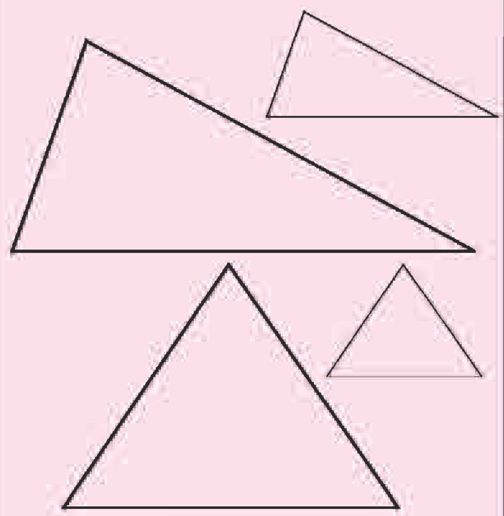
अध्याय 10
त्रिभुजों की सर्वांगसमता
(Congruence of Triangles)



हम पढ़ेंगे

- सर्वांगसम त्रिभुज
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता से संबंधित प्रमेय
- त्रिभुजों की सर्वांगसमता से संबंधित प्रेरित
- त्रिभुज की असमताएँ
- त्रिभुज की असमताओं से संबंधित प्रमेय
- त्रिभुज की असमताओं से संबंधित प्रेरित
- बिन्दु पथ एवं संबंधित प्रेरित
- संगमन प्रेरित

10.1 भूमिका (Introduction)

हम त्रिभुज तथा त्रिभुज के कोणों व भुजाओं का अध्ययन पिछली कक्षाओं में कर चुके हैं। अब हम ज्यामिति की महत्वपूर्ण संकल्पना सर्वांगसमता का अध्ययन करेंगे। ज्यामिति में आकृतियों को उनकी सर्वांगसमता के आधार पर वर्गीकृत करना एक सरल परन्तु महत्वपूर्ण अवधारणा है। कुछ आकृतियों के लम्बाई व कोणों में परस्पर संबंध होते हैं जिसका अध्ययन करने से पूर्व हम ज्ञात करेंगे कि इसकी शुरूआत कब, कहाँ और कैसे हुई।

प्रारंभ में मनुष्य को जब भूमि को नापने की आवश्यकता हुई तभी से ज्यामिति विषय का प्रारंभ हुआ। प्राचीन मिस्र वासियों ने सर्वप्रथम ज्यामिति का अध्ययन किया। मिस्र व वेबीलोनिया दोनों ही देश के निवासियों ने ज्यामिति के व्यवहारिक पक्ष पर बल दिया था। भारत में ज्यामिति का ज्ञान वैदिक काल के लोगों को भी था। भारतीय गणितज्ञों में ब्रह्म गुप्त, भास्कर द्वितीय, आर्यभट्ट आदि ने महत्वपूर्ण योगदान दिया है। हम पिछली कक्षाओं में त्रिभुजों, त्रिभुजों के गुणधर्म, त्रिभुज की रचना, समान नाप के दो त्रिभुजों की रचना करना सीख चुके हैं। आइए अब हम विस्तृत रूप में त्रिभुज की सर्वांगसमता, सर्वांगसमता के नियम व संबंधित तथ्य और प्रमेय आदि का अध्ययन करें।

10.2 विभिन्न आकृतियों की सर्वांगसमता (Congruence of different figures)

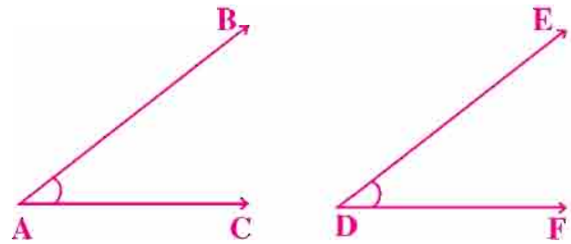
सर्वांगसम शब्द का अर्थ है "सभी अंगों का बराबर होना।" सर्वांगसम शब्द से आशय दो आकृतियों में सभी संगत अंगों का समान होना है अर्थात उनका एक ही आकार एवं आकृति होना (same size and shape)। दैनिक जीवन में एक ही आकार की दो चूड़ियाँ, एक ही फोटो की

दो प्रतियाँ, 1 रुपया, 5 रुपये के दो-दो सिक्के, एक समाचार पत्र की दो प्रतियाँ, एक ही ताले की दो चाबियाँ आदि के आकार व उनके संगत अंगों की माप तुल्य होती हैं। ये आकृतियाँ परस्पर सर्वांगसम होती हैं। इस संबंध को सर्वांगसमता कहते हैं। अत: विभिन्न आकृतियाँ जो एक ही आकार एवं आकृति की हैं उन्हें हम सर्वांगसम आकृतियाँ कहते हैं।

1. उदाहरण के लिए (आकृति 10.1) दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनकी लम्बाइयाँ बराबर हों।

आकृति 10.1

2. दो कोण सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनका माप बराबर हो।



आकृति 10.2

दो आकृतियों को सर्वांगसम कहते हैं यदि एक आकृति को दूसरी के ऊपर रखने पर वह एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढँकती हैं।

क्रियाकलाप 1 :

एक ही त्रिज्या के दो वृत्त बनाइए। अब इन्हें काटकर एक-दूसरे के ऊपर रखिए। आप क्या अवलोकन करते हैं? वे एक-दूसरे को पूरी तरह से ढँक लेते हैं। इन्हें हम सर्वांगसम वृत्त कहते हैं। इस क्रियाकलाप को आप एक ही नाप की भुजा वाले दो वर्गों या एक ही नाप की भुजा वाले दो समबाहु त्रिभुजों को लेकर दोहरा सकते हैं।

10.3 सर्वांगसमता की आवश्यकता (Importance of congruence):

हम रेफ्रिजरेटर में बर्फ जमाने के लिए जो ट्रे उपयोग में लाते हैं उसमें एक ही आकार एवं आकृति के बर्फ के टुकड़े जम जाते हैं। एक ही साँचे की सहायता से हम एक ही आकार एवं आकृति की ईटें बना सकते हैं। एक ही आकार एवं आकृति की चूड़ियाँ बनाई जाती हैं। क्या आपने कभी महसूस किया कि यदि आप एक डाट पेन में किसी अन्य रिफिल को लगाते हैं तो वह आसानी से पेन में ठीक से नहीं आती क्योंकि वह पहली वाली रिफिल के सर्वांगसम नहीं है। यदि नई रिफिल पहली वाली के सर्वांगसम है तो वह पेन में ठीक तरह से लग जाती है। अत: उपरोक्त उदाहरणों से प्रतीत होता है कि सर्वांगसमता के बारे में ज्ञान प्राप्त करना हमारे लिए अति आवश्यक है।

10.4 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता (Congruence of two triangles)

दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि एक को दूसरे पर अध्यारोपित करने पर वे एक-दूसरे को पूरा-पूरा ढँक लें।

कल्पना कीजिए ΔABC अन्य Δ EFG के सर्वांगसम है। तब हमारे लिए यह संभव होगा कि ΔABC को ΔEFG पर इस प्रकार रख सकें कि यह उसे पूरा-पूरा ढँक ले। ऐसे किसी अध्यारोपण में ΔABC के शीर्ष ΔEFG के शीर्षों पर (किसी क्रम में) पड़ेंगे। ΔABC की प्रत्येक भुजा ΔEFG की संगत भुजा पर पड़ेगी जिससे वह पूरा-पूरा ढँक ले। ΔABC का प्रत्येक कोण ΔEFG के संगत कोण को भी पूरा-पूरा ढकेगा। यदि अध्यारोपण सही-सही है तो छः समानताएँ प्राप्त हो जाती हैं। तीन संगत भुजाओं की एवं तीन संगत कोणों की निम्नलिखित समानताएँ प्राप्त होती है।

$AB = EF, BC = FG, CA = GE$

$\angle A = \angle E, \angle B = \angle F, \angle C = \angle G$

अत: दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि और केवल यदि उनके शीर्षों के बीच संगतता इस प्रकार की हो कि उनकी संगत भुजाएँ व संगत कोण बराबर हों। जैसे :

ΔABC एवं ΔEFG में

$A \leftrightarrow E, B \leftrightarrow F$ एवं

$C \leftrightarrow G$ और

$AB = EF, \ BC = FG$ एवं

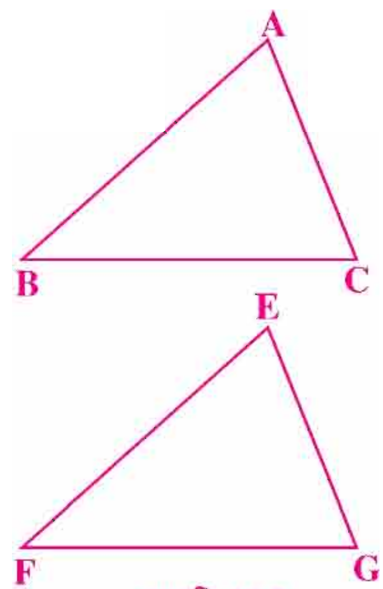
$AC = EG$ और

$\angle A = \angle E, \angle B = \angle F$ एवं

$\angle C = \angle G$

तब हम लिख सकते हैं कि

$\Delta ABC \cong \Delta EFG$



आकृति 10.3

टिप्पणी : '$\leftrightarrow$' त्रिभुज के किन्हीं दो शीर्ष बिन्दुओं के बीच संगतता प्रदर्शित करता है एवं '$\cong$' किन्हीं दो त्रिभुजों के बीच सर्वांगसमता को प्रदर्शित करता है।

ध्यान दीजिए कि त्रिभुज के नामों में अक्षरों का क्रम भी उनके शीर्षों के बीच संगतता दर्शाता है।

अत: दो त्रिभुजों के नामकरण की विधि से, उनके बीच सर्वांगसमता होने पर उनके संगत अवयवों की छः समानताएँ जान सकते हैं। **सर्वांगसम त्रिभुजों के संगत अवयव के लिए संकेत 'स.त्रि.सं.अ.'** का प्रयोग किया जाएगा।

10.4.1 त्रिभुजों में सर्वांगसमता से संबंध :

दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता से निम्नांकित परिणाम निकलते हैं

