पाठ 15
पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

आइए सीखें

- त्रिविमीय आकृतियों के अंतर्गत तीन प्रकार के ठोस-लम्ब वृत्तीय बेलन, लम्ब वृत्तीय, शंकु एवं गोले की अवधारणा को समझना।
- उपर्युक्त आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात करना।
- पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन के सूत्रों की सहायता से आंकिक प्रश्नों को हल करना।

पिछली कक्षा में हम पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन की संकल्पना से परिचित हो चुके हैं। हम त्रिविमीय आकृतियों घनाभ एवं घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल के मात्रक का ज्ञान भी प्राप्त कर चुके हैं। घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल का मात्रक, वर्ग मात्रक तथा घन के पृष्ठीय क्षेत्रफल का मात्रक भी वर्ग मात्रक होता है।

हम सीख चुके हैं

पृष्ठीय क्षेत्रफल प्रत्येक ठोस (त्रिआयामी) पदार्थ में सतह होती है जिसे हम पृष्ठ कहते हैं। पृष्ठीय क्षेत्रफल का अर्थ वस्तु के समस्त पृष्ठों के कुल क्षेत्रफल से है।

आयतन आकाश (space) में कोई ठोस जितना स्थान घेरता है उसके परिमाण को उस ठोस का आयतन कहते हैं।

किसी खोखली वस्तु में जितने आयतन का पदार्थ समाता है, वह आयतन उस खोखली वस्तु की धारिता कहलाती है। 1000 सेमी^{3} आयतन वाले बर्तन की धारिता 1 लीटर होती है।

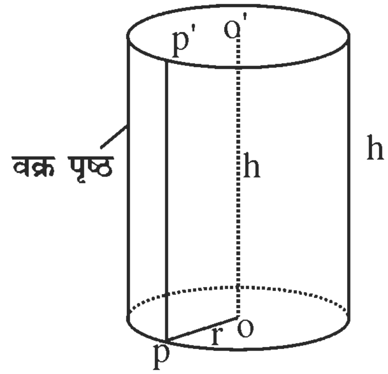
इस अध्याय में हम लम्ब वृत्तीय बेलन, लम्ब वृत्तीय शंकु एवं गोले की अवधारणा को समझेंगे। साथ ही इन आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल व आयतन ज्ञात करेंगे। चूंकि इन ठोस वस्तुओं का पृष्ठ प्राय: वक्रीय होता है, इसलिए हम इनके पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए एक तुल्य समतलीय क्षेत्र ज्ञात कर संबंधित वक्रीय पृष्ठों के क्षेत्रफल निकालेंगे।

अब हम वक्रीय पृष्ठ वाले तीन ठोसों (बेलन, शंकु व गोला) के बारे में अध्ययन करेंगे।

15.1 लम्ब वृत्तीय बेलन

दैनिक जीवन में मिलने वाली कुछ ऐसी वस्तुएँ हैं जो बेलनाकार हैं। घर में रखे डिब्बे, रोटी बनाने के बेलन का बीच का भाग, तार, पानी का पाइप, रोलर आदि इसके उदाहरण हैं। ये हमारे मस्तिष्क में लम्ब वृत्तीय बेलन का आभास देती हैं, जो ज्यामितीय आकृति हैं।

चित्र में एक लम्ब वृत्तीय बेलन दिखाया गया है (आकृति 15.1)। इसके दो सिरे समतल हैं, जो वृत्तीय आकार के हैं। ये दोनों वृत्तीय क्षेत्र समांतर और सर्वांगसम हैं। इनमें से प्रत्येक सिरा बेलन का एक आधार (base) हो सकता है। दोनों समतल सिरों के केंद्रों को मिलाने वाला रेखाखण्ड OO' बेलन की अक्ष कहलाती है। OO' दोनों समतल सिरों में से प्रत्येक में स्थित O या O' से होकर जाने वाले सभी रेखाखण्डों पर लम्ब है। अक्ष OO' इन दोनों वृत्तीय सिरों पर लम्ब है। इसी कारण, हम इस आकृति को **लम्बवृत्तीय बेलन** (right circular cylinder) कहते हैं।



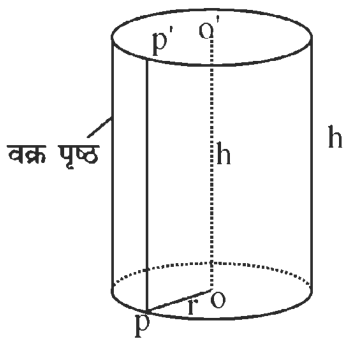
आकृति 15.1

यहाँ एक लम्ब वृत्तीय बेलन से हमारा आशय एक खोखले लम्ब वृत्तीय बेलन से है। यह आकाश (space) में बनी वह त्रिविमीय आकृति है, जो बेलन की केवल पार्श्व पृष्ठ से बनती है। लम्ब वृत्तीय बेलन से आकाश के घिरे भाग को उस बेलन का अभ्यंतर (interior) कहते हैं। एक लम्ब वृत्तीय बेलन और उसका अभ्यंतर मिलकर एक **लम्ब वृत्तीय बेलनाकार** क्षेत्र कहलाता है जिसे प्राय: एक ठोस लम्बवृत्तीय बेलन कहते हैं।

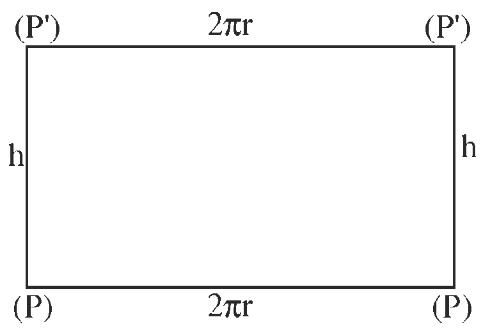
उपर्युक्त दोनों सिरों को मिलाने वाला एक वक्र पृष्ठ है। हम इसे लम्ब वृत्तीय बेलन का पार्श्व या पार्श्वीय पृष्ठ (lateral Surface) कहते हैं। ध्यान दीजिए कि निचले सिरे (आधार) के वृत्त के प्रत्येक बिन्दु P के लिए ऊपरी सिरे के वृत्त पर एक बिन्दु P' ऐसा होता है कि PP' रेखाखण्ड OO' के समांतर है। जैसे-जैसे P निचले वृत्त के अनुदिश चलता है, रेखाखण्ड PP' बेलन की पार्श्व (या वक्र) पृष्ठ का निर्माण करता है। वृत्त (आधार) की त्रिज्या r तथा रेखाखण्ड OO' की लम्बाई h बेलन की माप का निर्धारण करती है। PP' = OO' =h बेलन की ऊँचाई कहलाती है।

