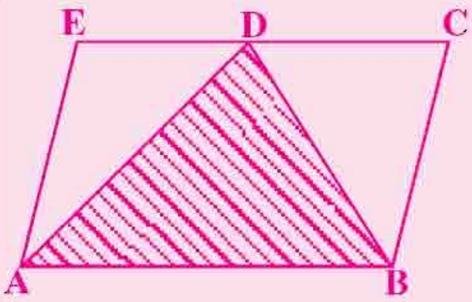
पाठ 11
समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)



ABCE का क्षेत्रफल

= ABD का क्षेत्रफल

+ BCD का क्षेत्रफल

+ ADE का क्षेत्रफल

हम पढ़ेंगे :

- चतुर्भुज
- समांतर चतुर्भुज
- समांतर चतुर्भुज के गुणधर्म
- आयत, समचतुर्भुज, वर्ग
- क्षेत्रफल
- समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल

11.1 भूमिका (Indroduction)

पिछली कक्षाओं में हमने तीन एवं चार असंरेखीय बिन्दुओं से निर्मित आकृतियों जिन्हें क्रमश: त्रिभुज एवं चतुर्भुज कहते हैं, का अध्ययन किया है।

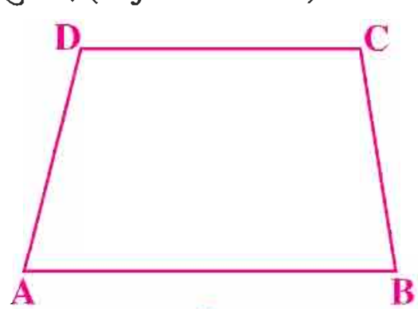
आइए चतुर्भुजों की भुजाओं व कोणों से संबंधित जानकारी का पुनरावलोकन करें।

(अ) सम्मुख कोण (Opposite angles): किसी चतुर्भुज के ऐसे दो कोण, जिनकी कोई भी भुजा उभयनिष्ठ न हो, सम्मुख कोण कहलाते हैं।

(ब) आसन्न कोण (Adjacent angles) किसी चतुर्भुज के ऐसे दो कोण जिनकी कोई एक भुजा उभयनिष्ठ हो आसन्न कोण या संलग्न कोण कहलाते हैं।

(स) सम्मुख भुजाएँ (Opposite sides) : चतुर्भुज की जिन दो भुजाओं में कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं होता, उन्हें सम्मुख भुजाएँ कहते हैं।

(द) संलग्न भुजाएँ या आसन्न भुजाएँ (Adjacent sides) : चतुर्भुज की जिन दो भुजाओं का सीमान्त बिन्दु उभयनिष्ठ होता हैं, उन्हें संलग्न भुजाएँ या आसन्न भुजाएँ (adjacent sides) कहते हैं।



आकृति 11.1

ऊपर दी गयी आकृति 11.1 में

(a) $\angle A, \angle C$ एवं $\angle B, \angle D$ सम्मुख कोणों के दो युग्म हैं।

(b) $\angle A, \angle B$ आसन्न कोणों का एक युग्म है। शेष युग्म इस प्रकार हैं-
$\angle B, \angle C$; $\angle C, \angle D$ और $\angle D, \angle A$

(c) AB और DC सम्मुख भुजाओं का एक युग्म है, AD और BC सम्मुख भुजाओं का दूसरा युग्म है।

(d) AB और BC आसन्न भुजाओं (संलग्न भुजाओं) का एक युग्म है, BC, CD; CD, DA एवं DA, AB आसन्न भुजाओं के अन्य तीन युग्म हैं।

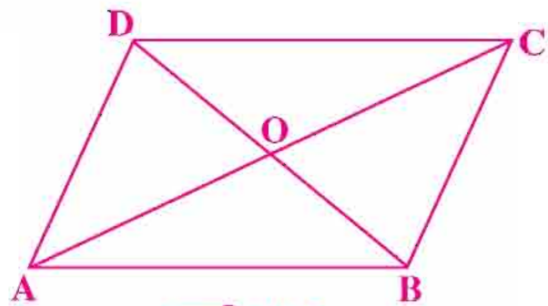
हमने पिछली कक्षाओं में कुछ विशेष प्रकार की चतुर्भुजों के बारे में भी सीखा है। जैसे : वर्ग, आयत, समांतर चतुर्भुज, समलंब चतुर्भुज आदि।

इस कक्षा में हम समांतर चतुर्भुजों पर आधारित कुछ तथ्यों (प्रमेयों) को सिद्ध करने के साथ-साथ आयत, वर्ग, समचतुर्भुज आदि पर विचार करेंगे। समांतर चतुर्भुजों के क्षेत्रफलों पर भी पाठ के अंतिम भाग में चर्चा करेंगे।

11.2 समांतर चतुर्भुज (Parallelogram)

वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।

आकृति 11.2 में चतुर्भुज ABCD समांतर चतुर्भुज हैं जहाँ $AD || BC$ और $AB || DC$.



आकृति 11.2

क्रियाकलाप 1. आकृति (11.2) के अनुसार एक समांतर चतुर्भुज बनाइये। अब प्रत्येक भुजा एवं कोण को नाप कर निम्न तालिका में लिखिए।

तालिका 11.1

लम्बाई		लम्बाई		कोणों की माप		कोणों की माप	
AB	CD	AD	BC	$\angle A$	$\angle C$	$\angle B$	$\angle D$

तालिका में दी हुई प्रविष्टियों से हम पाएंगे कि भुजा $AB = CD$, भुजा $AD = BC$

एवं $\angle A = \angle C$ और $\angle B = \angle D$

इसी प्रकार $AO = OC$ एवं $DO = OB$ को जाँचा जा सकता है।

अत: नापने एवं जाँच करने के प्रयोगों से हमने पाया कि

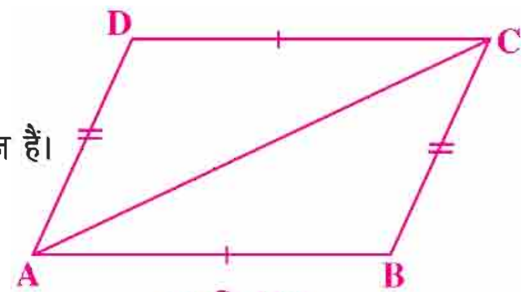
समांतर चतुर्भुज ABCD में

1. प्रत्येक युग्म में सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
2. प्रत्येक युग्म में सम्मुख कोण समान होते हैं।
3. दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

क्या उपरोक्त गुण सभी समांतर चतुर्भुजों के लिए सत्य होते हैं।

इस प्रश्न के उत्तर की जाँच के लिए आप कुछ अन्य समांतर चतुर्भुज बना कर प्रयोग कर सकते हैं। लेकिन इसके बाद भी हम यह नहीं कह सकते हैं कि उपरोक्त गुण सभी समांतर चतुर्भुजों के लिये सत्य होते हैं। सभी समांतर चतुर्भुजों के लिए हमें उपरोक्त तथ्यों को तार्किक रूप से सिद्ध करना आवश्यक होगा। आइए इनके प्रमाणों पर चर्चा करें।

प्रमेय 1. यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं का एक युगल समान और समांतर हो तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।



आकृति 11.3

ज्ञात है : चतुर्भुज ABCD में

इसमें $AB = CD$ तथा $AB \parallel DC$

सिद्ध करना है : ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

रचना : AC को मिलाएँ।

उपपत्ति : ΔABC तथा ΔCDA में

$AB = CD$ (ज्ञात है)

$AC = CA$ (उभयनिष्ठ हैं)

$\angle BAC = \angle DCA$ (एकांतर कोण हैं जहाँ $AB \parallel CD$)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta CAD$ (भु.को.भु.से)

जिसमें $\angle BCA = \angle DAC$ (स.त्रि.सं.अं.)

