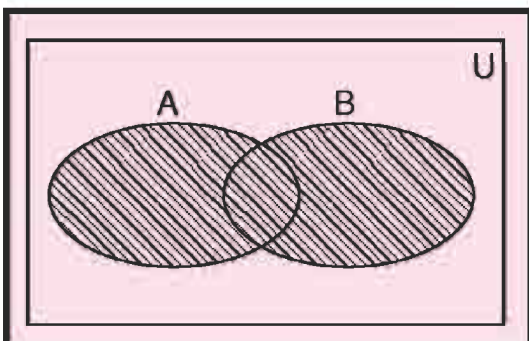


अध्याय 2 समुच्चय (Sets)



हम पढ़ेंगे :

- समुच्चय की परिभाषा
- समुच्चय का निरूपण
- परिमित समुच्चय
- रिक्त समुच्चय
- उप समुच्चय
- समुच्चयों का संघ
- समुच्चयों का सर्वनिष्ठ
- समष्टीय समुच्चय व पूरक समुच्चय
- वेन आरेख
- समुच्चयों का अनुप्रयोग

2.1 भूमिका (Introduction)

आपका विद्यालय, विद्यार्थियों का एक समूह है। सुबह विद्यालय में प्रार्थना के बाद आप अपनी-अपनी कक्षाओं में चले जाते हैं। विभिन्न कक्षाओं के विद्यार्थी, इस विद्यालय के विद्यार्थियों के समूह हैं। अन्य कई समूह हमारे दैनिक जीवन में होते हैं जैसे :

- क्रिकेट टीम के खिलाड़ियों का समूह
- फुटबाल टीम के खिलाड़ियों का समूह
- कक्षा 9वीं के विद्यार्थियों का समूह
- विद्यालय के पुस्तकालय में गणित की पुस्तकों का समूह
- विद्यालय के पुस्तकालय में 10 मनोरंजक पुस्तकों का समूह
- पाठशाला के सर्वश्रेष्ठ विद्यार्थियों का समूह

2.2 समुच्चय (Sets):

वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह को समुच्चय कहते हैं। वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह का अर्थ यह है कि हम बता सकें कि कोई वस्तु उस समूह के अंतर्गत है या नहीं। उदाहरण के लिये b अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों के समुच्चय में नहीं है। जबकि a इस समूह में है। स्वरों की संख्या तथा उनकी विशेषताएँ निश्चित हैं। अतः स्वरों का समूह सुपरिभाषित है। इसलिए यह एक समुच्चय है।

मेधावी छात्रों का समूह सुपरिभाषित नहीं है, क्योंकि किसी छात्र का मेधावी होना सुनिश्चित नहीं किया जा सकता। छात्र की मेधा (Intelligence) को मापने के विभिन्न मापक हो सकते हैं तथा किसी एक दृष्टिकोण के

आधार पर किसी विशेष छात्र को मेधावी छात्रों के समूह में रखा जा सकता है तथा अन्य किसी दृष्टिकोण में छात्र मेधावी नहीं हो सकता है। अतः मेधा सुपरिभाषित नहीं है इसलिए मेधावी छात्रों का समूह समुच्चय नहीं कहा जा सकता है।

समुच्चय के कुछ उदाहरण

- अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय।
- सूर्य के ग्रहों का समुच्चय।
- सप्ताह के दिनों का समुच्चय।
- प्राकृत संख्याओं का समुच्चय।
- 20 से कम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।

कुछ ऐसे समूह जो सुपरिभाषित नहीं हैं

1. सुन्दर फूलों का समूह
2. लम्बे लड़कों का समूह इत्यादि

हम समुच्चयों का संकेतन, अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों A, B, C, D, S, X, Y इत्यादि द्वारा करेंगे। किसी समुच्चय के सदस्यों के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों a, b, c इत्यादि का प्रयोग करेंगे।

यदि A एक समुच्चय हो तो A के प्रत्येक सदस्य को उसका अवयव (Element) कहते हैं। मान लीजिए A, 10 से छोटी सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है अर्थात् इस समूह में 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 अवयव है तो 5 इस समुच्चय का अवयव है। क्या आप इस समुच्चय के कुछ अन्य अवयवों को बता सकते हैं? क्या 10 इस समुच्चय का अवयव है?

संख्या 5, समुच्चय A का एक अवयव है।

इस तथ्य को प्रतीक द्वारा प्रदर्शित करने के लिए हम लिखते हैं

$$5 \in A$$

और यह प्रतीक पढ़ा जाता है; “5 अवयव है समुच्चय A का” या “5 सदस्य है समुच्चय A का”। इसी प्रकार हम लिखेंगे, $8 \in A$.

जैसा कि हम देख सकते हैं, 15 समुच्चय A का अवयव नहीं है, इस तथ्य को एक प्रतीक द्वारा प्रदर्शित करने के लिए हम लिखते हैं :

$$15 \notin A$$

यह प्रतीक पढ़ा जाता है; “15 अवयव नहीं है समुच्चय A” का या “15 सदस्य नहीं है समुच्चय A का”।

व्यापक रूप से यदि a, समुच्चय A का सदस्य है तो हम लिखते हैं, $a \in A$ और इसे पढ़ते हैं “a सदस्य है A का”। यदि a, समुच्चय A का सदस्य नहीं है तो हम लिखते हैं, $a \notin A$ और इसे पढ़ते हैं, “a, सदस्य नहीं है A का”।

2.3 समुच्चय का निरूपण (Representation of Set)

किसी समुच्चय का निरूपण करने के लिए प्रायः नीचे दी गई दो विधियों का प्रयोग करते हैं।

- सारणीबद्ध रूप (Tabular form or Roster form)
- समुच्चय निर्माण रूप (Set builder form or rule form)

2.3.1 सारणीबद्ध रूप (Tabular form)