15.2 लम्ब वृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए, अब एक लम्ब वृत्तीय बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल को ज्ञात करते हैं। ऊँचाई h और आधार त्रिज्या r वाले लम्ब वृत्तीय बेलन लेते हैं। (आकृति 15.2)।



आकृति 15.2



आकृति 15.3

हम h चौड़ाई वाली कागज की एक पट्टी लेते हैं, ताकि हम इसे ऊँचाई h वाले बेलन के अनुदिश उसे ढँकने के लिए लपेट सकें। वक्र पृष्ठ पर उसे निर्मित करने वाली एक रेखाखण्ड PP' को अंकित कीजिए। कागज की पट्टी के किनारे को अब PP' के अनुदिश रखिए और पट्टी को बेलन के चारों ओर तब तक लपेटिए जब तक आप PP' पर दुबारा न पहुँच जाएँ। इस स्थिति में पट्टी को PP' के अनुदिश काट लीजिए। अब कटी हुई पट्टी को हटाकर फैला दीजिए। यह पट्टी किस आकार की है? यह एक आयत है। इसकी लम्बाई व चौड़ाई क्या है? स्पष्टत: इस आयत की लम्बाई PP है जो कि वृत्ताकार आधार की परिधि है। वृत की परिधि को हम $= 2\pi r$ से निकालते हैं। इस आयत की चौड़ाई PP' जो कि बेलन की ऊँचाई के बराबर है जो कि h है।

अत: आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

आयत (बेलन का वक्रपृष्ठ) का क्षेत्रफल $= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (आयत का क्षेत्रफल) $= 2\pi rh$

बेलन के दोनों सिरों का क्षेत्रफल $= \pi r^2 + \pi r^2$

$= 2\pi r^2$

अत: लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + बेलन के दोनों सिरों का क्षेत्रफल

$= 2\pi rh + 2\pi r^2$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(h + r)$

उदाहरण 1. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या 4.9 सेमी तथा उसकी ऊँचाई 10 सेमी है। बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : दिया हुआ है बेलन की त्रिज्या $r = 4.9$ सेमी

ऊँचाई $(h) = 10$ सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(h + r)$

$= 2\times\frac{22}{7}\times 4.9\ (10 + 4.9)$ सेमी^{2}

$= 2 \times\frac{22}{7} \times 4.9 \times 14.9$ सेमी^{2}

$= 458.92$ सेमी^{2}

इस प्रकार लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 458.92 सेमी^{2} है। उत्तर

उदाहरण 2. ऊँचाई 14 सेमी वाले एक लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 88 सेमी^{2} है। बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : बेलन का वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल $= 88$ सेमी^{2}

बेलन की ऊँचाई $h = 14$ सेमी

ज्ञात करना है बेलन के आधार की त्रिज्या r

अत: $88 = 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 14$

या, $r = \frac{88 \times 7}{2 \times 22 \times 14}$ सेमी

$= 1$ सेमी

इस प्रकार बेलन के आधार की त्रिज्या 1 सेमी है। उत्तर

उदाहरण 3. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल 687.72 सेमी^{2} है। यदि उसकी त्रिज्या 2.1 सेमी है तो बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 687.72$ सेमी^{2}

त्रिज्या $= 2.1$ सेमी

ज्ञात करना है बेलन की ऊँचाई $= h$

बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r\,(r + h) = 687.72$

या $2\times \frac{22}{7} \times 2.1\ (2.1 + h) = 687.72$

या $2.1 + h = \frac{687.72 \times 7}{2 \times 22 \times 2.1}$

या, $h = \left(\frac{687.72 \times 7}{2 \times 22 \times 2.1} - 2.1\right)$ सेमी

$= (52.1 - 2.1)$ सेमी $= 50$ सेमी

इस प्रकार बेलन की ऊँचाई $= 50$ सेमी, उत्तर

प्रश्नावली 15.1

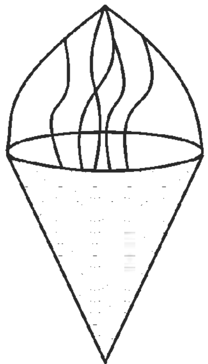
1. सही उत्तर चुनकर लिखिए

   लम्ब वृत्तीय बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल होता है

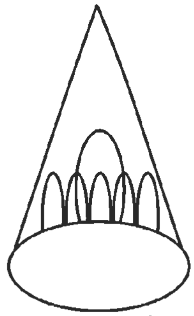
   (i) $2\pi r^2$ (ii) $2\pi rh$ (iii) $2\pi r(r + h)$ (iv) इनमें से कोई नहीं।
2. किसी लम्ब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या 8 सेमी और ऊँचाई 35 सेमी है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक लम्ब वृत्तीय बेलन के आधार का व्यास 10 सेमी है और ऊँचाई 15 सेमी है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)।
4. एक बेलन का व्यास 10 सेमी तथा ऊँचाई 21 सेमी है। बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. एक बेलनाकार पाइप की ऊँचाई 10 मीटर है तथा व्यास 63 सेमी है। इसके वक्र पृष्ठ पर रंग करवाने का व्यय ज्ञात कीजिए जबकि रंग करवाने की दर 1 रुपया प्रति वर्गमीटर है।
6. दो बेलनाकार खंभों की त्रिज्याओं में अनुपात 3:2 है, जबकि ऊँचाइयों में अनुपात 2:3 है। खंभों के वक्र पृष्ठों में अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. एक बेलनाकार स्तंभ का व्यास 50 सेमी है और उसकी ऊँचाई 3.5 मी है। इस स्तंभ की वक्र पृष्ठ पर 12.50 रुपये प्रति वर्गमीटर की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
8. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 4.4 मी^{2} है। यदि इस बेलन के आधार की त्रिज्या 0.7 मी है, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. एक बेलनाकार टंकी की ऊँचाई 40 सेमी है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 12320 सेमी^{2} है। टंकी की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
10. धातु का एक पाइप 77 सेमी लम्बा है। इसके अनुप्रस्थ काट का आंतरिक व्यास 4 सेमी है तथा बाहरी व्यास 4.8 सेमी है। उसके बाहरी वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का अंतर ज्ञात कीजिए।
11. एक वृत्ताकार कुएँ का आंतरिक व्यास 3.5 मीटर है और वह 10 मीटर गहरा है। उसका आंतरिक वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15.3 लम्ब वृत्तीय शंकु

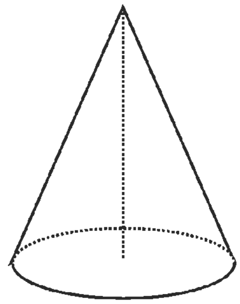
कभी छोटे बच्चों को किसी विशेष अवसर पर सिर पर रंगीन टोपी पहने हुए देखा होगा, वह किस आकार की है? इसे शंक्वाकार आकृति का कहेंगे। इसी प्रकार के उदाहरण आइसक्रीम शंकु और तंबू आदि है। ऐसी वस्तुएँ लम्ब वृत्तीय शंकु (right circular cone) की संकल्पना को स्पष्ट करती है, जो एक ज्यामितीय आकृति है।