परन्तु ये एकांतर अंत: कोण है।

$\therefore AD \parallel BC$

इस प्रकार चतुर्भुज ABCD में $AB \parallel CD$ (दिया है)

तथा $AD \parallel BC$ (सिद्ध किया है)

अत: ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

उदाहरण 1. दिए हुए चित्र में समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजाओं AB और DC के मध्य बिन्दु क्रमश: X और Y है। सिद्ध कीजिए कि AXCY एक समांतर चतुर्भुज हैं।

प्रमाण

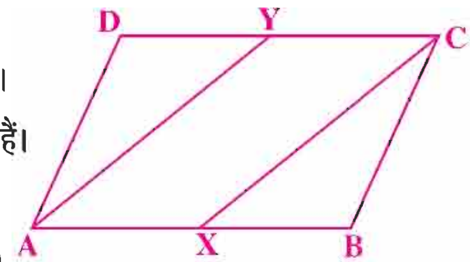
ज्ञात है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज हैं।

X एवं Y क्रमशः AB और DC के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना है : AXCY एक समांतर चतुर्भुज हैं।

उपपत्ति : समांतर चतुर्भुज ABCD में

DC = AB (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)



आकृति 11.4

$\therefore \frac{1}{2}$ DC = $\frac{1}{2}$ AB

$\therefore$ YC = AX (X एवं Y क्रमशः AB और DC के मध्य बिन्दु हैं ----- (i)

DC || AB (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore$ YC || AX (क्योंकि YC एवं AX क्रमशः भुजाओं DC एवं AB के भाग हैं ..... (ii)

$\therefore$ (i) एवं (ii) से

AXCY एक समांतर चतुर्भुज हैं

प्रमेय 2. यदि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान हों, तो वह समांतर चतुर्भुज होगा।

ज्ञात है : चतुर्भुज ABCD में

AB = DC एवं BC = AD

सिद्ध करना है : ABCD समांतर चतुर्भुज है।

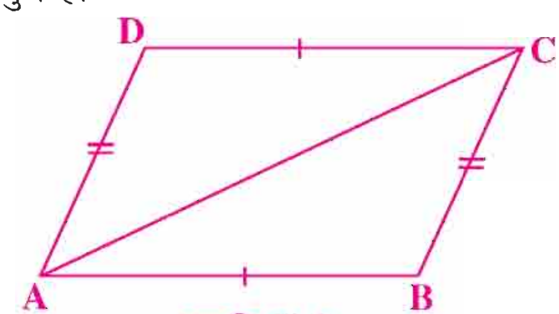
रचना : AC को मिलाएँ।

उपपत्ति : ΔACB एवं ΔCAD में

CB = AD (ज्ञात है)

AB = CD (ज्ञात है)

AC = CA (उभयनिष्ठ है)



आकृति 11.5

$\therefore \Delta ACB \cong \Delta CAD$ (भु.-भु.-भु. अभिग्रहित)

$\therefore \angle CAB = \angle ACD$ एवं

$\angle ACB = \angle CAD$ (स.त्रि.सं.अं.)

AB और DC रेखाखण्ड AC क्रमशः बिन्दु A और C में प्रतिच्छेद करती है तथा एकांतर अंत:कोण $\angle CAB = \angle ACD$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$\therefore$ AB || DC --------- (1)

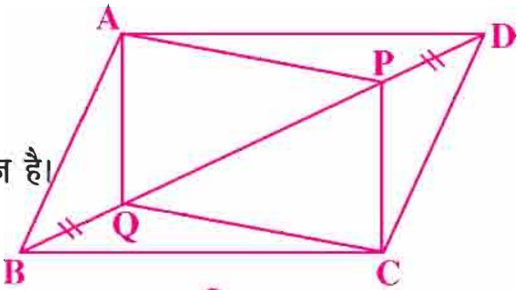
इसी प्रकार BC और AD को AC प्रतिच्छेद करती है व एकांतर अंत:कोण $\angle ACB = \angle CAD$ (सिद्ध कर चुके हैं)

$\therefore BC || AD$ ------- (ii)

(i) व (ii) से ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

उदाहरण 2. ABCD एक समांतर चतुर्भुज हैं। BD विकर्ण पर दो बिन्दु P और Q इस प्रकार हैं कि DP=BQ तो सिद्ध कीजिए कि APCQ एक समांतर चतुर्भुज हैं।

प्रमाण



आकृति 11.6

ज्ञात है : ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

विकर्ण BD पर DP = BQ है।

सिद्ध करना है : APCQ समांतर चतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔAPD और ΔCQB में

DP = BQ (दिया हुआ है)

$\angle ADP = \angle CBQ$ (एकांतर कोण तिर्यक BD द्वारा समांतर भुजाओं AD और BC के साथ बने हैं)

AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\therefore \Delta APD \cong \Delta CQB$ (भु-को-भु अभिग्रहीत)

$\therefore AP = CQ$ (स.त्रि.सं.अं.) ------(i)

ΔCPD और ΔAQB में

DP = BQ (दिया हुआ है)

$\angle CDP = \angle ABQ$ (एकांतर कोण, $AB || DC$ एवं BD तिर्यक रेखा है।)

CD = AB (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

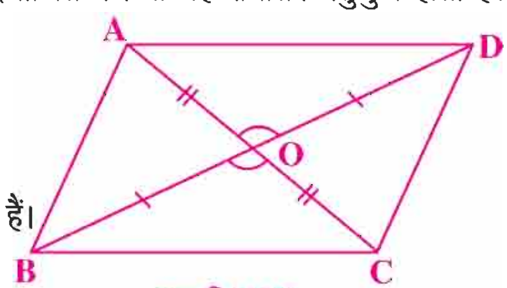
$\therefore \Delta CPD \cong \Delta AQB$ (भु-को-भु अभिगृहीत)

$\therefore CP = AQ$ (स.त्रि.सं.अ.) -----(ii)

(i) व (ii) से चतुर्भुज APCQ की सम्मुख भुजाएँ

AP = CQ एवं CP = AQ $\therefore$ APCQ समांतर चतुर्भुज हैं।

प्रमेय 3. यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करें तो वह समांतर चतुर्भुज होता है।



आकृति 11.7

ज्ञात है : चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD एक-दूसरे को O पर इस प्रकार काटते हैं कि AO = OC तथा BO=OD

सिद्ध करना है : ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

उपपत्ति : ΔAOD तथा ΔCOB में

AO = CO (ज्ञात है)

$\angle AOD = \angle COB$ (शीर्षाभिमुख कोण)

OD = OB (ज्ञात है)

$\therefore \Delta\, AOD \cong \Delta\, COB$ (भु-को-भु अभिग्रहीत)

$\angle OAD = \angle OCB$ (स.त्रि.सं.अ)

और $\angle OBC = \angle ODA$

अब AD और BC रेखाओं को AC प्रतिच्छेद करती है तथा एकांतर अंत:कोण

$\angle OAD = \angle OCB$ (सिद्ध कर चुके हैं)