एक समुच्चय को सारणीबद्ध रूप में प्रस्तुत करने के लिए हम उसके सभी अवयवों को समझ लें। कोष्ठक { }, के अन्दर सारणी के रूप में लिखते हैं, और सारणी के प्रत्येक दो अवयवों को पृथक करने के लिए उनके बीच अर्धविराम चिह्न का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण : यदि 1, 3, 5, 7, 9 समुच्चय A के अवयव हैं, तो हम लिखते हैं-

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

किसी समुच्चय को सारणीबद्ध रूप से व्यक्त करते समय इस बात का ध्यान रखते हैं कि प्रत्येक अवयव को केवल एक बार ही लिखा जाए तथा इस बात का कोई महत्व नहीं दिया जाता है कि अवयवों को किस क्रम में लिखा जाये। इस प्रकार समुच्चय {3, 2, 1}, {2, 1, 3}, {1, 2, 3}, {3, 1, 2} एक ही समुच्चय को दर्शाते हैं।

उदाहरण 1. कुछ समुच्चय सारणीबद्ध रूप में नीचे दिये गये हैं

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$, A संख्या 10 से छोटी सभी सम धन- पूर्णाकों का समुच्चय है।
- $B = \{a, e, i, o, u\}$, B अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है।
- $C = \{I, N, D, A\}$, C शब्द INDIA में प्रयोग किये गए सभी अक्षरों का समुच्चय है।
- $X = \{S, C, H, O, L\}$, X शब्द SCHOOL में प्रयोग किए गए सभी अक्षरों का समुच्चय है।

2.3.2 समुच्चय निर्माण रूप (Set Builder or rule form)

इस रूप का प्रयोग हम तभी करते हैं जब हम समुच्चय के उस गुण धर्म की व्याख्या कर सकते हैं जो समुच्चय के सभी अवयवों में सामान्य हो, परन्तु समुच्चय से बाहर अन्य वस्तु में नहीं हो। उदाहरण के लिए समुच्चय {a, e, i, o, u} के अवयवों का यह सामान्य गुण धर्म है कि उनमें से प्रत्येक, अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है। इस समुच्चय को संकेत V द्वारा प्रदर्शित करते हुए हम लिखते हैं :

$$V = \{x : x \text{ अंग्रेजी वर्णमाला में एक स्वर है}\}$$

इसे पढ़ते हैं “V सभी x का समुच्चय इस प्रकार है कि x अंग्रेजी वर्णमाला का स्वर है।”

चिह्न : को “इस प्रकार है कि” (such that) पढ़ा जाता है।

उदाहरण 2. कुछ समुच्चय को सारणीबद्ध रूप नीचे दिए गए हैं।

- $A = \{x : x \text{ पूर्णांक है; और } -4 < x \leq 3\}$

यहाँ $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

(ii) $A = \{x : x \text{ धनात्मक विषम संख्याएँ हैं}\}$

यहाँ $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$

(iii) $A = \{x : x = n^2 \text{ जहाँ } n \text{ प्राकृत संख्या है}\}$

यहाँ $A = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$

टिप्पणी : उपरोक्त उदाहरण (ii) तथा (iii) में समुच्चयों के कुछ अवयवों को लिखा है तथा पैटर्न के आधार पर अन्य सभी अवयवों को लिखा जा सकता है। यह दर्शाने के लिए कुछ अवयव लिखकर तीन बिन्दु लगा देते हैं।

2.4 परिमित समुच्चय (Finite Sets)

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{a, b, c, d, e, f\}$

$C = \{\text{संसार के विभिन्न भागों में आज के दिन जीवित मनुष्य}\}$

हम देख सकते हैं कि A में पाँच सदस्य हैं, और B में छः सदस्य हैं। C में कितने सदस्य हैं, यह हम नहीं जानते परन्तु, यह एक परिमित संख्या अवश्य है भले ही यह एक बहुत बड़ी संख्या हो।

ऐसे समुच्चय को जिसके सदस्यों की संख्या परिमित होती है, परिमित समुच्चय (Finite sets) कहते हैं। यदि किसी समुच्चय A के अवयव परिमित संख्या में हो तो A के अवयवों की संख्या $n(A)$ से प्रकट करते हैं।

प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर विचार करें। इस समुच्चय में कितने सदस्य हैं? क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या है, जिसके आगे कोई और प्राकृत संख्या न हो? नहीं! अतएव हम देखते हैं कि इस समुच्चय के सदस्यों की संख्या परिमित नहीं है। हम कहेंगे कि प्राकृत संख्याओं का समुच्चय एक अनंत समुच्चय या अपरिमित समुच्चय (infinite set) है। इसी प्रकार सम्पूर्ण संख्याओं का समुच्चय, विषम पूर्ण संख्याओं का समुच्चय परिमेय संख्याओं का समुच्चय आदि में से प्रत्येक अनंत या अपरिमित समुच्चय है।

2.5 रिक्त समुच्चय (Empty Set or null set)

ऐसे समुच्चय जिसमें कोई भी अवयव न हो रिक्त समुच्चय कहलाता है। इसे संकेत में " \emptyset " (Phi) द्वारा प्रदर्शित करते हैं। रिक्त समुच्चय को सारणीबद्ध रूप में संकेत $\{ \}$ से प्रकट करते हैं। अतः $\emptyset = \{ \}$

उदाहरण 3. (i) $A = \{x : x \text{ विषम प्राकृत संख्या है, और } 7 < x < 9\}$

यह रिक्त समुच्चय है क्योंकि 7 और 9 के मध्य कोई विषम प्राकृत संख्या नहीं होती है।

- (ii) 2 से बड़ी सम अभाज्य संख्याओं का समुच्चय यह रिक्त समुच्चय है क्योंकि 2 से बड़ी सम अभाज्य संख्या नहीं होती है।
- (iii) $A = \{x : x; \text{दो समान्तर रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है}\}$
यह भी रिक्त समुच्चय है क्योंकि दो समान्तर रेखाएं कभी भी आपस में प्रतिच्छेद नहीं करती है।

