

अध्याय 12 ज्यामितीय रचनाएँ (Geometrical Construction)



हम पढ़ेंगे

- विशिष्ट प्रकार के चतुर्भुज की रचना- समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग और समलम्ब चतुर्भुज
- समबहुभुज की रचना- दिए गए वृत्त के परिगत एवं अंतर्गत समपंचभुज, समषटभुज तथा समअष्टभुज की रचना
- दिए गए चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना।
- दी गई सममित सरल रेखा के सापेक्ष सममित रेखाखण्ड, कोण और त्रिभुज की रचना।

12.1 भूमिका (Introduction)

हम पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं कि निम्न स्थितियों में चतुर्भुज की रचना कैसे की जाती है

1. जब चार भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।
2. जब तीन भुजाएँ और दो विकर्ण दिए हों।
3. जब दो आसन्न भुजाएँ और तीन कोण दिए हों।
4. जब चार भुजाएँ और एक कोण दिया हों।
5. जब तीन भुजाएँ और दो अंतर्गत कोण दिए हों।

यहाँ हम कुछ विशिष्ट प्रकार के समान्तर चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज वृत्त के अंतर्गत एवं परिगत समपंचभुज, समषटभुज एवं सम अष्टभुज की रचना करना सीखेंगे। इनके साथ चतुर्भुजों और त्रिभुजों के क्षेत्रफल में संबंध तथा सममिति की अवधारणा को भी समझेंगे।

12.2 चतुर्भुज की रचना (Construction of quadrilaterals)

12.2.1 समान्तर चतुर्भुज की रचना

समान्तर चतुर्भुज में निम्न विशेषताएँ (गुण) होते हैं

- (1) सम्मुख रेखाएँ बराबर होती हैं।
- (2) विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।
- (3) सम्मुख कोण बराबर होते हैं।
- (4) यदि विकर्ण बराबर हों तो वह आयत होता है।
- (5) यदि विकर्ण परस्पर लम्बवत हो तो वह सम चतुर्भुज होता है।
- (6) यदि किसी समान्तर चतुर्भुज में विकर्ण बराबर और परस्पर लम्बवत हो तो वह वर्ग होता है।

(7) समलंब चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का केवल एक युग्म ही समांतर होता है।

(i) **समान्तर चतुर्भुज की रचना :** जब उसकी दो आसन्न भुजाएँ और उनके बीच का कोण दिया हो।

उदाहरण 1. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें

AD = 4 सेमी., AB = 5.6 सेमी और $\angle A = 60^\circ$ हो।

हल :

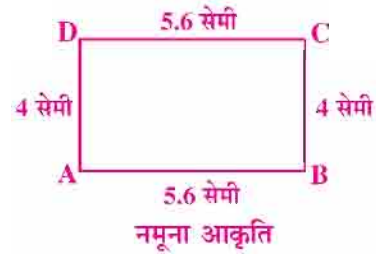
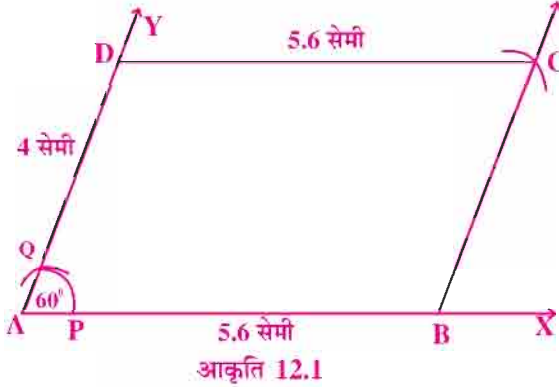
सर्वप्रथम एक समान्तर चतुर्भुज का नमूना चित्र बनाकर भुजाओं को अंकित करते हैं।

हमें ज्ञात है कि समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ समांतर और बराबर होती हैं।

$\therefore AB = DC = 5.6$ सेमी

तथा $AD = BC = 4$ सेमी

एवं $AB \parallel DC$ तथा $AD \parallel BC$



रचना के पद :

1. एक रेखा AX खींचकर रेखाखंड AB = 5.6 सेमी अंकित करें।
2. किरण AY इस प्रकार बनायें कि $\angle A = 60^\circ$ हो
(A को केंद्र मानकर किसी उपयुक्त त्रिज्या वाली चाप PQ अंकित करें। AB पर प्रतिच्छेदित बिन्दु P से उसी त्रिज्या का चाप बनायेंगे जो, पूर्व चाप को बिन्दु Q पर प्रतिच्छेदित करता है, इससे $\angle A = 60^\circ$ की रचना होती है।)
3. किरण AY पर बिन्दु D इस प्रकार अंकित करे कि $AD = 4$ सेमी।
4. बिन्दु D से 5.6 सेमी. एवं बिन्दु B से 4 सेमी के चाप अंकित करके प्रतिच्छेदित बिन्दु 'C' प्राप्त करते हैं।
5. D और B को क्रमशः बिन्दु 'C' से जोड़ते हैं।
अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।

(ii) **समान्तर चतुर्भुज की रचना :** जब उसकी दो आसन्न (क्रमागत) भुजाएँ और एक विकर्ण दिया हो।

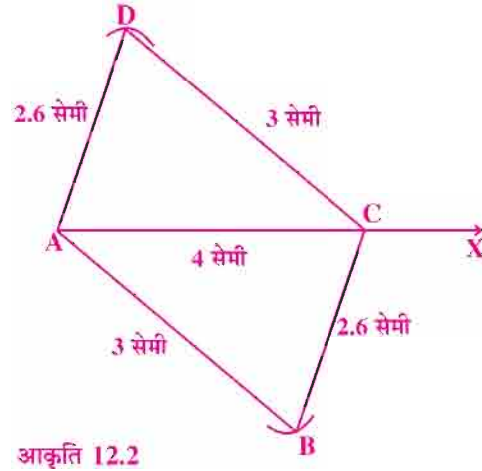
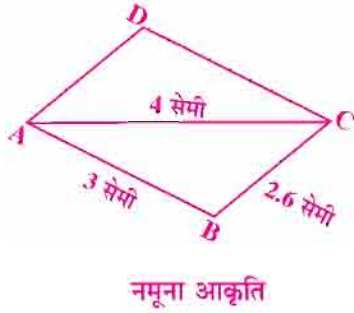
उदाहरण 2. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें AB = 3 सेमी, BC = 2.6 सेमी तथा विकर्ण AC = 4 सेमी है?

