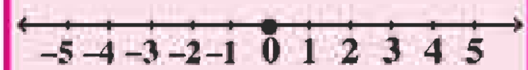
अध्याय 3
संख्या पद्धति एवं करणी
(Number System and Surds)



हम पढ़ेंगे

- भारतीय गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन: परिचय एवं योगदान।
- प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ एवं पूर्णांक
- परिमेय संख्याएँ
- संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण
- अपरिमेय संख्याएँ
- परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण
- परिमेय एवं वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म
- वास्तविक संख्याओं के निरपेक्ष मान
- करणी
- करणियों के नियम
- करणियों की तुलना
- करणियों का योग एवं व्यवकलन
- करणियों का गुणन एवं भाजन
- करणी का परिमेयकरण

3.1 भूमिका (Introduction)

हमने पिछली कक्षाओं में प्राकृत संख्याएँ पूर्णांक व पूर्ण संख्याओं के बारे में पढ़ा था। पूर्ण संख्याओं के अतिरिक्त भी हमारे जीवन में संख्याओं की आवश्यकता होती है।

इस अध्याय में हम इस प्रकार की कुछ संख्याओं के बारे में अध्ययन करेंगे। विशेषतः हम परिमेय संख्याएँ, अपरिमेय संख्याएँ व वास्तविक संख्याएँ और उनके गुणधर्मों के बारे में अध्ययन करेंगे। साथ ही करणी व उनकी संख्याओं के बारे में भी जानेंगे। 20वीं सदी के मध्य के भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन ने संख्याओं के विविध गुणों पर अनुसंधान किया व इनके बारे में कई नई जानकारियाँ विश्व को दिया अध्याय के आरम्भ में हम इस महान गणितज्ञ के जीवन परिचय व उनके गणितीय योगदान पर चर्चा करेंगे।

3.2 श्री निवास रामानुजन : परिचय एवं योगदान (Shri Nivas Ramanujan: Indroduction & Contribution)

महान गणितज्ञ श्री निवास रामानुजन का जन्म दिनांक 22 दिसम्बर सन् 1887 को तमिलनाडु प्रांत के कुंभकोणम के पास एक छोटे से गाँव 'इरोद' में हुआ था।

रामानुजन प्रारंभ से ही जिज्ञासुवृत्ति एवं कुशाग्र-बुद्धि के थे। उनकी गणित में विशेष रुचि थी। हाईस्कूल तक वे हमेशा अपनी कक्षा में प्रथम आये।

हाईस्कूल परीक्षा पास करने के पश्चात् रामानुजन ने कुंभकोणम कॉलेज में प्रवेश लिया। गणित में उनकी

विशेष रूचि थी। गणित में अद्वितीय योग्यता के आधार पर उन्होंने कॉलेज के विद्यार्थियों को गणित पढ़ाने का कार्य किया एवं गणित में उनका शोध कार्य भी जारी रहा। उनकी पूरी निधि दो हस्तलिखित पुस्तिकाएं थी। मित्रों से वे कहते कि यदि मेरी मृत्यु हो जाये तो यह पुस्तिकाएँ प्रोफेसर सिंगारवेलु अथवा प्रोफेसर एडवर्ड रॉस को दे दी जाएँ।

सन् 1913 में रामानुजन ने कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्रसिद्ध गणितज्ञ प्रोफेसर जी.एच. हार्डी को एक पत्र लिखा और पत्र के साथ उन्होंने लगभग 120 प्रमेय भी भेजे थे। हार्डी, रामानुजन के कार्य से इतने प्रभावित हुए कि उन्होंने रामानुजन को सन् 1914 में अपने पास इंग्लैंड बुला लिया।