(i) यदि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$

तो $\Delta EFG \cong \Delta ABC$

(ii) यदि $\Delta ABC \cong \Delta EFG$

तथा

$\Delta EFG \cong \Delta PQR$

तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta ABC$

(iv) यदि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

हम लिख सकते हैं कि

(a) $\Delta BCA \cong \Delta QRP$

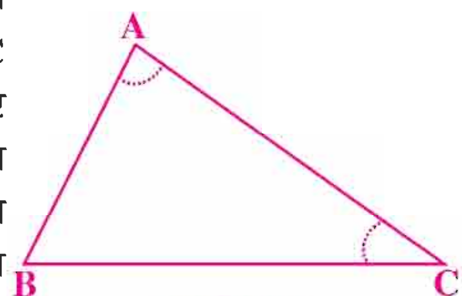
(b) $\Delta CAB \cong \Delta RPQ$

(c) $\Delta CBA \cong \Delta RQP$

लेकिन $\Delta ABC \cong \Delta QRP$ या $\Delta BCA \cong \Delta PQR$ नहीं लिख सकते।

10.5 दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता हेतु पर्याप्त प्रतिबंध (Sufficient condition of two triangles)

मान लीजिए कि ΔABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा इनके बीच का कोण $\angle ABC$ हमें ज्ञात हैं। अत: भुजाएँ AB, BC तथा $\angle ABC$ निश्चित हो गए हैं, तब चित्र को देखकर यह स्पष्ट हो जाएगा कि भुजा CA भी निश्चित हो जाती है तथा उनके साथ ही बचे हुए दो कोण $\angle C$ तथा $\angle A$ भी निश्चित हो जाते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ एवं उनके बीच का कोण त्रिभुज को अद्वितीय ढंग से निर्धारित करते हैं। इस चिंतन के आधार पर निम्नांकित अभिगृहीत प्राप्त होता है।



आकृति 10.4

10.5.1 भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता (SAS congruence)

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ व उनके बीच के कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं व उनके बीच के कोण के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

यहाँ दो भुजाएँ एवं उनके बीच के कोण लिए गए हैं अतः इसे **भुजा-कोण-भुजा या भु.को.भु.** सर्वांगसमता अभिग्रहीत (भु.को.भु. प्रमेय) कहते हैं।

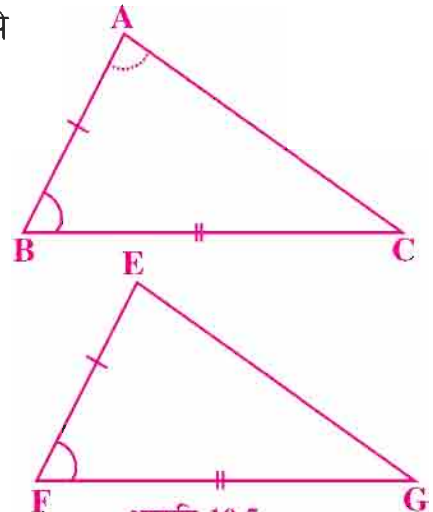
इस प्रकार ΔABC और ΔEFG में यदि $AB = EF$

$\angle B = \angle F$

$BC = FG$ तो $\Delta ABC \cong \Delta EFG$

अर्थात्, तब $CA = GE$, $\angle A = \angle E$ तथा

$\angle C = \angle G$ भी हो जाएगा।

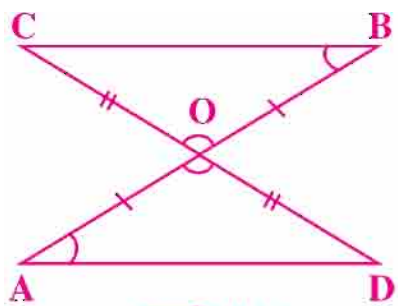


आकृति 10.5

उदाहरण 1 दिए हुए आकृति 10.6 में $OA = OB$ और $OD = OC$ तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ तथा

(ii) $AD \parallel BC$



आकृति 10.6

हल : (i) ज्ञात है

$OA = OB$ एवं $OD = OC$

ΔAOD एवं ΔBOC में

$OA = OB$ (ज्ञात है)

$\angle AOD = \angle BOC$ (शीर्षाभिमुख कोण)

$OD = OC$ (ज्ञात है)

$\therefore$ $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (भु.को.भु. सर्वांगसमता)

$\therefore$ $\angle OAD = \angle OBC$ (स.त्रि.सं.अ.)

(ii) उपरोक्त कोण एकांतरकोण है क्योंकि BC एवं AD को AB काटती है।

अतः $AD \parallel BC$

10.5.2 कोण भुजा कोण सर्वांगसमता (ASA Congruence)

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा उनके बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों एवं बीच की भुजा के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

ज्ञात है : ΔABC और ΔPQR में

$\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ तथा $BC = QR$ तो सिद्ध करना है कि

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

प्रथम स्थिति यदि $AB = PQ$ तो

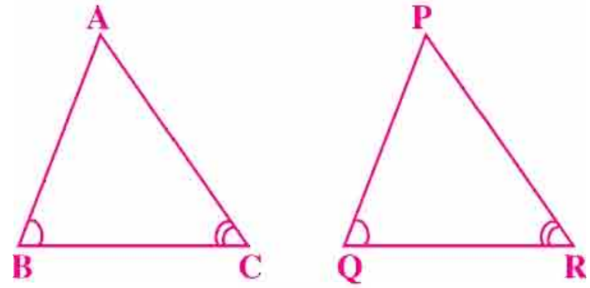
ΔABC एवं ΔPQR में

$AB = PQ$ (मान लिया)

$\angle B = \angle Q$ (ज्ञात है)

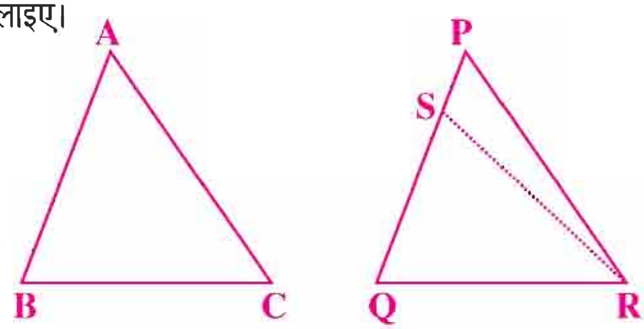
$BC = QR$ (ज्ञात है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (भु.को.भु. अभीग्रहित से)



आकृति 10.7

द्वितीय स्थिति यदि $AB \neq PQ$ तथा $AB < PQ$ तो PQ में बिन्दु S इस प्रकार लीजिए कि $SQ = AB$, SR मिलाइए।



आकृति 10.8

अब ΔABC और ΔSQR में,

$AB = SQ$ (रचना से)

$\angle B = \angle Q$ (ज्ञात है)

$BC = QR$ (ज्ञात है)

$\Delta ABC \cong \Delta SQR$ (भु.को.भु.अभि.)

$\therefore \angle ACB = \angle SRQ$ (स.त्रि.सं.अ.)

परन्तु $\angle ACB = \angle PRQ$ (ज्ञात है)

अतः $\angle PRQ = \angle SRQ$ क्या यह संभव है।

यह तभी संभव है जब किरण SR किरण PR पर पड़े या बिन्दु S बिन्दु P पर पड़े।

$\therefore$ भुजा AB अवश्य ही PQ के बराबर होगी।

या $AB = PQ$

अतः $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ (भु.को.भु.अभि.)

तृतीय स्थिति यदि $AB > PQ$ तो द्वितीय स्थिति के तर्कों को लिया जा सकता है कि $AB = PQ$

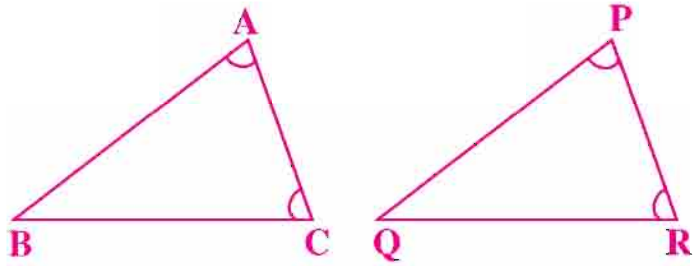
अत: सभी स्थितियों में $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

मान लीजिए दो त्रिभुज ΔABC और ΔPQR हैं।

यदि $\angle A = \angle P$, $\angle C = \angle R$ एवं $AB = PQ$

तो बताइए क्या Δ ABC एवं Δ PQR सर्वांगसम हैं?

आप देखेंगे कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

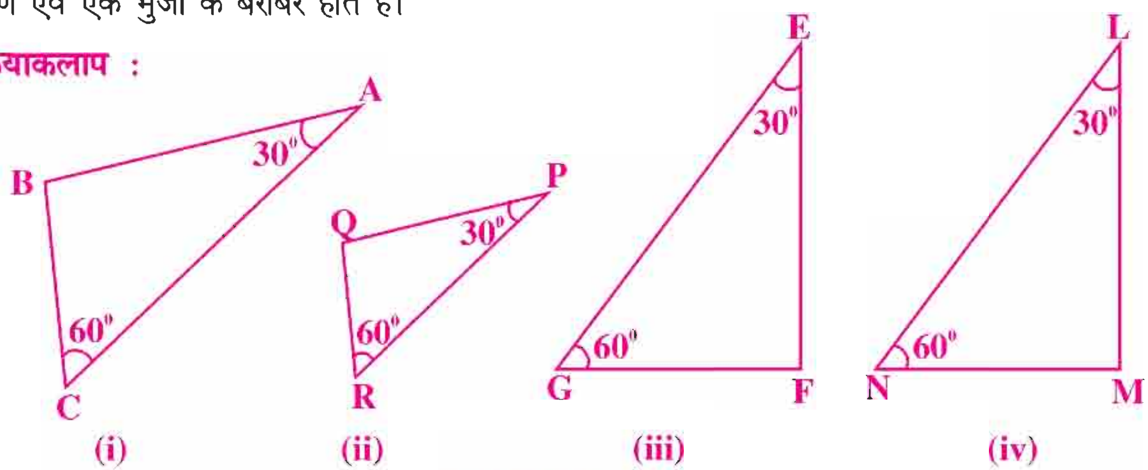


आकृति 10.9

हम जानते हैं कि एक त्रिभुज में तीनों कोणों का योग 180^0 होता है। इसलिए यदि एक त्रिभुज के दो कोणों का योग दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के योग के बराबर है तो पहले त्रिभुज का तीसरा कोण भी दूसरे त्रिभुज के तीसरे कोण के बराबर होगा।

अत: दो त्रिभुज सर्वांगसम तभी होंगे जब एक त्रिभुज के दोनों कोण एवं एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दोनों कोण एवं एक भुजा के बराबर होते हैं।

क्रियाकलाप :



आकृति 10.10

आप 30^0, 60^0, 90^0 के कोणों के कुछ त्रिभुज बनाइए। इन सभी त्रिभुजों के सभी कोण परस्पर बराबर हैं। क्या आप बता सकते हैं कि त्रिभुजों के तीनों कोण के बराबर होने पर ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं अथवा नहीं?

