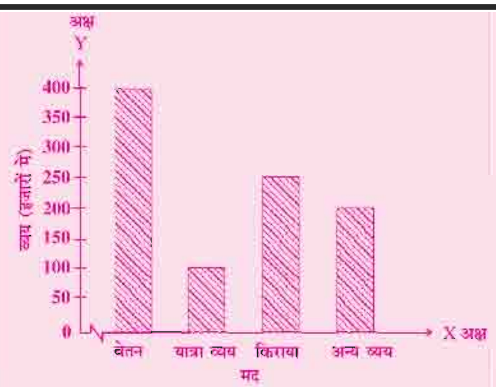
अध्याय 13
सांख्यिकी (Statistics)



हम पढ़ेंगे

(अ) सांख्यिकी

- सांख्यिकी की परिभाषा
- साधारण जीवन में सांख्यिकी का उपयोग
- विभिन्न प्रकार के आँकड़े
- आँकड़ों का निरूपण, आवृत्ति तालिका एवं आवृत्ति, आवृत्ति वर्ग अंतराल, संचयी आवृत्ति, संचयी आवृत्ति तालिका

(ब) आँकड़ों का लेखा चित्रीय निरूपण

- दण्ड रेखाचित्र, आयत चित्र, वृत्त चित्र खींचना
- आवृत्ति बहुभुज खींचना
- तोरण खींचना (संचयी आवृत्ति ग्राफ)

(स) प्रायिकता

- इतिहास, प्रयोग एवं परीक्षण से प्रायिकता

13.1 भूमिका (Introduction)

हम पिछली कक्षाओं में सांख्यिकी के बारे में पढ़ चुके हैं यहाँ हम उसी विषय में आगे पढ़ेंगे।

सांख्यिकी वास्तव में विज्ञान की वह शाखा है जो हमारे दैनिक जीवन के हर धरातल पर किसी न किसी रूप में उपयोग में आने वाले आँकड़ों के संबंध में हमारी सहायता करती है। वर्तमान में शासकीय योजनाओं के निर्माण में सांख्यिकी का महत्वपूर्ण योगदान है। इस अध्याय में हम सांख्यिकी की अवधारणा पर पुन: विचार करेंगे। साथ ही आंकड़ों के चित्रात्मक निरूपण जैसे दण्ड रेखाचित्र, आयत चित्र, वृत्त चित्र, आवृत्ति बहुभुज व तोरण चित्र आदि के बारे में जानेंगे। अध्याय के अंत में प्रायिकता की अवधारणा पर चर्चा करेंगे।

13.2 सांख्यिकी (Statistics)

सांख्यिकी में संख्यात्मक आंकड़ों का संकलन, वर्गीकरण और सारणीयन, विश्लेषण एवं व्याख्या का कार्य किया जाता है।

इस संदर्भ में निम्न तथ्यों पर ध्यान अवश्य रखा जाना चाहिए

(i) संख्यात्मक तथ्य परिमाणात्मक रूप से व्यक्त किए जाते हैं, गुणात्मक रूप में नहीं।

(ii) संख्यात्मक तथ्य प्रेक्षणों का समूह होता है। किसी एक प्रेक्षण से सांख्यिकी नहीं बनती।

(iii) संख्यात्मक तथ्य एक सुनिश्चित उद्देश्य से एकत्र किए जाते हैं।

(iv) किसी प्रयोग में संख्यात्मक तथ्यों की तुलना की जा

सकती है, और उन्हें विभिन्न समूहों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

13.3 दैनिक जीवन में सांख्यिकी के उपयोग (Use of statistics in daily life)

दैनिक जीवन में किसी तथ्य को आँकड़ों की सहायता से व्यक्त करने का बहुत महत्व है। उसमें से कुछ प्रमुख इस प्रकार हैं :

(i) विभिन्न राष्ट्रों के आयात निर्यात के आँकड़े।

(ii) दैनिक निर्वाह भत्ते में उतार-चढ़ाव के आँकड़े।

(iii) जनसंख्या के साथ खाद्यान्न उत्पादन के आँकड़े।

(iv) शेयर बाजार में शेयर मूल्यों के उतार-चढ़ाव के आँकड़े।

(v) विभिन्न शहरों के न्यूनतम और अधिकतम तापक्रमों के आँकड़े।

(vi) किसी क्रिकेट टीम के बॉलिंग एवं बेटिंग से संबंधित आँकड़े आदि।

इस प्रकार हम देखते हैं कि दैनिक जीवन के महत्वपूर्ण कार्यों में सांख्यिकी आँकड़ों का उपयोग किया जाता है।

13.4 विभिन्न प्रकार के आँकड़े (Data)

जिस प्रकार हम भवन निर्माण के पूर्व ईंट, रेत, सीमेंट इत्यादि एकत्र करते हैं उसी प्रकार सांख्यिकी अध्ययन के पूर्व आंकड़ों का संकलन किया जाता है।

आँकड़ों को एकत्रित करने के आधार पर इन्हें दो भागों में विभाजित किया गया है।

(i) प्राथमिक आँकड़े (Primary data)

(ii) द्वितीयक आँकड़े (Secondary data)

(i) प्राथमिक आँकड़े (Primary Data)

सांख्यिकी अन्वेषक जिन आँकड़ों का संकलन स्वयं या अपने कार्यकर्ताओं के सहयोग से करता है, उन्हें प्राथमिक आँकड़े कहा जाता है।

इन आँकड़ों का संकलन अन्वेषक के द्वारा प्रत्यक्ष या अपने कार्यकर्ताओं के द्वारा अप्रत्यक्ष रूप से किया जाता है। अप्रत्यक्ष संकलन में प्रगणकों द्वारा अनुसूचियां भरवाकर, अनुसूचकों द्वारा प्रश्नावलियाँ भरवाकर, स्थानीय स्रोतों द्वारा, संवाददाताओं द्वारा या विशेषज्ञों के मौखिक अन्वेषण द्वारा किया जाता है।

(ii) द्वितीयक आँकड़े (Secondary Data)

जब उन आँकड़ों का जिनका पूर्व में अन्य किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा संकलन किया जा चुका हो, (भले ही वे प्रकाशित या अप्रकाशित स्थिति में हो) का उपयोग अन्य अन्वेषक के द्वारा किया जाता है तब इन आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़े कहा जाता है।

द्वितीयक आँकड़ों में अन्वेषक का श्रम, व्यय और समय अवश्य बचता है परन्तु इनका उपयोग बहुत सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए, क्योंकि पूर्व में इनके संकलन का उद्देश्य भिन्न होता है।

13.5 आँकड़ों का निरूपण (Presentation of Data)

संकलित सांख्यिकी आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण के आधार पर भी इन्हें दो भागों में वर्गीकृत किया जाता है।

(i) अवर्गीकृत या अपरिष्कृत आँकड़े

(ii) वर्गीकृत या परिष्कृत आँकड़े

(i) अवर्गीकृत या अपरिष्कृत आँकड़े (Raw or ungrouped data)

जब संकलित आँकड़े जिस रूप में एकत्रित किए जाएँ उसी रूप में प्रस्तुत कर दिया जाय तो इन्हें अवर्गीकृत या अपरिष्कृत आँकड़े कहा जाता है।

जैसे : कक्षा 9वीं के 20 छात्रों के प्राप्तांक इस प्रकार है

7, 4, 9, 5, 8, 10, 6, 7, 9 ,2 0, 3, 7, 6, 2, 1, 9, 8, 3, 5

(ii) वर्गीकृत या परिष्कृत आँकड़े (Arranged or grouped)

संकलित आँकड़ों को सही रूप में समझने, अध्ययन करने के लिए इनका सही प्रस्तुतीकरण आवश्यक होता है। इसके लिए आँकड़ों को शीर्षकों के अनुसार विभाजित कर प्रस्तुत करना होता है। यही प्रस्तुतीकरण सारणीयन या वर्गीकरण कहलाता है। आँकड़ों की जितनी बार पुनरावृत्ति होती है उसे आँकड़े की आवृत्ति (Frequency) कहते हैं। आवृत्ति को संकेत f से निरूपित करते हैं।

प्रेक्षण : संकलित आँकड़ों के प्रत्येक मान को एक प्रेक्षण कहा जाता है। जैसे 2, 4, 7, 7, 6, 9, 8, 5 में प्रेक्षणों की संख्या 8 है।

(iii) आवृत्ति तालिका (Frequency Table)

संकलित आँकड़ों को सर्वप्रथम आरोही या अवरोही क्रम में जमाकर पुन: उसे सारणी में प्रस्तुत करते हैं। इसे आवृत्ति सारणी कहा जाता है।