हल :

समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाएँ बराबर होती हैं।

$$\therefore AB = CD = 3 \text{ सेमी}$$

$$BC = AD = 2.6 \text{ सेमी}$$



रचना के पद

1. किरण AX पर AC रेखाखण्ड 4.0 सेमी बनाते हैं।
2. बिन्दु A से ऊपर की ओर 2.6 सेमी और नीचे की ओर 3 सेमी चाप अंकित करें।
3. बिन्दु 'C' से ऊपर की ओर 3.0 से.मी और नीचे की ओर 2.6 सेमी चाप अंकित कर प्रतिच्छेदित बिन्दुओं को क्रमशः D तथा B अंकित करें।
4. इन प्रतिच्छेदित बिन्दुओं को चित्रानुसार AB, AD, CD तथा CB को मिला दीजिए। अभीष्ट समान्तर चतुर्भुज ABCD प्राप्त है। (आकृति 12.2)

प्रश्नावली 12.1

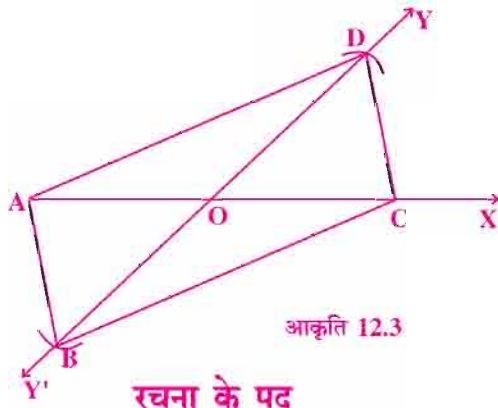
1. एक समान्तर चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें भुजा $AB = 5.3$ सेमी $BC = 4.5$ सेमी तथा $\angle ABC = 60^\circ$ हो?
2. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें भुजा $AB = 6.0$ से.मी., $BC = 4.7$ सेमी तथा $\angle ABC = 30^\circ$ हो?
3. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 7.0$ सेमी $BC = 5.7$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 6.3$ से.मी. हो?
4. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5.0$ सेमी. $AD = 3.7$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 6.2$ से.मी. हो?

समान्तर चतुर्भुज रचना करना जब उसके दो विकर्ण और उनके बीच का कोण दिया हो।

उदाहरण 3. एक समांतर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें विकर्ण $AC = 7.2$ से.मी. और विकर्ण $BD = 5$ सेमी इनके बीच का कोण 30° का है।

हल :

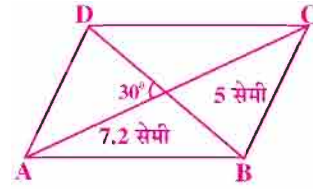
हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज में विकर्ण एक-दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।



आकृति 12.3

रचना के पद

1. किरण AX पर रेखाखण्ड AC = 7.2 से.मी. अंकित करते हैं।
2. लम्ब समद्विभाजक विधि से AC का मध्य बिन्दु 'O' ज्ञात करते हैं।
3. बिन्दु 'O' पर प्रथम 60° एवं उसके अर्द्धक विधि से 30° का कोण बनाते हुए YY' किरण अंकित की।
4. YY' पर केन्द्र 'O' से दोनों ओर 2.5 सेमी ($\frac{1}{2} \times 7.2$ सेमी) के चाप खींचिए जो B और D पर प्रतिच्छेद करें। ('O' विकर्ण BD का भी मध्य बिन्दु है?)
5. AB, AD, CD और CB को मिला दीजिए।
अभीष्ट समांतर चतुर्भुज ABCD प्राप्त होता है।



नमूना आकृति

12.2.2 समलम्ब चतुर्भुज की रचना (Construction of Trapezium)

(i) समलम्ब चतुर्भुज की रचना करना जिसकी चारों भुजाएँ दी हों तथा समांतर रेखाएँ निर्देशित हों।

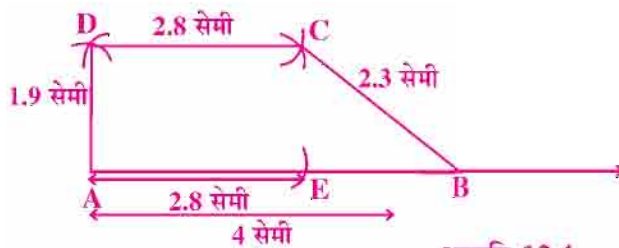
उदाहरण 4. समलम्ब चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें AB = 4 से.मी., BC = 2.3 से.मी., CD = 2.8 से.मी. तथा AD = 1.9 से.मी. तथा रेखा AB || CD.

हल : हम जानते हैं कि समलम्ब चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर होता है।

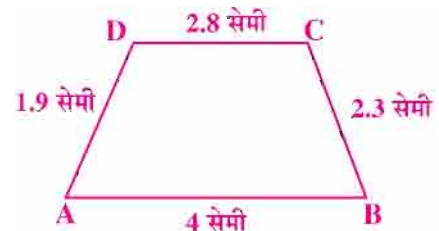
हमें ज्ञात है AB = 4 से.मी., BC = 2.3 सेमी

CD = 2.8 सेमी, AD = 1.9 से.मी.

रेखाखण्ड AB || CD के



आकृति 12.4



नमूना आकृति

रचना के पद

1. किरण AX पर रेखाखण्ड $AB = 4.0$ सेमी अंकित करें।
2. रेखाखण्ड AB पर बिन्दु E इस प्रकार लेते हैं कि $AE = 2.8$ से.मी.।
3. बिन्दु E को केन्द्र मानकर 1.9 से.मी. की त्रिज्या और बिन्दु B को केन्द्र मानकर 2.3 सेमी. त्रिज्या के चाप अंकित कर प्रतिच्छेदित बिन्दु को C अंकित करें।
4. बिन्दु 'C' से 2.8 सेमी और बिन्दु A को केन्द्र मानकर 1.9 सेमी के चाप अंकित करें। प्रतिच्छेदित बिन्दु को 'D' अंकित करें।

AD, BC और DC को मिलाएँ

अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज ABCD प्राप्त है।

प्रश्नावली 12.2

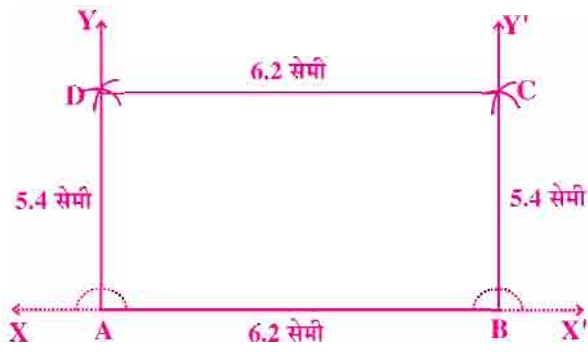
1. एक समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसके विकर्ण $AC = 4.2$ सेमी, विकर्ण $BD = 3.8$ सेमी तथा विकर्णों के बीच का कोण 60° हो।
2. एक समान्तर चतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें विकर्ण क्रमशः 3.6 सेमी तथा 2.8 सेमी हों तथा उनके बीच का कोण 30° का हो?
3. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4.0$ सेमी., $BC = 2.7$ सेमी, $AC = 3.2$ सेमी., $AD = 2.5$ सेमी तथा भुजा $AB \parallel CD$ के हो?
4. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4.5$ सेमी $BC = 3.3$ सेमी $AD = 2.7$ सेमी तथा भुजा $AB \parallel CD$ के एवं समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी 2.5 से.मी हो?
(संकेत : आधार AB से लम्ब दूरी 2.5 सेमी पर एक भुजा AB के समान्तर किरण YY' प्राप्त कीजिए तथा इस पर बिन्दु C और दिए गए माप के अनुसार अंकित कीजिए।)
5. एक समलम्ब चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें भुजा $AB = 4.8$ सेमी, $BC = 2.7$ सेमी, $AD = 2.9$ सेमी, $\angle A = 60^\circ$ तथा भुजा $AB \parallel$ भुजा CD के हो?