गणितज्ञ गौडफ्रे हैरल्ड हार्डी के बुलावे पर 14 अप्रैल 1914 को रामानुजन लंदन पहुँचे। इंग्लैंड आते ही रामानुजन ने अनुसंधान कार्य में कठिन परिश्रम करना प्रारंभ कर दिया। रामानुजन तथा हार्डी का अनुसंधान कार्य जारी रहा। सन् 1915 में उनके सम्मिलित रूप से 9 शोध पत्र प्रकाशित हुए। इंग्लैण्ड के प्रवास में हार्डी के साथ रामानुजन के 21 शोध पत्र प्रकाशित हुए। 6 दिसम्बर 1917 को रामानुजन लंदन मेथमेटिकल सोसाइटी के फैलो निर्वाचित हुए। अपनी अद्वितीय प्रतिभा के आधार पर रामानुजन मई 1918 में रायल सोसाइटी के फैलो निर्वाचित किये गये।

उस वर्ष फैलोशिप के लिए 104 विद्वानों का नामांकन किया गया था। उन में से केवल 15 व्यक्ति चयनित हुए, रामानुजन उनमें से एक थे। यह सम्मान पाने वाले वे प्रथम भारतीय थे।

मद्रास विश्वविद्यालय द्वारा उन्हें प्राध्यापक पद पर नियुक्त किया गया।

27 मार्च 1919 को वे इंग्लैण्ड के प्रवास के पश्चात् भारत पहुँचे। भारत में उनका भव्य स्वागत् किया गया। रामानुजन के महत्वपूर्ण कार्य निम्नलिखित हैं : 1. पूर्ण संख्या 2. अनंत श्रेणी 3. सतत भिन्न 4. अपसारी श्रेणी 5. संयुक्त संख्या आदि।

रामानुजन भारतीय सभ्यता और संस्कृति के सच्चे पुजारी थे। इंग्लैण्ड जाते समय उन्होंने अपने पिता को वचन दिया था कि "मैं इंग्लैंड में भी हिन्दुस्तानी रहूँगा और कोई ऐसी बात नहीं करूँगा जिससे भारतीयता को चोट पहुँचे।" इस वचन का उन्होंने पूर्णत: पालन किया। विदेश में अत्यधिक बौद्धिक कार्य के साथ-साथ वे अपना सारा काम अपने हाथ से करते थे। घंटों दूसरों से गणित की समस्याओं पर चर्चा भी करते थे। उनकी अध्ययनशीलता अनुकरणीय है। वह अपने जीवन के अंतिम क्षण तक अभावों की परवाह न करते हुए अध्ययन, अनुसंधान एवं लेखन में प्रवृत्त रहे।

3.3 संख्या पद्धति का पुनरीक्षण (Revision of number system)

3.3.1 पूर्णांक

1, 2, 3, ... से तो आप सभी परिचित हैं, इनका प्रयोग वस्तुएं गिनने में करते हैं। इसीलिए इन्हें गिनती की संख्या या गणन संख्या कहते हैं। इन्हीं संख्याओं को हम प्राकृत संख्याएं कहते हैं। प्राकृत संख्याओं

के समुच्चय को प्रतीक N से प्रकट करते हैं। इस प्रकार

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

संख्या 3 के पश्चात् बिन्दु, उन संख्याओं को प्रकट करते हैं जो 3 के पश्चात् क्रम से आती हैं, जैसे 4, 5, 6, 7 इत्यादि। हम जानते हैं कि दो प्राकृत संख्याओं पर योग संक्रिया कर सकते हैं और योगफल भी एक प्राकृत संख्या ही होती है। प्राकृत संख्याओं के इस गुणधर्म को हम संवरक गुणधर्म कहते हैं, जिसका तात्पर्य है कि "प्राकृत संख्याओं का समुच्चय योग संक्रिया के सापेक्ष संवृत्त (closed) होता है"। परन्तु व्यवकलन की संक्रिया पर यह गुणधर्म संतुष्ट नहीं होता। अर्थात यदि एक प्राकृत संख्या को दूसरी प्राकृत संख्या में से घटाया जावे तो अंतर सदैव प्राकृत संख्या नहीं होती है। उदाहरणार्थ-

यदि 5 में से 5 घटाये तो हमें शून्य प्राप्त होगा जो कि प्राकृत संख्या नहीं है। इसी प्रकार 8 में से 10 घटाने पर -2 प्राप्त होगा जो कि प्राकृत संख्या नहीं है आदि।