आवृत्ति सारणी के अध्ययन हेतु हम उससे संबंधित कुछ आवश्यक परिभाषाओं का स्मरण करते हैं।
टेली चिह्न (मिलान चिह्न) : अपरिष्कृत आँकड़ों को वर्गीकृत करते समय गणना चिह्न का प्रयोग करते हैं। किसी संकलन में आँकड़े की आवृत्ति चिह्नित करने के लिए संख्या के आगे उतनी ही खड़ी रेखाखण्ड (।) खींच दी जाती है, परन्तु यह सिर्फ चार रेखाओं तक ही किया जाता है, पांचवी बार संख्या के आने पर पूर्व की चार रेखाओं को एक तिर्यक रेखा से काट दिया जाता है (~~||||~~), छटवीं बार पुनरावृत्ति होने पर पुन: आगे एक खड़ी रेखा खींच दी जाती है (~~||||~~ ।)। ऐसा करने से मिलान चिह्नों की गणना सरल हो जाती है।

जैसे- कुछ संकलित आँकड़े आरोही क्रम में दिए गए हैं-

7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 9 इनके मिलान चिन्ह निम्नानुसार होंगे

संख्या	मिलान (टेली) चिह्न	आवृत्ति
7	III	3
8	~~IIII~~	5
9	~~IIII~~ II	7

(iv) विचर (Variate)

वह संख्यात्मक राशि जिसका मान विभिन्न प्रेक्षणों के अनुसार बदलता रहता है उसे विचर कहते हैं। सामान्यत: इसे '**x**' से निरूपित किया जाता है। विचर दो प्रकार के होते हैं।

(अ) खंडित विचर (Discreate Variate) वह विचर जिसकी माप निश्चित होती है। जैसे किसी शाला की कक्षाओं में छात्रों की संख्या 30, 35, 40 हो तो $x = 30, 35, 40$ क्रमश: खंडित विचर का उदाहरण है।

(ब) सतत विचर (Continuous Variate) इसकी माप निश्चित नहीं होती है। इसे समूह, जैसे 10-20, 20-30 .... में व्यक्त किया जाता है तथा विचर **x**, 10 और 20 के मध्य का कोई भी मान, 20 और 30 के मध्य का मान, इत्यादि ले सकता है।

(v) परास (Range) विचर या प्रेक्षणों के अधिकतम और न्यूनतम मान के अंतर को परास कहा जाता है।

(vi) वर्ग आवृत्ति (Class Frequency) प्रत्येक वर्ग के आंकड़ों की पुनरावृत्ति जितनी बार होती है उसे उस वर्ग की वर्ग आवृत्ति कहते हैं।

(vii) वर्ग की माप (Class size) $$\text{वर्ग की माप} = \frac{\text{परास}}{\text{वर्गों की संख्या}}$$

इसे प्राय: '**h**' से व्यक्त किया जाता है। वर्ग की माप को वर्ग की चौड़ाई (**width**) भी कहा जाता है।

(viii) वर्ग सीमाएँ(Class limit) किसी वर्ग के निम्न एवं उच्च मान को क्रमश: उस वर्ग की निम्न व उच्च सीमा कहते हैं। जैसे वर्ग 10-20 की निम्न सीमा 10 है तथा उच्च सीमा 20 है।

किसी वर्ग की माप को उसकी उच्च तथा निम्न सीमा के आधार पर भी ज्ञात किया जाता है।

वर्ग की माप = उच्च सीमा – निम्न सीमा

जैसे : वर्ग 10–20 की माप = 20 –10 =10

(ix) वर्ग मध्यमान या वर्ग चिह्न (Class mark) किसी वर्ग की निम्न और उच्च सीमाओं का माध्य वर्ग मध्यमान या वर्ग चिह्न कहलाता है।

$$\text{अत: किसी वर्ग अंतराल का मध्यमान} = \frac{\text{वर्ग की निम्न सीमा} + \text{वर्ग की उच्च सीमा}}{2}$$

जैसे : वर्ग 15-30 का मध्यमान $= \frac{15+30}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$

13.5.1 वर्ग अंतराल

संकलित आँकड़ों के निरूपण में वर्ग अन्तराल बनाने हेतु सर्वप्रथम वर्गों की संख्या का निर्धारण किया जाता है, यह प्रेक्षणों की संख्या पर निर्भर करता है। सामान्य रूप से 5 से 15 तक की वर्ग संख्या उपयुक्त मानी जाती है।

वर्ग संख्या के पश्चात वर्ग अन्तराल या वर्ग का निर्धारण किया जाता है। वर्ग दो प्रकार के होते हैं

(i) समावेशी श्रेणी (Inclusive Series)

(ii) अपवर्जी श्रेणी (Exclusive Series)

(i) समावेशी श्रेणी : इस विधि में निम्न और उच्च सीमा के मान वाले प्रेक्षणों को उसी वर्ग में सम्मिलित किया है इसमें पहले वर्ग की उच्च सीमा दूसरे वर्ष की निम्न सीमा के बराबर नहीं होती है।

जैसे :

वर्ग
0 -9
10-19
20-29
30-39

समावेशी वर्गों में किसी वर्ग की उच्च सीमा व दूसरे वर्ग की निम्न सीमा में अन्तर होने के कारण इन दोनों संख्याओं के मध्य स्थित संख्याओं का निरूपण इस विधि से संभव नहीं होता है। जैसे इन आंकड़ों में किसी प्रेक्षण का मान 9.5 है तो वह न तो 0-9 में है और न ही 10-19 में सम्मिलित किया जा सकता है।

(ii) अपवर्जी श्रेणी : इस विधि में पहले वर्ग की उच्च सीमा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा होती है तथा यही क्रम आगे के वर्गों में भी होता है। इस विधि में वर्ग की उच्च सीमा के पद को उस वर्ग में सम्मिलित न कर अगले वर्ग में सम्मिलित किया जाता है जहां वह वर्ग की निम्न सीमा में हो जैसे :

उम्र वर्षों में	वर्ग
5 वर्ष से कम	0 - 5
5 वर्ष तथा 10 से कम	5 - 10
10 वर्ष तथा 15 से कम	10 - 15
15 वर्ष तथा 20 से कम	15 - 20

यदि किसी बालक की आयु 0 से 5 वर्ष के मध्य है तो उसे वर्ग 0-5 में सम्मिलित किया जाता है। 5 वर्ष आयु के बच्चे को 5-10 वर्ग में सम्मिलित किया जाता है।

वर्ग निर्माण में निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए-

(अ) वर्ग एक-दूसरे को प्रतिच्छेदित न करें।

(ब) वर्ग के बीच में कोई अंतर न रहे।

(स) जहाँ तक संभव हो वर्ग एक ही आकार के हों।

(द) वर्ग इस प्रकार चुने जाएँ कि कोई विशिष्ट आंकड़ा किस वर्ग में रहे इसकी अनिश्चितता न हो।

13.6 संचयी आवृत्ति (Cumulative Frequency)

किसी सारणीयन में प्रथम वर्ग की आवृत्ति का योग यदि द्वितीय वर्ग की आवृत्ति में कर दें तो योगफल

द्वितीय वर्ग की संचयी आवृत्ति कहलाता है। इसी प्रकार द्वितीय वर्ग की संचयी आवृत्ति का योग तृतीय वर्ग की आवृत्ति में करने पर तृतीय वर्ग की संचयी आवृत्ति प्राप्त होती हैं। इसी प्रकार की गणना से अन्य वर्गों की संचयी आवृत्ति ज्ञात की जा सकती है। इस प्रकार किसी वर्ग की संचयी आवृत्ति उस वर्ग की और उस वर्ग से पूर्व वर्गों की आवृत्तियों का योग होती है। संचयी आवृत्ति को संकेत c.f. द्वारा निरूपित करते हैं।

उदाहरण 1. किसी कार्यालय के कर्मचारियों के वेतन निम्नानुसार हों तो संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए

वेतन	आवृत्ति
800-1000	12
1000-1200	22
1200-1400	30
1400-1600	34

हल :

वर्ग वेतन	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (c.f.)
800-1000	12	12 = 12
1000-1200	22	12 + 22 = 34
1200-1400	30	34 + 30 = 64
1400-1600	34	64 + 34 = 98

यह ध्यान देने योग्य है कि प्रथम वर्ग की आवृत्ति ही उस वर्ग की संचयी आवृत्ति होती है। उसके बाद के वर्गों की संचयी आवृत्ति क्रमशः योग से ज्ञात की जाती है।