12.2.3 आयत की रचना (Construction of rectangle)

(i) आयत की रचना करना जब आसन्न भुजाएँ दी हो।

उदाहरण 5. एक आयत की रचना कीजिए जिसमें दो क्रमागत भुजाओं की लम्बाई क्रमशः 6.2 सेमी तथा 5.4 सेमी है।

हल : हम जानते हैं कि आयत में सम्मुख भुजाएँ बराबर तथा प्रत्येक कोण समकोण होता है। हम एक आयत ABCD की रचना करेंगे जिसमें
 $AB = 6.2$ सेमी
 $BC = 5.4$ सेमी.



आकृति 12.5

$AB = 6.2$ सेमी. तथा $BC = 5.4$ सेमी.

रचना के पद

1. किरण XX' पर रेखाखण्ड $AB = 6.2$ सेमी अंकित करें
2. बिन्दु A पर चाप विधि से AY' लम्ब अंकित करते हैं। फिर इसी प्रकार बिन्दु B पर भी BY' लम्ब अंकित करें
3. बिन्दु A तथा B से 5.4 सेमी लम्बाई के चाप लम्ब AY' और BY' पर खींचकर प्रतिच्छेदित बिन्दु D और C प्राप्त करते हैं।
4. DC को मिला दीजिए। इससे अभीष्ट आयत $ABCD$ प्राप्त होती है।

(ii) आयत की रचना करना जब एक विकर्ण एवं विकर्णों के बीच का कोण दिया हो।

उदाहरण 6. एक आयत की रचना कीजिए जिसमें विकर्ण $AC = 5$ सेमी तथा विकर्णों के बीच का कोण 60° का हो।

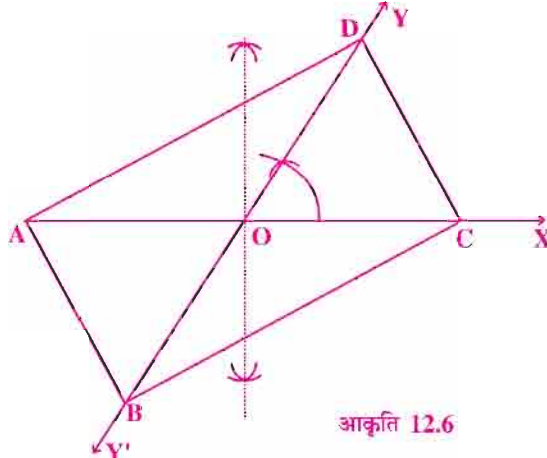
हल : हम जानते हैं कि आयत वह समान्तर चतुर्भुज होता है, जिसके विकर्ण बराबर तथा एक-दूसरे को समद्विभाजित करें।

हम एक आयत $ABCD$ की रचना करेंगे

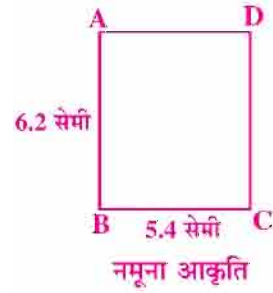
हमें ज्ञात है $AC = 5$ सेमी

तथा विकर्णों के बीच का कोण $\angle COD = 60^\circ$

क्योंकि आयत के विकर्ण बराबर होते हैं इसलिए $BD = 5.0$ सेमी



आकृति 12.6



नमूना आकृति

रचना के पद

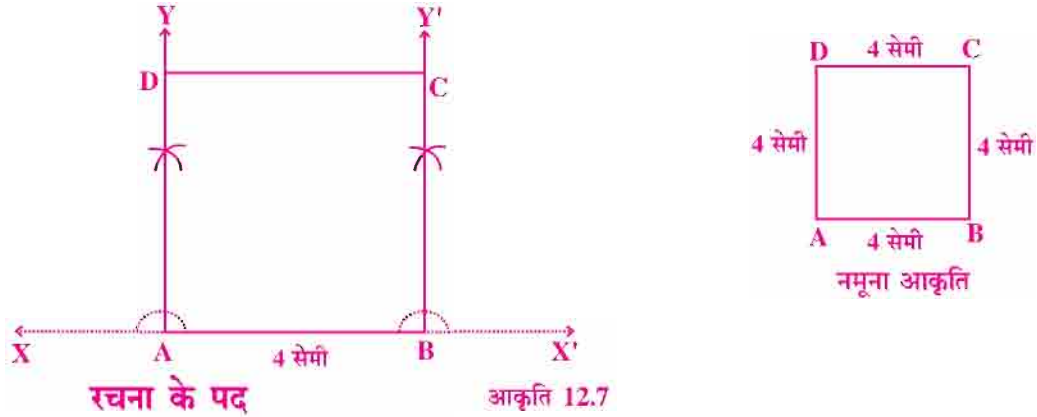
1. किरण AX पर रेखाखण्ड $AC = 5.0$ सेमी अंकित करें।
2. लम्ब समद्विभाजक विधि से AC का मध्य बिन्दु 'O' प्राप्त करें।
3. 'O' पर 60° का कोण बनाते हुए किरण YY' प्राप्त करें।
4. किरण YY' पर 'O' को केन्द्र मानकर 2.5 सेमी के चाप से दोनों ओर प्रतिच्छेदित बिन्दु अंकित करते हैं। ('O' दूसरे विकर्ण BD का भी मध्य बिन्दु है)
5. प्रतिच्छेदित बिन्दु को B, D अंकित करते हुए उन्हें A और C से जोड़ें।
इस प्रकार अभीष्ट आयत ABCD प्राप्त है।

12.2.4 वर्ग की रचना (Construction of square)

(i) वर्ग की रचना करना जब उसकी एक भुजा दी हो।

उदाहरण 7. एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 4 सेमी हो।

हल : हम जानते हैं कि वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर तथा प्रत्येक कोण समकोण होता है।