और $\angle OBC = \angle ODA$

$\therefore AD \,||\, BC$

इसी प्रकार $AB \,||\, DC$

अत: ABCD समांतर चतुर्भुज हैं।

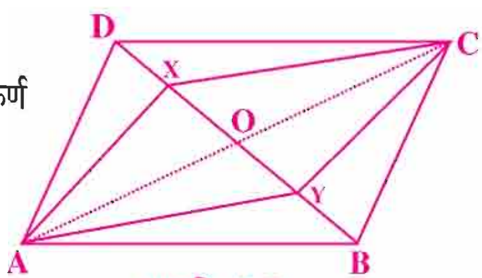
उदाहरण 3. दी गयी आकृति 11.8 में ABCD समांतर चतुर्भुज है। जिसके विकर्ण BD में बिन्दु X और Y इस प्रकार है कि DX = BY, सिद्ध कीजिए कि AXCY समांतर चतुर्भुज है।

प्रमाण :

ज्ञात है : ABCD समांतर चतुर्भुज है और DX=BY है।

सिद्ध करना है : AXCY समांतर चतुर्भुज है।

रचना : AC को मिलाइए



आकृति 11.8

उपपत्ति : OA = OC (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं) ---- (i)

एवं OD = OB -------- (ii)

DX = BY (दिया है) ----- (iii)

OD–DX = OB – BY (ii में से iii को घटाने पर)

OX = OY --------(iv)

अब चतुर्भुज AXCY में

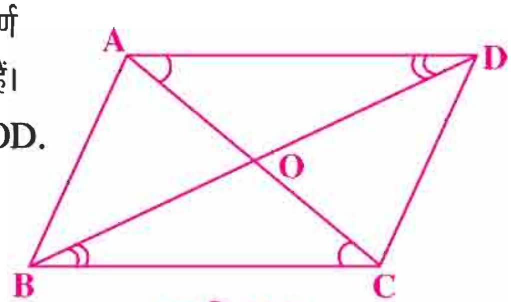
OA = OC ------ (i से)

OX = OY ------ (iv से)

AC और XY विकर्ण हैं जो एक-दूसरे को 'O' पर समद्विभाजित करते हैं इसलिए AXCY समांतर चतुर्भुज है।

प्रमेय 4. समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

ज्ञात है : समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC और BD बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं।



आकृति 11.9

सिद्ध करना है : OA = OC एवं OB=OD.

उपपत्ति : ΔAOD एवं ΔCOB में

$\angle DAO = \angle BCO$

(एकांतर अंत: कोण है और AD || BC)

AD = BC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

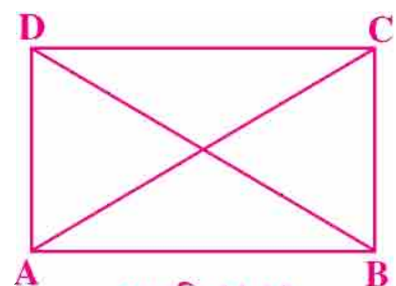
$\angle ADO = \angle CBO$ (एकांतर अंत:कोण और AD || BC)

$\therefore \Delta AOD \cong \Delta COB$ (को-भु-को अभिग्रहीत)

$\therefore$ AO = CO एवं OD = OB

प्रमेय 5. यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान हैं तो वह आयत होता है।

ज्ञात है : चतुर्भुज ABCD जिसमें AC = BD



आकृति 11.10

सिद्ध करना है : ABCD आयत है।

उपपत्ति : ΔABC एवं ΔDCB में

AB = DC (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं)

BC = CB (उभयनिष्ठ हैं)

AC = DB (ज्ञात है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DCB$ (भु-भु-भु अभिग्रहित)

$\therefore \angle ABC = \angle DCB$ (स.त्रि.सं.अं)

परन्तु ये समांतर रेखाओं AB और CD की तिर्यक छेदी BC के एक ही ओर स्थित हैं)

$\therefore \angle ABC + \angle DCB = 180^0$

$2 \angle ABC = 180^0$ ($\angle ABC = \angle DCB$)

$\therefore \angle ABC = 90^0$ और $\angle DCB = 90^0$

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज ABCD एक आयत है।

प्रमेय 6. किसी आयत के विकर्ण समान होते हैं। (प्रमेय 5 का विलोम)

ज्ञात है : आयत ABCD जिसमें AC और BD विकर्ण हैं।

आकृति 11.11

सिद्ध करना है : AC = BD

उपपत्ति : ABCD आयत है।

ΔABD और ΔBAC में

$AD = BC$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ हैं।

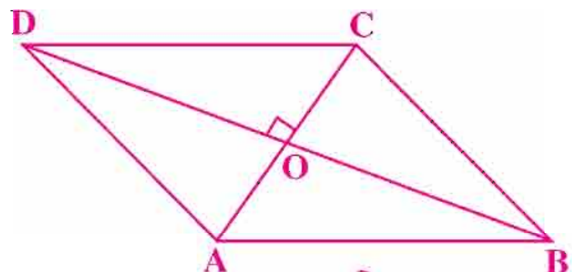
$AB = BA$ (उभयनिष्ठ हैं)

$\angle BAD = \angle ABC$ (प्रत्येक समकोण है)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta BAC$ (भु-को-भु. अभिग्रहित)

$\therefore BD = AC$ (स.त्रि.सं.अं)

प्रमेय 7. यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे पर लम्ब हों तो वह सम चतुर्भुज होता है।



आकृति 11.12

ज्ञात है : ABCD एक समांतर चतुर्भुज है जिसमें विकर्ण AC एवं BD एक-दूसरे पर लम्ब हैं और बिन्दु O पर मिलते हैं।

सिद्ध करना है : ABCD समचतुर्भज है

उपपत्ति : ΔAOB और ΔCOB में

$OA = OC$ (समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं)

$OB = OB$ (उभयनिष्ट)

$\therefore \angle AOB = \angle COB$ (समकोण)

$\Delta AOB \cong \Delta COB$

अत: $AB = CB$ (स.त्रि.सं.अं)

साथ ही $AB = DC$

और $CB = DA$ (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

अत: ABCD समचतुर्भुज है।

प्रमेय 8. किसी समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत होते हैं। (प्रमेय 7 का विलोम)

ज्ञात है: ABCD एक समचतुर्भुज है। विकर्ण AC एवं BD परस्पर बिन्दु 'O' पर मिलते हैं।

अर्थात् $AB= BC = CD = DA$

सिद्ध करना है : $\angle AOB = \angle COD = 90^0$

उपपत्ति : ΔAOB और ΔCOB में

$AO = CO$ (समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं)

$OB = OB$ (उभयनिष्ट भुजा)

$AB = BC$ (ज्ञात है)

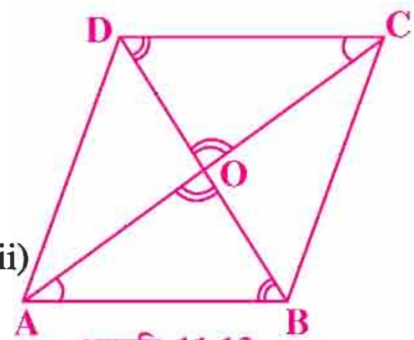
$\therefore \Delta\, AOB \cong \Delta\, COB$ (भु.भु.भु. अभिग्रहित)

इस प्रकार $\angle AOB = \angle COB$ -------- (i)

(स.त्रि.सं.अं)

हमें ज्ञात है कि $\angle AOB + \angle COB = 180^0$ -- (ii)

(कोणों का रैखिक युग्म)



आकृति 11.13

(i) और (ii) से $\angle AOB + \angle AOB = 180^0$

अर्थात् $2\ \angle AOB = 180^0$

अर्थात् $\angle AOB = 90^0$

इसी प्रकार $\angle COD = 90^0$ (शीर्षाभिमुख कोण)