प्रश्नावली 2.1

- निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक को सारणीबद्ध रूप में लिखिए :
 - $A = \{x : x \text{ पूर्णांक है और } -3 \leq x \leq 7\}$
 - $B = \{x : x \text{ प्राकृत संख्या है जो 6 से छोटी है}\}$
 - $D = \{x : x \text{ दो अंकों वाली प्राकृत संख्या है, और उसके अंकों का योगफल 8 है}\}$
 - $E = \text{शब्द "MATHEMATICS" में प्रयुक्त सभी अक्षरों का समुच्चय}$
 - $F = \{x : x \text{ अभाज्य संख्या है तथा 20 से कम है}\}$
- निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक को समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए
 - $\{3, 6, 9, 12\}$
 - $\{2, 4, 8, 16, 32\}$
 - $\{5, 25, 125, 625\}$
 - $\{a, e, i, o, u\}$
 - $\{1, 3, 5, \dots\}$
- यदि $A = \{x : x \text{ धनात्मक पूर्णांक और } 4 < x < 12\}$ इनमें कौन से कथन सत्य अथवा असत्य हैं?
 - $2 \in A$
 - $8 \notin A$
 - $16 \in A$
 - $7 \in A$
- निम्नलिखित समुच्चयों में कौन सा रिक्त समुच्चय है? कारण सहित उत्तर दीजिए
 - $A = \{x : x \neq x\}$
 - $B = \{x : x + 5 = 5\}$

2.6 उप समुच्चय (Subsets)

यदि किसी समुच्चय के एक भाग को लेकर नया समुच्चय बनाए तो यह नया समुच्चय दिये गये समुच्चय का उपसमुच्चय (Subset) कहलाता है। उदाहरण के लिए मान लीजिए

$$A = \{a, e, i, o, u\} \text{ तथा}$$

$$B = \{a, b, c, d, e \dots, x, y, z\}$$

हम देखते हैं कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी अवयव है। अर्थात् समुच्चय A, समुच्चय B का एक भाग है।

हम कहेंगे समुच्चय A , समुच्चय B का एक उप समुच्चय है, हम लिखेंगे $A \subseteq B$ (संकेत \subseteq प्रदर्शित करता है। ... उपसमुच्चय है; ... का), इस प्रकार हम निम्न परिभाषा दे सकते हैं।

समुच्चय A को समुच्चय B का उपसमुच्चय कहते हैं, यदि A का प्रत्येक सदस्य B का भी सदस्य हो। दूसरे शब्दों में हम उपसमुच्चय की परिभाषा को संकेत रूप में लिख सकते हैं

$$A \subseteq B \text{ यदि } a \in A \Rightarrow a \in B, \forall a \in A$$

हम इसे पढ़ेंगे, A उपसमुच्चय है B का, यदि जब भी a अवयव है A का तो निश्चित रूप से a अवयव है B का।

प्रायः हम संकेत “ \Rightarrow ” का प्रयोग सुविधाजनक पाते हैं। इसका अर्थ है से अंतर्गत है। संकेत $\forall a \in A$ का अर्थ है A के सभी अवयवों a के लिए।

उपसमुच्चय की परिभाषा से यह निष्कर्ष निकलता है, कि प्रत्येक समुच्चय A के लिये कथन $A \subseteq A$ सत्य होता है। अर्थात् प्रत्येक समुच्चय अपना उपसमुच्चय होता है। रिक्त समुच्चय \emptyset का कोई सदस्य नहीं होता है। अतः $\emptyset \subseteq A$ जहाँ A कोई भी समुच्चय है।

अर्थात् रिक्त समुच्चय \emptyset सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है।

उदाहरण 4. मान लीजिए A आपके स्कूल में कक्षा 9 के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय और B स्कूल के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है तो A, B का उपसमुच्चय है और हम लिखते हैं; $A \subseteq B$

उदाहरण 5. मान लीजिए $A = \{1, 3, 5\}$, और $B = \{x : x \text{ विषम प्राकृत संख्या है और } x < 6\}$ है। क्या A उपसमुच्चय है B का? हाँ! (क्यों)?

क्या B , उपसमुच्चय है A का ? हाँ! (क्यों)?

क्या $A = B$ है।

उपरोक्त उदाहरण 5 के आधार पर हम समुच्चयों की समानता को निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं।

हम देखते हैं कि A, B का उपसमुच्चय है, और B, A का उपसमुच्चय है तथा $A = B$ क्या हम इसे व्यापक बना सकते हैं? यह सदैव सत्य होगा कि यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ तो $A = B$ विलोमतः $A = B$, यदि और केवल यदि $A \subseteq B$ तथा $B \subseteq A$ हो।

उदाहरण 6. मान लीजिए $A = \{a, e, i, o, u\}$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

क्या A उपसमुच्चय है, B का? नहीं।

(क्यों नहीं?) क्या B उपसमुच्चय है A का? नहीं। (क्यों नहीं?)