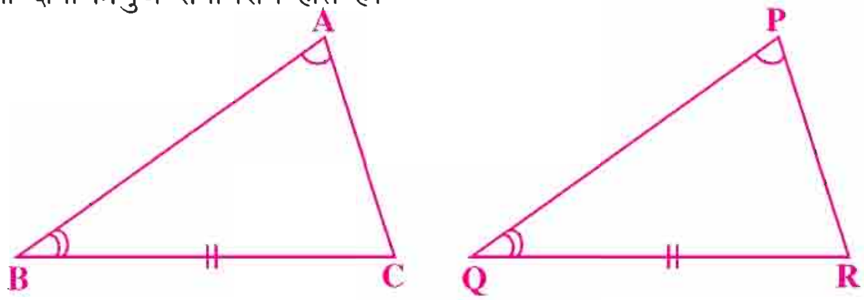
हम देखेंगे कि चित्र (i) और (iv) में

$\angle A = \angle L, \angle C = \angle N$ और BC = MN =3 है।

अब ΔABC एवं ΔLMN के सर्वांगसमता के लिए दो कोण व एक भुजा बराबर होने चाहिए। अत: त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए दो कोण और बीच की भुजाओं का समान होगा आवश्यक नहीं है अर्थात दो कोण और कोई भी एक भुजा समान दिए जाने पर भी त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे निम्नलिखित अभिग्रहीत में व्यक्त किया गया है।

10.5.3 कोण-कोण-भुजा सर्वांगसमता

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा (बीच की नहीं) दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों व भुजा के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



आकृति 10.11

आकृति 10.11 में ΔABC एवं ΔPQR में

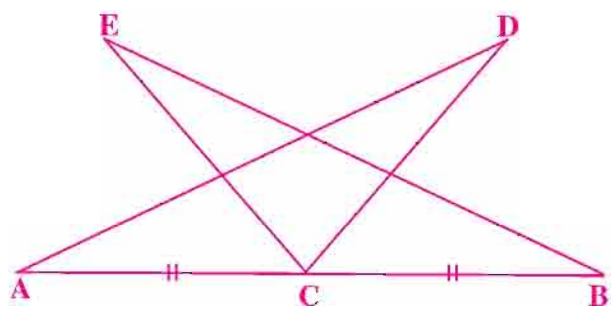
$\angle A = \angle P$

$\angle B = \angle Q$

एवं $BC = QR$ $\qquad \because \angle C = \angle R$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ (को.भु.को. सर्वांगसमता)

उदाहरण 2. आकृति 10.12 में C, AB का मध्य बिन्दु है। $\angle BAD = \angle ABE$ और $\angle ECA = \angle DCB$, तो सिद्ध कीजिए $\Delta DAC \cong \Delta EBC$



आकृति 10.12

हल : ज्ञात है

बिन्दु C, AB का मध्य बिन्दु है, अत: $AC = BC$ ----- (i)

$\angle ECA = \angle DCB$ (ज्ञात है)

$\angle ECA + \angle DCE = \angle DCB + \angle DCE$

अर्थात $\angle DCA = \angle ECB$ ------- (ii)

अब ΔDAC एवं ΔEBC में

$\angle DCA = \angle ECB$ --------- (ii से)

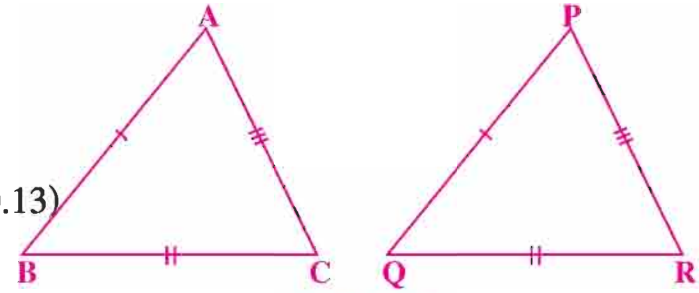
$AC = BC$ ---------(i से)

$\angle DAC = \angle EBC$ (ज्ञात है)

अत: $\Delta DAC \cong \Delta EBC$ (को भु.को. प्रमेय से)

10.5.4 भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता (SSS Congruence)

दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीनों भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



आकृति 10.13

ΔABC एवं ΔPQR में (आकृति 10.13)

$AB=PQ$, $BC=QR$ एवं $AC=PR$

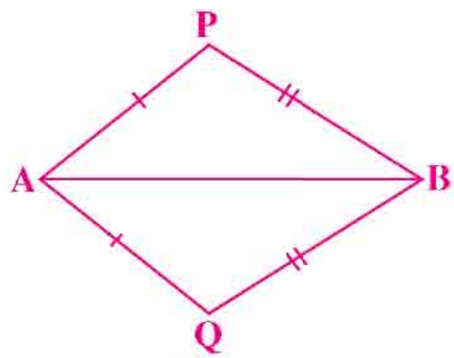
अत: $\Delta\, ABC \cong \Delta\, PQR$

उपरोक्त तथ्य को सरलता से दो त्रिभुजों को काटकर (जिनकी संगत भुजाएं बराबर हों) एवं अध्यारोपण विधि से सत्यापित किया जा सकता है।

स्पष्टतय: इस तथ्य को भुजा-भुजा-भुजा (Side-Side-Side) सर्वांगसमता अभिग्रहीत कहते हैं।

उदाहरण 3 आकृति 10.14 में $AP = AQ$ एवं $BP = BQ$, तो सिद्ध कीजिए कि

$\angle PAB = \angle QAB$



आकृति 10.14

हल : ΔPAB एवं ΔQAB में

$AP = AQ$ (ज्ञात है)

$BP = BQ$ (ज्ञात है)

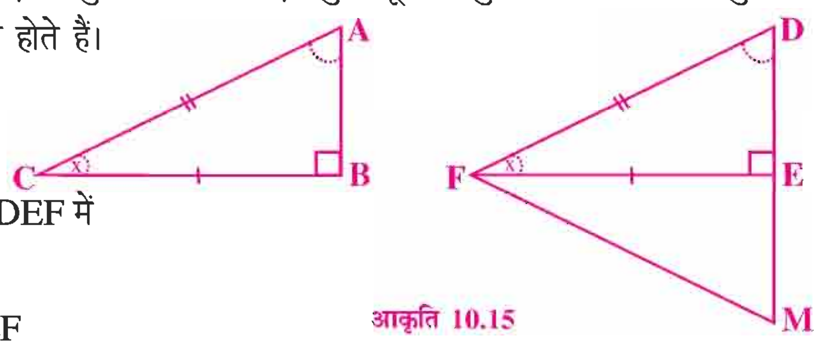
$AB = AB$ (उभयनिष्ठ है)

$\Delta PAB \cong \Delta QAB$ (भु.भु.भु.)

अतः $\angle PAB = \angle QAB$ (सं.त्रि.सं.अ.)

10.5.5 समकोण-कर्ण-भुजा सर्वांगसमता (RHS Congruence)

दो समकोण त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व संगत भुजा के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।



आकृति 10.15

ज्ञात है : ΔABC और ΔDEF में

$\angle B = \angle E = 90^0$

$AC = DF$ तथा $BC = EF$

सिद्ध करना है $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

रचना : DE को M तक इस प्रकार बढ़ाएँ कि $EM = AB$, MF को मिलाएँ।

उपपत्ति : ΔABC और ΔMEF में,

$AB = ME$ (रचना से)

$BC = EF$ (ज्ञात है)

$\angle B = \angle MEF$ (प्रत्येक समकोण है)

$\Delta ABC \cong \Delta MEF$ (भु. को. भु.)

$\therefore \angle A = \angle M$ (स.वि.सं.अ.) ----- (i)

तथा $AC = MF$ ----- (ii)

परन्तु $AC = DF$ (ज्ञात है)

$\therefore DF = MF$

अतः $\angle D = \angle M$ (ΔDMF में समान भुजाओं के सम्मुख कोण) ------(iii)

(i) एवं (ii) से $\angle A = \angle D$ ----- (iv)

अब ΔABC तथा ΔDEF में

$\angle A = \angle D$ ------ (iv) से

$\angle B = \angle E$ ------- ज्ञात है।

$\therefore \angle C = \angle F$ ------ (त्रिभुजों के तृतीय कोण)

पुनः ΔABC और ΔDEF में

$BC = EF$ (ज्ञात है)

$AC = DF$ (ज्ञात है)

$\angle C = \angle F$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$ (भु.को.भु.)

उदाहरण 4 त्रिभुज ABC में $AB = AC$ है। AD, BC पर लम्ब है। तो सिद्ध कीजिए कि AD, BC को समद्विभाजित करता है।

हल : ज्ञात है

ΔABC में $AB = AC$ एवं $AD \perp BC$

सिद्ध करना है- AD, BC को समद्विभाजित करता है।

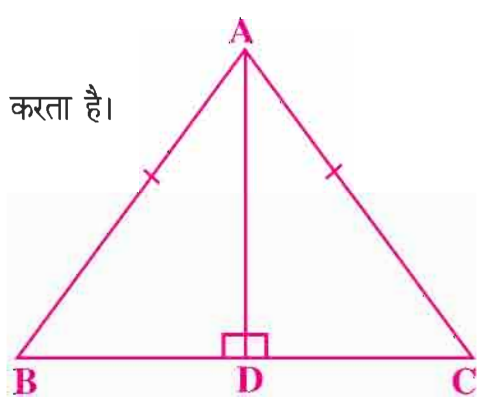
अर्थात $BD = CD$

ΔABD एवं ΔACD में

$\angle ADB = \angle ADC$ (प्रत्येक समकोण)

$AB = AC$ (ज्ञात है)

$AD = AD$ (उभयनिष्ठ है)



आकृति 10.16

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (समकोण कर्ण भुजा. सर्वांगसमता)

$\therefore$ BD = CD (स.त्रि.सं.अ.)

अर्थात AD, BC को समद्विभाजित करता है।

10.6 समद्विबाहु त्रिभुज के गुणधर्म (Properties of isosceles triangle)

हम त्रिभुज के सर्वांगसमता का अध्ययन कर चुके हैं। अब हम ऐसे त्रिभुजों के गुणधर्म के बारे में पढ़ेंगे जिनकी दो भुजा बराबर हैं।

10.6.1 किसी त्रिभुज की समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

ज्ञात है

ΔABC में AB = AC

सिद्ध करना है : $\angle B = \angle C$

रचना : $\angle A$ का अर्द्धक AD खींचिए जो BC भुजा से बिन्दु D पर मिलता है

उपपत्ति : ΔABD और ΔACD में

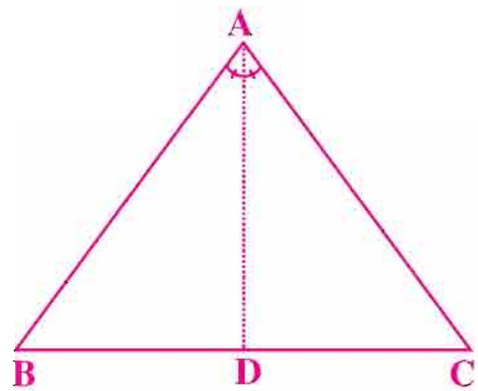
AB = AC (ज्ञात है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

AD = AD (उभयनिष्ठ भुजा)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (भु.को.भु.)