उदाहरण 2. एक परीक्षा में 9वीं कक्षा के 30 छात्रों के प्राप्तांक निम्नानुसार हैं। इन प्राप्तांकों से 10 वर्ग अन्तराल वाले पाँच वर्गों की आवृत्ति तालिका बनाइए

19	27	40	3	33	41	18	8	20	0
23	49	16	36	14	23	49	9	35	38
10	23	37	24	22	28	29	12	06	39

हल : दिए हुए संकलन में सबसे कम अंक शून्य तथा सबसे बड़ा अंक 49 है।

यहाँ परास = अधिकतम मान- न्यूनतम मान = 49 – 0 = 49

यदि इन आंकड़ों से 5 वर्गों का निर्धारण करना हो तो

$$\text{वर्ग की माप} = \frac{\text{परास}}{\text{वर्गों की संख्या}} = \frac{49}{5} = 9.8$$

अत: वर्ग की माप 10 ली जा सकती है

अत: 10 माप वाले 5 वर्ग निम्नानुसार सारणीबद्ध किए जायेंगे।

वर्ग	मिलान चिह्न	आवृत्ति	स्पष्टीकरण
0-10	卌	5	3, 8, 0, 9, 6 अर्थात 5 प्रेक्षण
10-20	卌 |	6	19, 18, 16, 14, 10, 12 अर्थात 6 प्रेक्षण
20-30	卌 ||||	9	20, 27, 23, 23, 23, 24, 22, 28, 29 अर्थात 9 प्रेक्षण
30-40	卌 |	6	33, 36, 35, 38, 37, 39 अर्थात 6 प्रेक्षण
40-50	||||	4	40, 41, 49, 49 अर्थात 4 प्रेक्षण

उदाहरण 3. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन की संचयी आवृत्ति सारणी बनाइए

वर्ग	आवृत्ति
40-50	13
50-60	07
60-70	11
70-80	09

हल : दिए गए आवृत्ति बंटन की संचयी आवृत्ति सारणी निम्नानुसार प्राप्त होगी

वर्ग	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति	स्पष्टीकरण
40-50	13	13	13 = 13
50-60	07	20	13+7 = 20
60-70	11	31	20+11 = 31
70-80	09	40	31+09 = 40

उदाहरण 4. निम्नलिखित संचयी आवृत्ति बंटन को सामान्य आवृत्ति में परिवर्तित कीजिए

ऊँचाई (सेमी में)	संचयी आवृत्ति
135-140	53
140-145	95
145-150	140
150-155	191
155-160	202
160-165	210

हल :

ऊँचाई (सेमी में)	संचयी आवृत्ति	आवृत्ति	स्पष्टीकरण
135-140	53	53	53-0 = 53
140-145	95	42	95-53=42
145-150	140	45	140-95=45
150-155	191	51	191-140 = 51
155-160	202	11	202-191=11
160-165	210	08	210-202 = 08

प्रश्नावली 13.1

1. दैनिक जीवन में सांख्यिकी के प्रमुख उपयोग समझाइए।
2. निम्नलिखित का उदाहरण सहित वर्णन कीजिए।

   (i) मिलान (टेली) चिह्न

   (ii) विचर एवं उसके प्रकार

   (iii) वर्ग अन्तराल

   (iv) परास
3. संचयी आवृत्ति किसे कहते हैं और इसे कैसे ज्ञात किया जाता है?
4. सही उत्तर लिखिए।

   (i) बंटन 2, 5, 0, 7, 4, 3, 5, 3, 6, 4 में वर्ग अन्तराल 1-3, 3-5 ... में वर्ग अन्तराल 3-5 की आवृत्ति है।

   (अ) 2 (ब) 4 (स) 1 (द) 7

   (ii) निम्नलिखित सारणी में संचयी आवृत्ति 20 वाला विचर होगा?

विचर	P	Q	R	S	T
आवृत्ति	6	5	9	7	4

   (अ) Q (ब) S (स) R (द) T

   (iii) यदि किसी आवृत्ति बंटन में प्रथम चार वर्गों की आवृत्तियां क्रमश: 9, 7, 3, 11 हो तो तृतीय वर्ग की संचयी आवृत्ति होगी

   (अ) 7 (ब) 16 (स) 20 (द) 19
5. निम्न आवृत्ति बंटन में वर्ग 20-30 की संचयी आवृत्ति लिखिए।

X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
f	3	7	5	4	9

6. निम्नलिखित आवृत्ति सारणी में M का मान ज्ञात कीजिए

x	A	B	C	D
f	4	4	M	6
c.f.	4	8	10	16

7. 30, 29, 32, 31, 28, 26, 29, 36, 34, 31, 29, 30, 38, 36, 34, 32, 33, 30, 35, 36, 37, 28, 32, 36, 30, 36, 34, 31, 33, 36 उपर्युक्त को मिलान चिन्ह की सहायता से आवृत्ति सारिणी में दर्शाइए।

8. एक शाला की कक्षा 9वीं के 30 छात्रों के प्राप्तांक निम्न अनुसार है इन्हें आवृत्ति सारणी में निरूपित कीजिए

20, 27, 29, 40, 45, 31, 20, 31, 27, 20, 26, 31, 20, 26, 40, 29, 26, 40, 31, 31, 13, 25, 25, 27, 13, 27, 27, 29, 20, 13

9. एक परीक्षा में 30 छात्रों को निम्न अनुसार अंक प्राप्त हुए इन प्राप्तांकों के 10 माप वाले 5 वर्गों की आवृत्ति सारणी बनाइए

19, 27, 40, 3, 33, 41, 18, 8, 20, 3, 23, 49, 16, 36, 14, 23, 49, 9, 35, 23, 10, 37, 24, 22, 28, 29, 12, 6, 39, 38.

10. निम्नलिखित बंटन के लिए उपयुक्त संख्या के वर्ग लेकर आवृत्त सारिणी बनाइए। साथ ही संचयी आवृत्ति भी लिखिए

11, 13, 5, 17, 24, 31, 27, 19, 27, 29, 30, 16, 12, 18, 27, 20, 18, 9, 16, 5, 9, 18, 7, 13, 29, 0, 11, 30, 17 24

11. निम्न की संचयी आवृत्ति सारणी बनाइए

आयु (वर्षों में)	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
आवृत्ति	13	17	21	9	16

12. निम्न वर्गों की आवृत्ति ज्ञात कीजिए

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
आवृत्ति	...	...	...	...	...
संचयी आवृत्ति	8	13	31	40	56

13. एक मेडीकल परीक्षा में 400 विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार है। इसकी सहायता से (i) 600 से कम अंक प्राप्त करने वाले तथा (ii) 750 से कम अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या ज्ञात कीजिए

प्राप्तांक	400-450	450-500	500-550	550-600	600-650	650-700	700-750	750-800
विद्यार्थियों की संख्या	30	45	60	52	54	67	45	47

14. निम्न को वर्गों में दर्शाइए

ऊँचाई (फुट में)	पेड़ों की संख्या
10 से कम	12
20 से कम	20
30 से कम	35
40 से कम	52
50 से कम	68
60 से कम	72

13.7 सांख्यिकी आँकड़ों का चित्रीय निरूपण (Graphical Representation of Statistical data)

पिछले खंड में हम सीख चुके हैं कि दिए हुए आँकड़ों को सारणीबद्ध किस प्रकार किया जाता है। आकड़ों को सचित्र प्रस्तुत कर हम इनके प्रस्तुतीकरण की ऐसी व्यवस्था करते हैं जो न सिर्फ देखने में अच्छी लगे वरन् अध्ययन में सुविधा भी प्रदान करें। दण्ड रेखाचित्र व आयत चित्र के बारे में हम पिछली कक्षाओं में पढ़ चुके हैं। आइए इसका पुनरावलोकन करें तथा इनके बारे में अन्य जानकारी भी प्राप्त करें।

(i) दण्ड रेखा चित्र (Bar-graph)