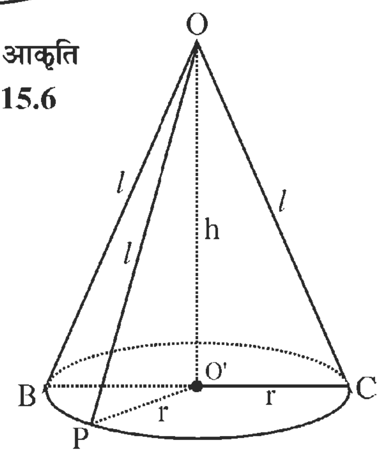
शंक्वाकार आइसक्रीम
आकृति 15.4



शंक्वाकार टोपी
आकृति 15.5



ज्यामितीय आकृति
आकृति 15.6



आकृति 15.7

नीचे एक लम्ब वृत्तीय शंकु की आकृति दी गई है।

लम्ब वृत्तीय शंकु का एक सिरा (BPC) समतल है, जो वृत्ताकार है। यह एक वृत्तीय क्षेत्र है और यह सिरा शंकु का आधार कहलाता है। इस सिरे की त्रिज्या (r) शंकु के **आधार की त्रिज्या** या केवल **आधार त्रिज्या** कहलाती है।

इसमें एक कोना है जो शंकु का शीर्ष (O) कहलाता है। शीर्ष से आधार के वृत्तीय किनारे (B, C, ...) को मिलाने से बना तल एक वक्र पृष्ठ है। इस वक्र पृष्ठ को शंकु का **पार्श्व** या **पार्श्वीय पृष्ठ** (lateral Surface) कहते हैं।

शीर्ष O और वृत्तीय आधार BPC के केंद्र O' को मिलाने वाली रेखा OO' शंकु की **अक्ष** (axis) कहलाती है। यह रेखाखण्ड OO' शंकु की **ऊँचाई** कहलाती है। OO' आधार पर लम्ब है अर्थात् कोण OO'C = कोण OO'P = कोण OO'B = एक समकोण।

इसी कारण, इस ठोस को **लम्ब वृत्तीय शंकु** (right circular cone) नाम दिया गया है।

शंकु की माप आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h से निर्धारित हो जाती है।

आधार के वृत्तीय किनारे पर स्थित प्रत्येक बिन्दु P, B, C, ... के लिए रेखाखण्ड क्रमशः OP, OB, OC, ... शंकु के वक्र पृष्ठ पर स्थित हैं। ऐसे रेखाखण्डों OP, OB, OC, ... में से प्रत्येक की लम्बाई l शंकु की **तिर्यक ऊँचाई** (Slant height) कहलाती है।

अब, हम किसी एक समकोण त्रिभुज OO'P को लेते हैं। यहाँ $\angle OO'P = 90^0$

अतः त्रिभुज OO'P में, $OP^2 = O'P^2 + OO'^2$

या $l^2 = r^2 + h^2$

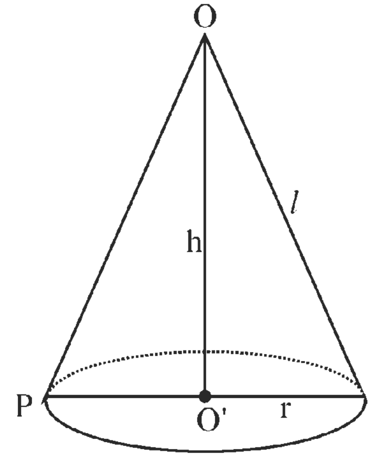
या, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

लम्ब वृत्तीय शंकु दो भिन्न प्रकार की आकृतियों का आभास कराते हैं खोखला शंकु और ठोस शंकु। खोखला शंकु, शंकु का केवल पार्श्व पृष्ठ है, जबकि ठोस शंकु में पार्श्व पृष्ठ के अतिरिक्त शंकु का अभ्यंतर (interior) भी शामिल है। हम प्राय: शब्द 'शंकु' का प्रयोग 'लम्ब वृत्तीय शंकु' के अर्थ में करते हैं।

15.4 लम्ब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल

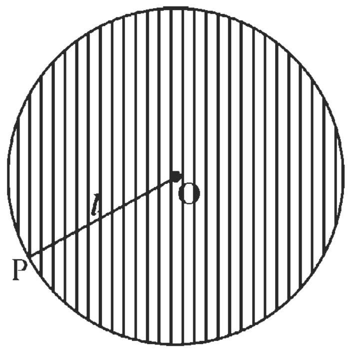
आइये, अब हम लम्ब वृत्तीय शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल (वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल) को निर्धारित करने का प्रयत्न करें। इसके लिए, हम निम्न क्रियाकलाप करते हैं :

क्रियाकलाप 1. ऊँचाई h और आधार त्रिज्या r वाला एक शंकु लेते हैं, वृत्तीय किनारे की लम्बाई (वृत्त की परिधि) $2\pi r$ तथा आधार का क्षेत्रफल (वृत्त का क्षेत्रफल) πr^2 है (आकृति 15.8(i)।

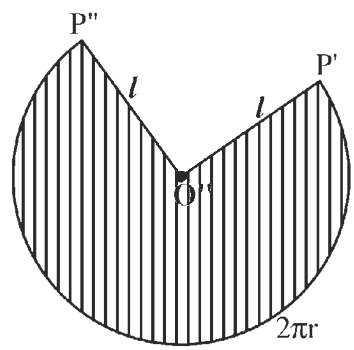


आकृति 15.8 (i)

आइए, अब पार्श्व पृष्ठ (वक्र पृष्ठ) पर विचार करें। इसके क्षेत्रफल को कैसे ज्ञात करेंगे? इसके लिए, हम किसी प्रकार वक्र पृष्ठ को सपाट (एक समतल क्षेत्र) बनाते हैं जिससे पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने में सरलता होगी।



आकृति 15.8 (ii)



आकृति 15.8 (iii)

मान लीजिए P वृत्तीय किनारे पर स्थित कोई बिन्दु है तथा $OP = l$ है। अब एक कागज पर केंद्र O" और त्रिज्या l लेकर एक वृत्त खींचिए। ऊपर की आकृति 15.8(ii) अनुसार वृत्त के अनुदिश कागज को काट लीजिए। इस प्रकार, हमें केंद्र O" और त्रिज्या l वाली कागज की एक चक्रिका (disc) प्राप्त होती है। इस चक्रिका को त्रिज्या P'O" के अनुदिश काटिए (आकृति 15.8 (iii))।