अत: $\angle B = \angle C$ (स.त्रि.सं.अ.)



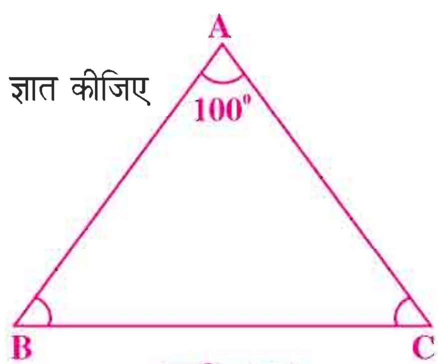
आकृति 10.17

उदाहरण 5 ΔABC में यदि $\angle A=100^0$ और AB = AC हो तो $\angle B$ तथा $\angle C$ के मान ज्ञात कीजिए

हल : ΔABC में

AB = AC

$\angle B = \angle C$



आकृति 10.18

अब $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$ (त्रिभुज के तीनों कोणों का योग = 180^0)

$\therefore 100^0 + \angle B + \angle B = 180^0$ ($\angle B = \angle C$)

$\therefore 100 + 2\angle B = 180^0$

$2\angle B = 180^0 - 100^0$

$2 \angle B = 80^0$

$\therefore \angle B = 40^0$

किन्तु $\angle B = \angle C$ इसलिए $\angle C = 40^0$

अत: $\angle B = 40^0$ उत्तर

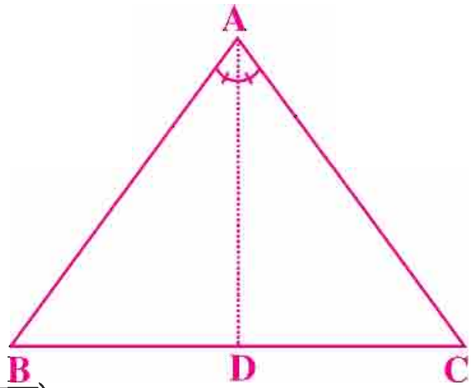
10.6.2 त्रिभुज के समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

ज्ञात है

ΔABC में $\angle B = \angle C$

सिद्ध करना है : $AB = AC$

रचना : $\angle A$ का अर्द्धक AD खींचिए, जो BC से D पर मिले।



आकृति 10.19

उपपत्ति : ΔABD और ΔACD में

$\angle B = \angle C$ (ज्ञात है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (रचना से)

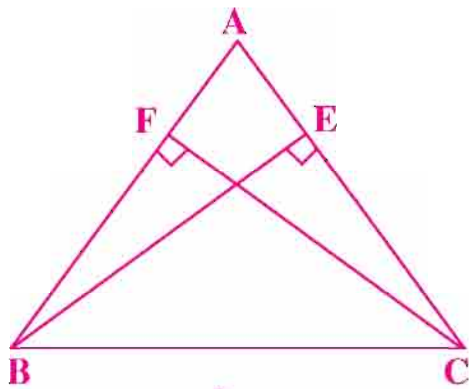
$AD = AD$ (उभयनिष्ठ है)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (कोण, कोण, भुजा नियम)

$\therefore AB = AC$ (स.त्रि.सं.अ.)

उदाहरण 6 ΔABC में BE एवं CF दो बराबर लम्ब क्रमश: भुजा AC एवं भुजा AB पर डाले गए हैं। तो सिद्ध कीजिए कि $AB = AC$

हल : ΔABC में



आकृति 10.20

ज्ञात है $BE = CF$

$BE \perp AC$ और $CF \perp AB$

ΔFBC एवं ΔECB में

$\angle BFC = \angle CEB$ (प्रत्येक समकोण है)

$BC = CB$ (उभयनिष्ठ है)

$CF = BE$ (ज्ञात है)

$\therefore \Delta FBC \cong \Delta ECB$ (समकोण, कर्ण, भुजा सर्वांगसमता)

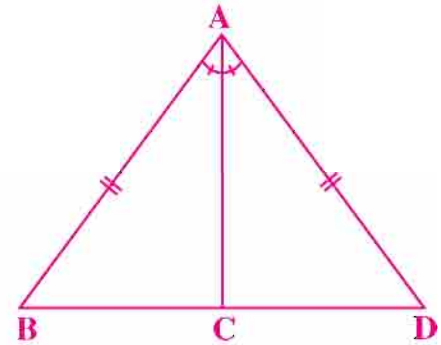
$\therefore \angle FBC = \angle ECB$ (स.त्रि.सं.अ.)

अर्थात, $\angle ABC = \angle ACB$

अत: $AC = AB$ (समान कोणों की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं)

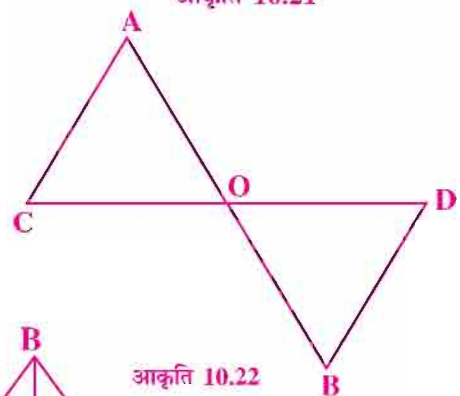
प्रश्नावली 10.1

1. यदि दी हुई आकृति 10.21 में AB= AD तथा $\angle BAC = \angle DAC$ तो क्या $\Delta ABC \cong \Delta ADC$? यदि हाँ तो इसमें सर्वांगसमता का कौन सा प्रतिबंध प्रयोग किया गया है।



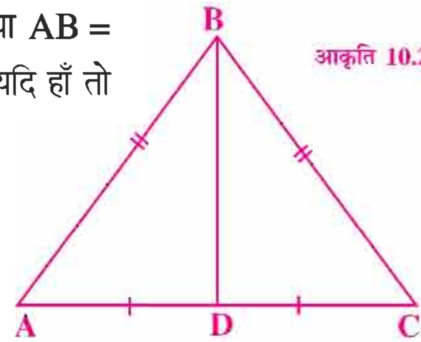
आकृति 10.21

2. यदि आकृति 10.22 में रेखाखण्ड AB तथा CD एक दूसरे को O बिन्दु पर समद्विभाजित करते हैं तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सत्य हैं?
   (i) $\Delta AOC \cong \Delta DOB$
   (ii) $\Delta AOC \cong \Delta BOD$
   (iii) $\Delta AOC \cong \Delta ODB$
   (iv) $\Delta AOC \cong \Delta OBD$



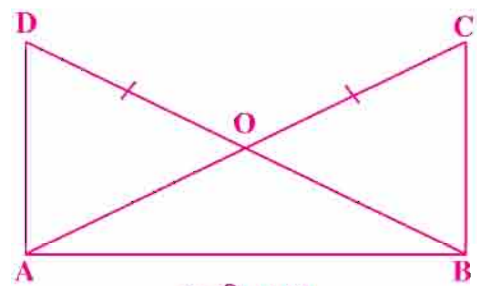
आकृति 10.22

3. दी हुई आकृति 10.23 में AD = DC तथा AB = BC तो क्या $\Delta ADB \cong \Delta CDB$ होगा? यदि हाँ तो किस प्रतिबंध से?



आकृति 10.23

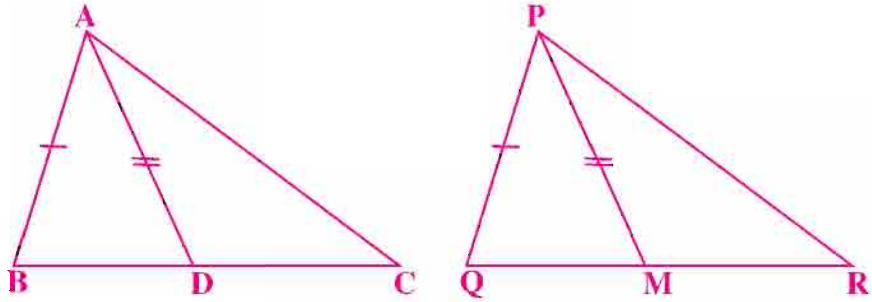
4. दिए गए आकृति 10.24 में BD = AC एवं $\angle DAB = \angle CBA = 90^0$ बताइए कि क्या $\Delta DAB \cong \Delta CBA$ यदि हाँ तो कौन से प्रतिबंध से?



आकृति 10.24

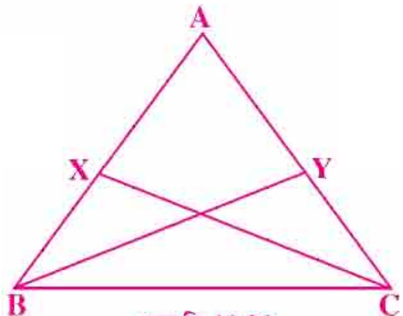
5. AB एक रेखाखंड है। इसके विपरीत और दो समान रेखाखंड AX तथा BY इस प्रकार खींचे गए हैं कि AX || BY, यदि रेखाखंड AB और XY एक दूसरे को P बिन्दु पर काटें तो सिद्ध कीजिए कि
   (i) $\Delta APX \cong \Delta BPY$ और
   (ii) रेखाखंड AB और XY बिन्दु P पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
6. दो समकोण त्रिभुजों में एक की एक भुजा तथा एक न्यूनकोण दूसरे की संगत भुजा व संगत कोण के बराबर है। सिद्ध कीजिए कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं।

7. आकृति 10.25 में ΔABC की दो भुजाएँ AB और BC तथा मध्यिका AD क्रमश: ΔPQR की भुजाओं PQ, QR तथा मध्यिका PM के बराबर है। सिद्ध कीजिए ΔABC तथा ΔPQR सर्वांगसम है।



आकृति 10.25

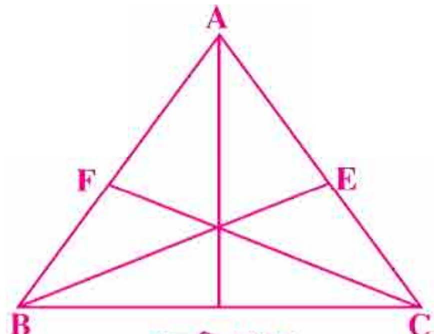
8. आकृति 10.26 में ΔABC की समान भुजाओं AB और AC में क्रमश: X और Y बिन्दु इस प्रकार है कि $AX = AY$; सिद्ध कीजिए कि $XC = YB$



आकृति 10.26

9. ΔABC समद्विभाहु त्रिभुज है, जिसमें $AB = AC$, भुजा BA को D तक इस प्रकार बढ़ाया कि $AB= AD$, सिद्ध कीजिए कि BCD समकोण है।

10. आकृति 10.27 में $AB = AC$ तथा $\angle B$ एवं $\angle C$ के अद्‌र्धक क्रमश: BE और CF हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta EBC \cong \Delta FCB$.