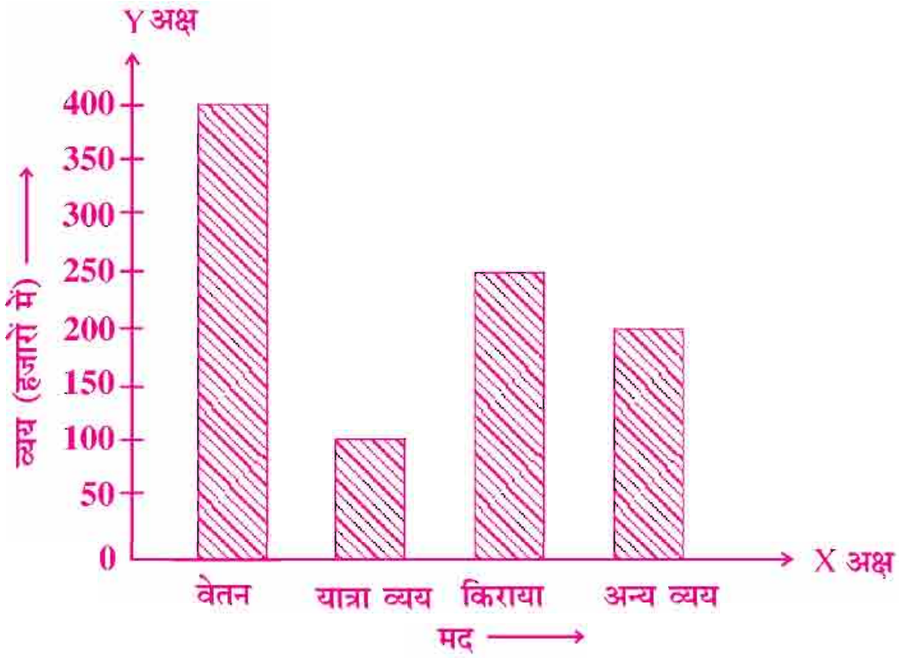
इसके द्वारा किसी एक निकाय से संबंधित सांख्यिकीय आकड़ों को दण्ड रेखा चित्रों के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

इस चित्रीय निरूपण में समान चौड़ाई के दंड **'X'** अक्ष पर तथा ऊँचाई **'Y'** अक्ष के समांतर दिए गए आकड़ों के अनुसार खींचे जाते हैं।

उदाहरण 5. एक व्यवसायिक प्रतिष्ठान में विभिन्न मदों में निम्नानुसार व्यय हुआ। इसको दण्ड रेखाचित्र द्वारा दर्शाइए

मद	व्यय (हजारों में)
वेतन	400
यात्रा व्यय	100
किराया	250
अन्य व्यय	200

हल :



आकृति 13.1

दण्ड रेखा चित्र में दण्ड की चौड़ाई तथा '**X**' अक्ष पर दण्डों के बीच की दूरी से चित्र को स्पष्ट एवं समझने योग्य बनाते हैं।

(ii) आयत चित्र (Histogram)

आयत चित्र वर्गीकृत संतत् आवृत्ति बंटन का आयतीत निरूपण है जिसमें वर्ग अन्तराल आधार होते हैं तथा आयतों की ऊँचाइयाँ वर्गों की आवृत्ति के अनुसार होती है।

इसमें वर्ग अन्तराल को उचित पैमाना लेकर '**x**' अक्ष पर तथा आवृत्ति को उचित पैमाना लेकर '**y**' अक्ष पर अंकित किया जाता है।

(अ) जब आवृत्ति बंटन वर्गीकृत एवं सतत् हो तथा वर्गान्तर भी समान हो।

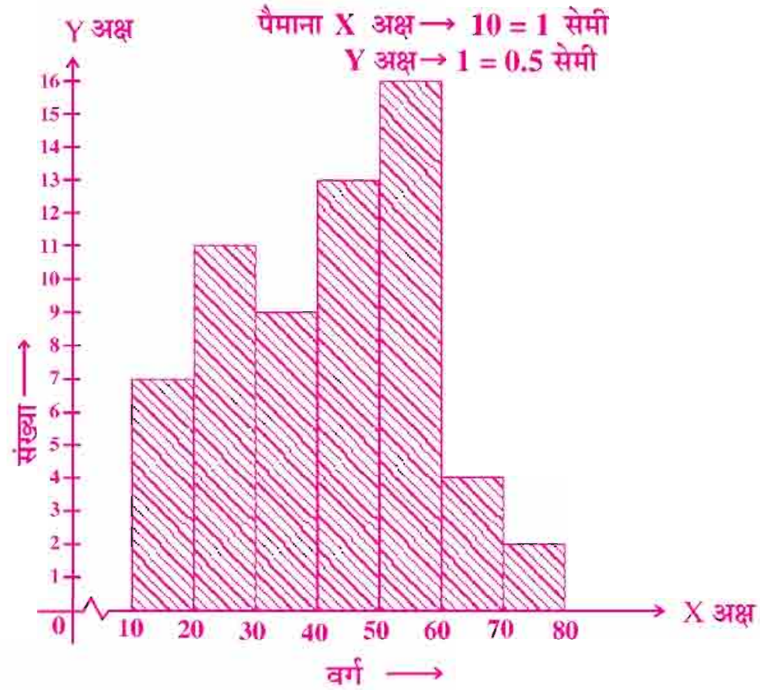
इस स्थिति में आवृत्ति बंटन वर्गीकृत होता है तथा वर्गान्तर भी समान होता है। अत: सुविधानुसार '**x**' अक्ष पर वर्गान्तर का पैमाना लेकर तथा '**y**' अक्ष पर आवृत्ति बंटन का पैमाना लेकर आयत चित्र बनाया जा सकता है।

यह आवश्यक नहीं है कि वर्गान्तर और आवृत्ति बंटन हेतु समान पैमाना लिया जाए।

उदाहरण 6. आयत चित्र की सहायता से निम्न को दर्शाइए

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
संख्या	7	11	9	13	16	4	2

हल : यहाँ वर्गान्तर को **x** अक्ष पर पैमाना 10 इकाई = 1 सेमी तथा वर्ग को **y** अक्ष पर पैमाना 1 इकाई = 0.5 सेमी लेकर चित्र में दर्शाए अनुसार आयत बनाए जा सकते हैं।



आकृति 13.2

(ब) जब आवृत्ति बंटन वर्गीकृत हो परन्तु सतत् न हो

इस तरह के प्रश्न में आवृत्ति बंटन को सतत् बनाकर नए वर्ग बनाए जाते हैं फिर उपर्युक्त अनुसार आयत चित्र बनाए जाते हैं।

उदाहरण 7. निम्न आवृत्ति बंटन का आयत चित्र बनाइए

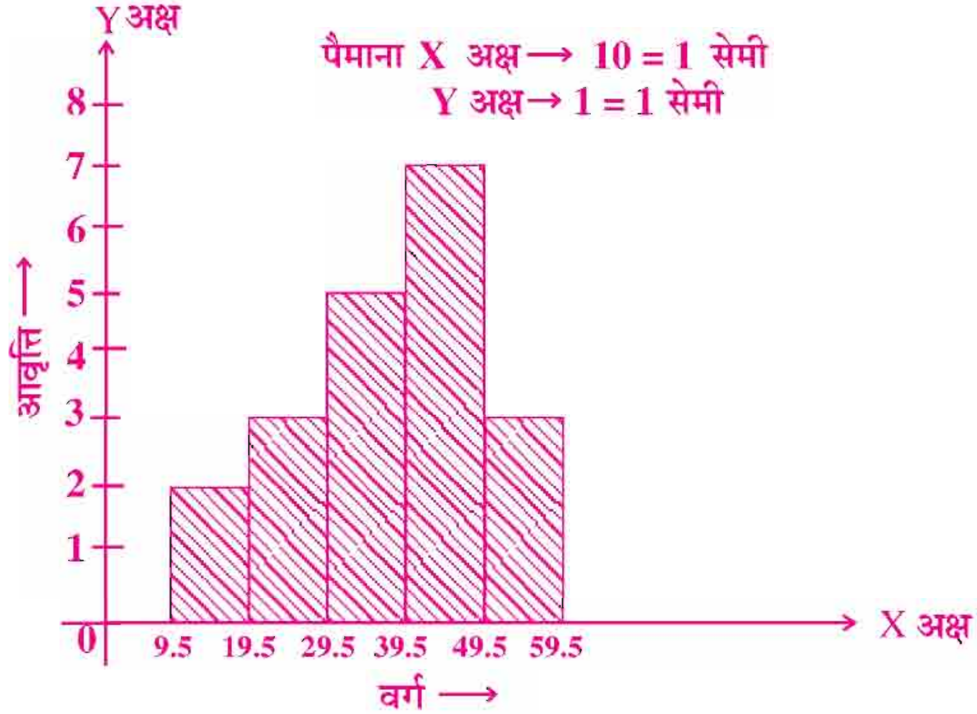
वर्ग	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
आवृत्ति	2	3	5	7	3

हल : इस प्रश्न में आवृत्ति बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु सतत् नहीं है। अत: सर्व प्रथम आवृत्ति बंटन को सतत् बनाया जाता है तब पूर्वानुसार आयत चित्र बनाया जाता है।