यदि A उपसमुच्चय न हो, B का, तो उसे संकेत भाषा में लिखते हैं $A \not\subseteq B$

उदाहरण 7. आइए समुच्चय $\{1, 2\}$ के सभी उपसमुच्चयों को प्रस्तुत करें। हम जानते हैं कि \emptyset प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। अतः \emptyset उपसमुच्चय है $\{1, 2\}$ का। हम देखते हैं कि $\{1\}$ और $\{2\}$ भी उपसमुच्चय है $\{1, 2\}$ के। तथापि हम जानते हैं कि प्रत्येक समुच्चय अपना ही उपसमुच्चय होता है अतः $\{1, 2\}$ एक उपसमुच्चय है, $\{1, 2\}$ का। इस प्रकार समुच्चय $\{1, 2\}$ के कुल चार उपसमुच्चय हैं अर्थात् \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$ और $\{1, 2\}$ ।

हमने देखा कि समुच्चय $\{1, 2\}$ के उपसमुच्चयों की संख्या चार अर्थात् 2^2 है।

इसी प्रकार हम $\{1, 2, 3\}$ के उपसमुच्चयों को देखें

अर्थात् \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ के उपसमुच्चय है। इन सभी उपसमुच्चयों की संख्या आठ है अर्थात् 2^3 है।

इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी भी समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है जहाँ n समुच्चय के अवयवों की संख्या है।

समुच्चय $\{1, 2\}$ में अवयवों की संख्या 2 है तो उपसमुच्चयों की संख्या $2^2 = 4$ है।

समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ में अवयवों की संख्या 3 है तो उपसमुच्चयों की संख्या $2^3 = 8$ है।

- अतः**
- (i) \emptyset सभी समुच्चयों का उपसमुच्चय होता है।
 - (ii) कोई भी समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।
 - (iii) किसी समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

प्रश्नावली 2.2

1. यदि $A = \{a, b, c\}$ और $B = \{b, c, a, d\}$ तो $A \subset B$ या $B \subset A$ क्या सही है?
2. निम्न समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए
 - (i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$
 - (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) \emptyset
3. निम्न उपसमुच्चयों के स्थान पर एक समुच्चय लिखिए
 - (i) $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{b\}$, \emptyset
 - (ii) $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{3, 5\}$ $\{1, 3, 5\}$, \emptyset
 - (iii) \emptyset , $\{1\}$
 - (iv) \emptyset , $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$, $\{-1, 0, 1\}$
4. यदि $A = \{p, q, r, s, t\}$
 $B = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$

सही प्रतीक \in or \notin से रिक्त स्थान भरिये

(i) $8 \dots B$

(ii) $17 \dots B$

(iii) $r \dots A$

(iv) $a \dots A$

(v) $21 \dots B$

(vi) $12 \dots A$

5. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ तब निम्न कथनों में से कौन सा कथन सत्य है या असत्य है और क्यों?

(i) $\{3, 4\} \in A$

(ii) $\{3, 4\} \subset A$

(iii) $\{1\} \not\subset A$

(iv) $1 \subset A$

(v) $\{5\} \subset A$

(vi) $1 \in A$

2.7 समुच्चयों का संघ (Union of Sets)

दो समुच्चयों का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसका प्रत्येक अवयव दोनों समुच्चयों में से कम से कम किसी एक का अवयव अवश्य होता है।

मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं, अब एक नए समुच्चय का निर्माण कीजिए जिसमें A और B के सभी सदस्य आ जाएं और इन के अतिरिक्त अन्य कोई सदस्य न हों। इस नए समुच्चय को हम A और B का संघ (union) कहते हैं।

इन A और B के संघ को, संकेत $A \cup B$ से प्रकट करते हैं और इसे पढ़ते हैं : ' A संघ B '। उदाहरण के लिए

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{2, 3, 5\}$ है तब

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

इस प्रकार दो समुच्चयों A और B का संघ वह समुच्चय है जिसका प्रत्येक अवयव या तो A का या B का या दोनों का अवयव हो।

संकेत में हम लिखते हैं

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ या } x \in B \text{ या } x \in A \text{ और } B\}$$

उदाहरण 8. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{3, a, b\}$ । आइए $A \cup B$ और $B \cup A$ ज्ञात करें।

$$A \cup B = \{1, 2, 3, a, b\}$$

$$B \cup A = \{3, a, b, 1, 2\}$$

स्पष्ट है कि $A \cup B = B \cup A$

उदाहरण 9. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ । ज्ञात करें, $A \cup A$

$$A \cup A = \{1, 2, 3\} \text{ (क्यों?)}$$

इस प्रकार $A \cup A = A$

2.8 समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of Sets)

मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। A और B का सर्वनिष्ठ (intersection) वह समुच्चय है जिसका प्रत्येक अवयव A और B दोनों का अवयव हो अर्थात् A और B का सर्वनिष्ठ समुच्चयों A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय होता है।

A और B के सर्वनिष्ठ को प्रतीक $A \cap B$

से लिखते हैं और इसे पढ़ते हैं A सर्वनिष्ठ B

इस प्रकार

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$$

उदाहरण के लिए मान लीजिए

$$A = \{1, 2, 3, 4\} \text{ और } B = \{1, 4, 5, 6\}$$

$$\text{तब } A \cap B = \{1, 4\}$$

उदाहरण 10. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ है तो $A \cap A$ ज्ञात करें।

$$A \cap A = \{1, 2, 3\} = A$$

अतः प्रत्येक समुच्चय A के लिए

$$A \cap A = A$$

उदाहरण 11. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3\}$ और $B = \{4, 5, 6\}$ आइए $A \cap B$ ज्ञात करें।

हम जानते हैं $A \cap B$ वह समुच्चय है जिस का प्रत्येक अवयव, A और B दोनों का अवयव हो। लेकिन A और B में कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं है। इसलिए

$$A \cap B = \emptyset \text{ (रिक्त समुच्चय)}$$

यदि दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ रिक्त समुच्चय हो, तो इन समुच्चयों को असंयुक्त समुच्चय (Disjoint sets) कहते हैं।

कुछ समुच्चयों के विशेष संकेत

$$N = \text{प्राकृत संख्याओं का समुच्चय} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$W = \text{पूर्ण संख्याओं का समुच्चय} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$I = \text{पूर्णाकों का समुच्चय} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$Q = \text{परिमेय संख्याओं का समुच्चय} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

$$R = \text{परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के संघ का समुच्चय या वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।}$$