रचना के पद

आकृति 12.7

1. किरण XX' पर रेखाखण्ड $AB = 4$ सेमी बनाइए
2. बिन्दु 'A' एवं 'B' पर क्रमशः लम्ब AY एवं BY' अंकित कीजिए
3. बिन्दु A एवं B को क्रमशः केन्द्र बनाकर AY एवं BY' पर 4.0 सेमी. त्रिज्या की चाप से प्रतिच्छेदित बिन्दु प्राप्त कीजिए।
4. बिन्दुओं को क्रमशः 'D' एवं 'C' अंकित कर A एवं B से जोड़ते हैं। D एवं C को आपस में भी जोड़ते हैं।

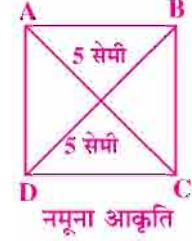
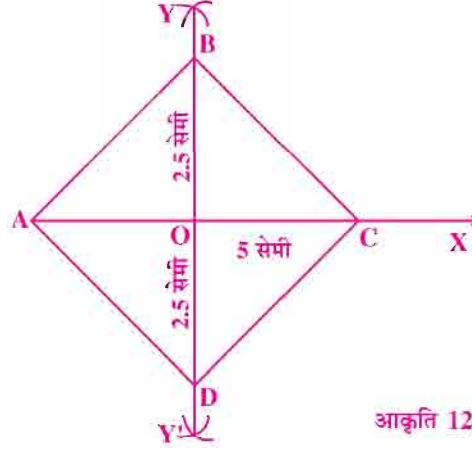
अभीष्ट वर्ग ABCD प्राप्त होता है।

(ii) वर्ग की रचना करना जब उसके एक विकर्ण की लम्बाई ज्ञात हो।

उदाहरण 8. एक वर्ग बनाइए जिसके एक विकर्ण की लम्बाई 5 सेमी है।

हल : हम जानते हैं कि (1) वर्ग के विकर्ण बराबर होते हैं।

2. विकर्ण एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
ज्ञात है विकर्ण $AC = 5.0$ सेमी.
विकर्ण $BD = 5.0$ से.मी होगा।



रचना के पद

आकृति 12.8

1. किरण AX पर रेखाखण्ड $AC = 5.0$ सेमी अंकित करते हैं।
2. भुजा AC का लम्ब समद्विभाजक YY' बनाइए तथा प्रतिच्छेद बिन्दु 'O' अंकित कीजिए।
3. बिन्दु O से 2.5 से.मी. त्रिज्या के चाप YY' पर AC के दोनों ओर अंकित कर बिन्दु B और D प्राप्त करते हैं। इस प्रकार $OB = OD = 2.5$ से.मी.
4. B और D को A और C से जोड़िए
अभीष्ट वर्ग ABCD प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 12.3

1. वर्ग की माप 4 सेमी हो तो उसकी परिमिति ज्ञात कीजिए।
2. आयत की एक भुजा 5 से.मी है। यदि आयत की परिमाप 22 सेमी हो तो उसकी शेष भुजाएँ ज्ञात कीजिए।
3. आयत की आसन्न भुजाओं की लम्बाई का अनुपात 3:2 है यदि आयत की परिमिति 15 सेमी हो तो उसकी सभी भुजाओं की माप ज्ञात कीजिए।
4. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी एक भुजा 5.5 सेमी और परिमिति 24 सेमी हो।
5. एक आयत ABCD की रचना कीजिए जिसमें भुजा $AB = 6$ सेमी तथा विकर्ण $AC = 10$ सेमी हो।
6. एक आयत ABCD की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण 6 सेमी तथा विकर्णों के बीच का कोण 45° का हो।
7. एक वर्ग बनाइए जिसकी परिमिति का माप 18.0 सेमी हो।
8. एक वर्ग की रचना कीजिए जिसमें एक विकर्ण 5.0 सेमी को हो।

12.3 समबहुभुज की रचना (वृत्त के अंतर्गत एवं परिगत) (Construction of polygons Inside and outside the circle)

हमें यह ज्ञात है कि वृत्त के अंतर्गत एवं परिगत समबहुभुज की एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित

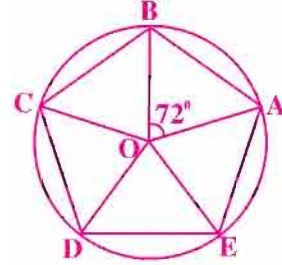
कोण का मान $\frac{360^0}{n}$ होता है जहाँ n बहुभुज की भुजाओं की संख्या है। सम बहुभुज में सभी भुजाएँ समान माप की होती हैं।

(i) वृत्त के अंतर्गत समपंचभुज की रचना करना

उदाहरण 9. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 2.4 सेमी है, के अंतर्गत समपंचभुज की रचना कीजिए।

हल : समपंच भुज की एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण

$$= \frac{360}{5} = 72^0 \text{ का होगा}$$



आकृति 12.9

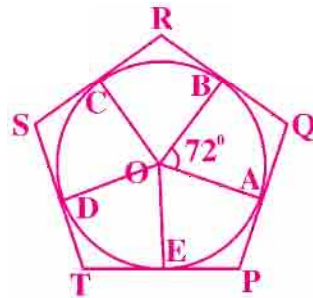
रचना के पद

1. त्रिज्या 2.4 सेमी लेकर वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र 'O' है।
 2. परिधि पर बिन्दु 'A' अंकित केन्द्र 'O' से जोड़िए
 3. आधार OA के बिन्दु O पर 72^0 का कोण बनाती हुई अन्य त्रिज्या OB अंकित की जहाँ बिन्दु 'B' त्रिज्या का परिधि पर प्रतिच्छेदन बिन्दु है।
 4. AB चाप लेकर परिधि के पाँच बराबर भाग कीजिए।
 5. इन बिन्दुओं को क्रमशः A, B, C, D और E से अंकित कीजिए।
 6. AB, BC, CD, DE एवं AE को जोड़िए
- अभीष्ट वृत्त के अंतर्गत समपंचभुज ABCDE प्राप्त है।

(ii) वृत्त के परिगत समपंचभुज की रचना करना

उदाहरण 10. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 2.0 से.मी है, इसकी परिगत समपंचभुज की रचना कीजिए?