> सतत् वर्गान्तर प्राप्त करने के लिए दो लगातार वर्ग में पहले वर्ग की उच्च सीमा और दूसरे वर्ग की निम्न सीमा के अंतर का आधा पहले वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ तथा उसी वर्ग की निम्न सीमा में घटा दिया जाता है। इसी प्रकार दूसरे वर्ग की निम्न सीमा से घटाकर उच्च सीमा में जोड़ देते हैं। यह क्रिया अन्य वर्गों में भी की जाती है।

अत: दिए गए प्रश्न की सतत् आवृत्ति बंटन सारणी नियमानुसार इस प्रकार प्राप्त होगी

वर्ग	9.5-19.5	19.5-29.5	29.5-39.5	39.5-49.5	49.5-59.5
आवृत्ति	2	3	5	7	3



आकृति 13.3

(स) जब आवृत्ति अवर्गीकृत हो तथा बंटन के मध्य बिन्दु दिए गए हों

इस तरह के प्रश्न में मध्यमान को सूत्र $(x-\frac{h}{2})$ तथा $(x+\frac{h}{2})$ के द्वारा वर्ग में बदल लेते हैं तब पूर्व में दर्शाई विधि द्वारा आयत चित्र बना लेते हैं। यहाँ h दो क्रमागत मध्यमानों में अंतर है।

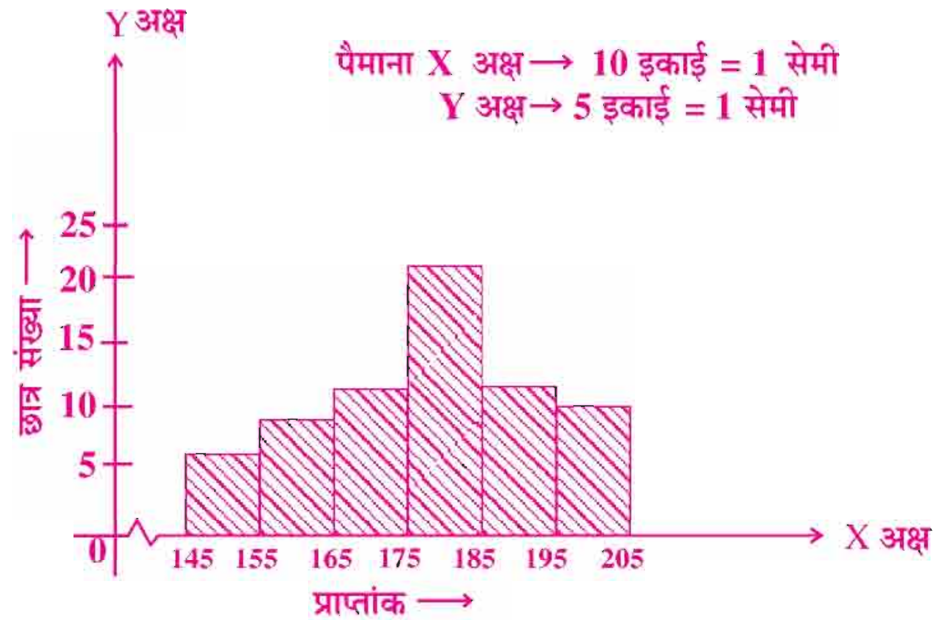
उदाहरण 8. एक शाला की कक्षा 9वीं के 70 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांक निम्नानुसार है। इसका आयत चित्र बनाइए।

प्राप्त अंक	150	160	170	180	190	200
छात्र संख्या	6	8	12	21	13	10

हल : दिए हुए प्रश्न में सबसे पहले वर्गीकृत आवृत्ति बंटन (मध्यमान) को सूत्र $(x-\frac{h}{2})$ और $(x+\frac{h}{2})$ के द्वारा वर्ग में बदलते हैं। इस प्रश्न में h का मान 10 है अत: वर्गीकृत सारणी इस प्रकार होगी

प्राप्तांक	145-155	155-165	165-175	175-185	185-195	195-205
छात्र संख्या	6	8	12	21	13	10

इस प्रकार वर्गों की सहायता से आवृत्ति आयत चित्र निम्नानुसार बनाते हैं।



आकृति 13.4

टिप्पणी : X- अक्ष पर 0 और 145 के बीच एक भंग चिह्न (⁓) बनाया गया है। यह चिह्न यह दर्शाता है कि यह दूरी वास्तव में 145 नहीं है किन्तु सुविधा के लिए इतनी दूरी को 145 दिखाया जा रहा है।

(iii) वृत्त चित्र (Pie chart)

जब किसी एक प्रेक्षण की तुलना अन्य अथवा सम्पूर्ण घटकों से की जाती है तब सांख्यिकी आकड़ों के वृत्तीय चित्र बनाए जाते हैं। इसमें विभिन्न घटकों को वृत्त के अलग-अलग भागों से दर्शाया जाता है।

सम्पूर्ण घटकों को वृत्त के केंद्र के 360^0 कोण के समतुल्य मानकर घटक के अनुपात के अनुसार केंद्र पर कोण अन्तरित किया जाता है।

इस प्रकार हम सर्वप्रथम वृत्त बनाकर घटकों के मान के अनुपात में कोण ज्ञात कर उसे वृत्त में दर्शाते हैं। इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है।

उदाहरण 9. किसी शाला के छात्र द्वारा अपने एक दिन के कार्य में विभिन्न गतिविधियों में निम्नानुसार घंटे खर्च किए जाते हैं, इस जानकारी को वृत्त चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए

गतिविधि	नींद में	शाला में	गृह कार्य	खेल	अन्य	योग
घंटे	8	7	4	2	3	24

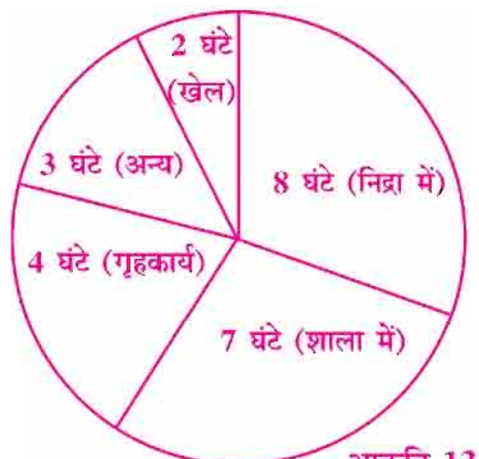
हल : सर्व प्रथम इस प्रश्न को हल करते समय 24 घंटों के मान को 360^0 मानते हुए हर गतिविधि के सापेक्ष केंद्र पर बने कोण का मान निम्न सूत्र से ज्ञात कर लेते हैं

$$= \frac{\text{गतिविधि के घंटे}}{24} \times 360 = \text{गतिविधि के सापेक्ष कोण की माप}$$

दिए गए आकड़ों के कोणीय मान की सारणी इस प्रकार प्राप्त होगी

गतिविधि	घंटों में समय	कोणीय मान
निद्रा में	8 घंटा	$\frac{8}{24} \times 360^0 = 120^0$
शाला में	7 घंटा	$\frac{7}{24} \times 360^0 = 105^0$
गृह कार्य	4 घंटा	$\frac{4}{24} \times 360^0 = 60^0$
खेल	2 घंटा	$\frac{2}{24} \times 360^0 = 30^0$
अन्य	3 घंटा	$\frac{3}{24} \times 360^0 = 45^0$

अब कोण के अनुसार वृत्त चित्र बनायेंगे। सर्वप्रथम वृत्त खींचकर केंद्र को परिधि से जोड़ते हुए एक त्रिज्या खींच लेंगे और उसे आधार मानकर क्रमश: कोण मान के अनुसार रेखाएँ खींचेंगे।



आकृति 13.5

(iv) आवृत्ति बहुभुज (Frequency-polygon)

आवृत्ति बंटन का चित्रीय निरूपण एक बहुभुज होता है। यह दो प्रकार से बनाया जा सकता है