संकेत रूप में : $0, -2 \notin N$

अर्थात 0 एवं –2 यह प्राकृत संख्याओं के समुच्चय के सदस्य नहीं है। यदि प्राकृत संख्याओं में 0 (शून्य) अंक को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएँ 0, 1, 2, 3, ... पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। इनके संख्याओं के समुच्चय को संकेत W द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

अर्थात $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

यदि 8 को 5 में से घटाएं तो हमें प्राकृत संख्या प्राप्त नहीं होती।

$$5 - 8 = ?$$

ऐसा इसलिये होता है क्योंकि ऐसी कोई प्राकृत संख्या नहीं होती है, जिसे 8 में योग करने पर योगफल 5 प्राप्त होता हो। लेकिन प्राकृत संख्याओं में ऋण संख्याएँ –1, –2, –3, ... और संख्या 0 (शून्य) का समावेश हो जाने से हमारे लिये इस अभाव का निदान करना संभव हो सका है। ऋण पूर्ण संख्याओं, शून्य और प्राकृत संख्याओं को एक साथ लेने पर प्राप्त संख्याएँ ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... पूर्णांक कहलाती है तथा इन संख्याओं के समुच्चय को हम पूर्णांकों का समुच्चय कहते हैं और इसे प्रतीक I से प्रकट करते हैं। इस प्रकार

$$I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

दो पूर्णांकों का योगफल सदैव एक पूर्णांक होता है एवं एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक में से घटाने पर प्राप्त परिणाम भी सदैव एक पूर्णांक होता है। इस प्रकार हम देखते हैं कि पूर्णांकों का समुच्चय I, योग और व्यवकलन दोनों की संक्रियाओं के सापेक्ष संवृत्त होता है।

पूर्णांकों का समुच्चय I, गुणन, संक्रिया के सापेक्ष भी संवृत्त होता है अर्थात यदि एक पूर्णांक को दूसरे पूर्णांक से गुणा किया जाए तो गुणनफल पुन: एक पूर्णांक ही होता है। परन्तु गुणन की प्रतिलोम संक्रिया भाजन के सापेक्ष समुच्चय I संवृत्त नहीं होता है। उदाहरण के लिये किन्हीं दो पूर्णांकों 2 और 3 को लेने पर 2/3 एक पूर्णांक नहीं है।

3.3.2 परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

हम देखते हैं कि ऐसा कोई पूर्णांक नहीं है जिससे 3 को गुणा करने पर 2 प्राप्त हो जाये। ऐसी स्थिति में नये प्रकार की संख्याओं का समावेश करने की आवश्यकता पड़ती है। हम एक नई संख्या $\frac{2}{3}$ का समावेश करते हैं जिसको 3 से गुणा करने पर 2 प्राप्त होता है। $\frac{2}{3}$ एक पूर्णांक नहीं है, इसको परिमेय संख्या कहते हैं और इसे "2 बटा 3" पढ़ते हैं।

व्यापक रूप में यदि P एक पूर्णांक है और q एक शून्येतर ($q \neq 0$) पूर्णांक है तो संकेत $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या को प्रकट करता है।

सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय को प्रतीक Q से प्रकट करते हैं इस प्रकार

$$Q = \{ \frac{p}{q} : p \text{ और } q \in I \text{ और } q \neq 0\}$$

यहाँ हम इस तथ्य से भी परिचित होना चाहेंगे कि परिमेय संख्याओं को अद्वितीय (unique) रूप से निरूपित नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिये संख्या $\frac{1}{2}$ को $\frac{2}{4}, \frac{-10}{-20}, \frac{25}{50}, \frac{47}{94}$ आदि द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है। इन सभी संख्याओं को तुल्य (equivalent) परिमेय संख्याएँ कहते हैं।

प्रत्येक पूर्णांक (धन, ऋण या शून्य) को $\frac{p}{q}$ के रूप में $q = 1$ लेकर लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए, $3 = \frac{3}{1}, -5 = \frac{-5}{1}, 0 = \frac{0}{1}$, इत्यादि। अत: यह स्पष्ट है कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है अत: पूर्णांकों का समुच्चय I, सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q का उपसमुच्चय हैं।