प्रश्नावली 2.3

- निम्नलिखित समुच्चयों का संघ ज्ञात कीजिए।
 - $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{a, b\}$
 - $X = \{1, 3, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$
 - $A = \{x : x \text{ प्राकृत संख्या है और } 3 \text{ का गुणज है}\}$
 $B = \{x : x \text{ प्राकृत संख्या है जो } 6 \text{ से छोटी है}\}$
 - $A = \{x : x \text{ प्राकृत संख्या है और } 1 < x \leq 6\}$
 $B = \{x : x \text{ प्राकृत संख्या है और } 6 < x < 10\}$
 - $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \emptyset$
- प्रश्न 1 के समुच्चय युग्मों का सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिए।
- मान लीजिए $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ क्या $A \subset B$ तथा $A \cup B = B$ है?
- यदि A और B दो समुच्चय इस प्रकार है कि $A \subset B$ है। तो $A \cup B$ तथा $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।
- यदि A कोई समुच्चय हो तो $A \cup \emptyset$ ज्ञात कीजिए।
- दो समुच्चयों A और B के लिए क्या कथन $A \cap B = B \cap A$ सत्य है?
- यदि A कोई समुच्चय हो तो $A \cap \emptyset$ ज्ञात कीजिए।

2.9 समष्टीय समुच्चय व पूरक समुच्चय (Universal set and complement of a set)

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए।

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, A = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5\}, D = \{6, 7, 8, 9\}$$

हम देखते हैं कि समुच्चय A, B, C और D समुच्चय, U के उपसमुच्चय है। समुच्चय U को समुच्चय A, B, C और D का समष्टीय समुच्चय कहते हैं।

परिभाषा : समष्टीय समुच्चय

एक ऐसा समुच्चय जिसके अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय उपसमुच्चय हों, समष्टीय समुच्चय कहलाता है। इसे U से प्रदर्शित करते हैं।

समुच्चय A के अवयव विषम संख्याएँ हैं अर्थात् $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ और B समुच्चय के अवयव सम संख्याएँ हैं अर्थात् $B = \{2, 4, 6, \dots\}$, साथ ही $A \cup B = U = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ भी है तो A को B का पूरक समुच्चय या B को A का पूरक समुच्चय कहेंगे। A के पूरक समुच्चय को A' से प्रदर्शित किया जाता है। A' में समष्टीय समुच्चय U के वे सभी अवयव आयेंगे जो A में नहीं है।

$$A' = \{2, 4, 6, 8\}, B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}, C' = \{6, 7, 8, 9\} \text{ और}$$

$$D' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

आइए एक-दूसरे उदाहरण पर विचार करें।

मान लीजिए $U = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A = \{a, b\}$ और $B = \{a, b, c, d\}$ तो
 $A' = \{c, d, e, f\}$ और $B' = \{e, f\}$ होगा।

किसी समष्टीय समुच्चय का पूरक रिक्त समुच्चय होता है अर्थात् $U' = \emptyset$ किसी रिक्त समुच्चय का पूरक समुच्चय समष्टीय समुच्चय होता है अर्थात् $\emptyset' = U$

इसी प्रकार कुछ अन्य निष्कर्ष भी निकाले जा सकते हैं।

- जैसे
- (i) $U \cap \emptyset = \emptyset$
 - (ii) $U \cup \emptyset = U$
 - (iii) $A \cap A' = \emptyset$
 - (iv) $A \cup A' = U$
 - (v) $(A')' = A$

परिभाषा

पूरक समुच्चय : यदि U एक समष्टीय समुच्चय है और A , U का एक उपसमुच्चय है तो U के सापेक्ष A के पूरक समुच्चय को, जिसे प्रतीक A' से प्रकट करेंगे, इस प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$$

जहां समष्टीय समुच्चय U का बोध स्पष्ट रूप से होता है तो वहाँ A' को A का पूरक कहते हैं। और U “के सापेक्ष” का प्रयोग नहीं करते हैं।

उदाहरण 12. मान लीजिए U आपके स्कूल में कक्षा 9 के सभी विद्यार्थियों का समष्टीय समुच्चय है। मान लीजिए A कक्षा 9 में सभी लड़कियों का समुच्चय है तो A' कक्षा 9 में सभी लड़कों का समुच्चय होगा।

उदाहरण 13. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $A = \{2, 4, 6\}$ है तो A' ज्ञात कीजिए तथा A' का पूरक अर्थात् $(A')'$ ज्ञात कीजिए।

हल : $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore A' = \{1, 3, 5\}$$

$$\text{अतः } (A')' = \{2, 4, 6\} = A$$

उदाहरण 14. यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$$A = \{3, 4\} \text{ और } B = \{4, 5, 6\} \text{ है।}$$

तो सत्यापित कीजिए कि

$$(1) \quad (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(2) \quad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

हल :

दिया है , $A = \{3, 4\}$

$$\therefore A' = \{1, 2, 5, 6, 7\}$$

और $B = \{4, 5, 6\}$

$$B' = \{1, 2, 3, 7\}$$

$$A' \cap B' = \{1, 2, 7\}$$

अब $A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$

इसलिए $(A \cup B)' = \{1, 2, 7\}$

अतः हम देखते हैं कि $(A \cup B)' = A' \cap B'$

इसी प्रकार $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (स्वयं सत्यापित कीजिए)

प्रश्नावली 2.4

- यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; तो निम्न समुच्चयों के पूरक ज्ञात कीजिए :
 - $A = \{2, 4, 6, 8\}$
 - $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
 - $C = \{2, 3, 5, 7\}$
 - \emptyset
 - U
- प्रश्न 1 के समुच्चयों A और C के लिये सत्यापित कीजिए
 - $(A \cup C)' = A' \cap C'$
 - $(A \cap C)' = A' \cup C'$
- मान लीजिए, U दिए हुए तल में सभी त्रिभुजों का समुच्चय है। यदि A समुच्चय है, उन सभी त्रिभुजों का जिनका, कम से कम एक कोण 60° से भिन्न हो, तो A' कौन सा समुच्चय होगा?
- यदि U सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय हो और A' सभी भाज्य संख्याओं का समुच्चय हो तो A कौन सा समुच्चय होगा?
- यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ और $A = \{1, 3, 5\}$