अब हम चक्रिका (आकृति 15.8 (ii)) की त्रिज्या O" P' को शंकु (आकृति 15.8 (i)) के OP के अनुदिश इस प्रकार रखते हैं कि O" बिन्दु O पर तथा P' बिन्दु P पर पड़े। अब O" को O पर और P' को P पर रखते हुए, हम चकती को शंकु के चारों और लपेटते हैं। जब हम OP पर वापिस पहुँचते हैं, तो हम चकती को लपेटने में बचा शेष भाग काट देते हैं। इस प्रकार, हमें त्रिज्या l वाले वृत्तीय क्षेत्र का एक भाग प्राप्त होता है। (आकृति 15.8 (iii)) जो शंकु के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढँक लेता है।

ध्यान दीजिए कि इस भाग के चाप की लम्बाई वृत्तीय किनारे की परिधि, अर्थात $2\pi r$ के बराबर है। अब हम वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं

यहाँ आधार की त्रिज्या r तथा ऊँचाई h है इसकी तिर्यक ऊंचाई को यदि l से प्रदर्शित करें तो

शंकु का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r l$

इस प्रकार, त्रिज्या l वाली चकती के उस भाग का क्षेत्रफल, जो शंकु के वक्र पृष्ठ को पूर्णतया ढँक लेता है, $\pi r l$ है। अत:

शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

साथ ही, सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$= \pi r l + \pi r^2$

$= \pi r (l + r)$

ध्यान दीजिए कि सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल एक ठोस शंकु का होता है।

उदाहरण 4. उस लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी तिर्यक ऊँचाई 10 सेमी है तथा त्रिज्या 7 सेमी है।

हल : शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10$ वर्ग सेमी

$= 220$ वर्ग सेमी

इसलिए, शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 220$ सेमी^{2} उत्तर

उदाहरण 5. उस शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी तिर्यक ऊँचाई 9 डेमी तथा व्यास 24 डेमी है।

हल : शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r (r + l)$ व्यास = 24 डेमी
त्रिज्या = 12 डेमी

$= \frac{22}{7} \times 12 \times (9 + 12)$ वर्ग डेमी

$$= \frac{22}{7} \times 12 \times 21 \text{ वर्ग डेमी}$$

$$= 792 \text{ डेमी}^2$$

इसलिए शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = 792 डेमी^{2} उत्तर

उदाहरण 6. एक शंक्वावार तंबू 10 मी ऊँचा है और उसके आधार की त्रिज्या 24 मी है। तंबू की तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

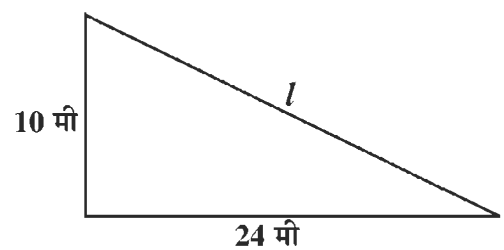
हल : शंकु की त्रिज्या और ऊँचाई एक-दूसरे से समकोण बनाते हैं। तिर्यक ऊँचाई उस समकोण त्रिभुज का कर्ण होगी।

पाइथागोरस प्रमेय से कर्ण = $\sqrt{\text{आधार}^2 + \text{ऊंचाई}^2}$

तिर्यक ऊँचाई l $= \sqrt{24^2 + 10^2}$ मी

$= \sqrt{576 + 100}$ मी

$= \sqrt{676}$ मी $= 26$ मी



आकृति 15.9

अत: शंकु की तिर्यक ऊँचाई = 26 मी., उत्तर

प्रश्नावली 15.2

1. सही उत्तर चुनकर लिखिए

   यदि किसी शंकु की ऊँचाई h, आधार की त्रिज्या r तथा तिर्यक ऊँचाई l हो, तो

   (i) $l^2 = h^2+r^2$ (ii) $h^2 = l^2 + r^2$ (iii) $r^2 = l^2 + h^2$ (iv) $l = h + r$

2. एक शंकु के आधार का व्यास 12 सेमी है और उसकी ऊँचाई 8 सेमी है। इस शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)।

3. एक शंकु के आधार का व्यास 6 सेमी और ऊँचाई 4 सेमी है। शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)।

4. एक शंकु की ऊँचाई 16 सेमी तथा उसके आधार का व्यास 24 सेमी है। इस शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)।

5. किसी शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 308 सेमी^{2} और उसकी तिर्यक ऊँचाई 14 सेमी है। उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

6. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आधार का व्यास 14 सेमी तथा तिर्यक ऊँचाई 9 सेमी है। ज्ञात कीजिए:

(a) उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (b) उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

7. ऊँचाई 8 मी और आधार त्रिज्या 6 मी वाले एक शंक्वाकार तंबू बनाने के लिए 3 मी चौड़ाई वाली कितनी लम्बी त्रिपाल लगेगी? ($\pi = 3.14$)

8. एक शंक्वाकार गुंबज की तिर्यक ऊँचाई और आधार का व्यास क्रमश: 25 मी और 14 मी है। 210 रु. प्रति 100 मी^{2} की दर से इसके वक्र पृष्ठ पर सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

9. धातु से बनी एक खुली शंक्वाकार टंकी 4 मी गहरी है तथा उसके ऊपरी वृत्तीय सिरे का व्यास 6 मी है। इस टंकी को बनाने में लगी धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$)

10. एक शंक्वाकार टोपी एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आकार की है जिसकी आधार त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊँचाई 24 सेमी है। ऐसी 10 टोपियों के बनाने में लगे गत्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

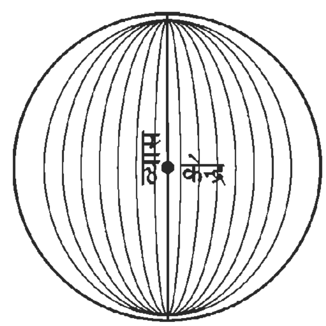
11. तिर्यक ऊंचाई 12 सेमी वाले एक आइसक्रीम शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल 113.04 सेमी^{2} है। आधार त्रिज्या ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)।

15.5 गोला (Sphere)

हमने गेंद, फुटबाल, व्हालीबाल देखी होंगी। ये सभी वस्तुएँ गोलीय हैं और गोला के उदाहरण हैं।

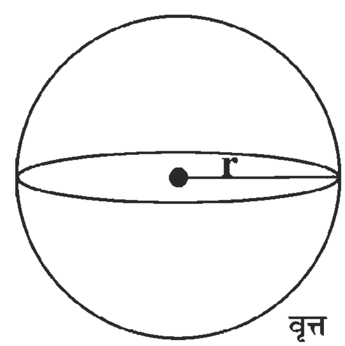
हम वृत्त खींच सकते हैं क्योंकि वृत्त एक बंद आकृति है। वृत्त का प्रत्येक बिन्दु एक निश्चित बिन्दु से समान दूरी पर होता है। निश्चित बिन्दु को केन्द्र कहते हैं। किसी वृत्त में, उसके व्यास को अक्ष मानकर घुमायें, तो एक नयी आकृति बनती है। इसको गोला कहते हैं।