प्रतीक भाषा में, $I \subset Q$

इसी प्रकार पूर्व अध्ययन से हमें ज्ञात होता है कि $N \subset W \subset I \subset Q$

3.3.3 परिमेय संख्याओं की तुलना

पूर्णांक संख्याओं एवं परिमेय संख्याओं के अध्ययन से अब हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक n के संगत एक ऋण पूर्णांक $-n$ होता है, उसी प्रकार प्रत्येक धन परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के संगत एक ऋण परिमेय संख्या $-\frac{p}{q}$ होती है।

दो परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{s}$ को परस्पर समान कहते हैं यदि और केवल यदि $ps = rq$

दूसरे शब्दों में $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ यदि केवल यदि $ps - rq = 0$

इसी प्रकार परिमेय संख्याएँ एक-दूसरे से बड़ी व छोटी होती है।

यथा $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ यदि और केवल यदि $ps - rq > 0$

और $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ यदि और केवल यदि $ps - rq < 0$। पुनः हम यह भी देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणन एवं भाजन पुनः एक परिमेय संख्या होती है। अर्थात सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q सभी मौलिक संक्रियाओं (योग, व्यवकलन, गुणन और भाजन) के सापेक्ष संवृत्त होता है। (इस प्रतिबंध के साथ कि शून्य से भाजन परिभाषित नहीं है)

यह तथ्य भी स्पष्ट है कि यदि a और b दो परिमेय संख्याएँ हों, तो निम्नलिखित तीन संभावनाओं में से केवल एक ही सत्य होगी। यथा

$a = b$ या $a > b$ या $a < b$

दूसरे शब्दों में यदि a और b दो भिन्न परिमेय संख्याएँ इस प्रकार है कि $a > b$ अर्थात a, b से बड़ी है। तब बड़ा होना संबंध को क्रम संबंध कहते हैं। इस 'क्रम संबंध' के निम्नलिखित गुणधर्म होते हैं।

1. यदि $a > b$ और $b > c$ तो $a > c$ सभी $a, b, c \in Q$ (संक्रामक गुणधर्म)

2. यदि $a > b$ तब $a + c > b + c$ सभी $a, b, c \in Q$ (योग के साथ सामंजस्य)

3. यदि $a > b$ तथा, $c > 0$, $ac > bc$ सभी $a, b, c \in Q$ (गुणन के साथ सामंजस्य)

एवं यदि $c < 0$ तब $ac < bc$

इसी प्रकार छोटा होना जैसे $a < b$ भी क्रम संबंध दर्शाता है। इस क्रम संबंध के नियम भी उपरोक्तानुसार होते हैं।

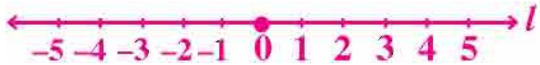
(यहां $c > 0$ या $c < 0$ क्रमशः c धनात्मक या ऋणात्मक परिमेय संख्या को दर्शाता है)

यदि a एवं b कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं तब $a < \frac{a+b}{2} < b$ जबकि $a < b$ होगा यहाँ $\frac{a+b}{2}$ पुनः एक परिमेय संख्या होगी, अतः हम दो परिमेय संख्याओं के मध्य एक परिमेय संख्या प्राप्त कर सकते हैं। अब पुनः $a < \frac{a + \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < b$ यहाँ $\frac{3a+b}{4}$ पुनः a एवं b के मध्य दूसरी परिमेय

संख्या है, इस प्रकार हम दो संख्याओं के मध्य अनंत परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।