(i) आयत द्वारा

(ii) बिना आयत द्वारा

आयत चित्र द्वारा

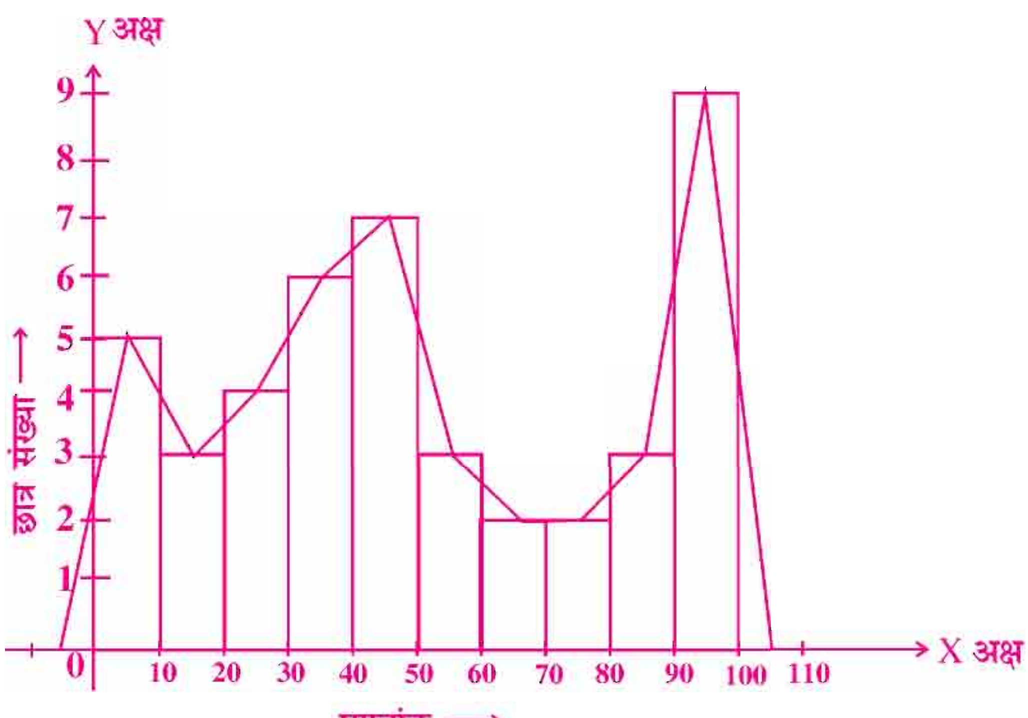
इस विधि में सर्व प्रथम दी हुई आवृत्ति बंटन का आयत चित्र बनाते हैं। फिर प्रत्येक आयत की ऊपरी क्षैतिज रेखा का मध्य बिन्दु ज्ञात कर इन बिन्दुओं को सरल रेखा से जोड़ते हैं। इसके बाद पहले मध्य बिन्दु को इससे पूर्व संभावित वर्ग अंतराल के **X** अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दु से तथा अंतिम मध्य बिन्दु को आगे बनने वाले संभावित वर्ग अंतराल वाले **X** अक्ष के मध्य बिन्दु से जोड़ते हैं, जिससे आवृत्ति बहुभुज प्राप्त होता है।

उदाहरण 10. निम्नलिखित आकड़ों के लिए आयत चित्र तथा आवृत्ति बहुभुज की रचना कीजिए।

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
छात्र संख्या	5	3	4	6	7	3	2	2	3	9

हल : सर्व प्रथम दिए हुए आवृत्ति बंटन और आवृत्ति की सहायता से आयत चित्र पूर्व में बताई गई विधि से खींचेगे। इसके बाद आयतों की ऊपरी क्षैतिज रेखा के मध्य बिन्दु अंकित करते हैं। फिर पहले मध्य बिन्दु के पूर्व वाला वर्ग (-10-0) होगा इसका मध्य बिन्दु **X** अक्ष पर लेते हैं। इसी प्रकार अंतिम मध्य बिन्दु के आगे वाला कल्पित वर्ग (100-110) होगा इसका मध्य बिन्दु भी अंकित कर जोड़ते हैं।

अतः अभीष्ट बहुभुज **OPQRSTUVWXYZ** है।



आकृति 13.6

(v) संचयी आवृत्ति वक्र 'तोरण' (Cumulative Frequency Curve or Ogive)

जब रेखाचित्र को विश्लेषित कर माध्यिका इत्यादि ज्ञात करना हो तब संचयी आवृत्ति वक्र या तोरण का निर्माण किया जाता है।

संचयी आवृत्ति वक्र बनाने के लिए वर्ग अन्तराल की उच्च सीमाओं को X निर्देशांक पर तथा उनकी संगत संचयी आवृत्तियों को Y निर्देशांक पर बिन्दुओं का आलेखन करते है तथा सभी बिन्दुओं को मुक्त हस्त से जोड़कर एक निष्कोण वक्र बनाते हैं।

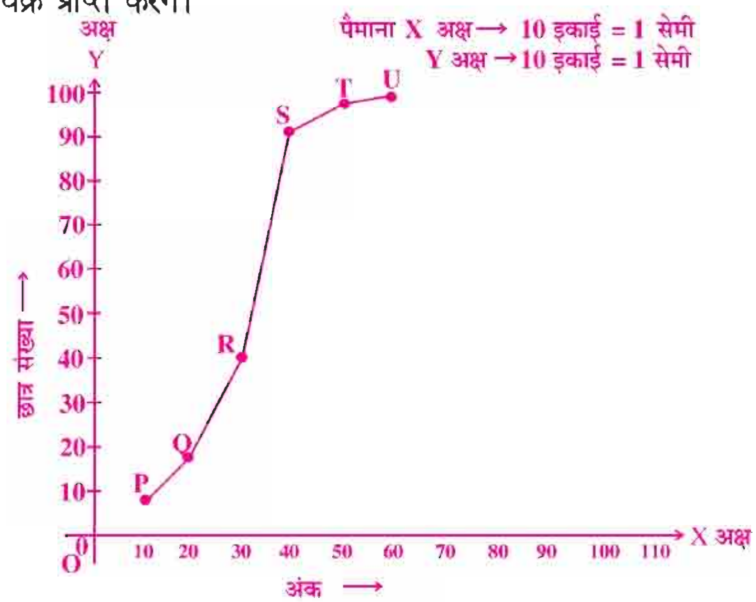
उदाहरण 11. निम्न आवृत्ति बंटन की सहायता से संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए?

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
छात्र संख्या	7	10	23	51	6	2

हल : इस प्रश्न को हल करते समय संचयी आवृत्ति के साथ सारिणी निम्नानुसार बनाते हैं

अंक (X)	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति
10 से कम	7	7
20 से कम	10	17
30 से कम	23	40
40 से कम	51	91
50 से कम	6	97
60 से कम	2	99

इसमें कल्पित वर्ग (-10, 0) होगा जिसकी उच्च सीमा 0 तथा आवृत्ति शून्य होगी। अत: बिन्दु (10, 7), (20, 17) (30, 40) (40, 91), (50, 97) तथा (60,99) एवं कल्पित बिन्दु (0, 0) को लेकर निम्नानुसार अभीष्ट वक्र प्राप्त करेंगे।



आकृति 13.7

अतः अभीष्ट संचयी वक्र OPQRSTU है।

प्रश्नावली 13.2

1. निम्नलिखित आंकड़े कक्षा 9वीं में छात्रों द्वारा परीक्षा में प्राप्तांकों पर आधारित है। दण्ड रेखाचित्र द्वारा इन्हें प्रदर्शित कीजिए।

प्रथम श्रेणी	12
द्वितीय श्रेणी	28
तृतीय श्रेणी	40
अनुतीर्ण	20

2. कक्षा 9वीं के छात्रों की जन्म तिथि के अनुसार विभिन्न माहों में जन्में छात्रों की संख्या निम्नानुसार है दण्ड रेखा चित्र द्वारा इन्हें दर्शाइए।

माह	जन.	फर.	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितं.	अक्टू.	नवं.	दिसं.
छात्र संख्या	3	2	4	1	6	3	5	1	6	2	2	4

3. निम्नलिखित आवृत्ति सारिणी के आयत चित्र बनाइए।

वर्ग	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
आवृत्ति	18	15	14	8	10	6

4. 100 व्यक्तियों की ऊँचाई (से.मी. में) का वितरण निम्नानुसार है। इसको आवृत्ति आयत चित्र में दर्शाइए।

ऊँचाई (सेमी में)	145-155	155-165	165-175	175-185	185-195	195-205
आवृत्ति	8	32	28	12	17	3

5. 60 व्यक्तियों के भार किलोग्राम में निम्नानुसार है। इसे आवृत्ति आयत चित्र द्वारा दर्शाइए।

भार (कि.ग्रा में)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-25	75-80	80-85	85-90
व्यक्तियों की संख्या	13	9	6	5	6	8	9	4

6. 30 छात्रों में से प्रत्येक द्वारा एक प्रश्न हल करने में लिया गया समय (सेकण्ड में) इस प्रकार है

27	30	25	35	17	21	27	29	31	30
19	24	23	32	30	25	18	27	24	21
35	30	27	31	19	24	17	29	27	23

(i) 10 सेकण्ड का वर्गान्तर बनाकर इन आकड़ों के लिए आवृत्ति वितरण सारिणी बनाइए।

(ii) इस आवृत्ति वितरण को आवृत्ति आयत चित्र द्वारा दर्शाइए।

7. एक कार्यालयीन कर्मचारियों का साप्ताहिक वेतन निम्न सारिणी में दिया गया है। इसका आयत चित्र बनाइए