अत: गोला एक त्रिविमीय आकृति (ठोस आकृति) है जो आकाश (space) में उन सभी बिन्दुओं से मिलकर बनी है, जो एक निश्चित बिन्दु से बराबर दूरी पर होती है। निश्चित (स्थिर) बिन्दु को गोले का केन्द्र और बराबर दूरी को गोले की त्रिज्या कहते हैं। वह रेखाखण्ड, जो गोले के केन्द्र से होकर जाते और जिसके अंत बिन्दु गोले पर स्थित हों, को गोले का व्यास कहलाता है।
(आकृति 15.9 (i))



आकृति 15.9 (i)

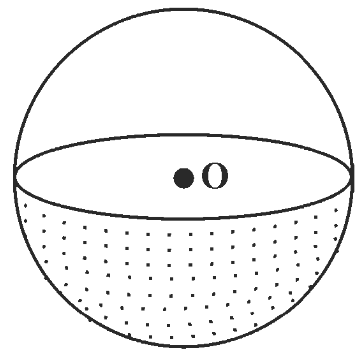
वृत्त की ही तरह गोले में भी व्यास की लम्बाई को गोले का व्यास कहते हैं। उसी तरह गोले का व्यास d और त्रिज्या r में $d = 2r$ का संबंध है।



आकृति 15.9 (ii)

एक तल द्वारा गोले का कटा हुआ भाग सदैव एक वृत्त होता है। केन्द्र से होकर जाने वाले तल को गोले का सबसे बड़ा वृत्तीय भाग (परिच्छेद) कहते हैं। इस सबसे बड़े परिच्छेद की त्रिज्या गोले की त्रिज्या के बराबर होती है। (आकृति 15.9 (ii)।

केंद्र से होकर जाने वाला तल गोले को दो बराबर भागों में बाँटता है। इनमें से प्रत्येक भाग को अर्द्धगोला कहते हैं। (आकृति 15.10)।



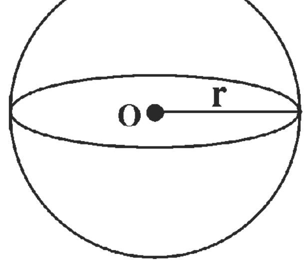
आकृति 15.10

गोला दो प्रकार का होता है खोखला गोला और ठोस गोला। ठोस गोला आकाश में एक गोलाकार क्षेत्र होता है। इसमें गोले और उसका अभ्यंतर सम्मिलित होता है। सामान्य रूप से गोले से तात्पर्य खोखले गोले से होता है।

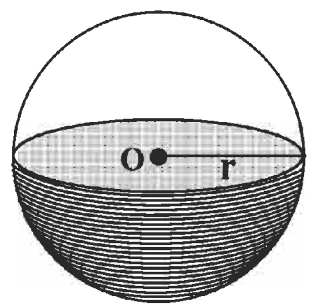
15.6 गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

आइए, अब एक गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल निर्धारित करने का प्रयत्न करें। इसके लिए एक क्रियाकलाप करते हैं।

क्रियाकलाप :



आकृति 15.11 (i)



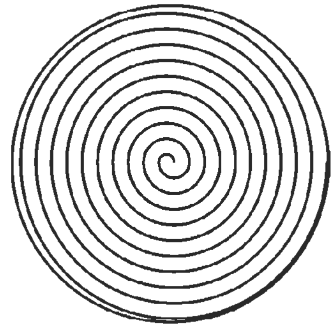
आकृति 15.11 (ii)

केन्द्र O और त्रिज्या r वाले एक गोले को लीजिए। मान लीजिए केन्द्र O से होकर जाने वाला कोई तल इस गोले को दो बराबर भागों में बाँटता है (आकृति 15.11(i)।

एक लम्बी डोरी लीजिए। अर्द्ध गोले के सबसे नीचे के बिन्दु से प्रारंभ करके, इस डोरी को अर्धगोले के चारों ओर एक सर्किल (Spiral) के रूप में लपेटिए (आकृति 15.11 (ii)।

इसे तब तक जारी रखिए जब तक कि संपूर्ण अर्धगोला डोरी से ढँक न जाए, (अर्धगोले की पृष्ठ पर गोंद का एक हल्का सा लेप लगाए जो डोरी को स्थिर रखने में सहायक हो सकता है), अब अर्ध गोले से डोरी हटा लीजिए तथा इस लपेटी गई डोरी की लम्बाई मापिए।

एक कागज पर त्रिज्या r का एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 है।



आकृति 15.12

अब इस वृत्त पर पहले जैसी डोरी लेकर लपेटने की क्रिया को दोहराइए (आकृति 15.12)। हम वृत्त के केन्द्र से डोरी लपेटना प्रारंभ करके उसके चारों ओर डोरी लपेट सकते हैं। अब वृत्त से डोरी हटा लीजिए और उसकी लम्बाई मापिए। हम देखेंगे कि अर्धगोले को ढँकने में लगी डोरी की लम्बाई उस डोरी की लम्बाई की लगभग दुगुनी है जो वृत्तीय क्षेत्र को ढँकने में लगी है। इसमें बहुत कम अंतर आता है। यह अंतर लपेटने एवं ढँकने में रह गए कुछ रिक्त स्थानों के कारण है। दोनों स्थितियों में, डोरी की मोटाई बराबर है। इसलिए

अर्ध गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times$ वृत्त का क्षेत्रफल

$= 2 \times \pi r^2 = 2\pi r^2$ (वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 होता है)

गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2 \times$ अर्धगोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2 \times 2\pi r^2$

$= 4\pi r^2$

अत: | गोले का पृष्ठीय तल $= 4\pi r^2$, जहाँ r गोले की त्रिज्या है। |

अर्द्ध गोले का सम्पूर्ण पृष्ठीय तल $= \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$

उदाहरण 7. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है।

हल : गोले का पृष्ठीय तल $= 4\pi r^2$, यहाँ $r = 7$ सेमी है।

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ सेमी^{2}

$= 616$ सेमी^{2}, उत्तर

उदाहरण 8. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 28 सेमी है।

हल : दिया है व्यास = 28 सेमी, त्रिज्या (r) $= \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{28}{2}$ सेमी = 14 सेमी

अत: पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$ $= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ सेमी^{2}