3.3.4 संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं का निरूपण

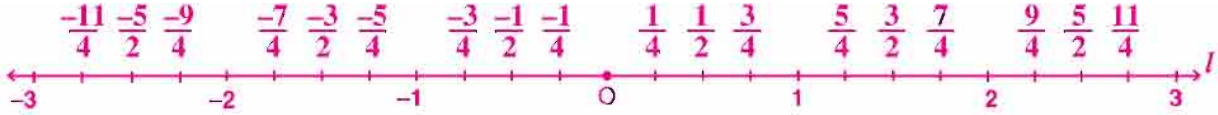
अब हम परिमेय संख्याओं को एक रेखा, जो दोनों ओर अनंत है, पर निरूपण करने पर विचार करेंगे, जैसा कि आकृति 3.1 में दिखाया गया है।



आकृति 3.1

ऊपर की आकृति में सरल रेखा l, दोनों ओर निरंतर चली जाती हैं। इसका संकेत हम दोनों ओर तीर के चिह्न लगा कर करते हैं। रेखा l पर एक बिन्दु लीजिए और 0 से चिन्हित कीजिए। फिर रेखा l पर 0 के दाई ओर, एक अन्य बिन्दु लीजिए और इसे 1 से चिन्हित कीजिए। हम मान लेते हैं कि बिन्दु 0 संख्या शून्य का और बिन्दु 1 संख्या 1 का निरूपण करते हैं। बिन्दुओं 0 और 1 के बीच के रेखाखण्ड की लम्बाई को व्यवहार के लिए इकाई लम्बाई मान लेते हैं। फिर रेखा l पर, 1 की दाई ओर अन्य बिन्दु ऐसे लीजिए कि किन्हीं दो पड़ोसी बिन्दुओं के बीच की दूरी सदैव इकाई लम्बाई हो, और इन्हें क्रमशः 2, 3, 4, ... इत्यादि से चिन्हित कीजिए। क्योंकि रेखा l, बिन्दु 0 के दाई ओर बिना अंत के निरंतर चली जाती हैं, अतः प्रत्येक प्राकृत संख्या n के संगत, रेखा l पर एक बिन्दु प्राप्त किया जा सकेगा। इसी प्रकार, रेखा l पर, 0 के बाई ओर ऋण पूर्णांकों –1, –2, –3 ... का निरूपण किया जा सकता है। इस प्रकार प्रत्येक ऋण पूर्णांक के संगत रेखा l पर एक बिन्दु प्राप्त होगा क्योंकि रेखा l बाई ओर बिना अंत के निरंतर चली गयी है। इस प्रकार हम पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं।

हम जानते हैं कि परिमेय संख्याओं को अद्वितीय रूप से निरूपित नहीं किया जाता है। पूर्व उदाहरण अनुसार $\frac{1}{2}$ को $\frac{5}{10}, \frac{2}{4}, \frac{10}{20}, \frac{30}{60}, \frac{25}{50}$ आदि द्वारा निरूपित किया जा सकता है, लेकिन संख्या रेखा पर किसी परिमेय संख्या को निरूपित करते समय हमें इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि $q \neq 0$ तथा p एवं q में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ट (common) गुणनखंड न हो अर्थात $\frac{1}{2}$ के उपरोक्त सभी तुल्य निरूपणों में हमें केवल $\frac{1}{2}$ का ही चयन करना होगा। अतः नीचे दिये गये आकृति 3.2 के अनुसार परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$ आदि को संख्या रेखा पर दर्शाया जाता है।



आकृति 3.2

3.4 अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

समीकरण $x^2=2$ पर विचार करने पर यह प्रश्न आता है कि क्या x एक परिमेय संख्या है? इस तथ्य को जानने के लिये हम निम्न साध्य का अध्ययन करेंगे।

कथन : ''ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 हो।''

उपपत्ति : क्योंकि $1^2=1$ और $2^2=4$, इसलिए यह स्पष्ट है कि यदि 2 एक धन परिमेय संख्या का वर्ग है तो यह परिमेय संख्या जिसका वर्ग 2 है एक पूर्णांक नहीं हो सकती लेकिन अवश्य ही 1 से बड़ी होगी।

परिकल्पना के विरोध में मान लीजिए कि एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ है जिसका वर्ग 2 है। हम मान लेते हैं कि पूर्णांक q, 1 से बड़ा है। तथा p और q का कोई सार्वभाजक नहीं है। अब मान्यतानुसार