हल : हम जानते हैं कि समपंचभुज की एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण का मान 72^0 होता है।



आकृति 12.10

रचना के पद

1. 2.0 से.मी त्रिज्या लेकर वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र 'O' हो।
2. परिधि पर बिन्दु A लेकर केन्द्र 'O' से जोड़िए

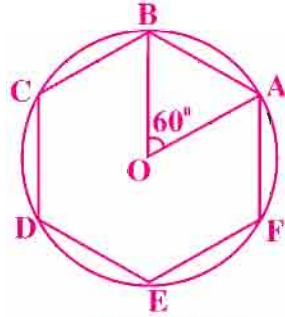
3. त्रिज्या OA के बिन्दु 'O' पर 72° का कोण बनाती हुई अन्य त्रिज्या OB बनाइए।
 4. चाप AB के बराबर त्रिज्या लेकर परिधि के पाँच बराबर भाग कीजिए तथा इन्हें क्रमशः बिन्दु A, B के साथ C, D, E अंकित कीजिए।
 5. C, D, E को केन्द्र से मिलाइए।
 6. रेखा OA के बिन्दु A पर लम्ब रेखा बनाइए।
 7. इसी प्रकार OB, OC, OD एवं OE के बिन्दु B, C, D एवं E पर भी लम्ब रेखा खींचिए।
 8. ये लम्ब रेखाएँ जहाँ एक-दूसरे से मिलती हैं उन बिन्दुओं को क्रमशः P, Q, R, S, T से अंकित कीजिए।
- अभीष्ट वृत्त का परिगत समपंचभुज PQRST प्राप्त है।

(iii) वृत्त के अंतर्गत समषटभुज की रचना

हम जानते हैं समषष्ट के एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण = $\frac{360}{6} = 60^\circ$ होता है।

उदाहरण 11. एक वृत्त की त्रिज्या 3 सेमी है इसके अंतर्गत समषष्ट भुज की रचना कीजिए।

हल :



आकृति 12.11

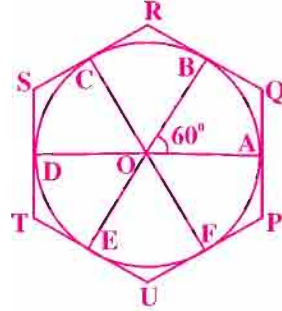
रचना के पद

1. केन्द्र 'O' एवं त्रिज्या 3.0 सेमी. लेकर एक वृत्त की रचना करें।
 2. परिधि पर एक बिन्दु 'A' लेकर त्रिज्या OA अंकित करें।
 3. त्रिज्या OA को आधार लेकर बिन्दु O पर 60° का कोण बनाते हुए दूसरी त्रिज्या OB की रचना कीजिए।
 4. चाप AB के बराबर त्रिज्या लेकर परिधि के भाग को छः समान भागों में विभाजित करते हैं।
 5. शेष बिन्दुओं को क्रमशः C, D, E और F से अंकित करते हैं।
 6. इस बिन्दुओं को जोड़ने वाले रेखाखण्ड AB, BC, CD, DE, EF तथा AF की रचना की।
- वृत्त का अंतर्गत समषष्टभुज ABCDEF प्राप्त है।

(iv) वृत्त के परिगत समषष्टभुज की रचना

उदाहरण 12. एक वृत्त की त्रिज्या 2.0 सेमी है। इस वृत्त के परिगत समषष्टभुज की रचना कीजिए।

हल : वृत्त के केन्द्र पर समषष्टभुज की एक भुजा द्वारा अंतरित कोण = $\frac{360}{6} = 60^\circ$



आकृति 12.12

रचना के पद

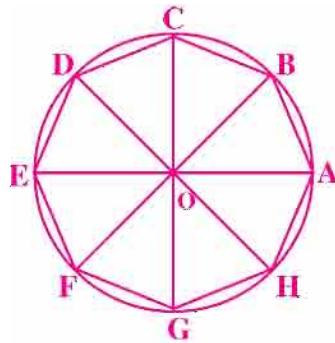
1. वृत्त की त्रिज्या 2.0 सेमी लेकर वृत्त की रचना करें जिसका केन्द्र 'O' है।
2. वृत्त एक त्रिज्या OA बनाइए।
3. OA के बिन्दु 'O' से 60° का कोण बनाते हुए दूसरी त्रिज्या OB बनाइए।
4. AB चाप लेकर परिधि को छः समान भागों में विभाजित कीजिए। शेष बिन्दुओं को क्रमशः C, D, E और F से अंकित कीजिए।
5. इन बिन्दुओं को केन्द्र 'O' से जोड़िए
6. OA, OB, OC, OD, OE और OF के A, B, C, D, E और F बिन्दुओं पर वृत्त की स्पर्श रेखा बनाइए।
7. स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं को क्रमशः P, Q, R, S, T और U अंकित करते हैं।

वृत्त का परिगत समषष्टभुज ही अभीष्ट समषष्टभुज है।

(v) वृत्त के अंतर्गत सम अष्टभुज की रचना

उदाहरण 13. वृत्त की 3.0 सेमी त्रिज्या लेकर उसके अंतर्गत समअष्टभुज की रचना कीजिए।

हल :



आकृति 12.13

रचना के पद

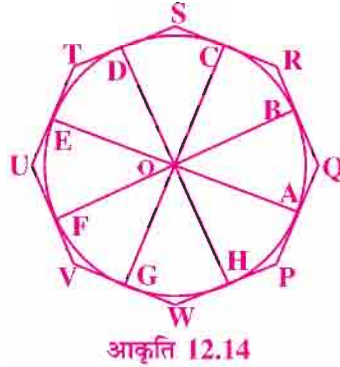
1. 3.0 सेमी त्रिज्या लेकर एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र 'O' है।
2. वृत्त की परिधि पर बिन्दु A लेकर AE व्यास की रचना करें।
3. दूसरे व्यास CG की रचना इस प्रकार करें कि व्यास CG व्यास AE पर लम्ब हो।
4. $\angle AOC$ एवं $\angle COE$ के कोण अर्द्धक व्यास BF एवं DH की रचना करते हैं।
5. AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH एवं HA को जोड़ते हैं।
अभीष्ट वृत्त का अंतर्गत समअष्टभुज प्राप्त है।

टिप्पणी : समअष्टभुज की एक भुजा द्वारा वृत्त के केन्द्र पर $\frac{360^0}{8} = 45^0$ का कोण बनता है। अतः अन्य बहुभुज के समान केन्द्र पर 45^0 का कोण बनाकर भी इस बहुभुज की रचना की जा सकती है।

(vi) वृत्त के परिगत समअष्टभुज की रचना

उदाहरण 14. 2.0 से.मी. त्रिज्या वाले वृत्त के परिगत समअष्टभुज की रचना कीजिए।

हल :



रचना के पद

1. 2.0 से.मी. की त्रिज्या से वृत्त की रचना करें जिसका केन्द्र 'O' है।
2. परिधि पर बिन्दु A लेकर AE व्यास बनाइए।
3. एक-दूसरे व्यास CG की रचना इस प्रकार करें कि $CG \perp AE$
4. $\angle AOC$ एवं $\angle COE$ के अर्द्धक व्यास BF एवं DH की रचना करें।
5. परिधि के बिन्दु A, B, C, D, E, F, G एवं H पर स्पर्श रेखाएँ बनाइए।
6. क्रमागत स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दुओं को P, Q, R, S, T, U, V, W से अंकित करें।
बहुभुज PQRSTU VW दिए गए वृत्त का परिगत समअष्टभुज है।