$= 2464$ सेमी^{2} उत्तर

उदाहरण 9. एक ठोस अर्ध गोले के पृष्ठ को उसके वृत्तीय आधार सहित पेंट किया जाना है। यदि अर्ध गोले की त्रिज्या 28 सेमी है, तो इसके पृष्ठ को 3 रुपये प्रति 100 सेमी^{2} की दर से पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : अर्ध गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$$= 3\pi r^2$$

$$= 3\times \frac{22}{7}\times 28 \times 28 \text{ सेमी}^2$$

$$= 7392 \text{ सेमी}^2$$

3 रु. प्रति 100 सेमी^{2} की दर से उपर्युक्त पृष्ठ को पेंट कराने में आने वाला

व्यय $= \frac{3}{100}\times 7392$ रु. $= 221.76$ रु. उत्तर

प्रश्नावली 15.3

1. यदि किसी गोले की त्रिज्या r हो तो पृष्ठीय क्षेत्रफल होगा

   (i) πr^2 (ii) $2\pi r^2$ (iii) $3\pi r^2$ (iv) $4\pi r^2$

2. उस गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या है

   (i) 7.7 मी (ii) 21 सेमी (iii) 10.5 सेमी

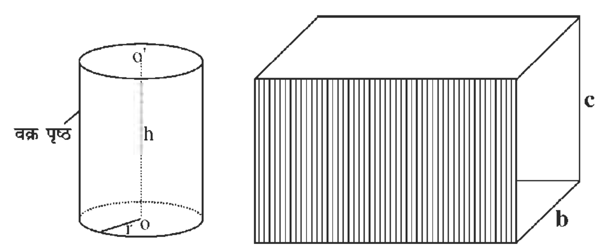
3. किसी गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास है

   (i) 4.2 सेमी (ii) 5.6 मी (iii) 8.4 मी

4. किसी गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 मी^{2} है। इसे दो अर्धगोलों में विभक्त किया गया है। दोनों अर्धगोलों का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. किसी गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल कितना होगा यदि उसकी त्रिज्या को दुगुना कर दिया जाए?
6. एक गोलाकार गुब्बारे में हवा भरे जाने पर उसकी त्रिज्या 7 सेमी से बढ़कर 14 सेमी हो जाती है। इन दोनों स्थितियों में गुब्बारे के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
7. उस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।
8. किसी भवन का गुंबज एक अर्ध गोले के आकार का है। उसकी त्रिज्या 6.3 मी है। 12 रु. प्रति मी^{2} की दर से इस पर पेंट कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

15.7 लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन

अभी हमने लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा सम्पूर्ण वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का अध्ययन किया है। यहाँ हम इनके आयतन पर विचार करते हैं।



आकृति 15.13

पहले एक घनाभ पर विचार करें जिसकी लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई क्रमश: a मात्रक, b मात्रक और c

मात्रक हैं।

हम जानते हैं कि इस घनाभ का आयतन $= a \times b \times c$ मात्रक^3 है और

पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2(a \times c + b \times c) = 2\ (a+b) \times c$

हम यह भी जानते हैं कि $2(a+b)$ घनाभ के आधार का परिमाप भी है। इन दोनों में क्या संबंध है?

घनाभ के पार्श्वीय पृष्ठ का क्षेत्रफल = आधार का परिमाप $\times$ ऊँचाई, अब घनाभ का आयतन $a{\times}b{\times}c$ है। साथ ही, $a{\times}b$ घनाभ के आधार का क्षेत्रफल है। इस प्रकार,

घनाभ का आयतन $= (a \times b) \times c =$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

अब लम्ब वृत्तीय बेलन पर विचार करे।

यदि **बेलन** की आधार **त्रिज्या r** तथा **ऊँचाई h** है

पार्श्वीय (वक्र) पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh$ मात्रक^2

= आधार का परिमाप $\times$ ऊँचाई

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई

$= \pi r^2 \times h$

$= \pi r^2 h$ मात्रक^3

अत: लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$ मात्रक^3

उदाहरण 10. एक लम्ब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊँचाई 15 सेमी है। उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 15$$

$= 2310$ सेमी^{3}

इस प्रकार बेलन का आयतन $= 2310$ सेमी^{3} उत्तर

उदाहरण 11. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन 693 सेमी^{3} है। यदि बेलन की त्रिज्या 10.5 सेमी है तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ आयतन $= 693,\ r = 10.5,\ h = ?$

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$(h) = \frac{\text{बेलन का आयतन}}{\pi r^2}$$

$$\text{(ऊँचाई) } h = \frac{693}{\pi r^2} = \frac{693}{\frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5}$$

$$= \frac{693 \times 7}{22 \times 10.5 \times 10.5} \text{ सेमी}$$

$$= 2 \text{ सेमी}$$

इस बेलन की ऊँचाई = 2 सेमी उत्तर

उदाहरण 12. एक लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन 38.5 मी^{3} है। बेलन की ऊँचाई 1 मी है। बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना त्रिज्या r है।

बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$\frac{22}{7} \times r^2 \times 1 = 38.5$$

$$r^2 = \frac{38.5 \times 7}{22} = \frac{385 \times 7}{22 \times 10} \text{ मी}^2 = \frac{7 \times 7}{2 \times 2} \text{मी}^2$$

अत: $r = \frac{7}{2} = 3.5$ मी

इस प्रकार बेलन की त्रिज्या = 3.5 मी. उत्तर

प्रश्नावली 15.4

1. लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि

   (i) त्रिज्या = 7 सेमी, ऊँचाई = 50 सेमी

   (ii) त्रिज्या = 5.6 सेमी, ऊँचाई = 1.25 मी

   (iii) त्रिज्या = 14 डेसीमीटर, ऊँचाई = 15 मी।

2. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि बेलन के आधार का क्षेत्रफल 132 सेमी^{2} व ऊँचाई 50 सेमी है।

3. एक बेलनाकार टंकी का आयतन 3850 मी^{3} तथा ऊंचाई 25 मी है, त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

4. एक ड्रम जिसका आधार वृत्ताकार है, उसकी त्रिज्या 14 सेमी व ऊँचाई 35 सेमी है। समान आयतन वाले दूसरे ड्रम की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 7 सेमी है।

5. 3.5 मी त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार कुआँ 20 मी. गहराई तक खोदा गया तथा इस प्रकार खुदाई से प्राप्त मिट्टी को 14 मी लम्बे व 11 मी. चौड़े एक आयताकार भूखंड पर फैलाया गया। फैलाई गई मिट्टी की मोटाई ज्ञात कीजिए।

6. एक आयताकार धातु की चद्दर की माप 44 सेमी × 20 सेमी है। इसे लम्बाई के सहारे मोड़कर बेलनाकार आकृति में बदल दिया गया। इस प्रकार बने बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

