cx + ay + by$

सर्वसमिकाओं के सहायता से गुणनखण्ड ज्ञात करना

हम पूर्व में तीन सर्वसमिकाओं के विषय में सीख चुके हैं। ये तीन सर्वसमिकाएँ निम्नलिखित हैं

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

निम्नलिखित बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड निकालने का प्रयास करते हैं।

(i) $x^2 + 8x + 16$ (ii) $16m^2 + 9n^2 - 24mn$

(iii) $9x^2 - 49$

हम देखते हैं कि इन व्यंजकों के पदों में न तो कोई सार्व गुणनखण्ड है, और न ही इनके पदों को हम समूहन बनाकर गुणनखण्ड कर पा रहे हैं। ऐसी स्थिति में हम सर्वसमिकाओं का प्रयोग कर गुणनखण्ड निकालते हैं।

(i) $x^2 + 8x + 16$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

$x^2 + 8x + 16$ को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2 \times x \times 4 + (4)^2$

सर्वसमिका $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ की सहायता से।

$= (x + 4)^2$

$= (x + 4)\ (x + 4)$

अतः दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड $(x + 4)\ (x + 4)$ होंगे।

(ii) $16m^2 + 9n^2 - 24mn$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

$16m^2 + 9n^2 - 24mn$ के गुणनखण्ड निकालने के लिए हम इस व्यंजक को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$16m^2 + 9n^2 - 24mn = (4m)^2 + (3n)^2 - 2 \times 4m \times 3n$

सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ की सहायता से।

$= (4m - 3n)^2$

$= (4m - 3n)\ (4m - 3n)$

अतः दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड $(4m - 3n), (4m - 3n)$ होंगे।

(iii) $9x^2 - 49$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

$9x^2 - 49$ के गुणनखण्ड निकालने के लिए हम व्यंजक को इस प्रकार लिखते हैं।

$9x^2 - 49 = (3x)^2 - (7)^2$ **सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ की सहायता से**

$= (3x + 7)\ (3x - 7)$

अत: दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड $(3x + 7)$ एवं $(3x - 7)$ होंगे।

गुणनखण्ड के उत्तर की जाँच करने की विधि

'गुणनखण्डों के गुणांकों के योग का गुणनफल गुणनफल, के गुणांकों के योग के बराबर होता है। इस सिद्धांत को संकेतों में इस प्रकार लिख सकते हैं।

योग का गुणनफल (गुणनखण्डों में) = गुणनफल का योग

उदाहरण $(x + 7)(x + 9) = x^2 + 16x + 63$

विधि (1) जाँच $(1 + 7)(1 + 9) = (1+16 + 63)$

$$8 \times 10 = 80$$

$$80 = 80$$

विधि (2) बीजांक द्वारा

व्यंजक के गुणांकों का बीजांक = गुणनखण्डों के गुणांकों के बीजांकों के गुणनफल का बीजांक

$$x^2 + 16x+63 = (x+7)(x+9)$$

$$1 + 16 +63 = (1+7)(1+9)$$

$$80 = 8 \times 10$$

$$80 = 80$$

$$8 = 8$$

दोनों ओर बीजांक बराबर है अतः उत्तर सही है।

सर्वसमिकाओं पर आधारित कुछ विशेष प्रश्न

उदाहरण 9. $x^2 +z^2 - 2xz - y^2$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $x^2 + z^2 - 2xz - y^2$ को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$x^2 + z^2 - 2xz - y^2 = (x^2 + z^2 - 2xz) - y^2$

$= (x - z)^2 - (y)^2$ **(सर्वसमिका $a^2-b^2 = (a + b)(a - b)$ की सहायता से)**

$= [(x - z) + y] [(x - z) - y]$

$= (x - z + y) \times (x - z - y)$ **उत्तर**

उदाहरण 10. $xa^4 - xb^4$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : गुणनखण्ड करने के लिए सबसे पहले सार्व गुणनखण्ड निकालते हैं। द्विपद के दोनों पदों में x सार्वगुणनखण्ड है। अतः

$xa^4 - xb^4 = x(a^4 - b^4)$

$= x[(a^2)^2 - (b^2)^2]$

$= x(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$ **(सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ के प्रयोग से)**

$= x(a^2 + b^2)[(a)^2 - (b)^2]$ (उपरोक्त सर्वसमिका के आधार पर)

$= x(a^2 + b^2)(a + b)(a - b)$ उत्तर

प्रश्नावली 8.3

(1) निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $x^2y + xy + 4xy + 4y$ (ii) $3xy + 2y + 9x + 6$

(iii) $3ab + 2b - 6a - 4$ (iv) $18pq + 6q - 9p - 3$

(2) सर्वसमिकाओं का उपयोग कर गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $p^2 + 4p + 4$ (ii) $25m^2 - n^2$

(iii) $4a^2 - 8a + 4$ (iv) $9x^2 + 30x + 25$

(v) $x^2y^2 - 25$ (vi) $121m^2 - 88mn + 16n^2$

(vii) $49p^2 - 64$ (viii) $49x^2 + 70xy + 25y^2$

(ix) $p^2 + p + \frac{1}{4}$ (x) $(x + 2y)^2 - 16z^2$

(xi) $4a^2 + b^2 - 4ab$ (xii) $81p^2q^2 - 25r^2$

(3) गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $(m^2 + n^2 - 2mn) - y^2$ (ii) $36l^2 + m^2 + 12lm - 25n^2$

(iii) $ap^2 + bp^2 + bq^2 + aq^2$ (iv) $xy + y + x + 1$

(4) निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $147x^2 - 48y^2$ (ii) $x^4 - y^4$

(iii) $m^4 - 256$ (iv) $x^4 - (y + z)^4$