प्रश्नावली 12.4

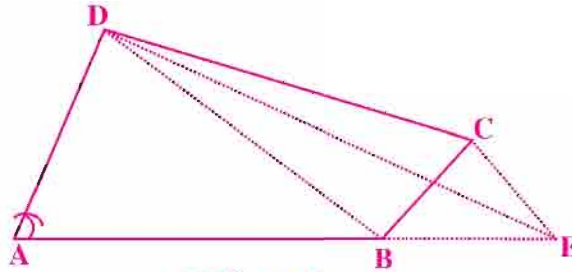
1. एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 3.5 सेमी है, के अंतर्गत समपंचभुज की रचना कीजिए।
2. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 2.8 से.मी है, के परिगत समपंचभुज की रचना कीजिए।
3. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 2.0 सेमी है, के अंतर्गत एवं परिगत समपंचभुजों की रचना कीजिए।
4. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 2.4 सेमी है, के अंतर्गत एवं परिगत समषष्टभुजों की रचना कीजिए।
5. एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 3.0 सेमी है, के अंतर्गत एवं परिगत समअष्टभुजों की रचना कीजिए।

12.4 चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना (Construction of a triangle equal in area to a quadrilateral)

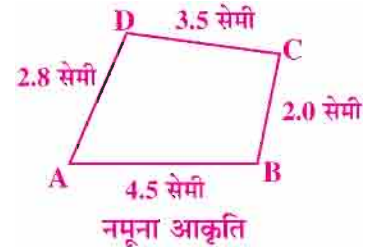
हम जानते हैं कि एक ही आधार और एक ही समान्तर रेखायुग्म के बीच बने त्रिभुज, क्षेत्रफल में बराबर होते हैं।

उदाहरण 15. एक चतुर्भुज ABCD है जिसमें AB= 4.5 सेमी, BC =2.0 सेमी, CD =3.5 सेमी DA =2.8 सेमी और $\angle DAB = 60^\circ$ है। इस चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की रचना कीजिए?

हल :



आकृति 12.15



रचना के पद

1. दिए हुए माप के अनुसार चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए।
2. B और D को जोड़िए
3. BD रेखा के समान्तर बिन्दु 'C' से रेखा CE की रचना कीजिए जहां E बिन्दु रेखा AB और CE का प्रतिच्छेदन बिन्दु है। (AB को आगे बढ़ाने पर)।
4. D से E को जोड़िए
 $\triangle ADE$ अभीष्ट त्रिभुज है।

टिप्पणी : आकृति में $DB \parallel CE$ है। आधार DB पर दो त्रिभुज DBC और त्रिभुज DBE बने हैं जो एक ही समान्तर रेखाओं DB और CE के बीच स्थित हैं। अतः $\triangle DBC$ और $\triangle DBE$ आपस में क्षेत्रफल में बराबर हैं। यदि चतुर्भुज ABCD में से त्रिभुज DBC को निकाल दें तो त्रिभुज DAB बचता है। इसी प्रकार यदि त्रिभुज ADE में से त्रिभुज DBE को निकाल दें तो वही त्रिभुज DAB बचता है, अर्थात् त्रिभुज DAB चतुर्भुज ABCD और त्रिभुज ADE में उभयनिष्ठ है। अतः त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल चतुर्भुज ABCD के क्षेत्रफल के बराबर है।

प्रश्नावली 12.5

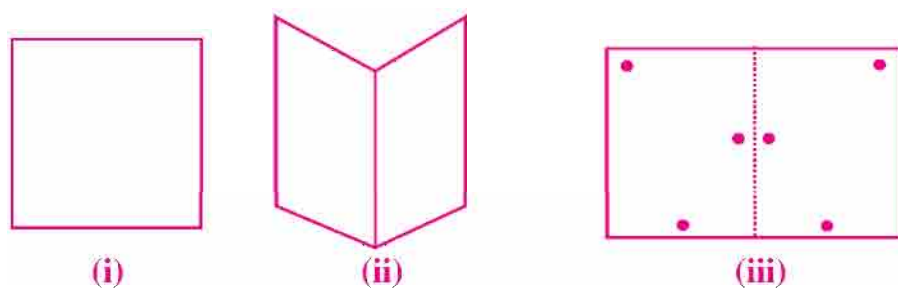
1. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5.0$ सेमी, $BC = 6.2$ सेमी, $CD = 7.2$ सेमी तथा $\angle B = \angle C = 90^\circ$, AB को एक भुजा मानकर एक त्रिभुज की रचना कीजिए जो क्षेत्रफल में चतुर्भुज के बराबर हो।
2. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 5$ सेमी $BC = 7.5$ सेमी, $\angle A = 120^\circ$, $B = 70^\circ$ तथा $\angle D = 95^\circ$ हो। एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका आधार BC भुजा हो तथा क्षेत्रफल में चतुर्भुज के बराबर हो?
3. एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें $AB = 4.8$ सेमी $BC = 6.2$ सेमी $CD = 5.3$ सेमी तथा $\angle A$ एवं $\angle B$ क्रमशः 70° एवं 60° हो। आधार AB लेकर एक त्रिभुज बनाइए जो क्षेत्रफल में चतुर्भुज के बराबर हो।

12.5 सममिति (Symmetry)

प्रकृति में हम बहुत सी आकृतियाँ देखते हैं जो अपनी सुन्दरता से सहज ही हमें आकृष्ट कर लेती हैं उसका कारण उस आकृति का सममित होना है। घर का कमरा आयताकार या वर्गाकार हो तो अच्छा लगता है। कक्षा में शिक्षक के बैठने का स्थान, छात्रों की पंक्तियों के सामने मध्य हो तो व्यवस्था उत्तम दिखाई देती है। इस प्रकार सममिति से आकृतियाँ सुन्दर दिखती हैं। सममिति का अध्ययन करने के लिए हम कुछ क्रियाकलाप करेंगे।

गतिविधि 1.

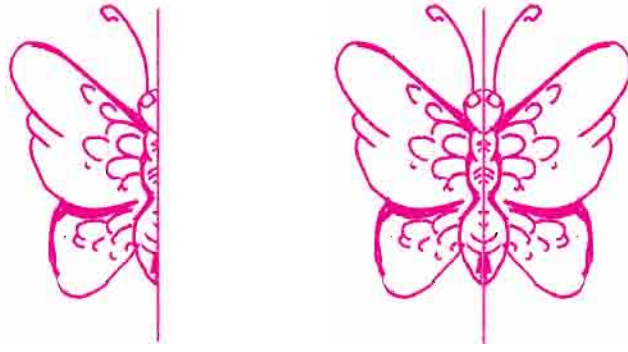
कागज का एक चौकोर टुकड़ा लेकर उसे बीच से मोड़ लें। मुड़े हुए दो भागों में से एक भाग पर स्याही के कुछ छीटें डालकर पुनः मोड़ कर दबाते हैं कागज खोलने पर हम देखते हैं कि एक रेखा शिकन (तह रेखा) के दोनों ओर समान आकृतियाँ बनी हुई दिखाई देती हैं।



आकृति 12.16

गतिविधि 2.