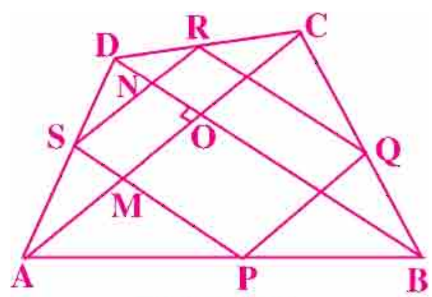
अतः समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर लम्बवत् होते हैं।

उदाहरण 4. चतुर्भुज ABCD के विकर्ण लम्बवत हैं। सिद्ध कीजिए कि इसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज, आयत होता है।

प्रमाण

ज्ञात है : ABCD एक चतुर्भुज है। विकर्ण AC एवं BD एक-दूसरे को समकोण पर काटते हैं।

P, Q, R एवं S क्रमशः भुजा AB, BC, CD एवं DA के मध्य बिन्दु हैं।



आकृति 11.14

सिद्ध करना है : PQRS एक आयत है।

उपपति : ΔADC में, S, AD का मध्य बिन्दु है एवं R, DC का मध्य बिन्दु है।

अत: $SR = \frac{1}{2}AC$ एवं $SR \| AC$ (त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समांतर एवं उसका आधा होता है)

इसी प्रकार ΔABC में P एवं Q भुजा AB और भुजा BC के मध्य बिन्दु है।

अत: $PQ = \frac{1}{2}AC$ --------- (ii)

एवं $PQ \| AC$

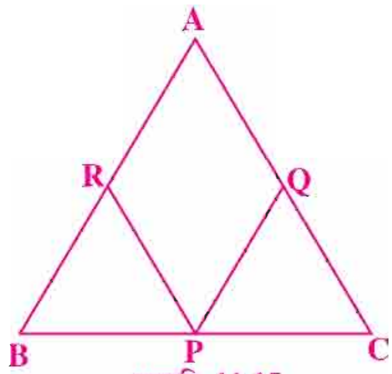
(i) व (ii) से $SR \| PQ$, $SR = PQ$

$\therefore$PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

अब $SR \| AC$ या $SN \| MO$ एवं $BD \| SP$ या $SM \| NO$

$\therefore$SMON समांतर चतुर्भुज है। किन्तु $\angle MON$ समकोण है अत: $\angle S$ भी समकोण होगा। (समांतर चतुर्भुज SMON का सम्मुख कोण) अत: PQRS एक आयत है।

उदाहरण 5. दी गयी आकृति 11.15 में समबाहु ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु क्रमशः P, Q और R है। सिद्ध कीजिए कि चतुर्भुज PQAR एक सम चतुर्भुज है।



आकृति 11.15

प्रमाण

ज्ञात है : ΔABC समबाहु त्रिभुज है।

बिन्दु P, Q एवं R क्रमशः भुजा BC, CA एवं AB के मध्य बिन्दु हैं।

सिद्ध करना : चतुर्भुज PQAR एक सम चतुर्भुज है।

उपपत्ति : ΔABC में P एवं R क्रमशः भुजा BC एवं AB के मध्य बिन्दु है।

अतः $PR = \frac{1}{2}AC$

एवं $PR \parallel AC$

$PR = AQ$

$PR \parallel AQ$ ------ (i) (किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड तीसरी भुजा के समान्तर व उसका आधा होता है।)

इसी प्रकार $\Delta\ ABC$ में P एवं Q क्रमशः BC और AC के मध्य बिन्दु हैं।

अतः $PQ \parallel AR$ एवं $PQ = AR$ -------- (ii)

किन्तु ΔABC समबाहु है अतः $AB = AC = BC$ तब (i) एवं (ii) से

$\Rightarrow PQ = QA = AR = RP$

अतः PQAR एक समचतुर्भुज है।

प्रमेय 9. यदि किसी समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे पर लम्ब और तुल्य है तो वह वर्ग होता है।

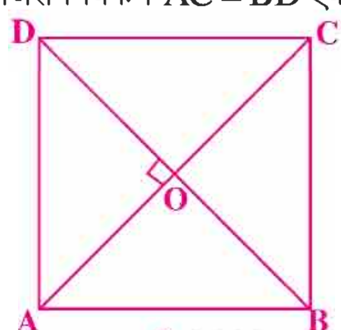
उपरोक्त प्रमेय की व्याख्या निम्नलिखित प्रकार से की जा सकती है।

आकृति 11.16 में ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है। जिसमें विकर्ण $AC = BD$ एवं AC और BD एक दूसरे पर लम्ब है।

अतः ABCD एक वर्ग है।

इसी प्रकार यदि ABCD एक वर्ग है तब

विकर्ण $AC=BD$ तथा $\angle AOB = 90^0$



आकृति 11.16

प्रमेय 10. रेखाखण्ड जो त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ता है। तीसरी भुजा के समांतर होता है तथा नाप में उसका आधा होता है।

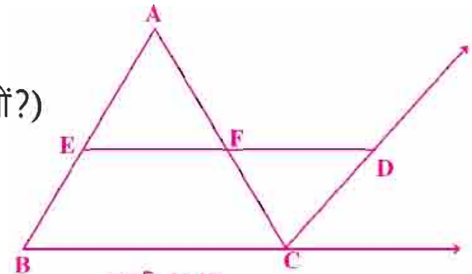
हम यह प्रमेय निम्नलिखित संकेत के द्वारा सिद्ध कर सकते हैं। आकृति 11.17 को देखिए इसमें E और F, क्रमशः भुजाओं AB और AC के मध्य बिन्दु है तथा CD || BA.

$\Delta AEF \cong \Delta CDF$ (को-भु-को अभिगृहित)

अत: EF = DF और BE = AE = DC (क्यों?)

इसलिए BCDE समांतर चतुर्भुज है (क्यों?)

अतः EF || BC



आकृति 11.17

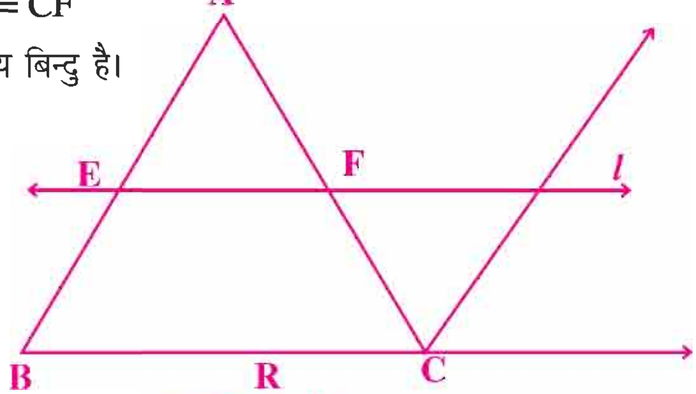
इससे हम यह भी कह सकते हैं कि $EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$

क्या आप इस प्रमेय का विलोम परिभाषित कर सकते हैं? क्या इसका विलोम सत्य है? आप देखेंगे कि ऊपर दिए गए प्रमेय का विलोम भी सत्य है जो कि इस प्रकार से परिभाषित है।

प्रमेय 11 : त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से दूसरे के समांतर खींची गई रेखा तीसरी भुजा को समद्विभाजित करती है।

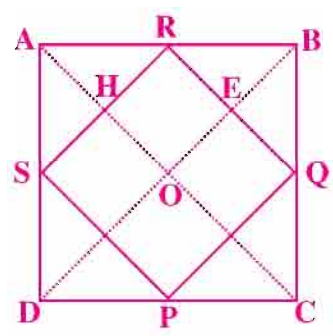
आकृति 11.18 में देखते हैं कि E, AB का मध्य बिन्दु है। रेखा l, E से होकर जाती है जो BC के समांतर है। तथा CM || BA. ΔAEF और ΔCDF सर्वांगसम है की सहायता से सिद्ध कर सकते हैं कि AF = CF