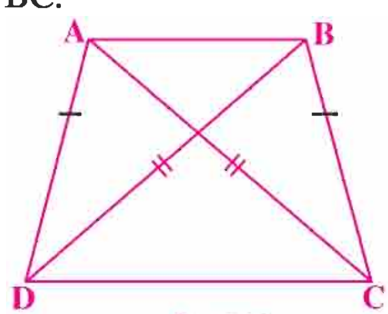


आकृति 10.27

11. एक त्रिभुज के शीर्ष कोण का अर्द्धक आधार को भी लम्बवत् सम द्विभाजित करता है तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

12. ΔABC की भुजाओं BA एवं CA को क्रमश: बिन्दु D और E तक इस प्रकार बढ़ाया गया है कि $BA = AD$ एवं $CA= AE$ तो सिद्ध कीजिए कि $ED || BC$.

13. आकृति (10.28) में $AD = BC$ और $BD = CA$ तो सिद्ध कीजिए $\angle ADB = \angle BCA$ एवं $\angle DAB = \angle CBA$.



आकृति 10.28

10.7 त्रिभुज में असमानताएँ (Inequalities in a triangle)

अभी तक हम दो त्रिभुजों के कोणों एवं भुजाओं की समानता के बारे में पढ़ रहे थे। लेकिन हर बार यह स्थिति नहीं आती। किन्हीं दो त्रिभुजों में या एक ही त्रिभुज में किन्हीं दो भुजाओं में समानता का संबंध नहीं भी हो सकता है, त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में एक भुजा दूसरी भुजा से बड़ी हो सकती है। त्रिभुज का एक कोण दूसरे कोण से बड़ा हो सकता है। अत: त्रिभुज के विभिन्न भुजाओं एवं कोणों में असमानता हो सकती है। अब हम त्रिभुज की भुजाओं और कोणों में असमानताओं का अध्ययन करेंगे।

प्रमेय 1. त्रिभुज की किन्हीं दो भुजाओं का योग, तीसरी भुजा से बड़ा होता है।

एक त्रिभुज ABC बनाइए और इसकी भुजाओं को मापिए तथा निम्नलिखित योग ज्ञात करें।

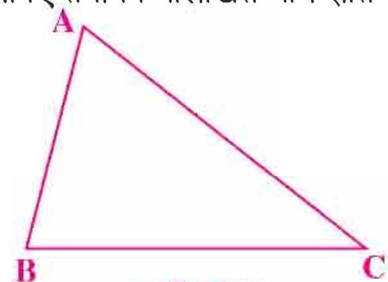
$AB + BC$, $BC + AC$ और $AC + AB$

आप क्या देखते हैं? आप पाएंगे कि

(i) $AB + AC > BC$

(ii) $BC + AC > AB$

(iii) $AB + BC > AC$

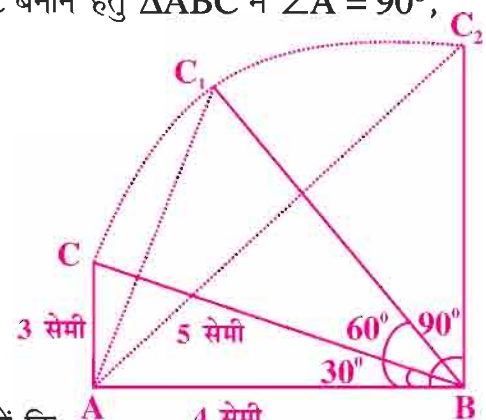


आकृति 10.29

उपरोक्त गतिविधि को अन्य त्रिभुजों के लिए भी दोहराएँ व प्रमेय 1 का सत्यापन करें।

क्रियाकलाप 3. कार्ड बोर्ड पर सर्वप्रथम समकोण त्रिभुज ABC बनाने हेतु ΔABC में $\angle A = 90^0$, $\angle B = 30^0$, $\angle C = 60^0$ बनाये।

चरण (i) कार्ड बोर्ड पर दो पिनों को बिन्दु A और बिन्दु B पर स्थापित कीजिए और धागे से त्रिभुज की भुजा $AB = 4$ सेमी. प्रदर्शित कीजिए, बिन्दु C पर धागे से भुजा $AC = 3$ सेमी. प्रदर्शित कीजिए और $BC=5$ सेमी लीजिए।



आकृति 10.30

चरण (ii) अब $BC = 5$ सेमी धागे को बिन्दु B से घुमायें कि $\angle ABC_1 = 60^0$, $BC = BC_1 = 5$ सेमी.

पहले चरण में $AC = 3$ सेमी. लेकिन अब तीसरी भुजा AC_1 की लम्बाई निश्चित ही AC से ज्यादा है अर्थात, $AC_1 > AC$

चरण (iii) अब धागे को बिन्दु B से ऐसे घुमायें कि $ABC_2 = 90^0$ अब तीसरे ΔABC_2 में $BC_2 = 5$ सेमी.। अब हम पाते हैं कि $AC_2 > AC_1 > AC$.

इस प्रकार तीनों चरणों से हम पायेंगे कि ज्यों-ज्यों कोणों का माप बढ़ता जाएगा वैसे-वैसे कोणों के सामने की भुजा भी बढ़ती जाती हैं।

अत: किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

आइए अब इस कथन को प्रमेय के रूप में सिद्ध करें।

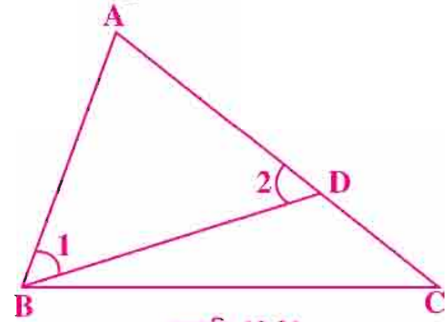
प्रमेय 2. यदि त्रिभुज की दो भुजाएं असमान हों तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है।

ज्ञात है : ΔABC में, $AC > AB$

सिद्ध करना है : $\angle ABC > \angle ACB$

रचना : AC में D बिन्दु इस प्रकार लीजिए कि

$AB = AD$, BD को मिलाइए।



आकृति 10.31

उपपत्ति : ΔABD में $AB = AD$ (रचना से)

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण) ----- (1)

परन्तु $\angle 2$, ΔBCD का बहिष्कोण है।

$\therefore \angle 2 > \angle ACB$ (बहिष्कोण प्रमेय से) -------(2)

(1) व (2) से $\therefore \angle 1 > \angle ACB$

परन्तु $\angle ABC > \angle 1$ (रचना से)

$\therefore \angle ABC > \angle ACB$

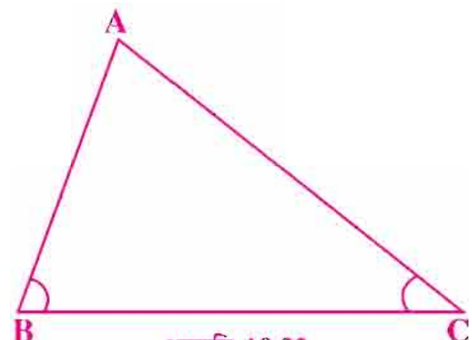
प्रमेय 3. किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।

ज्ञात है : ΔABC में $\angle B > \angle C$

सिद्ध करना है : $AC > AB$

उपपत्ति : ΔABC में तीन संभावनाएँ हैं,

जिसमें केवल एक ही सत्य होगी :



आकृति 10.32

(i) $AC = AB$

(ii) $AC < AB$

(iii) $AC > AB$

प्रथम स्थिति : यदि $AC = AB$ तो $\angle B = \angle C$ जो ज्ञात के विरुद्ध है।

$\therefore AC \neq AB$

द्वितीय स्थिति : यदि $AC < AB$ तो चूंकि बड़ी भुजा के सामने का कोण बड़ा होता है।

$\angle B < \angle C$

परन्तु यह भी ज्ञात के विरुद्ध है।

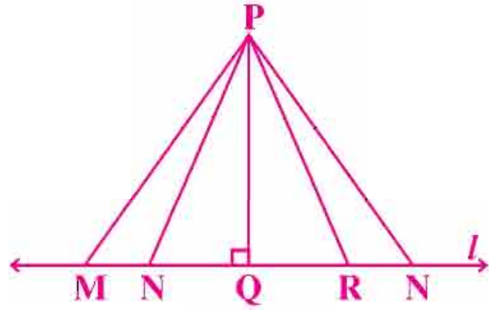
अत: $AC \nless AB$

तृतीय स्थिति : तीन संभावनाओं में से जब दो असत्य सिद्ध हो चुकी हों तो तीसरी अवश्य सत्य होगी।

$\therefore AC > AB$

प्रमेय 4. किसी सरल रेखा पर उससे बाह्य स्थित बिन्दु से जितनी सरल रेखाखंड खींचे जा सकते हैं, उन सभी में लम्ब सबसे छोटा होता है।

दिए हुए चित्र में रेखा l पर बिन्दु p । (जो रेखा l के बाहर स्थित है) से, रेखाखंड PM, PN, PQ, PR एवं PN खींचे गए हैं। इन सभी में रेखाखंड $PQ \perp l$ है। अब ΔPQR में



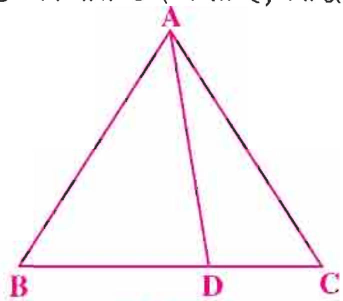
आकृति 10.33

$\angle Q = 90^0$ जो त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण है इसलिए PR, ΔPQR की सबसे बड़ी भुजा है अर्थात् $PQ<PR$ इसी प्रकार हम दर्शा सकते हैं कि PQ सभी रेखाखण्डों PM, PN, PR, PN आदि में सबसे छोटी रेखाखण्ड है।