एक कागज लेकर उसे तह करते हैं। तह किए हुए भाग के नीचे पर कार्बन पेपर इस प्रकार रखते हैं कि कार्बन वाला पृष्ठ ऊपर रहे। अब पेंसिल से शिकन पर किसी बिन्दु से प्रारंभ कर कोई ऐसी आकृति बनाते हैं जो शिकन पर ही जाकर समाप्त होता है। कागज को खोलने पर हम देखते हैं कि कागज पर एक सममित आकृति बनी है। चित्र में बनी तितली की आकृति के अनुसार सममित अक्ष दिखें।



गतिविधि 3.

एक कागज लेकर तह करते हैं। तह किए हुए भाग के नीचे एक कार्बन पेपर इस प्रकार रखते हैं कि कार्बन वाला पृष्ठ ऊपर रहे। अब पेंसिल से शिकन से दूर किसी वस्तु या पक्षी की आकृति बनाते हैं। कागज को खोलने पर हम तह रेखा पर दर्पण रखकर देखेंगे तो बनी हुई आकृति और दर्पण में आकृति का प्रतिबिम्ब ठीक उसी प्रकार दिखाई देता है जैसे कागज पर बनी आकृति।

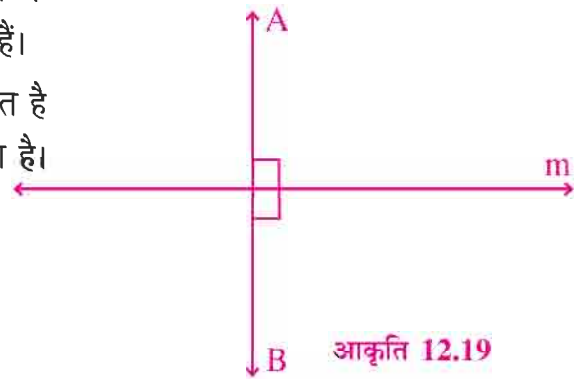
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि कोई आकृति और उसका दर्पण प्रतिबिम्ब, दर्पण के सापेक्ष परस्पर सममित होते हैं।

12.5.1 रैखिक सममिति

हमने देखा है कि किसी वस्तु और उसका दर्पण प्रतिबिम्ब, दर्पण के सापेक्ष सममित होते हैं।

अतः वह सममिति जो किसी रेखा के सापेक्ष सममित होती है, रैखिक सममिति कहलाती है तथा जिस रेखा के सापेक्ष सममिति पाई जाती है उसे सममित अक्ष कहते हैं।

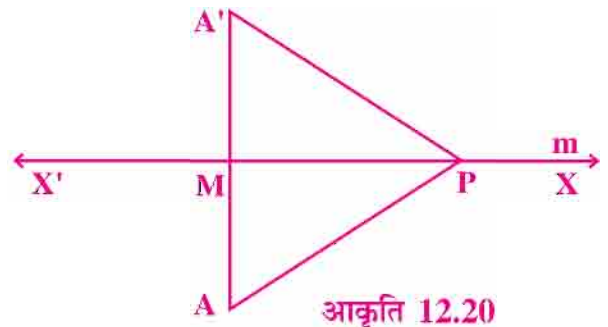
दो बिन्दु A और B एक रेखा m के सापेक्ष सममित है तब रेखा m रेखाखण्ड AB का लम्ब समद्विभाजक होता है। इसमें रेखा m, रेखाखण्ड AB का सममित अक्ष है।



प्रमेय

एक रेखा के सापेक्ष, दो सममित बिन्दु हों, तो उस रेखा (सममित अक्ष) पर स्थित प्रत्येक बिन्दु उनसे समान दूरी पर होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए m सममित अक्ष है और दो बिन्दु A और A' रेखा m के सापेक्ष, सममित हैं। AA' को मिला दें जो (रेखाखंड) m को बिन्दु M पर प्रतिच्छेद करें तो, परिभाषा से



$$AM = A'M \text{ और } AM \perp m \text{ ----- (1)}$$

मान लीजिए, P रेखा m पर कोई बिन्दु है। यदि P, M से अभिन्न हो (अर्थात् $P = M$) तो (1) से

$$AP = A'P \text{ ----- (2)}$$

यदि, P, M से भिन्न हो ($P \neq M$),

तो AP और A'P को मिलाइए।

अब त्रिभुजों AMP और A'MP में,

$$AM = A'M \text{ ----- (1) से}$$

$$\angle AMP = \angle A'MP \text{ (प्रत्येक } 90^\circ \text{ के)}$$

$$PM = PM \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$\therefore \Delta AMP \cong \Delta A'MP \text{ (भु.को.भु. अभिग्रहित)}$$

$$\therefore AP = A'P \text{ ---- (3)}$$

अतः (2) और (3) से $AP = A'P$ (m के प्रत्येक बिन्दु P के लिए)

उप प्रमेय : यदि दो बिन्दु A और A' एक रेखा के सापेक्ष, सममित हों और P कोई बिन्दु m पर स्थित हो, तो AP और A'P, m के साथ समान कोण बनाते हैं।

उपरोक्त प्रमेय के अनुसार

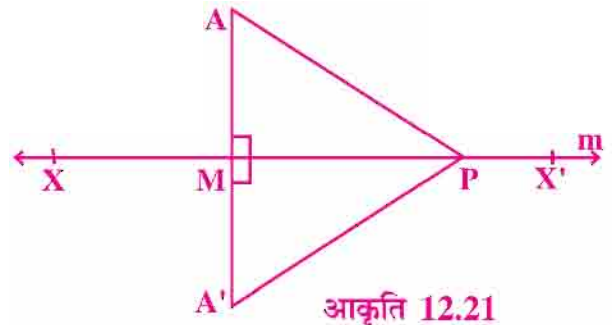
यदि P, M पर संपाती हो

तो $AP \perp m$ और $A'P \perp m$

यदि P, M पर संपाती न हो, तो

$$\Delta AMP \cong \Delta A'MP$$

$$\text{अतः } \angle APM = \angle A'PM$$

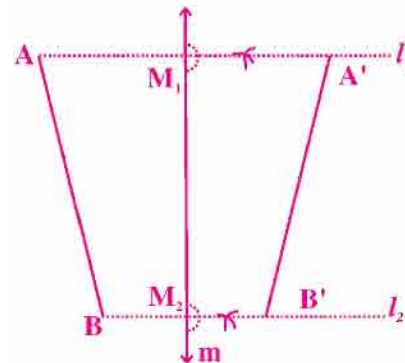


आकृति 12.21

12.5.2 अब हम इससे संबंधित कुछ रचनाओं को करना सीखेंगे। दिए गए सममित अक्ष के सापेक्ष सममित रेखाखंड की रचना