7. 10 मी. गहरे एक लम्ब वृत्तीय बेलनाकार बर्तन के अंदर के वक्र पृष्ठ को पेंट करने में 20 रु. प्रति वर्गमीटर की दर से 2200 रु. व्यय हुआ। ज्ञात कीजिए

   (a) बर्तन के आंतरिक वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल

   (b) बर्तन की धारिता।

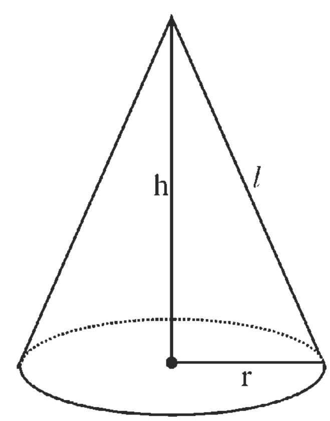
8. एक दिन 10 सेमी वर्षा हुई। यदि 70 मी लम्बी तथा 44 मी चौड़ी छत पर गिरे जल को 14 मी त्रिज्या वाले एक बेलनाकार टैंक में डाला जाये, तो टैंक में पानी की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

15.8 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन

एक लम्ब वृत्तीय शंकु, यदि वह अंदर से खोखला है, इसमें कितना पानी भरा जा सकता है और उसका मापन कैसे करेंगे?

खोखले लम्ब वृत्तीय शंकु में जितनी हवा भरी है, या जितना पानी भरा जा सकता है, वह उस शंकु की धारिता (capacity) कहलाती है।

अब, हम लम्ब वृत्तीय शंकु के आयतन पर विचार करेंगे।



आकृति 15.14

एक लम्ब वृत्तीय शंकु पर विचार करें जिसके आधार की त्रिज्या r तथा ऊंचाई h है। इसकी तिर्यक ऊँचाई को यदि l से प्रदर्शित करें, तो हम जानते हैं कि

शंकु का वक्र पृष्ठ, $S = \pi r l$

या $S = \frac{1}{2} \times$ आधार की परिधि $\times$ तिर्यक ऊँचाई

इस शंकु का आयतन V ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रियाकलाप करेंगे।

क्रियाकलाप 3. ऊँचाई h व त्रिज्या r वाले एक लम्ब वृत्तीय शंकु के आकार का बर्तन लेंगे। समान ऊँचाई h व समान त्रिज्या r वाले लम्ब वृत्तीय बेलन के आकार का एक अन्य बर्तन लेंगे। अब शंकु के आकार वाले बर्तन में ऊपर तक पानी भरकर बेलनाकार बर्तन में इस पानी को तब तक डालेंगे कि बेलनाकार बर्तन पूरा-पूरा भर जाए। हम देखेंगे कि तीन बार में बर्तन पूरा भर जाता है।

इस प्रयोग से यह ज्ञात होता है कि बेलनाकार बर्तन का आयतन शंक्वाकार बर्तन के आयतन का तीन गुना है।

लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन $= \frac{1}{3} \times$ बेलन का आयतन

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$= \frac{1}{3}$ (शंकु के आधार का क्षेत्रफल) $\times$ ऊँचाई

अतः लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

उदाहरण 13. उस लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 6 सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है।

लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

दिया है $r = 6$ सेमी $\quad h = 7$ सेमी

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6 \times 6 \times 7$$

$= 264$ सेमी^{3}

अतः शंकु का आयतन $= 264$ सेमी^{3} उत्तर

उदाहरण 14. एक शंक्वाकार बर्तन की धारिता 616 सेमी^{3} है। यदि उसकी त्रिज्या 7 सेमी है तो बर्तन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

माना बर्तन की ऊँचाई h है

धारिता (आयतन) $= 616$ सेमी^{3}

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{या, } 616 = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times h$$

$$\text{या, } h = \frac{616 \times 3 \times 7}{22 \times 7 \times 7} = 12 \text{ सेमी}$$

अत: बर्तन की ऊँचाई = 12 सेमी.   उत्तर

उदाहरण 15. यदि 9 सेमी ऊँचाई वाले एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन 48π सेमी^{3} है, तो शंकु के आधार का व्यास निकालिए।

व्यास = 2 × त्रिज्या

माना शंकु की त्रिज्या r है।

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{या, } 48\pi = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times 9$$

$$\text{या, } r^2 = \frac{3 \times 48\pi}{\pi \times 9} = 16 \text{ सेमी}^2$$

$$\text{या, } r = 4 \text{ सेमी}$$

$$\text{व्यास} = 2 \times r = 2 \times 4 \text{ सेमी}$$

$$= 8 \text{ सेमी}$$

अत: शंकु के आधार का व्यास = 8 सेमी.   उत्तर

प्रश्नावली 15.5

1. एक शंकु (लम्ब वृत्तीय) का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी ऊँचाई 2.04 सेमी तथा आधार की त्रिज्या 14 सेमी है।
2. एक शंकु की ऊँचाई व तिर्यक ऊँचाई क्रमश: 21 सेमी तथा 28 सेमी है। शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. एक शंक्वाकार तंबू का आयतन 1232 मी^{3} है तथा इसके आधार का क्षेत्रफल 154 मी^{2} है। यदि तंबू के कैनवास की चौड़ाई 2 मी हो, तो तंबू बनाने में कितने लंबे कैनवास की आवश्यकता होगी?

4. उस शंक्वाकार बर्तन की धारिता ज्ञात कीजिए जिसके लिए $r = 7$ सेमी तथा $l = 25$ सेमी।
5. यदि किसी शंकु की ऊँचाई 15 सेमी तथा आयतन 1570 सेमी^{3} है, तो शंकु के आधार का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. धातु के बने किसी ठोस शंकु को पिघलाकर एक ठोस बेलन बनाया गया जिसका वृत्तीय आधार शंकु के वृत्तीय आधार के बराबर है। यदि इस प्रकार प्राप्त बेलन की ऊँचाई 7 सेमी है, तो शंकु की ऊँचाई कितनी थी?
7. एक शंक्वाकार गड्ढे का ऊपरी व्यास 3.5 मी तथा गहराई 12 मी है। इस गड्ढे की धारिता किलोलीटर में क्या है? (1 मी^{3} = 1 किलोलीटर)
8. एक लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन 9856 सेमी^{3} है। यदि इसके आधार का व्यास 28 सेमी है, तो शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. एक समकोण त्रिभुज के आधार की भुजा 5 सेमी, लम्ब की भुजा 12 सेमी तथा कर्ण की भुजा 13 सेमी है। इसे 12 सेमी लम्बी भुजा के परितः घुमाया गया है। इस प्रकार प्राप्त ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

15.9 गोले का आयतन

ठोस गोले के बारे में हम पढ़ चुके हैं और उसके पृष्ठ का क्षेत्रफल ($4\pi r^2$) भी क्रियाकलाप द्वारा ज्ञात कर चुके हैं। गोले के आयतन का सूत्र

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

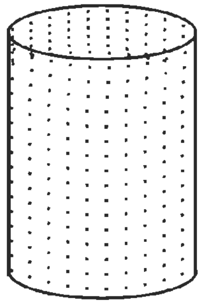
जहाँ r गोले की त्रिज्या है।

इसकी सत्यता की जाँच के लिए निम्नलिखित क्रियाकलाप करते हैं :

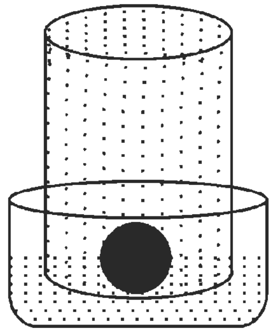
क्रियाकलाप 4.