अर्थात् F, भुजा AC का मध्य बिन्दु है।



आकृति 11.18

उदाहरण 6. सिद्ध कीजिए कि किसी वर्ग की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज भी वर्ग होगा।



आकृति 11.19

ज्ञात है : ABCD एक वर्ग है R, Q, P, S क्रमश: AB, BC, CD एवं DA के मध्य बिन्दु हैं। AC एवं BD इसके विकर्ण हैं।

सिद्ध करना है : PQRS एक वर्ग है।

उपपत्ति : ΔABC में, R एवं Q क्रमशः
भुजा AB एवं BC के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore RQ || AC$ एवं $RQ = \frac{1}{2} AC$ --------(i)

ΔADC में S और P क्रमशः भुजा AD एवं भुजा DC के मध्य बिन्दु हैं।

$\therefore SP || AC$ एवं $SP = \frac{1}{2} AC$ ------(ii)

(i) और (ii) से $RQ = SP$ और $RQ || SP$ ------ (iii)

इसी प्रकार ΔADB में $SR || BD$ एवं $SR = \frac{1}{2} BD$ और

ΔCDB में $PQ || DB$, $PQ = \frac{1}{2} DB$

$SR || PQ$ और $SR = PQ$ ------- (iv)

$\therefore$ (iii), (iv) से PQRS एक समांतर चतुर्भुज है।

$RQ || AC$ एवं $RE || HO$ --------(v)

$SR || DB$ एवं $HR || OE$ --------(vi)

$\therefore$ OERH एक समांतर चतुर्भुज है ------- (vii)

$\therefore \angle HRE = \angle HOE$ (समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण)

ABCD वर्ग है और विकर्ण AC और BD एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

$\therefore \angle HRE = 90^0$ ($\because \angle HOE = 90^0$) -----(ix)

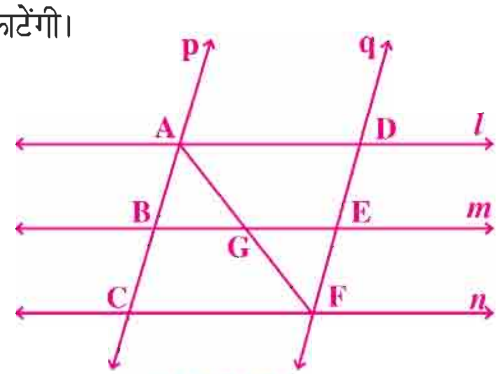
अतः PQRS एक आयत है।

किन्तु $AC = BD$ एवं $PQ = QR = RS = SP$

अतः चतुर्भुज PQRS एक वर्ग है।

प्रमेय 12. यदि तीन समांतर सरल रेखाएँ एक तिर्यक रेखा पर समान अंत:खंड काटती है तो वह किसी अन्य तिर्यक रेखा पर भी समान अंत:खंड काटेंगी।

प्रमाण : दिया है माना l, m और n तीन समांतर रेखाएँ हैं जिसे तिर्यक रेखा p और q प्रतिच्छेद करती है जिस प्रकार l, m और n समान अन्त:खंड AB और BC, p पर काटती है। (आकृति 11.20) हमें यह बताना है कि l, m और n समान अन्तःखंड DE और EF, q पर भी काटती है।



आकृति 11.20

और AB = BC

सिद्ध करना है DE = EF

उपपत्ति : A से F को मिलाने वाली रेखा, m को G पर प्रतिच्छेद करती है समलंब चतुर्भुज ACFD, दो त्रिभुजों ΔACF और ΔAFD में बंट जाता है।

ΔACF में, B मध्य बिन्दु है AC का (दिया है)

AB = BC

और $BG \| CF$ ($\because m \| n$)

इसलिए G मध्य बिन्दु है AF का

अब ΔAFD में भी G मध्य बिन्दु AF का

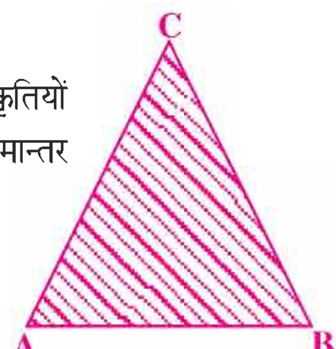
$GE \| AD$

E मध्य बिन्दु है DF का

तब DE = EF

या l, m और n, q को समान अंत:खंड पर काटती है।

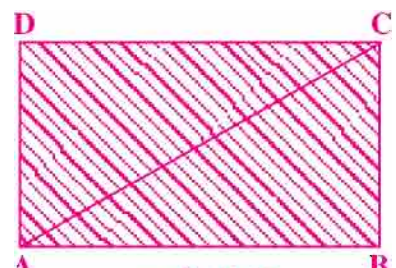
11.3 क्षेत्रफल (Area)



आकृति 11.21

पिछली कक्षाओं में हमने त्रिभुज, आयत, वर्ग आदि समतलीय आकृतियों का गणितीय सूत्रों की सहायता से क्षेत्रफल ज्ञात करना सीखा है। यहाँ हम समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से संबंधित कुछ ज्यामितीय तथ्यों पर विचार करेंगे।

1. त्रिभुजीय क्षेत्र (Triangular Region) किसी तल का वह भाग जो त्रिभुज से घिरा होता है, उस त्रिभुज का अन्त:भाग कहलाता है तथा त्रिभुज एवं उसके अन्त: भाग के संघ (Union) को त्रिभुजीय क्षेत्र कहते हैं।



आकृति 11.22

2. आयताकार क्षेत्र (Rectangular Region) किसी आयत एवं उसके अन्त:भाग के संघ को आयताकार अथवा आयतीय क्षेत्र कहते हैं। आयतीय क्षेत्र ABCD को दो त्रिभुजीय क्षेत्र ABC एवं ACD के संघ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। इसे आयत के विकर्ण से बनने वाले अन्य त्रिभुजीय क्षेत्रों से भी व्यक्त किया जा सकता है।

3. बहुभुजीय क्षेत्र (Polygonal Region)

बहुभुजीय क्षेत्र किसी तल में स्थित परिमित (finite) संख्या के त्रिभुजाकार क्षेत्रों के संघ के रूप में व्यक्त किया जाता है।

किसी बहुभुज एवं उसके अन्त:भाग के संघ को बहुभुज का क्षेत्र कहते हैं।


आकृति 11.23

क्षेत्रफल : किसी बहुभुज के क्षेत्रफल से तात्पर्य उस बहुभुजीय क्षेत्र के परिमाण (magnitude) से है।

1. क्षेत्रफल अभिगृहीत : प्रत्येक बहुभुजीय क्षेत्र R का एक निश्चित क्षेत्रफल होता है जिसका मापन वर्ग इकाई में किया जाता है।

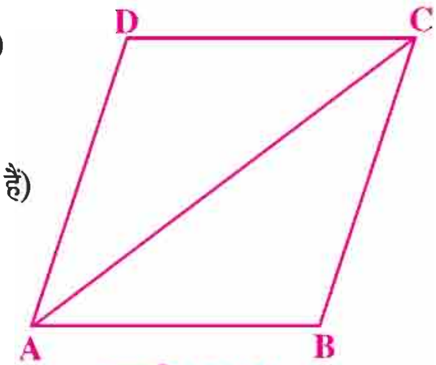
2. सर्वांगसम क्षेत्रफल अभिगृहीत : यदि R_1 एवं R_2 दो सर्वांगसम क्षेत्र है तब दोनों का क्षेत्रफल भी समान होता है।