प्रश्नावली 10.2

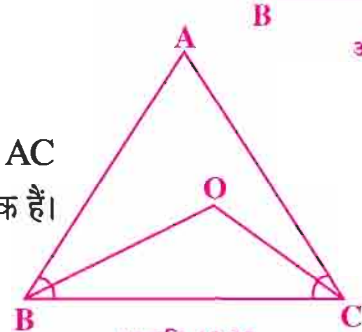
1. सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे बड़ी भुजा होती है।
2. सिद्ध कीजिए की किसी त्रिभुज के तीनों शीर्ष लम्बों का योग उसकी तीनों भुजाओं के योग से छोटा होता है।
3. ΔABC में AD, $\angle A$ का अर्द्धक है। सिद्ध कीजिए कि $AB > BD$.
4. ABCD एक चतुर्भुज हैं। विकर्ण AC एवं BD एक-दूसरे को बिन्दु 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं, सिद्ध कीजिए कि

   $(AB + BC + CD + DA) > (AC + BD)$
5. दी गयी आकृति 10.34 में ΔABC में भुजा BC पर कोई बिन्दु D है। AD को जोड़ा गया है। सिद्ध कीजिए कि $AB + BC + CA > 2AD$



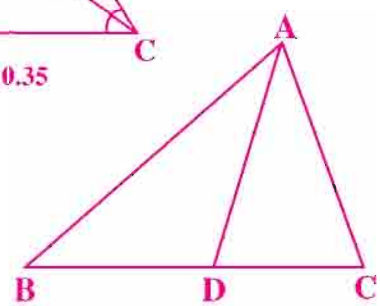
आकृति 10.34

6. दी गयी आकृति 10.35 में ΔABC में $AB > AC$ है। OB एवं OC क्रमश: $\angle B$ एवं $\angle C$ के अर्द्धक हैं। सिद्ध कीजिए कि $OB > OC$



आकृति 10.35

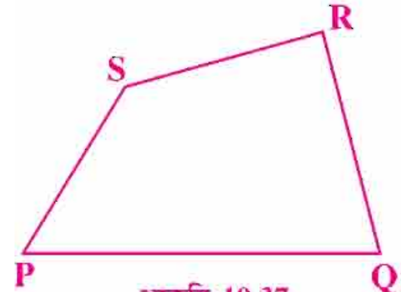
7. दी गयी आकृति 10.36 में ΔABC में रेखाखण्ड AD भुजा BC से बिन्दु D पर मिलता है और $AB > AC$ सिद्ध कीजिए कि $AB > AD$



आकृति 10.36

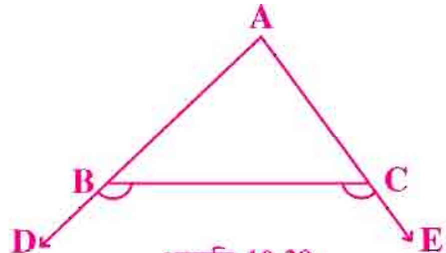
8. दी गयी आकृति 10.37 में PQRS एक चतुर्भुज है। PQ इसकी सबसे बड़ी भुजा है तथा RS इसकी सबसे छोटी भुजा है। सिद्ध कीजिए कि- $\angle R > \angle P$ एवं $\angle S > \angle Q$

(संकेत- PR एवं QS को मिलाइए।)



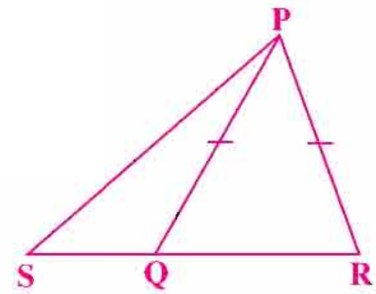
आकृति 10.37

9. दी गयी आकृति 10.38 में ΔABC की भुजा AB को बिन्दु D तक एवं भुजा AC को E तक बढ़ाया गया है। यदि $\angle CBD > \angle BCE$ तो सिद्ध कीजिए कि $AB > AC$



आकृति 10.38

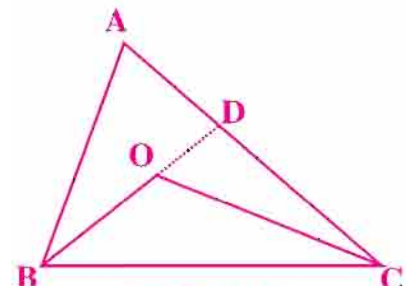
10. दी गयी आकृति 10.39 में $PQ = PR$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $PS > PQ$



आकृति 10.39

11. दी गयी आकृति 10.40 में ΔABC के अंत:भाग में O एक बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $(AB+AC) > (OB+OC)$

(संकेत : OB को बढ़ायें जिससे वह AC से बिन्दु D पर मिलें)

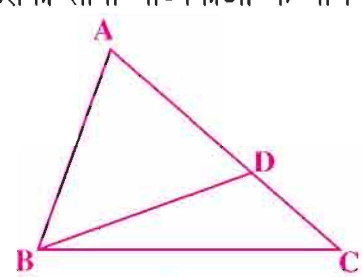


आकृति 10.40

12. ΔABC में AD उसकी एक मध्यिका है। सिद्ध कीजिए कि $AB + AC > 2AD$

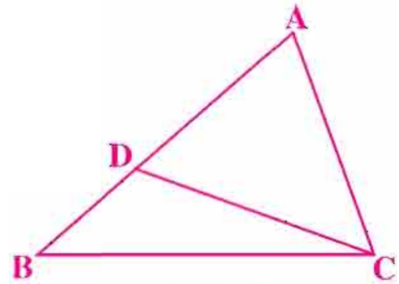
13. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग उसकी तीनों मध्यिकाओं के योग से बड़ा होता है।

14. दी गयी आकृति 10.41 में ΔABC में $AC > AB$ और भुजा AC पर D एक बिन्दु इस प्रकार है कि AB=AD. सिद्ध कीजिए कि $CD < BC$



आकृति 10.41

15. दी गयी आकृति 10.42 में ΔABC में $AB = BC$ और भुजा AB पर D कोई बिन्दु है। सिद्ध कीजिए $CD>AD$



आकृति 10.42

10.8 त्रिभुजों में संगामी रेखाखण्ड

हमने पिछली कक्षाओं में कुछ त्रिभुज से संबंधित कुछ रेखाखण्डों के बारे में अध्ययन किया है। आइए इनका पुनरावलोकन करें

1. मध्यिका (Median) : त्रिभुज के किसी शीर्ष को सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाले रेखाखण्ड को त्रिभुज की मध्यिका कहते हैं।

2. भुजाओं के लम्बार्धक (Perpendicular bisectors) : त्रिभुज की किसी भुजा के मध्य बिन्दु पर खींचा गया लम्ब, भुजा का लम्बार्धक कहलाता है।

3. कोणों के समद्विभाजक (Angle bisecotr) : त्रिभुज के किसी कोण के समद्विभाजक को त्रिभुज के कोण का समद्विभाजक कहते है।

4. शीर्षलम्ब (Altitude) वह रेखाखण्ड जो त्रिभुज के किसी शीर्ष से संमुख भुजा पर लम्ब डालने से प्राप्त हो को त्रिभुज का एक शीर्षलम्ब कहते हैं।

5. संगामी रेखाएं (Concurrent lines): तीन या तीन से अधिक रेखाएं यदि एक ही बिन्दु से होकर गुजरें तो वे संगामी या समरेख कहलाती है। इस स्थिति में उनका उभयनिष्ठ बिन्दु रेखाओं का संगमन बिन्दु (Point of Concurrency) कहलाता है।

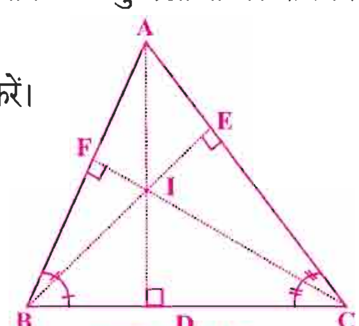
आइए अब उपरोक्त रेखाखण्डों से संबधित कुछ प्रमेयों पर विचार करें।

प्रमेय 5. किसी त्रिभुज के कोणार्द्धक संगामी होते हैं।

ΔABC में $\angle A$ का कोणार्द्धक AI है

$\angle B$ का कोणार्द्धक BI है।

$\angle C$ का कोणार्द्धक CI है।



आकृति 10.43

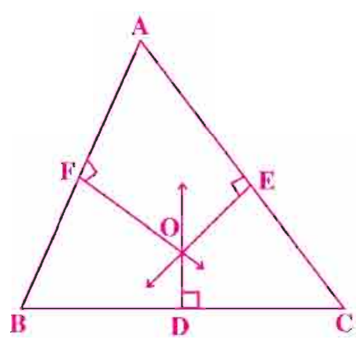
ये तीनों कोणार्द्धक एक ही बिन्दु I पर संगामी हैं। अत: बिन्दु I संगमन बिन्दु है।

अंतः केंद्रः त्रिभुज के कोणार्द्धक के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का अंत: केंद्र (Incentre) कहते हैं।

प्रमेय 6. किसी त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्द्धक संगामी होते हैं।

ΔABC में

OD भुजा BC का लम्बार्द्धक है।



आकृति 10.44

OE भुजा AC का लम्बार्द्धक है।

OF भुजा AB का लम्बार्द्धक है।

ये तीनों लम्बार्द्धक एक ही बिन्दु 'O' पर संगामी हैं। अत: बिन्दु 'O' संगमन बिन्दु है।

परिकेन्द्र : त्रिभुज की भुजाओं के लम्बार्द्धकों का संगमन बिन्दु त्रिभुज का परिकेंद्र (Circumcentre) कहलाता है।

प्रमेय 7. किसी त्रिभुज के शीर्ष लम्ब संगामी होते हैं।

Δ ABC में

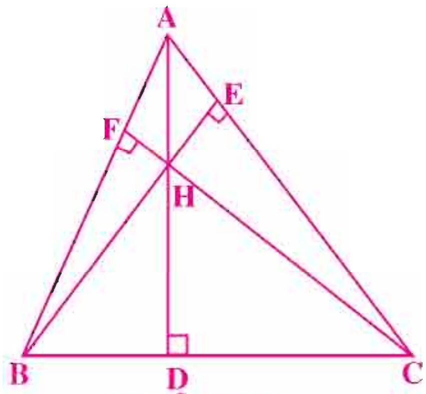
AD भुजा BC का शीर्ष लम्ब है।

CF भुजा AB का शीर्ष लम्ब है तथा

BE भुजा AC का शीर्ष लम्ब हैं।

ये तीनों शीषलंब बिन्दु `H' पर संगामी है।

अत: बिन्दु H संगमन बिन्दु है।



आकृति 10.45

लम्ब केन्द्र : त्रिभुज के शीर्षलंबों के संगमन बिन्दु को त्रिभुज का लम्ब केंद्र (orthocentre) कहते हैं।