तो सत्यापित कीजिए

(i) $A \cap A' = \emptyset$

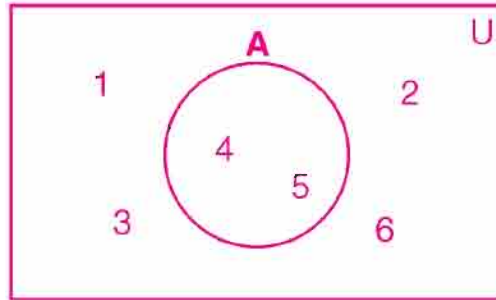
(ii) $A \cup A' = U$

2.10 वेन आरेख (Venn Diagram)

समुच्चयों और उनके गुण धर्मों को कुछ विशेष आरेखों द्वारा आसानी से दर्शाया जा सकता है। इन विशेष आरेखों को “वेन आरेख” कहते हैं। तर्क शास्त्र के ज्ञाता, जॉन वेन (1834-1883) के नाम पर इन आरेखों को वेन आरेख कहते हैं। प्रायः समष्टीय समुच्चय को एक आयत द्वारा और उसके उप समुच्चयों को वृत्तों द्वारा निरूपण करते हैं।

यदि आवश्यक हो तो आरेख में समुच्चय के अवयवों को आरेख के अंदर लिख देते हैं।

उदाहरण 15. आकृति 2.1 में

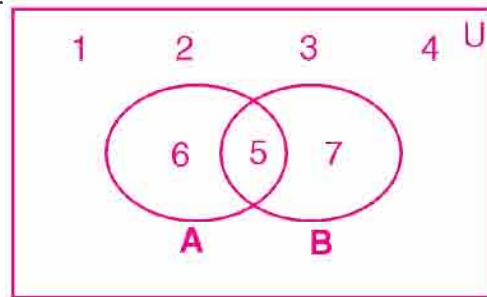


आकृति 2.1

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{4, 5\}$$

उदाहरण 16. आकृति 2.2 में



आकृति 2.2

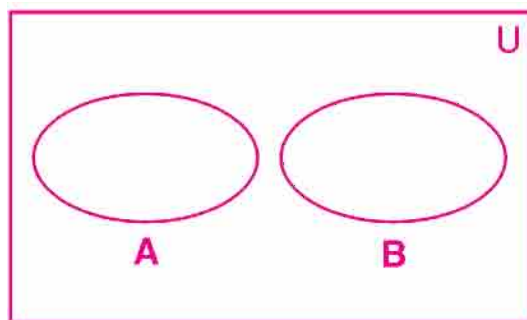
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A = \{5, 6\}$$

$$B = \{5, 7\}$$

स्पष्टतयः अवयव 5 समुच्चयों A तथा B दोनों का उभयनिष्ठ अवयव है।

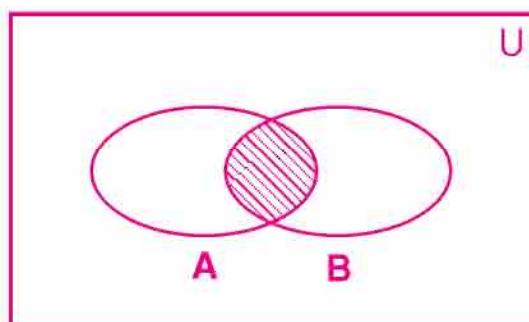
उदाहरण 17. आकृति 2.3 में



आकृति 2.3

A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

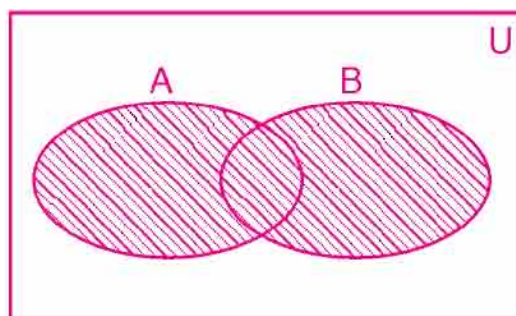
उदाहरण 18. आकृति 2.4 में



आकृति 2.4

रेखांकित भाग, $A \cap B$ को दर्शाता है।

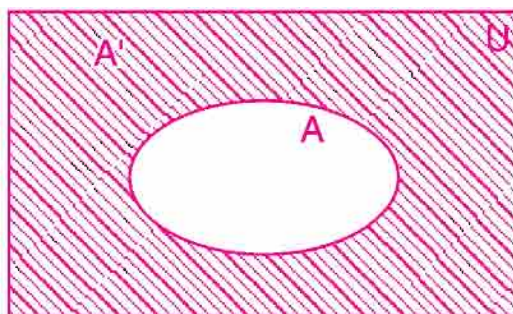
उदाहरण 19. आकृति 2.5 में



आकृति 2.5

रेखांकित भाग, $A \cup B$ को दर्शाता है।

उदाहरण 20. आकृति 2.6 में



आकृति 2.6

रेखांकित भाग, A' को दर्शाता है।

प्रश्नावली 2.5

1. यदि $U = \{a, e, i, o, u\}$ और $A = \{a, i, o\}$, तो इन समुच्चयों को एक वेन आरेख में दिखाइए।
2. निम्न समुच्चयों को एक वेन आरेख में दिखाइए।
 - (i) $U = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, $A = \{2, 3\}$
 - (ii) $U = \{x : x \text{ प्राकृत संख्या है और } 2 \leq x \leq 8\}$
 $A = \{x : x \in U \text{ और } x, 18 \text{ का भाजक है}\}$
 $B = \{x : x \in U \text{ और } x, 18 \text{ का अभाज्य विभाजक है}\}$
3. यदि U समष्टीय समुच्चय है, A और B , U के ऐसे उपसमुच्चय हैं कि $B \subset A$ तो इन समुच्चयों को एक वेन आरेख में दिखाइए।
4. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए एक वेन आरेख बनाइए
 - (1) $A \cap B$, जबकि $B \subset A$
 - (2) $A \cup B$, जबकि $B \subset A$
5. यदि, A, B, C समष्टीय समुच्चय U के उप समुच्चय हैं, तो निम्न समुच्चय को दिखाने के लिए वेन आरेख बनाइए :
 - (i) $A \cup (B \cap C)$
 - (ii) $(A \cap B) \cap C$
 - (iii) $[(A \cup B) \cap C]$