11.4 समान्तर चतुर्भुजों के क्षेत्रफल (Area of parallelogram)

अब हम समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से संबंधित कुछ निष्कर्षों एवं उनकी गुणों का वर्णन करेंगे।

गुण : किसी समान्तर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो समान क्षेत्रफलों के त्रिभुजों में विभक्त करता है।

ज्ञात है : समान्तर चतुर्भुज ABCD, जिसका एक विकर्ण AC है।



आकृति 11.24

सिद्ध करना है : क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔACD)

उपपत्ति : ΔABC एवं ΔACD में

AB = CD (समान्तर चतुर्भुज की विपरीत भुजाएँ हैं)

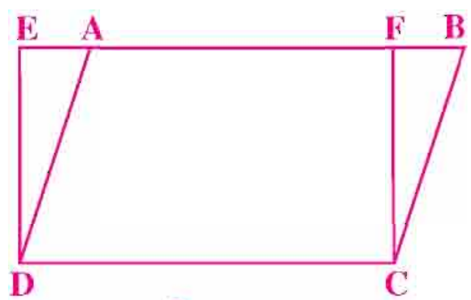
BC = AD

तथा AC = AC (उभयनिष्ठ है)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ACD$ (भु.भु.भु.)

अत: क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔACD)

क्रियाकलाप 2. आधार DC पर दो समान्तर चतुर्भुज ABCD एवं EFCD खींचिए जो समान्तर रेखाओं EB एवं DC के मध्य स्थित हों।



आकृति 11.25

अब ΔEAD एवं ΔBFC को काट लें।

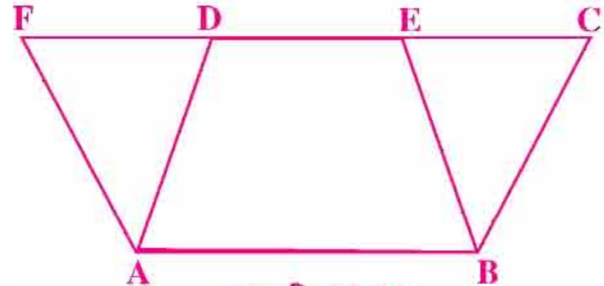
दोनों त्रिभुजों को एक-दूसरे पर रखकर देखें कि क्या ये सर्वांगसम हैं? इसे ज्यामितीय रूप से भी सिद्ध करें।

अत: $\Delta EAD \cong \Delta BFC$

$\therefore$ क्षेत्रफल (ΔEAD) = क्षेत्रफल (ΔBFC)

$\therefore$ क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABCD) = क्षेत्रफल (चतुर्भुज EFCD)

प्रमेय 13. यदि दो समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर व समांतर रेखाओं में एक ही युग्म के बीच स्थित हो तो उनके क्षेत्रफल बराबर होते हैं।



आकृति 11.26

ज्ञात है : दो समांतर चतुर्भुज ABCD तथा ABEF उभयनिष्ठ आधार AB पर तथा समांतर रेखाओं AB और CF के बीच स्थित हैं।

सिद्ध करना है : क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज ABCD)=क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज ABEF)

उपपत्ति : क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज ABCD) = क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABED) + क्षेत्रफल (ΔCBE) --- (i) (क्षेत्रफल अभि.)

क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज ABEF) = क्षेत्रफल (चतुर्भुज ABED) + क्षेत्रफल (ΔDAF) -------(ii) (क्षेत्रफल योग अभि.)

अब ΔCBE तथा ΔDAF में

CB = DA (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

BE = AF (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

$\angle CBE = \angle DAF$ ($BC \parallel AD$, $BE \parallel AF$)

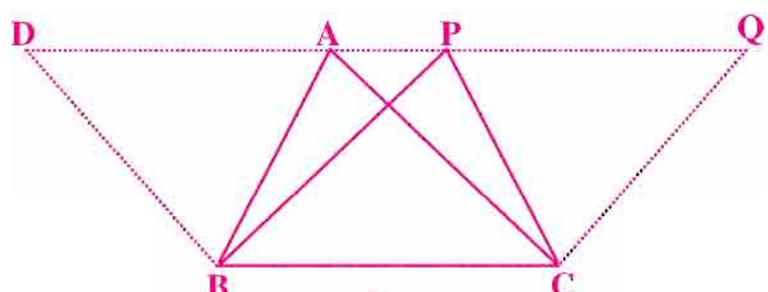
$\therefore \Delta CBE \cong \Delta DAF$ (भु.को.भु. से)

अत: क्षेत्रफल (ΔCBE) = क्षेत्रफल (ΔDAF) ------ (iii)

(i), (ii) व (iii) से

क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज ABCD) = क्षेत्रफल (समान्तर चतुर्भुज ABEF)

प्रमेय 14. एक ही आधार पर व समांतर रेखाओं के एक ही युग्म के बीच स्थित त्रिभुज क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।



आकृति 11.27

ज्ञात है : एक ही आधार BC तथा समांतर रेखाओं BC और AP के बीच ΔABC तथा ΔPBC स्थित हैं।

सिद्ध करना है : क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔPBC)

रचना : B बिन्दु से होकर $BD || CA$ खींचिए जो AP को आगे बढ़ाने पर D पर मिले। C बिन्दु से होकर $CQ || BP$ खींचिए जो AP को आगे बढ़ाने पर Q पर मिले।

उपपत्ति : BCQP समांतर चतुर्भुज हैं। (रचना से)

BCAD समांतर चतुर्भुज हैं। (रचना से)

$\therefore$ समांतर चतुर्भुज BCQP तथा समांतर चतुर्भुज BCAD एक ही आधार BC पर तथा एक ही समांतर रेखाओं के युग्म के बीच स्थित है। (अत: प्रमेय 13 से)

$\therefore$ क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज BCQP) = क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज BCAD) -----(i)

अब समांतर चतुर्भुज BCQP का विकर्ण CP है

अत: क्षेत्रफल (ΔPBC) = क्षेत्रफल (ΔPCQ)

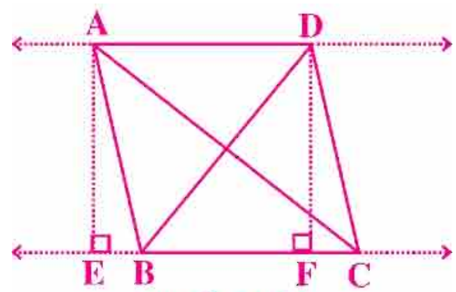
$$= \frac{1}{2} \text{ क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज BCQP)} \quad \text{------- (ii)}$$

इसी प्रकार क्षेत्रफल (ΔABC) $= \frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (समांतर चतुर्भुज BCAD) ----- (iii)

(i), (ii) व (iii) से क्षेत्रफल (ΔPBC) = क्षेत्रफल (ΔABC)

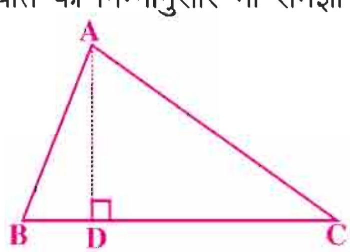
प्रमेय 15. एक ही आधार या समान आधारों वाले क्षेत्रफल में बराबर त्रिभुजों के शीर्ष लम्ब समान होते हैं।

आकृति 11.28 में क्षेत्रफल (ΔABC) = क्षेत्रफल (ΔDBC) चूंकि ΔABC और ΔDBC एक ही आधार BC पर स्थित हैं। अत: इनका शीर्ष लम्ब AE और DF बराबर होंगे। (क्योंकि त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊंचाई (शीर्ष लम्ब)