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

इस समता के दोनों पक्षों को q से गुणा करने पर

$$2q = \frac{p^2}{q}$$

अब स्पष्ट है कि 2q एक पूर्णांक है। दूसरी ओर p और q का कोई सार्वभाजक नहीं है, अतः p^2 और q का कोई सार्वभाजक नहीं होगा और $q > 1$, इसलिए $\frac{p^2}{q}$ पूर्णांक से पृथक, कोई भिन्न है। जो कि एक विरोधाभास उत्पन्न करता है क्योंकि कोई पूर्णांक एवं पूर्णांक से पृथक कोई भिन्न समान नहीं हो सकते।

इस अंतर्विरोध से सिद्ध होता है कि हमारी कल्पना असत्य है। अतः 2 किसी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं हो सकता है, अर्थात सभी $x^2=2$ में x एक परिमेय संख्या नहीं हो सकती है।

जिस तर्क द्वारा हमने यह सिद्ध किया कि 2, किसी परिमेय संख्या का वर्ग नहीं है, उसी के द्वारा हम यह भी सिद्ध कर सकते हैं कि संख्याएँ 3, 5 और 7 भी किसी परिमेय संख्याओं के वर्ग नहीं हैं।

हम अपने दैनिक जीवन में बहुधा परिमेय संख्याओं का उपयोग करते हैं। जब हम लम्बाई, दूरी या तौल मापते हैं तो परिमेय संख्याओं का ही उपयोग करते हैं, जैसे $2\frac{1}{2}$ मीटर, $5\frac{1}{4}$ कि.मी. या $3\frac{3}{4}$ किलोग्राम आदि। लेकिन कभी-कभी आप देखेंगे, ऐसी लम्बाइयां भी हैं जिनका माप परिमेय संख्याओं से प्रकट नहीं किया जा सकता है। इस तथ्य को समझने के लिये हम ज्यामिति के निम्न महत्वपूर्ण साध्य को जो कि ''बौद्धायन (पाइथागोरस) प्रमेय'' के नाम से जाना जाता है याद करने को कहेंगे।

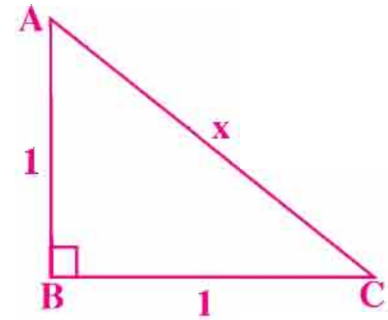
कथन : ''समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग उसकी अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।''

उपपत्ति : मान लीजिए समकोण, त्रिभुज ABC में कोण B एक समकोण है और AB = BC = 1 इकाई (लम्बाई)। मान लीजिए AC = x इकाइयाँ। तब प्रमेय के अनुसार

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

अर्थात् $$x^2 = 1+1 = 2$$

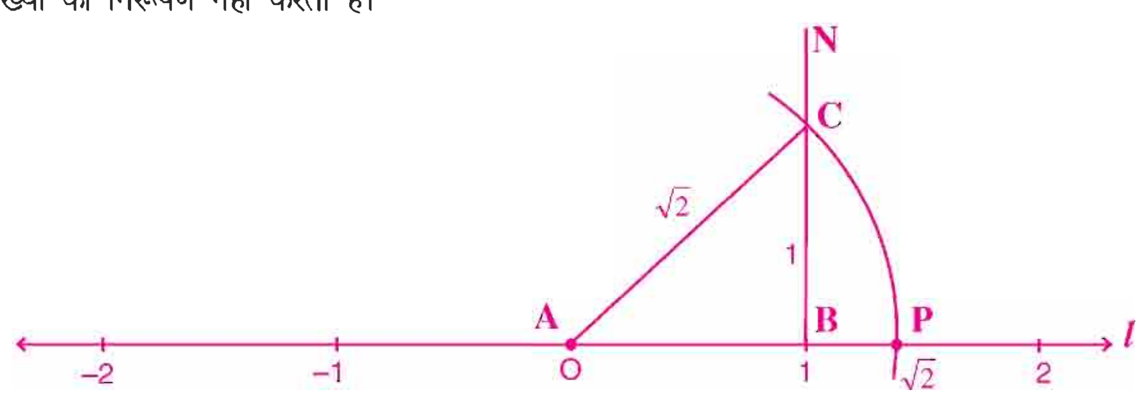
क्योंकि $x^2 = 2$ इसलिए पूर्व में उल्लेख के आधार पर x परिमेय संख्या नहीं हो सकती है। अर्थात AC की लम्बाई को परिमेय संख्याओं से प्रकट नहीं किया जा सकता है।