उदाहरण 16. सममित अक्ष m तथा रेखा AB=5 सेमी लेकर इस रेखा के सापेक्ष सममित रेखाखंड की रचना कीजिए।

हल :



आकृति 12.22

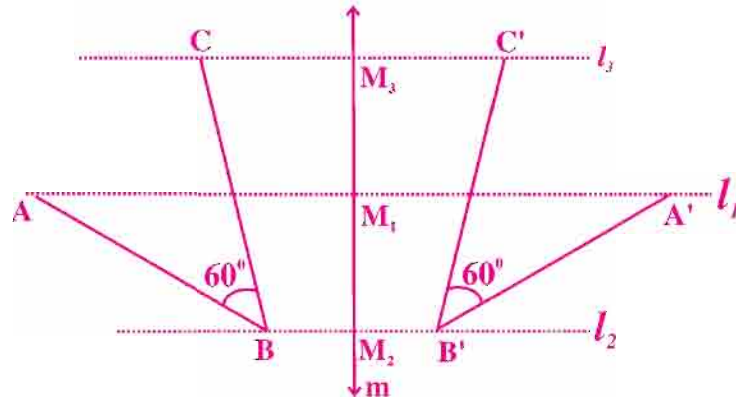
रचना के पद

1. रेखा $AB = 5$ सेमी तथा सममिति अक्ष m की रचना करें
2. बिन्दु A और B से सममिति अक्ष m पर लंब डालें जो बिन्दु M_1 , व M_2 पर प्रतिच्छेदित करें
3. AM_1 को जोड़ते हुए l_1 तथा BM_2 को जोड़ते हुए l_2 रेखाओं की रचना करें
4. $AM_1 = A'M_1$ तथा $BM_2 = B'M_2$ को लेकर बिन्दु A' से B' को मिलाया। अभीष्ट सममित रेखा $A'B'$ प्राप्त है।

12.5.3 दी गई सममिति रेखा (अक्ष) के सापेक्ष सममित कोणों की रचना

उदाहरण 17. सममित अक्ष m के सापेक्ष $\angle ABC = 60^\circ$ के सममित कोण की रचना कीजिए?

हल :



आकृति 12.23

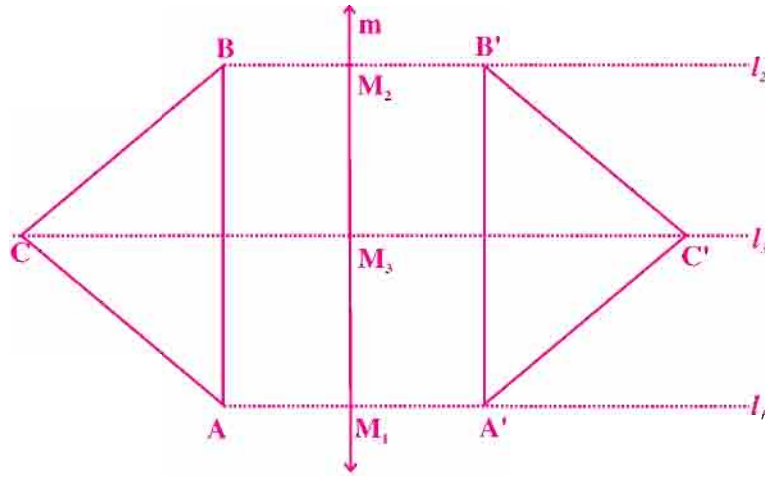
रचना के पद

1. सममित अक्ष m बना कर $\angle ABC = 60^\circ$ की रचना करें।
2. बिन्दुओं A, B तथा C से सममित अक्ष पर लम्ब खींच कर M_1, M_2 और M_3 अंकित कीजिए।
3. AM_1, BM_2 और CM_3 को मिलाते हुए क्रमशः रेखाएँ l_1, l_2 तथा l_3 अंकित करें।
4. $AM_1 = A'M_1, BM_2 = B'M_2$ तथा $CM_3 = C'M_3$ लेकर बिन्दुओं $A'B'$ तथा C' को अंकित किया।
 $A'B'$ तथा $B'C'$ को मिलाया।
अभीष्ट सममित कोण $A'B'C'$ प्राप्त होता है।

12.5.5 दी गई सममित रेखा (अक्ष) के सापेक्ष सममित त्रिभुज की रचना

उदाहरण 18. सममित अक्ष m के सापेक्ष $\triangle ABC$ जिसमें $AB = 5$ सेमी, $BC = 3.7$ सेमी और $AC = 3.2$ सेमी लेकर सममित त्रिभुज की रचना कीजिए।

हल :



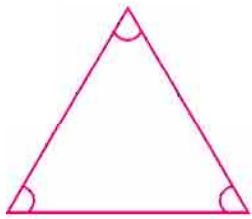
रचना के पद

आकृति 12.24

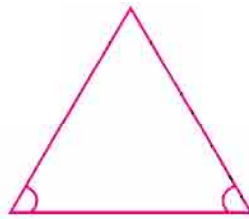
1. सममित अक्ष m एवं दिए गए माप के अनुसार $\triangle ABC$ बनाते हैं।
2. बिन्दु A, B, C से सममित अक्ष m पर M_1, M_2 तथा M_3 पर लंब रेखाएँ l_1, l_2, l_3 बनाते हैं।
3. $AM_1 = A'M_1, BM_2 = B'M_2$ तथा $CM_3 = C'M_3$ लेकर बिन्दु A', B' तथा C' अंकित कीजिए।
4. A' को B' से तथा C' को A' एवं B' से जोड़िए
अभीष्ट सममित $\triangle A'B'C'$ प्राप्त होता है।

प्रश्नावली 12.6

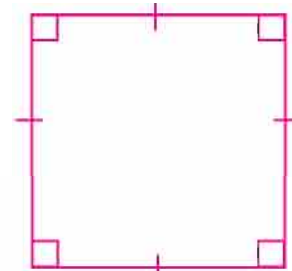
1. रैखिक सममिति तथा सममित अक्ष की परिभाषा दीजिए?
2. नीचे दर्शाई गई आकृतियों के सममित अक्षों की संख्या बताइए



(i)



(ii)



(iii)

आकृति 12.25

3. $\triangle ABC$ में $AB = 4.6$ सेमी, $\angle A = 60^\circ$ एवं $\angle B = 45^\circ$ हों तो एक सममित रेखा के सापेक्ष सममित त्रिभुज की रचना कीजिए।
4. किसी सममित अक्ष m के सापेक्ष $\angle A = 50^\circ$ बनाते हुए सममित कोण की रचना कीजिए।
5. किसी सममित अक्ष m के सापेक्ष रेखा $AD = 5$ सेमी लेकर सममित रेखा की रचना कीजिए।