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	800-1000	1000-1200	1200-1600	1600-1800	1800-2000
कर्मचारियों की संख्या	6	4	12	8	2

8. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन का आयत चित्र बनाइए

वर्ग	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
आवृत्ति	4	6	10	5	3

9. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन का आयत चित्र बनाइए

वर्ग	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34
आवृत्ति	2	5	3	7	4	2

10. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन के लिए आयत चित्र बनाते हुए आवृत्ति बहुभुज का निर्माण कीजिए

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति	3	5	6	9	7	5	2

11. निम्नलिखित आवृत्ति बंटन के लिए आयत चित्र बनाते हुए आवृत्ति बहुभुज बनाइए

वर्ग (छात्र संख्या)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति (प्राप्तांक)	7	11	6	9	5

12. आयत चित्र बनाते हुए निम्न आवृत्ति बंटन के लिए आवृत्ति बहुभुज बनाइए

वर्ग (दैनिक मजदूरी)	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
संख्या	7	11	6	16	9	5

13. निम्न आवृत्ति बंटन के लिए संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए

ऊँचाई (वृक्षों की)	10 फुट से कम	20 फुट से कम	30 फुट से कम	40 फुट से कम	50 फुट से कम
संख्या	11	17	23	35	47

14. निम्न आवृत्ति बंटन की सहायता से संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए।

वर्ग	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400
संख्या	16	27	9	13	18	5

15. निम्न आवृत्ति बंटन की सहायता से संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए।

वर्ग	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
संख्या	3	9	11	7	6	3	1

13.8 प्रायिकता (Probability)

अभी तक गणित में हम ऐसे प्रश्नों का हल ढूंढते हैं जिनका निश्चित उत्तर होता है, जैसे त्रिज्या ज्ञात होने पर वृत्त की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात करना, दर, समय और मूलधन ज्ञात होने पर साधारण ब्याज की गणना करना आदि।

कुछ प्रश्न ऐसे भी होते हैं जिनका निश्चित उत्तर नहीं होता है जैसे

1. शायद आज वर्षा हो।
2. शायद डीजल के भाव बढ़ेंगे।
3. शायद वे रास्ते में होंगे।
4. उसको पदक जीतने का पूरा भरोसा है।
5. उसकी सफलता की पूरी संभावनाएँ हैं।

उपरोक्त प्रकार के कथनों के हम निश्चित उत्तर की अपेक्षा नहीं कर पाते हैं। परिणाम 'हाँ' में भी हो सकते हैं और 'नहीं' में भी। प्रायिकता सिद्धांत इन प्रश्नों के अध्ययन में सहायक होता है।

प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावनाओं का परिणाम बोधक या संख्यात्मक निरूपण है। इस विषय का प्रतिपादन 16वीं तथा 17वीं शताब्दी में हुआ है। सन् 1933 में रूसी गणितज्ञ ए.एन. कोल्मोग्रोव ने प्रायिकता के सिद्धांत की व्याख्या समुच्चय के सिद्धांत से संबंधित करने का सफल प्रयास किया।

प्रायिकता की सहायता से भौतिकी, वाणिज्य, जीव विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान, मौसम विभाग की भविष्यवाणियाँ इत्यादि के अध्ययन में सहायता मिलती है।

प्रायिकता को समझने के लिए हम निम्न क्रियाकलाप कर सकते हैं।

गतिविधि 1. एक सिक्का लेकर उसे 10 बार उछालने पर चित्त (Head) व पट्ट (Tail) ऊपर आने की संख्या की गिनती करें तथा उसे निम्न तालिका में सारणीबद्ध करें

सिक्का की उछाल संख्या	चित्त (हेड) ऊपर आने की संख्या	पट्ट (टेल) ऊपर आने की संख्या
10	—	—

यही प्रयोग सिक्के को 20 बार उछालकर दोहराएँ तथा तालिका में चित्त और पट्ट की संख्या भरें। प्रयोग में उछाल संख्या बढ़ाकर चित्त (हेड) और पट्ट (टेल) प्राप्त होने की संख्या ज्ञात की जा सकती है। विभिन्न प्रयोगों से प्राप्त मान की सहायता से निम्न भिन्न का मान ज्ञात कर सकते हैं

$$P(E_A) = \frac{\text{चित्त (हेड) पर आने की संख्या}}{\text{सिक्के के उछाल की कुल संख्या}}$$

$$P(E_B) = \frac{\text{पट्ट (टेल) पर आने की संख्या}}{\text{सिक्के के उछाल की कुल संख्या}}$$

जहाँ पर $P(E_A)$ और $P(E_B)$ क्रमश: चित्त और पट्ट के ऊपर आने की प्रायोगिक (Experimental or Emperical) प्रायिकता कहते हैं।

यहाँ यह तथ्य अवश्य ध्यान में रखा जाना चाहिए कि किसी प्रयोग में प्राप्त $P(E_A)$ और $P(E_B)$ के मानों का योग हमेशा एक होगा।

अर्थात् $P(E_A) + P(E_B) = 1$

अब हम प्रायिकता से संबंधित कुछ परिभाषाओं को जानेंगे।

यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment) अनेक संभव परिणामों वाला प्रयोग जिसमें से एक और केवल एक परिणाम का आना निश्चित हो, लेकिन परिणाम का सही पूर्वानुमान न हो यादृच्छिक प्रयोग (Random Experiment) कहलाता है।

प्रयोग के परिणाम पूर्णत: संयोग पर निर्भर करते हैं जैसे सिक्के को उछालने पर चित्त या पट्ट आना (उत्तर एक ही परिणाम होगा) परन्तु यह निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता है कि चित्त आयेगा अथवा पट्ट ही आयेगा।)

प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space) यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभव परिणामों का समुच्चय प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है इसे S से दर्शाया जाता है।

एक सिक्के को उछालने पर प्राप्त होने वाले परिणाम की संभावनाएँ केवल दो है, चित्त (H) या पट्ट (T) अतएव हम कह सकते हैं कि इस प्रयोग के लिए प्रतिदर्श समष्टि $S = \{H, T\}$ है। इसी प्रकार एक पाँसे को फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

प्रतिदर्श बिन्दु (Sample point) प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव उसका एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है। इसे प्राय: w_1, w_2, w_3 .... से दर्शाया जाता है।

एक सिक्के के उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि के समुच्चय के अवयव {H, T} है इसमें H या T प्रतिदर्श

बिन्दु कहलाते हैं।

नीचे कुछ यादृच्छिक प्रयोग उनके प्रतिदर्श समष्टि और प्रतिदर्श बिन्दुओं के बारे में दिया गया है।

क्र.	यादृच्छिक प्रयोग	प्रतिदर्श समष्टि	प्रतिदर्श बिन्दु
1.	एक सिक्के को उछालना	S (H, T)	H एवं T
2.	एक पाँसे को उछालना	S (1, 2, 3, 4, 5, 6)	1, 2, 3, 4, 5 एवं 6
3.	दो सिक्कों को एक साथ उछालना	S={(H, H) (H, T), (T, H) (T, T)}	HH, HT, TH, TT

यह स्मरण रखें कि

(i) प्रतिदर्श समष्टि का प्रत्येक अवयव यादिच्छक प्रयोग के संभव परिणामों में से एक होता है।

(ii) एक समय में एक ही परिणाम संभव होता है।

(iii) संभव परिणामों में से एक का आना निश्चित होता है।

घटना (Event) किसी यादृच्छिक प्रयोग से प्राप्त कुछ संभावित परिणामों में से जो परिणाम, किसी निश्चित परिणाम के पक्ष में हो, उनका समुच्चय, घटना कहलाता है। यह समुच्चय, प्रतिदर्श-समष्टि का उपसमुच्चय होता है इस आधार पर घटना की परिभाषा निम्न प्रकार से भी दी जा सकती है।

'प्रतिदर्श-समष्टि (Sample-space) का प्रत्येक उप समुच्चय उसकी एक घटना है।'

साधारणतया घटना को E से दर्शाया जाता है। यदि घटनाएँ एक से अधिक हो तो उनके संकेत E_1, E_2, E_3.... से दर्शाए जाते हैं।