2.11 समुच्चयों का अनुप्रयोग (Applications of Sets)

हम अपने दैनिक जीवन में समुच्चयों के प्रयोग द्वारा कई समस्याओं को हल कर सकते हैं।

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ और $A = \{3, 5, 7\}$ तथा $B = \{1, 2, 5, 6\}$,

U के दो उपसमुच्चय हैं।

उपरोक्त समुच्चयों में,

$$n(U) = 7, n(A) = 3 \text{ और } n(B) = 4$$

$A \cup B$ कौन सा समुच्चय है?

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}$$

$$n(A \cup B) \text{ क्या है? } n(A \cup B) = 6$$

$$A \cap B \text{ कौन सा समुच्चय है? } A \cap B = \{5\}$$

$$n(A \cap B) \text{ क्या है? } n(A \cap B) = 1$$

$$\text{अब } n(A \cup B) + n(A \cap B) = 6 + 1 = 7$$

$$\text{और } n(A) + n(B) = 3 + 4 = 7$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

$$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B)$$

$$\text{अथवा } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

यह परिणाम व्यापक रूप से सत्य है।

दो परिमित समुच्चयों A और B के लिए

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

वेन आरेख की सहायता से उपरोक्त सूत्र की उपपत्ति देने का प्रयत्न कीजिए।

उदाहरण 21. यदि A और B दो ऐसे समुच्चय हों कि $A \cup B$ के 18, A के 8 और B के 15 अवयव हों तो $A \cap B$ के अवयवों की संख्या बताइए :

हल : यहाँ $n(A \cup B) = 18$, $n(A) = 8$, $n(B) = 15$

समुच्चय संबंधी सूत्र है

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

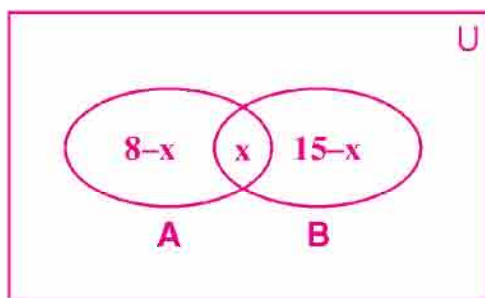
$$18 = 8 + 15 - n(A \cap B)$$

$$\text{या } n(A \cap B) = 23 - 18 = 5$$

$$n(A \cap B) = 5$$

वैकल्पिक विधि : (वेन आरेख द्वारा) हम ऊपर के उदाहरण को निम्न प्रकार भी हल कर सकते हैं। हमें $n(A \cap B)$ ज्ञात करना है।

मान लीजिए $n(A \cap B) = x$ है। आकृति 2.7 में $(A \cap B)$ के संगत भाग में x लिख दीजिए।



आकृति 2.7

अब हमें ज्ञात है कि $n(A) = 8$ इनमें से x अवयव हम पहले ही ले चुके हैं। शेष $8-x$ को A के अन्दर परन्तु $(A \cap B)$ के बाहर लिख दीजिए।

इस प्रकार, हमें ज्ञात है, कि $n(B) = 15$ इनमें से x अवयव हम पहले ही ले चुके हैं।

शेष $15-x$ को B के अन्दर और $A \cap B$ से बाहर लिख दीजिए।

अब आरेख से हम लिख सकते हैं कि $n(A \cup B) = (8-x) + x + (15-x) = 23-x$
परन्तु हमें ज्ञात है कि

$$n(A \cup B) = 18$$

$$\therefore 23 - x = 18$$

$$\therefore x = 23 - 18 = 5$$

$$\text{अतः } n(A \cap B) = x = 5$$

उदाहरण 22. 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 20 विद्यार्थी क्रिकेट खेलना पसन्द करते हैं और 15 फुटबाल। प्रत्येक विद्यार्थी, दोनों में से एक खेल अवश्य खेलना पसन्द करता है। बताइए कि कितने विद्यार्थी क्रिकेट और फुटबाल दोनों खेल पसन्द करते हैं।

हल : मान लीजिए, A उन सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है जो क्रिकेट खेलना पसन्द करते हैं और B उन सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है जो फुटबाल खेलना पसन्द करते हैं।

तो $A \cup B$ उन सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है जो दोनों में से कम से कम एक खेल खेलना अवश्य पसन्द करते हैं और $A \cap B$ उन सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है, जो दोनों खेल खेलना पसन्द करते हैं।

हमें ज्ञात है कि;

$$n(A) = 20, n(B) = 15, n(A \cup B) = 30$$

सूत्र के प्रयोग से हम पाते हैं

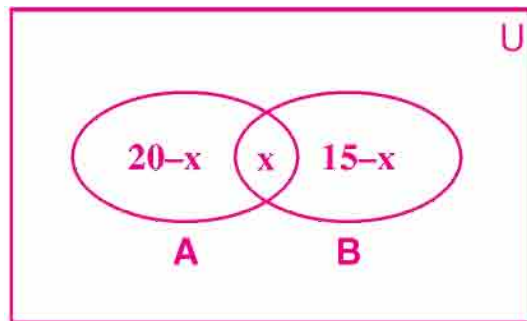
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\text{अर्थात् } 30 = 20 + 15 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 20 + 15 - 30$$

$$= 5$$

अतः 5 विद्यार्थी दोनों खेल खेलना पसन्द करते हैं। उपरोक्त उदाहरण के लिए, वेन आकृति 2.8 दी गई है



आकृति 2.8

$$(20-x) + x + (15-x) = 30$$

$$35 - x = 30$$

$$\text{अतः } x = 5$$

उदाहरण 23. 50 व्यक्तियों के एक समूह में 35 व्यक्ति हिन्दी बोलते हैं, 25 व्यक्ति हिन्दी और अंग्रेजी दोनों बोलते हैं और सभी व्यक्ति, दोनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा अवश्य बोलते हैं। बताइए कितने व्यक्ति अंग्रेजी बोलते हैं?