प्रमेय 8. किसी त्रिभुज की मध्यिकाएँ एक ही बिन्दु से गुजरती हैं जो प्रत्येक मध्यिका को 2:1 में विभाजित करता है।

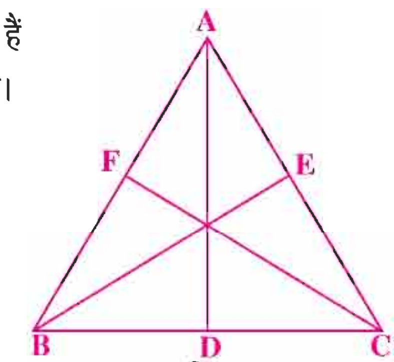
Δ ABC में

AD, BE और CF

मध्यिकाएं हैं।

ये तीनों मध्यिकाएँ बिन्दु 'G' पर संगामी हैं।

अत: बिन्दु 'G' मध्यिकाओं का संगमन बिन्दु है।



आकृति 10.46

यह बिन्दु प्रत्येक मध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभक्त करता है।

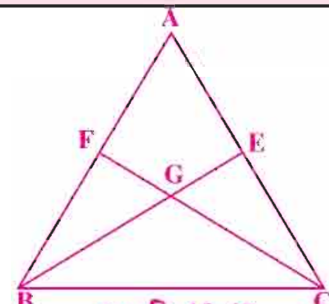
केंद्रक : त्रिभुज की मध्यिकाओं के संगमन बिन्दु को केंद्रक (Centroid) कहते हैं।

उदाहरण 7 यदि किसी त्रिभुज की दो मध्यिकाएँ बराबर हों तो सिद्ध कीजिए कि वह समद्विबाहु त्रिभुज होगा।

प्रमाण :

ज्ञात है : Δ ABC जिसमें मध्यिकाएँ

BE और CF एक दूसरे को G पर प्रतिच्छेद



आकृति 10.47

करती हैं तथा BE = CF, F तथा

E क्रमश: AB तथा AC के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है : Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है।

उपपत्ति : Δ ABC का केंद्रक G है (ज्ञात है)

$\therefore BG : GE = CG : GF = 2:1$

अत: $BG = \frac{2}{3}BE$ ------- (i)

$GE = \frac{1}{3}BE$ ------- (ii)

तथा $CG = \frac{2}{3}CF$ ------ (iii)

$GF = \frac{1}{3}CF$ -------- (iv)

परन्तु BE = CF (ज्ञात है)

$\therefore$ (i) और (iii) से BG = CG और (ii) और (iv) से GE = GF

अब Δ BGF और ΔCGE में

BG = CG (सिद्ध कर चुके हैं)

GF = GE (सिद्ध कर चुके हैं)

$\angle BGF = \angle CGE$ (शीर्षाभिमुखकोण हैं)

$\therefore$ $\Delta BGF \cong CGE$ (भु.को.भु अभि.)

अत: BF = CE

या 2 (BF) = 2 (CE)

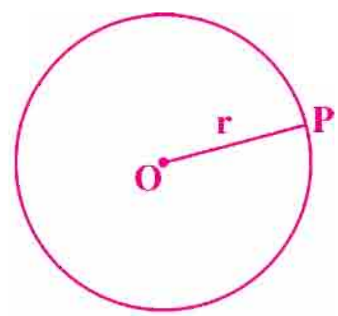
$\therefore$ AB = AC

$\therefore$ Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज हैं।

10.9 बिन्दु पथ (Locus)

बिंदु पथ बिन्दुओं का एक विशिष्ट समुच्चय होता है जो किन्ही प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हैं। इसे समझने के लिए हम कुछ उदाहरण लेते हैं:

मान लीजिए कि किसी तल में O एक बिन्दु है तथा r एक धनात्मक वास्तविक संख्या है। तल के उन बिंदुओं से जो 'O' से r दूरी पर हैं, एक बिन्दु पथ बनता है। यह एक वृत्त है जिसका केंद्र O तथा त्रिज्या r है।



आकृति 10.48

(आकृति 10.48)

दो समान्तर रेखाएँ l और m लीजिए। उन सभी बिन्दुओं पर विचार कीजिए जो l और m से समान दूरी पर है। उन बिन्दुओं से रेखा n बनती है जो l और m के समान्तर है तथा उनसे समान दूरी पर है।

आकृति 10.49

अब मान लीजिए कि एक रेखा l तथा एक धनात्मक वास्तविक संख्या d है। उन सभी बिन्दुओं पर विचार कीजिए जो l से d दूरी पर स्थित हैं। यहाँ हमें l के समांतर व इससे d दूरी पर दो रेखाएँ m और n प्राप्त होती हैं।

आकृति 10.50

यह ध्यान देने योग्य है कि उपयुक्त तीनों स्थितियों में बिन्दु, विशेष प्रतिबंधों का पालन करते हैं। अलग-अलग प्रतिबंधों से अलग-अलग बिन्दु पथ प्राप्त होते हैं।

परिभाषा : बिन्दुओं का बिन्दु पथ उन सभी बिन्दुओं का समुच्चय होता है, जो दी हुई एक या अधिक प्रतिबंधों का पालन करें।

ध्यान रहे कि इस परिभाषा में दो पूरक विचार शामिल हैं।

(i) जो बिन्दु दी हुई शर्तों (प्रतिबंधों) का पालन करता है वह बिन्दु पथ का बिन्दु होता है।

(ii) बिन्दु पथ के प्रत्येक बिन्दु को दिए गए प्रतिबंधों का पालन करना अनिवार्य होता है।

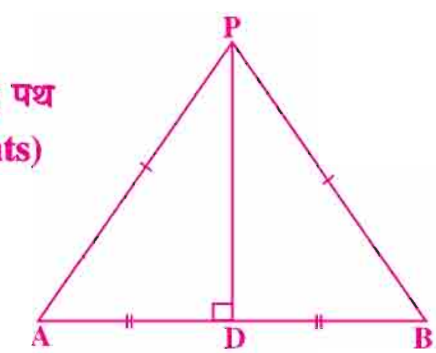
इस प्रकार बिन्दु पथ व उसे निर्धारित करने वाले प्रतिबंध एक ही समझे जा सकते हैं। एक का वर्णन होने से दूसरे का भी बोध होता है।

कोई बिन्दु पथ बिन्दुओं का समुच्चय होता है।

अब हम दो महत्वपूर्ण बिन्दु पथों का अध्ययन करेंगे। इनकी उपयोगिता अन्य प्रमेयों व ज्यामितीय रचनाओं में होगी।

10.9.1 दो दिए हुए बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ (Locus of points equidistant from two given points)

मान लीजिए कि A और B दो दिए हुए बिन्दु हैं। P बिन्दु के बिन्दु पथ पर विचार करें जो प्रतिबंध AP=BP को संतुष्ट करता है।



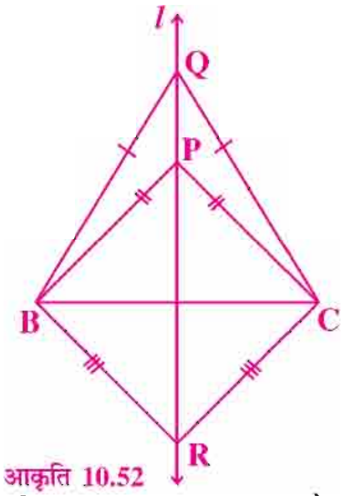
आकृति 10.51

यदि AB का मध्य बिन्दु D है, तो AD = BD, इसलिए D बिन्दु पथ पर स्थित है। मान लें कि D के अतिरिक्त P अन्य ऐसा बिन्दु है कि AP= BP, हम देखते हैं कि यदि PD को मिलाया जाए तो AP और BP क्रमश: दो त्रिभुजों ADP और BDP की भुजाएँ बन जाती हैं। इन त्रिभुजों के संबंध में हम क्या कह सकते हैं? हम देखते हैं कि इनमें सर्वांगसमता की भुजा-भुजा-भुजा प्रमेय का पालन होता है। अत: $\Delta ADP \cong \Delta BDP$, जिसमें $\angle ADP = \angle BDP$ यह सरलतापूर्वक सिद्ध किया जा सकता है कि $\angle ADP = 90^0$ या $PD \perp AB$, अत: AB का लंब अर्द्धक PD हुआ। PD को सरल रेखा कह सकते हैं। चूंकि A और B से P समदूरस्थ है। इसका बिन्दु पथ रेखा l में समाविष्ट है।

उपर्युक्त विवेचन के आधार पर निम्नलिखित तथ्य प्राप्त होता है।

दिए हुए दो बिन्दुओं से समदूरस्थ किसी बिन्दु का बिन्दु पथ उन्हें मिलाने वाले रेखाखंड का समद्विभाजक होता है।

उदाहरण 8 एक ही आधार BC पर तीन समद्विबाहु त्रिभुज ΔPBC, ΔQBC और ΔRBC स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि P, Q और R समरेख हैं।



आकृति 10.52

हल : ज्ञात है ΔPBC, ΔQBC तथा ΔRBC इस प्रकार है कि PB = PC, QB = QC, RB= RC

सिद्ध करना है : P, Q, R समरेख हैं।

उपपत्ति : ΔPBC समद्विबाहु है (ज्ञात है)

$\therefore PB = PC$

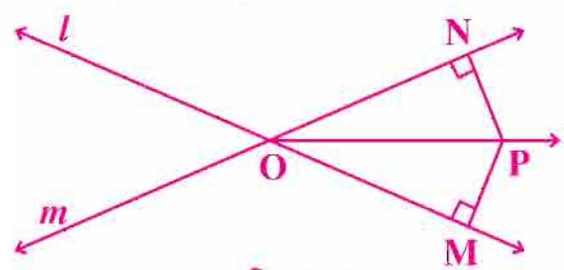
B और C से समदूरस्थ बिन्दु पथ BC का लंब अर्द्धक होगा, मान लीजिए यह l है।

$\therefore$ P बिन्दु l पर स्थित है। --------- (i)

इसी प्रकार Q और R, l पर स्थित हैं ------(ii)

(i) व (ii) से P, Q व R समरेख है।

10.9.2 दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से समदूरस्थ बिन्दु का बिन्दुपथ (Locus of points equidistant from two intersecting lines)



आकृति 10.53

मान लीजिए दो रेखाएं l और m एक दूसरे को O बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं। l और m से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ हमें ज्ञात करना है। यदि कोई बिन्दु P जो l पर नहीं है, तो इसकी l से दूरी P से l पर लम्ब की लम्बाई होगी। दूसरी ओर यदि P बिन्दु l पर ही है तो P की l से दूरी शून्य होगी।

मान लीजिए कि यदि $d = 0$ तब बिन्दु P, l और m दोनों पर होगा अर्थात बिन्दु O के सम्पाती होगा। इस प्रकार बिन्दु O बिन्दु पथ पर होगा।

यदि $d \neq 0$, तो P न तो l पर और न ही m पर स्थित होगा। अत: l और m से निर्मित चार कोणों में से एक के अंत: भाग में स्थित होगा।

यदि $PM \perp l$ तथा $PN \perp m$, तब $PM = PN = d$ (दिए गए प्रतिबन्धानुसार)

ΔOPM और ΔOPN में

$\angle M = \angle N$ (प्रत्येक 90^0)

$OP = OP$ (उभयनिष्ठ)

$PM = PN$ $(PM = PN = d)$

$\therefore \Delta OPM \cong \Delta OPN$ (समकोण-कर्ण-भुजा)

$\therefore \angle POM = \angle LON$ (स.त्रि.सं.अं.)