13.8.1 घटनाओं की प्रायिकता

हमने यह पढ़ा कि यदि सिक्के को उछाला जाता है तो चित्त या पट्ट में से एक परिणाम निश्चित रूप से आता है। इस प्रकार इस प्रयोग में हम कह सकते हैं कि सिक्के को उछालने पर चित्त की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होती है। इसी प्रकार एक पासे को फेंकने पर उसके ऊपरी फलक पर 1 आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ होगी। अब यदि हम पासे के ऊपरी फलक पर सम संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं तो हम सभी सम संख्याओं की प्रायिकता का योग कर यह ज्ञात कर सकते हैं जैसे

$$P\,(E_2) = \frac{1}{6}, P\,(E_4) = \frac{1}{6} P, (E_6) = \frac{1}{6}$$

(P (E_2) = 2 अंक की प्रायिकता)

(P (E_4) = 4 अंक की प्रायिकता)

(P (E_6) = 6 अंक की प्रायिकता)

या $P(E) = P\,(E_2) + P(E_4) + P\,(E_6)$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

इन मानों की सत्यता के लिए हम कुछ क्रियाकलाप निम्नानुसार कर सकते हैं।

गतिविधि 2. कक्षा के विद्यार्थियों को दो, तीन या चार समूह में विभाजित करके प्रत्येक समूह से सिक्के की 15 उछाल पर चित्त या पट्ट की संख्या अंकित करने को कहेंगे तथा उन मानों को निम्नानुसार सारिणी में रखकर चित्त तथा पट्ट की प्रायिकता की गणना कर सकते हैं।

समूह	चित्त की संख्या	पट्ट की संख्या	चित्त की संख्या का संचयी मान / उछाल की कुल संख्या	पट्ट की संख्या का संचयी मान / उचाल की कुल संख्या
1	4	11	$\frac{4}{15}=0.26...$	$\frac{11}{15}=0.73...$
2	9	6	$\frac{4+9}{15+15}=\frac{13}{30}=0.43...$	$\frac{6+11}{15+15}=\frac{17}{30}=0.56...$
3	7	8	$\frac{13+7}{15+15+15}=\frac{20}{45}=0.44...$	$\frac{8+17}{15+15+15}=\frac{25}{45}=0.55...$
4 ⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

उपरोक्त सारिणी के अध्ययन से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि प्रारंभ में चित्त उछाल की प्रायिकता 0.26 से क्रमशः 0.44 तक पहुंचती है अर्थात् जैसे-जैसे उछालों की संख्या बढ़ती जाती है चित्त की प्रायिकता 0.5 के लगभग आती है इसी प्रकार पट्ट की प्रायिकता भी 0.73 से 0.55 की ओर अग्रसर होती है अर्थात् इसका मान भी 0.5 के लगभग आता है।

इसी प्रकार के क्रियाकलाप एक पाँसे को फेंककर फलक पर प्राप्त अंक की उछाल संख्या को उपरोक्त अनुसार सारिणीबद्ध करके उनकी प्रायिकता की गणना की जा सकती है।

इस प्रकार प्रायिकता किसी घटना के घटित होने का संख्यात्मक मान है। इसे निम्न प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

$$P(E) = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या (सफलताओं की संख्या)}}{\text{कुल परिणामों की संख्या (प्रतिदर्श समष्टि में कुल अवयवों या परिणामों की संख्या)}}$$

यहाँ पर P(E) का अर्थ है, E घटना घटने की प्रायिकता तथा अनुकूल परिणामों का अर्थ है सभी संभव परिणामों में से अपेक्षित परिणामों की संख्या। प्रतिदर्श समष्टि या कुल परिणामों की संख्या किसी घटना के सभी संभावित परिणाम हैं। इसे हम एक सिक्के की उछाल की सहायता से समझते हैं। सिक्के में एक तरफ चित्त और दूसरी तरफ पट्ट होता है। अब यदि हम चित्त आने की प्रायिकता निकालें तो एक बार उछालने पर चित्त आने की संभावना एक होगी। इसे ही अनुकूल स्थितियों की संख्या या सफलता की संख्या कहते हैं। एक सिक्के को उछालने में दो परिणाम हमें प्राप्त हो सकते हैं, चित्त या पट्ट। अतः कुल स्थितियों की संख्या

2 होगी। इस प्रकार चित्त आने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ होगी।

उदाहरण 12. एक सिक्के को एक बार उछालने पर चित्त ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिदर्श समष्टि $S = \{H,T\}$

परिणामों की कुल संख्या $n(s) = 2$

चित्त ऊपर आने की घटना $A = \{H\}$

चित्त उपर आने की घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या $n(A) = 1$

प्रायिकता $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

$= \frac{1}{2}$

उदाहरण 13. एक साधारण पाँसे को फेंकने पर 3 से छोटा अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

हल : प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

परिणामों की कुल संख्या $n(s) = 6$

3 से छोटा अंक प्राप्त होने की घटना $E = \{1, 2\}$

इसलिए घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 2$

अब प्रायिकता $P_E = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

3 से छोटा अंक की प्रायिकता $= \frac{1}{3}$ उत्तर

उदाहरण 14. एक घनाकार पाँसे को फेंकने पर शीर्ष पर विषम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

परिणामों की कुल संख्या $n(s) = 6$

विषम अंक आने की घटना $E = \{1, 3, 5\}$

इसलिए घटना E के अनुकूल परिणामों की संख्या $n(E) = 3$

विषम अंक आने की प्रायिकता $P_E = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{6}$

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

अत: विषम अंक आने की प्रायिकता $= \frac{1}{2}$ उत्तर

उदाहरण 15. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर कम से कम एक चित्त ऊपर आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए?

हल : प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HH, HT, TH, TT\}$ इसलिए $n(s) = 4$

मान लें कम से कम एक चित्त ऊपर आने की घटना E है

$\therefore E = \{HH, HT, TH\}$ इसलिए $n(E) = 3$

$$\therefore P_E = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{3}{4}$$ उत्तर

उदाहरण 16. दो पासे एक साथ फेंके जाने पर दो समान अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : दो पासों की प्रतिदर्श समष्टि S = {(1, 1), (1,2, (1 3) (1 4) (1 5) (1 6) (2 1) (2 2) (2 3) (2 4), (2 5) 2 6), (3 1) 3 2) (3 3), ... (6 3) (6 4) (6 5) (6 6)}

इसलिए $n(S) = 36$

समान अंक आने की घटना $E = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6,6)\}$

इसलिए $n(E) = 6$

इसलिए $P_E = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ उत्तर

प्रश्नावली 13.3

1. निम्नलिखित की परिभाषा दीजिए

   (i) प्रायिकता (iv) प्रतिदर्श बिन्दु

   (ii) यादृच्छिक प्रयोग (v) घटना

   (iii) प्रतिदर्श समष्टि

2. एक सिक्के को फेंकने पर पट्ट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. एक पाँसे को फेंकने पर शीर्ष 4 से अधिक अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. एक सिक्का 45 बार उछालने पर 23 बार चित्त प्राप्त होता है। पट्ट प्राप्त होने की घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. दो सिक्को को एक साथ उछालने पर कम से कम एक पट्ट आने की प्रायकिता ज्ञात कीजिए।
6. दो पाँसे एक साथ फेंके जाने पर असमान अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर उन घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब अंकों का योग 10 हो।

8. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर उन घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब अंकों का योग 4 हो।

याद रखने योग्य बातें

- सांख्यिकी में संख्यात्मक आंकड़ों का संकलन, वर्गीकरण और सारणीयन, विश्लेषण एवं व्याख्या का कार्य किया जाता है।
- आंकड़े संख्यात्मक तथा परिमाणात्मक रूप से व्यक्त किए जाते हैं, गुणात्मक रूप से नहीं।
- संख्यात्मक तथ्य प्रेक्षणों का समूह होता है। किसी एक प्रेक्षण से सांख्यिकी नहीं बनती।
- संख्यात्मक तथ्य एक सुनिश्चित उद्देश्य से एकत्र किए जाते हैं।
- किसी प्रयोग में संख्यात्मक तथ्यों की तुलना की जा सकती है और उन्हें विभिन्न समूहों में वर्गीकृत किया जा सकता है।
- आँकड़े दो प्रकार के होते हैं- प्राथमिक आँकड़े और द्वितीयक आँकड़े।
- संकलित आँकड़ों को दो भागों-अवर्गीकृत या अपरिष्कृत आँकड़े तथा वर्गीकृत या परिष्कृत आँकड़ों में वर्गीकृत किया जाता है।
- संकलित आंकड़ों को सर्वप्रथम आरोही या अवरोही क्रम में जमाकर पुनः उसे सारणी में प्रस्तुत करने को आवृत्ति सारणी कहते हैं।
- प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावनाओं का परिणाम बोधक या संख्यात्मक निरूपण है।
- $P(E) = \dfrac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{कुल परिणामों की संख्या}}$