हल :

मान लीजिए

H : हिन्दी बोलने वाले व्यक्तियों का समुच्चय

E : अंग्रेजी बोलने वाले व्यक्तियों का समुच्चय

तब प्रश्नानुसार

$$n(H \cup E) = 50, n(H) = 35, n(H \cap E) = 25$$

सूत्र के प्रयोग द्वारा

$$n(H \cup E) = n(H) + n(E) - n(H \cap E)$$

$$\text{अर्थात् } 50 = 35 + n(E) - 25$$

$$50 = 10 + n(E)$$

$$n(E) = 50 - 10 = 40$$

अतः 40 व्यक्ति अंग्रेजी बोलते हैं।

प्रश्नावली 2.6

1. यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हों कि $n(A) = 17$, $n(B) = 23$ और $n(A \cup B) = 35$ तो $n(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. यदि A और B ऐसे दो समुच्चय हो कि A के 12, B के 17 और $A \cup B$ के 21 अवयव हैं तो बताइए कि $A \cap B$ के कितने अवयव हैं?
3. यदि S और T ऐसे दो समुच्चय हो कि S के 21, T के 32 और $S \cap T$ के 11 अवयव हैं तो बताइए कि $S \cup T$ के कितने अवयव हैं?
4. यदि X और Y ऐसे दो समुच्चय हो कि X के 40, $X \cup Y$ के 60 और $X \cap Y$ के 10 अवयव हैं। तो बताइए कि Y के कितने अवयव हैं?
5. यदि A और B दो असंयुक्त समुच्चय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
[संकेत $n(A \cap B) = 0$]
6. 70 व्यक्तियों के एक समूह में, 37 कॉफी पसंद करते हैं, 52 चाय पसंद करते हैं और प्रत्येक व्यक्ति दोनों पेयों में से कम से कम एक पेय अवश्य पसंद करता है। बताइए कि कितने व्यक्ति कॉफी और चाय दोनों पसंद करते हैं।

7. 60 व्यक्तियों के एक समूह में, 40 व्यक्ति क्रिकेट पसंद करते हैं, 10 व्यक्ति क्रिकेट और टेनिस दोनों पसंद करते हैं। बताइए कि कितने केवल टेनिस (क्रिकेट नहीं) पसंद करते हैं? कितने टेनिस पसंद करते हैं?
8. एक समिति में 50 व्यक्ति हिन्दी, 20 तमिल और 10 हिन्दी तमिल दोनों बोलते हैं। बताइए कि कितने व्यक्ति दोनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा अवश्य बोलते हैं।
9. 70 व्यक्तियों के एक समूह में 50 व्यक्ति हिन्दी बोलते हैं। 40 व्यक्ति हिन्दी और अंग्रेजी दोनों बोलते हैं। प्रत्येक व्यक्ति दोनों भाषाओं में से कम से कम एक भाषा अवश्य बोलता है, तो अंग्रेजी बोलने वाले व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बातें :

- वस्तुओं के सुपरिभाषित समूह को समुच्चय कहते हैं।
- समुच्चय के निरूपण के लिये सारणीबद्ध रूप या समुच्चय निर्माण रूप की विधियों का प्रयोग करते हैं।
- जिन समुच्चयों में सदस्यों की संख्या परिमित होती है परिमित समुच्चय कहते हैं।
- रिक्त समुच्चय में कोई अवयव नहीं होता है। इसको \emptyset (Phie) या $\{ \}$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।
- यदि किसी समुच्चय के एक भाग को लेकर नया समुच्चय बनाये तो यह समुच्चय दिये गये समुच्चय का उप समुच्चय कहलाता है। अर्थात् यदि समुच्चय B के सभी अवयव किसी समुच्चय A में विद्यमान हो तो B को A का उपसमुच्चय कहते हैं और इसे $B \subseteq A$ लिखते हैं।
- दिये गये दो समुच्चयों A और B का संघ वह समुच्चय है जिसका प्रत्येक अवयव या तो A का या B का या दोनों का अवयव हों।

संकेत रूप में $A \cup B = \{x : x \in A \text{ या } x \in B \text{ या } x \in A \text{ और } B\}$

- समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ वह समुच्चय है जिसका प्रत्येक अवयव A और B दोनों का अवयव हों। संकेत रूप में $A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$
- एक ऐसा समुच्चय जिसके अन्य सभी विचाराधीन समुच्चय उप समुच्चय हों, समष्टीय समुच्चय कहलाता है। इसे U से प्रदर्शित करते हैं।
- यदि U एक समष्टीय समुच्चय है और A, U का उपसमुच्चय है, तो U के सापेक्ष A का पूरक समुच्चय वह समुच्चय है जिसके सभी अवयव U के हों लेकिन A के न हों। संकेत रूप में इसे A' से प्रकट करते हैं। इस प्रकार

$A' = \{x : x \in U, x \notin A\}$

- समुच्चयों और उनके गुणधर्मों को आरेखों द्वारा प्रदर्शित करना वेन आरेख कहलाता है।
- दो परिमित समुच्चयों A और B के लिए

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$