इससे स्पष्ट है कि P, $\angle MON$ के अंत भाग में स्थित है तथा OP, $\angle MON$ की अर्द्धक है। अथवा $\angle MON$ के अर्द्धक पर P स्थित है। इसी प्रकार P अन्य तीन कोणों के अर्द्धकों पर भी स्थित हो सकता है। इन चारों कोणार्द्धकों से दो रेखाएँ बनती हैं। मान लीजिए ये p और q हैं। तब P बिन्दु समुच्चय $p \cup q$ का अवयव होगा। हम कह सकते हैं कि $p \cup q$ बिन्दु P का बिन्दु पथ है। जब $p \cup q$ में ऐसा कोई बिन्दु न हो जो l और m से समदूरस्थ न हो।

उपर्युक्त विवेचन के आधार पर हमे निम्नलिखित तथ्य प्राप्त होता है।

दो प्रतिच्छेदी रेखाओं से सम दूरस्थ बिन्दु का बिन्दु पथ, उन रेखाओं से बने कोणों की समद्विभाजकों का युग्म होता है।

उदाहरण 9 चतुर्भुज ABCD के $\angle B$ एवं $\angle C$ के अर्द्धक परस्पर P बिन्दु पर मिलते हैं। सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P सम्मुख भुजाओं AB और CD से समदूरस्थ है।

प्रमाण : ज्ञात है- चतुर्भुज ABCD जिसमें $\angle B$ व

$\angle C$ के अर्द्धक P पर मिलते हैं।

साथ ही $PM \perp AB$ तथा $PN \perp CD$

सिद्ध करना है : PM = PN

रचना : $PL \perp BC$ बनाया

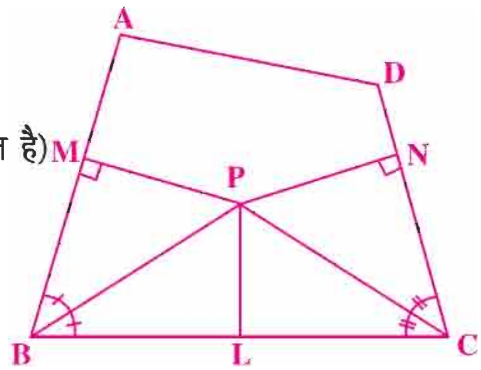
उपपत्ति : $\angle B$ के अर्द्धक पर बिन्दु P स्थित है। (ज्ञात है)

$\therefore PM = PL$ ------(i)

$\angle C$ के अर्द्धक पर भी बिन्दु P स्थित है (ज्ञात है)

$\therefore PL = PN$ ------ (ii)

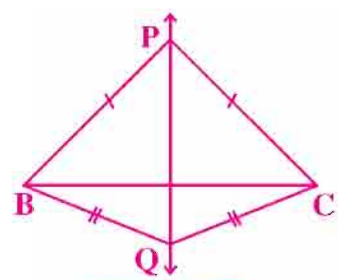
(i) व (ii) से PM = PN



आकृति 10.54

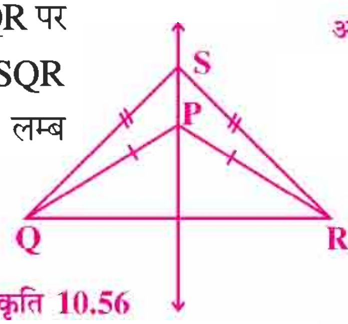
प्रश्नावली 10.3

1. एक चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को सम द्विभाजित करते हैं। सिद्ध कीजिए कि यह चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज है।
2. तीन असमरेख बिन्दुओं A, B और C के सम दूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
3. तीन समरेख बिन्दुओं से समदूरस्थ बिन्दुओं का बिन्दु पथ क्या होगा? अपने उत्तर का कारण स्पष्ट कीजिए।
4. सिद्ध कीजिए कि A और B बिन्दुओं से होकर जाने वाले वृत्तों के केंद्रों का बिन्दु पथ AB रेखाखंड का लंबअर्द्धक है।
5. दी गयी आकृति 10.55 में उभयनिष्ठ आधार BC पर रेखा BC के विपरीत ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज ΔPBC और ΔQBC स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि P और Q को मिलाने वाली रेखा BC को समकोण पर समद्विभाजित करती है।



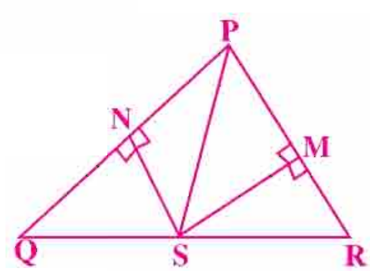
आकृति 10.55

6. दी गयी आकृति 10.56 में उभयनिष्ठ आधार QR पर एक ही ओर दो समद्विबाहु त्रिभुज PQR और ΔSQR स्थित हैं। सिद्ध कीजिए कि SP रेखा QR की लम्ब अर्द्धक है।



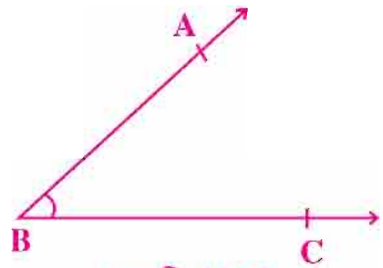
आकृति 10.56

7. दी गयी आकृति 10.57 में $\angle P$ का अर्द्धक PS, QR भुजा को S बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। $SN \perp PQ$ एवं $SM \perp PR$ खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि SN = SM



आकृति 10.57

8. दी गयी आकृति 10.58 में कोण ABC दिया गया है। BA और BC से समदूरस्थ तथा $\angle ABC$ के अंत भाग में किसी बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।



आकृति 10.58

9. ΔABC का लम्ब केंद्र P है। सिद्ध कीजिए कि ΔPBC का लम्ब केंद्र बिन्दु A है।

10. ΔABC में मध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G से गुजरती हैं।

(a) यदि $BG = 6$ सेमी तो BE का मान क्या होगा?

(b) यदि $GF = 4$ सेमी तो GC का मान क्या होगा?

(c) यदि $AD = 7.5$ सेमी तो GD का मान क्या होगा?

11. Δ ABC समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$, BC का मध्य बिन्दु D है। सिद्ध कीजिए कि परिकेंद्र, अंतकेंद्र, लंब केंद्र तथा केंद्रक सभी AD रेखा पर स्थित है।

12. Δ ABC में मध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं।

सिद्ध कीजिए $BE + CF > \frac{3}{2} BC$ (संकेत $BG + GC > BC$)

13. Δ ABC का लम्ब केंद्र H है। AH, BH और CH में मध्य बिन्दु क्रमश: X, Y और Z हैं। सिद्ध कीजिए कि Δ XYZ का लम्ब केंद्र भी H है।

14. Δ ABC में मध्यिकाएँ AD, BE और CF बिन्दु G पर प्रतिच्छेद करती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $4\ (AD + BE + CF) > 3\ (AB + BC + CA)$

15. ΔABC की भुजा BC में वह बिन्दु किस प्रकार ज्ञात करेंगे जो भुजाओं AB और AC से समदूरस्थ हो?

16. किसी त्रिभुज की तीनों मध्यिकाएं बराबर हैं, सिद्ध कीजिए कि वह समबाहु त्रिभुज है।

17. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की दो मध्यिकाओं का योग तीसरी मध्यिका से बड़ा होता है।

याद रखने योग्य बातें

- समान आकार एवं समान आकृति वाली आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं।
- यदि ΔABC एवं ΔPQR सर्वांगसम हैं तो $AB = PQ$, $BC = QR$ एवं $AC = PR$ एवं $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ एवं $\angle C = \angle R$ और उनके शीर्षों में निम्न संगतता होगी।
  $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$ एवं $C \leftrightarrow R$
- दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ व उनके बीच के कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं व उनके बीच के कोण बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (भु-को-भु अभिग्रहित)
- दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज के दो कोण तथा उनके बीच की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों व बीच की भुजा के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (को-भु-को अभिग्रहित)
- दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज के दो कोण एक भुजा (बीच की नहीं) दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों व भुजा के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (को.-को.-भु) अभिग्रहित।
- दो त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज को तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की संगत तीनों भुजाओं के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (भु-भु-भु. अभिग्रहित)।
- दो समकोण त्रिभुजों में यदि एक त्रिभुज का कर्ण व एक भुजा दूसरे त्रिभुज के कर्ण व संगत भुजा के बराबर हो तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। (समकोण भु-क-भु.) अभिग्रहित।
- किसी त्रिभुज को दो बराबर भुजाओं के सामने के कोण बराबर होते हैं।
- यदि किसी त्रिभुज में दो कोण बराबर हों, तो उनके सामने की भुजाएँ भी बराबर होती हैं।
- समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।
- यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ असमान हों तो बड़ी भुजा के सामने वाला कोण बड़ा होता है।
- किसी त्रिभुज में बड़े कोण के सामने की भुजा बड़ी होती है।
- किसी त्रिभुज में दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।
- किसी रेखा के बाहर स्थित एक बिन्दु से रेखा तक जितने रेखाखंड खींचे जा सकते हैं उनमें लम्ब सबसे छोटा होता है।

प्रायोजना कार्य (Project Work)

- त्रिभुज के तीनों अन्तः कोणों का योग 180^0 होता है सत्यापन करना।
- विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों का अन्तः केन्द्र ज्ञात करना।
- यह दर्शाना कि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार एवं ऊँचाई के गुणनफल के आधे के बराबर होता है।