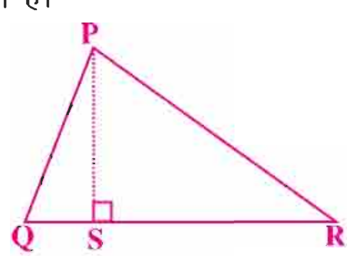


आकृति 11.28

इसी बात को निम्नानुसार भी समझा जा सकता है।



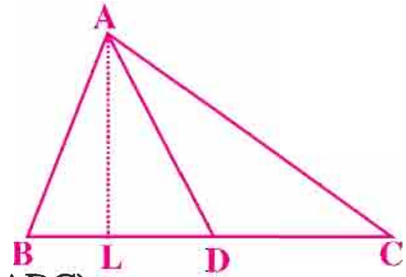
आकृति 11.29



आकृति 11.30

आकृति 11.29 एवं 11.30 में त्रिभुज ABC एवं त्रिभुज PQR क्षेत्रफल में बराबर हैं एवं उनके आधार BC एवं QR समान हैं। अत: उनके संगत शीर्ष लम्ब AD एवं PS समान होंगे।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज की मध्यिका उस त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभक्त करती है।



आकृति 11.31

प्रमाण

ज्ञात है :

Δ ABC में AD मध्यिका है।

सिद्ध करना है : क्षेत्रफल (ΔABD) = क्षेत्रफल (ΔADC)

रचना : AL $\perp$ BC खींचिए

उपपत्ति : $\because$ बिन्दु D, BC का मध्य बिन्दु है। (ज्ञात है)

$\therefore$ BD = DC ------ (i)

AL दोनों त्रिभुजों ABD तथा ADC की ऊँचाई है।

क्षेत्रफल (ΔABD) = $\frac{1}{2}$ BD $\times$ AL ------ (ii)

एवं क्षेत्रफल (ΔADC) = $\frac{1}{2}$DC $\times$ AL ----- (iii) (BD = DC (i) से)

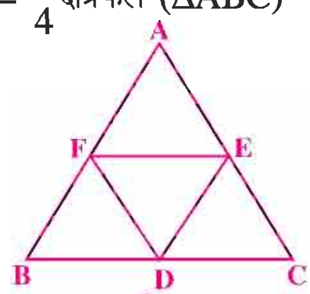
अब क्षेत्रफल (ΔABD) $= \frac{1}{2}$ (BD $\times$ AL)

$= \frac{1}{2}$ (DC $\times$ AL) ($\because$ BD = DC (i) से)

= क्षेत्रफल (ΔADC).

उदाहरण 8. यदि D, E और F क्रमश: ΔABC की भुजाओं BC, CA और AB के मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि BDEF एक समांतर चतुर्भुज है जिसका क्षेत्रफल ΔABC के क्षेत्रफल का आधा है। यह भी सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल (ΔDEF) = $\frac{1}{4}$ क्षेत्रफल (ΔABC)

प्रमाण : **रचना :** प्रश्नानुसार ΔABC का निर्माण किया (आकृति 11.32), D, E एवं F क्रमश: भुजाओं BC, CA एवं AB के मध्य बिन्दु है। बिन्दुओं D, E एवं F को सरल रेखाओं द्वारा मिलाने पर ΔABC चार छोटे



आकृति 11.32

त्रिभुजों BDF, DCE, EAF एवं DEF में
विभाजित हो जावेगा।

सिद्ध करना : BDEF समांतर चतुर्भुज है

क्षेत्रफल (BDEF) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC)

क्षेत्रफल (ΔDEF) = $\frac{1}{4}$ क्षेत्रफल (ΔABC)

उपपत्ति: यहाँ $FE \| BC$ अत: $FE \| BD$

$ED \| AB$ अत: $ED \| BF$

अत: BDEF एक समांतर चतुर्भुज होगा।

अब क्षेत्रफल (चतुर्भुज BDEF) = क्षेत्रफल (ΔBDF) + क्षेत्रफल (ΔDEF) ----- (1)

चूंकि FD समांतर चतुर्भुज का विकर्ण है अत: क्षेत्रफल (ΔBDF) = क्षेत्रफल (ΔDEF) ---(ii)

अत: (i) व (ii) से

क्षेत्रफल (चतुर्भुज BDEF) = 2 क्षेत्रफल (ΔDEF) ----- (iii)

इसी प्रकार समांतर चतुर्भुजों DCEF एवं AFDE में

क्षेत्रफल (ΔDEF) = क्षेत्रफल (ΔEDC) ----- (iv)

एवं क्षेत्रफल (ΔDEF) = क्षेत्रफल (ΔAFE) ------(v)

अब क्षेत्रफल (ΔABC)= क्षेत्रफल(ΔAFE) + क्षेत्रफल (ΔBDF) +क्षेत्रफल (ΔEDC) + क्षेत्रफल (DEF)

= क्षेत्रफल(ΔDEF) + क्षेत्रफलΔDEF) + क्षेत्रफल(ΔDEF) + क्षेत्रफल(DEF).

= 4 क्षेत्रफल(ΔDEF)

अत: क्षेत्रफल (ΔDEF) = $\frac{1}{4}$ क्षेत्रफल (ΔABC) ----- (vi)

अत: क्षेत्रफल (चतुर्भुज BDEF) = 2 क्षेत्रफल (ΔDEF) = $\frac{1}{2}$ क्षेत्रफल (ΔABC) (v) एवं (vi) से

प्रश्नावली 11.1

1. यदि समांतर चतुर्भुज का एक विकर्ण जो उसके एक कोण को समद्विभाजित करता है। यदि वह उसके सम्मुख कोण को भी समद्विभाजित करता है तो सिद्ध कीजिए कि दोनों विकर्ण परस्पर लम्बवत होंगे।
2. ΔABC और ΔPQR इस प्रकार हैं कि AB और BC क्रमश: PQ एवं QR के समान एवं समांतर है। सिद्ध कीजिए कि AC और PR समान और समांतर हैं।
3. सिद्ध कीजिए कि आयत की संलग्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से निर्मित चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

4. यदि ABCD एक समचतुर्भुज है जिसको भुजाओं AB, BC, CD व DA के मध्य बिन्दु P, Q, R और S है। सिद्ध कीजिए कि PQRS एक आयत है।

5. निम्नांकित में से किन आकृतियों में विकर्ण एक-दूसरे को सम द्विभाजित करते हैं।

(a) आयत (b) समांतर चतुर्भुज (c) समलंब चतुर्भुज (d) सम चतुर्भुज

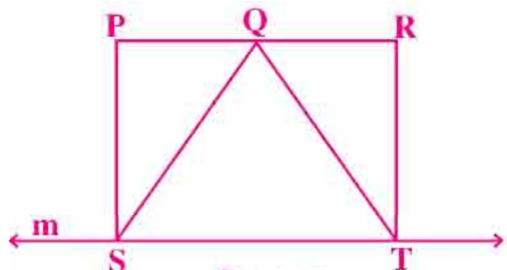
6. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से जो चतुर्भुज बनता है वह समांतर चतुर्भुज होता है।

7. ΔABC में $\angle B$ समकोण है। D बिन्दु AC का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि $DA=DB=\frac{1}{2}AC$.