एक बेलनाकार बाल्टी लें जिसमें एक लोहे का गोला जिसकी त्रिज्या r है, पूरी तरह डूब जाय। बाल्टी को रखने के लिए एक अन्य बर्तन इतना चौड़ा लीजिए जिसमें बाल्टी से निकले पानी को एकत्रित किया जा सके।

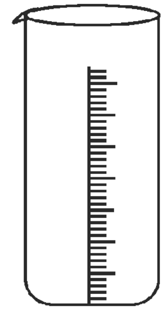
अब बाल्टी को चौड़े बर्तन में रखकर बाल्टी को ऊपर तक पूरा पानी से भरिए। गोले को बाल्टी में धीरे से डुबाइए। गोले के डुबोने से कुछ पानी चौड़े बर्तन में गिरेगा। अब गोला सहित बाल्टी को बाहर निकालिए। चौड़े बर्तन के पानी को मापन फ्लास्क द्वारा (आकृति 15.15 (iii)) माप लें। चौड़े बर्तन में एकत्रित पानी का आयतन गोले के आयतन के बराबर होगा।



आकृति 15.15 (i)



आकृति 15.15 (ii)



आकृति 15.15 (iii)

यही क्रिया अन्य त्रिज्याओं वाले कम से कम तीन और गोले लेकर दोहराएँ। एकत्रित पानी का आयतन V लिखिए।

तीनों मानों को निम्नानुसार सारणी में भरिए

r = 2 सेमी, r= 3 सेमी, r =4 सेमी

गोला	r	$\frac{4}{3}\pi r^3$	V	$V-\frac{4}{3}\pi r^3$
1.				
2.				
3.				

सारणी के अवलोकन से हमें ज्ञात होता है कि अंतिम स्तंभ की प्रविष्टियाँ या तो शून्य हैं या इतनी छोटी हैं कि इनकी उपेक्षा की जा सकती है। अत: हम कह सकते हैं कि सभी गोलों के लिए

$$V-\frac{4}{3}\pi r^3 = 0 \text{ अर्थात } V=\frac{4}{3}\pi r^3$$

अत: r त्रिज्या के $\boxed{\text{गोले का आयतन } V=\frac{4}{3}\pi r^3}$

उदाहरण 16. गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि उसकी त्रिज्या 7 मी है।

हल : गोले का आयतन $=\frac{4}{3}\pi r^3$

$$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(7\times7\times7)$$

$$= \frac{4312}{3} \text{ मी}^3 = 1437.33 \text{ मी}^3$$ उत्तर

उदाहरण 17. गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि उसका व्यास 11.2 सेमी है।

हल : गोले की त्रिज्या = $\frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{11.2}{2} = 5.6$ सेमी

अत: गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 5.6 \times 5.6 \times 5.6 \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{2207.7}{3} \text{ सेमी}^3$$

$$= 735.9 \text{ सेमी}^3$$ उत्तर

उदाहरण 18. 36 मी लम्बे व 0.1 सेमी त्रिज्या वाले तार को पिघलाकर एक गोला बनाया गया है। गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : तार को पिघलाकर गोला बनाया गया है। अत: तार का आयतन गोले के आयतन के बराबर होगा।

तार का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (0.1)^2 \times 3600 \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 3600 \text{ सेमी}^3$$

$$= 36\pi \text{ सेमी}^3$$

अत: गोले का आयतन $= 36\pi$ सेमी^{3} उत्तर

उदाहरण 19. प्रतियोगिता में गोला फेंक के लिए जो गोला प्रयोग में लिया गया उसका पृष्ठीय क्षेत्रफल 616 सेमी^{3} है। इस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

या, $616 = 4 \times \frac{22}{7} \times r^2$

$$\text{या, } r^2 = \frac{616 \times 7}{4 \times 22} \text{ सेमी}^2$$

$$= 7 \times 7 \text{ सेमी}^2$$

$$r = 7 \text{ सेमी}$$

$$\text{अत: गोले का आयतन} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 \text{ सेमी}^3$$

$$= \frac{4312}{3} \text{ सेमी}^3$$

$= 1437.33$ सेमी^{3} उत्तर

प्रश्नावली 15.6

1. गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि उसकी त्रिज्या है
   (i) 3.5 मी. (ii) 21 सेमी (iii) 1.4 मी.
2. गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जबकि उसका व्यास है
   (i) 14 मी (ii) 1.26 मी. (iii) 28 सेमी
3. एक अर्धगोलाकार प्याले की त्रिज्या 4.2 सेमी है। प्याले में भरे जा सकने वाले पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।
4. एक 4 सेमी त्रिज्या वाले गोले से 1 सेमी त्रिज्या की गोलियाँ बनाई गई। गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. किसी मेले में तीन बालिकाओं ने बर्फ के गोले (आइसक्रीम) बनवाए। गोले की त्रिज्याएँ क्रमश: 6 सेमी, 8 सेमी व 10 सेमी थीं। गणना द्वारा बर्फ का कुल आयतन ज्ञात कीजिए।
6. किसी बेलनाकार बर्तन का व्यास 12 सेमी है। बर्तन में कुछ पानी भरा हुआ है। इस पानी में 6 सेमी व्यास का एक ठोस गोला डुबाया गया जिससे पानी की सतह में परिवर्तन हो गया। गणना द्वारा ज्ञात कीजिए कि पानी की सतह में कितना परिवर्तन हुआ।
7. उस गोले का आयतन ज्ञात कीजिए जिसके पृष्ठ का क्षेत्रफल 154 सेमी^{2} है।
8. लोहे की बनी एक अर्धगोलीय टंकी की मोटाई 1 सेमी है। यदि टंकी की अंत: त्रिज्या 1 मी हो, तो टंकी के बनाने में प्रयुक्त लोहे का आयतन ज्ञात कीजिए।
9. चन्द्रमा का व्यास पृथ्वी के व्यास का लगभग एक चौथाई है। चन्द्रमा का आयतन पृथ्वी के आयतन का कौन सा भाग है।