8. ABCD एक समलंब चतुर्भुज है जिसमें भुजा AB, भुजा CD के समांतर है। बिन्दु P भुजा AD का मध्य बिन्दु है। रेखाखंड PQ भुजा CB पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करता है कि $PQ \parallel AB$ तो सिद्ध कीजिए कि बिन्दु Q भुजा CB का मध्य बिन्दु है।

9. सिद्ध कीजिए कि किसी चतुर्भुज की सम्मुख भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाले रेखाखण्ड एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

10. आकृति 11.33 में रेखा m पर बिन्दु P एवं R से दो लम्ब PS एवं RT डाले गए हैं। बिन्दु Q, रेखाखण्ड PR का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि QS = QT

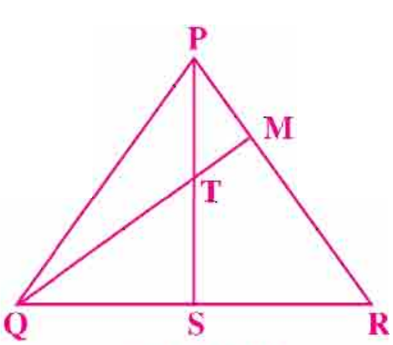


आकृति 11.33

11. समलंब चतुर्भुज PQRS की भुजाएँ PS एवं QR असमान हैं। बिन्दु M और N क्रमशः भुजाओं PS और QR के मध्य बिन्दु हैं। सिद्ध कीजिए कि

(i) $MN \parallel PQ$ (ii) $MN = \frac{1}{2}(PQ + RS)$

12. आकृति 11.34 में PS, ΔPQR की मध्यिका है। T, PS का मध्य बिन्दु है। रेखाखंड QT बढ़ाने पर भुजा PR को M बिन्दु पर प्रतिच्छेद करता है। तो सिद्ध कीजिए कि $PM = \frac{1}{3}PR$.



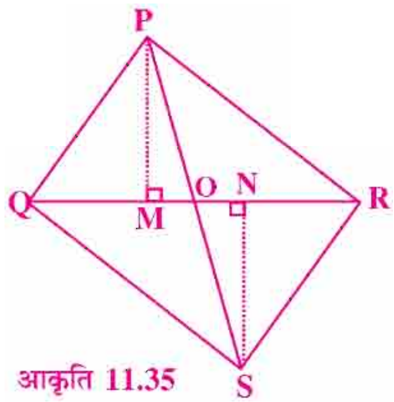
आकृति 11.34

13. सिद्ध कीजिए कि समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण इसे चार समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभक्त करते हैं।

14. यदि किसी चतुर्भुज का प्रत्येक विकर्ण इसे दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभक्त करें, तो सिद्ध कीजिए कि यह समांतर चतुर्भुज होगा।

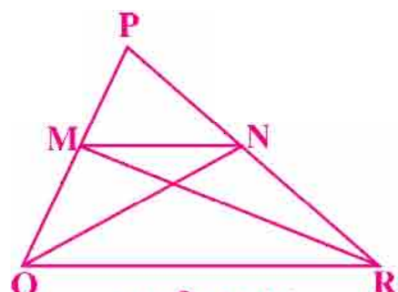
15. PQRS एक चतुर्भुज है। इसके विकर्ण एक-दूसरे को 'O' पर प्रतिच्छेद करते हैं। यदि OQ = OS तो सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल(ΔPQR) = क्षेत्रफल (ΔPSR)

16. आकृति 11.35 में ΔPQR एवं ΔSQR एक ही आधार QR पर स्थित हैं एवं क्षेत्रफल(ΔPQR) = क्षेत्रफल (ΔSQR) तब सिद्ध कीजिए QR, PS को समद्विभाजित करता है।



आकृति 11.35

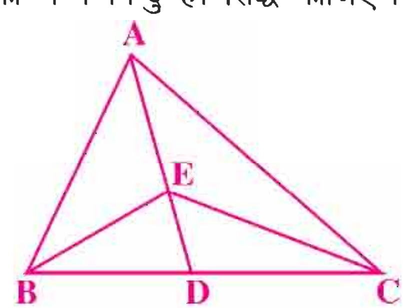
17. दिए हुए आकृति 11.36 में ΔPQR की भुजा PQ और PR पर क्रमश: M और N बिन्दु इस प्रकार हैं कि क्षेत्रफल (ΔQRM) = क्षेत्रफल (ΔQRN) तो सिद्ध कीजिए कि MN || QR.



आकृति 11.36

18. ΔABC में D, BC का मध्य बिन्दु है। E, AD का मध्य बिन्दु है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल (ΔABE)= $\frac{1}{4}$ क्षेत्रफल (ABC)

19. आकृति 11.37 में ΔABC मध्यिका AD पर कोई बिन्दु E है। सिद्ध कीजिए कि क्षेत्रफल (ΔABE)= क्षेत्रफल (ΔACE)



आकृति 11.37

20. आकृति 11.38 के अनुसार सही विकल्प चुनकर लिखिए

आकृति 11.38

(i) चतुर्भुज ABCD में आसन्न भुजाएँ हैं

(a) AB, CD (b) AB, BC, (c) AD, BC

(ii) समांतर चतुर्भुज ABCD में कोण बराबर होते हैं।

(a) $\angle A$ और $\angle B$ (b) $\angle B$ और $\angle C$ (c) $\angle A$ और $\angle C$

(iii) समांतर चतुर्भुज ABCD में कोणों का योग 180^0 होता है।

(a) $\angle A$ और $\angle B$ का (b) $\angle B$ और $\angle D$ का (c) $\angle A$ और $\angle C$ का

(iv) ABCD समलंब चतुर्भुज होगा यदि

(a) AB = CD (b) AB || CD (c) AB = BC

(v) सम चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को एक बिन्दु पर काटते हैं तो

(a) एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(b) आपस में लम्ब होते हैं।

(c) एक-दूसरे को लम्बवत समद्विभाजित करते हैं।

याद रखने योग्य बातें

- वह चतुर्भुज जिसमें सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समांतर हों, समांतर चतुर्भुज कहलाता है।
- एक समांतर चतुर्भुज में
  (a) प्रत्येक युग्म में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।
  (b) प्रत्येक युग्म में सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
  (c) दोनों विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- एक चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होगा यदि
  (a) दो सम्मुख भुजाएँ बराबर और समांतर हों।
  (b) सम्मुख भुजाएँ बराबर हों।
  (c) सम्मुख कोण बराबर हों।
  (d) विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हों।
- आयत के विकर्ण आपस में बराबर होते हैं एवं एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- सम चतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
- वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं एवं समकोण पर एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- किसी त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाला रेखाखंड, तीसरी भुजा के समांतर व उसका आधा होता है।
- किसी त्रिभुज की एक भुजा के मध्य बिन्दु से होकर दूसरी भुजा के समांतर खींची गई रेखा तीसरी को समद्विभाजित करता है।
- समांतर चतुर्भुज जो एक ही आधार और उन्हीं दो समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- त्रिभुज जो एक ही आधार और दो समांतर रेखाओं के बीच स्थित हों तो वे क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।
- एक ही आधार या सर्वांगसम आधारों वाले क्षेत्रफल में बराबर त्रिभुजों के शीर्षलंब समान होते हैं।
- त्रिभुज की मध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों में विभक्त करती है।
- किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल उसके आधार एवं संगत ऊँचाई के गुणनफल के आधे के बराबर होता है।

प्रायोजना कार्य (Project Wrok)

- चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों का योग 360^0 होता है। सत्यापन करना।
- सम चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसके विकर्णों के गुणनफल का आधा होता है।
- पेपर कटिंग एवं पेस्टिंग के द्वारा सिद्ध करना कि समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल उसकी ऊँचाई एवं समान्तर भुजाओं के योग के आधे के गुणनफल के बराबर होता है।