आकृति 3.3

इससे लम्बाइयाँ मापने में, परिमेय संख्याओं का अपर्याप्त होना ज्ञात होता है, परन्तु रेखाखण्ड AC की एक परिमित लम्बाई है और इसे हम, लम्बाई का प्रयोग करते हुए, किसी संख्या द्वारा प्रकट करना चाहेंगे। हम यह कह सकते हैं कि यह परिमेय संख्याओं से भिन्न एक संख्या है जिसका वर्ग 2 है। इस संख्या को संकेत $\sqrt{2}$ से प्रकट करते हैं। अब हमारे लिये यह कहना संभव है कि विकर्ण की लम्बाई $\sqrt{2}$ इकाई है। इस परिमेय संख्याओं से भिन्न संख्या $\sqrt{2}$ को हम एक अपरिमेय संख्या कहते हैं। इस प्रकार जो संख्याएँ परिमेय नहीं है, अपरिमेय संख्याएँ कहलाती हैं।

अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर निरूपण करने के लिए, संख्या रेखा पर बिन्दु 0 को A से और बिन्दु 1 को B से प्रकट कीजिए। तब रेखाखण्ड AB की लम्बाई एक इकाई है। बिन्दु B पर, BN एक रेखा खींचिए जो l पर लम्ब हो। इस लम्ब में से एक इकाई लम्बाई का रेखाखण्ड BC काट लीजिए। A को केन्द्र मानकर, AC त्रिज्या का एक वृत्त-चाप खींचिए जो रेखा l को बिन्दु P पर काटे, जैसा आकृति 3.4 में दिखाया गया है। तब AP = AC, अब पाइथागोरस के प्रमेय से ΔABC में $AC = \sqrt{2}$ अत: $AP = \sqrt{2}$ होगा। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि संख्या रेखा पर बिन्दु P, अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ का निरूपण करता है। इस प्रकार हमने संख्या रेखा पर एक ऐसा बिन्दु प्रकट कर दिया है जो किसी परिमेय संख्या का निरूपण नहीं करता है।



आकृति 3.4

इसी प्रकार अन्य परिमेय संख्याएँ $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{8} \ldots$ आदि को भी संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

3.5 परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण (Decimal Representation of rational and irrational numbers)

परिमेय संख्याओं के निम्न दशमलव निरूपण पर विचार करते हैं।

$$\frac{1}{2} = 0.5, \ \frac{7}{5} = 1.4, \ \frac{1}{3} = 0.333\ldots, \ \frac{7}{6} = 1.1666\ldots$$

यहाँ हम देखते हैं कि $\frac{1}{2}$ एवं $\frac{7}{5}$ संख्याओं के दशमलव निरूपण में दशमलव के दाई ओर अंकों की पुनरावृत्ति नहीं होती है। इस निरूपण को सांत (Terminating) दशमलव निरूपण कहा जाता है, जबकि संख्या $\frac{1}{3}$ के दशमलव निरूपण में दशमलव के दाई ओर में अंक 3 निरंतर दोहराया जाता है (अर्थात 3 की पुनरावृत्ति होती है) इसी प्रकार $\frac{7}{6}$ के दशमलव निरूपण में दशमलव के दाई ओर प्रथम अंक 1 तक इसके पश्चात् अंक 6 की पुनरावृत्ति होती है, अर्थात निरूपण असांत (non terminating) एवं पुनरावृत्त (repeating) है।

इसी प्रकार हम देखते हैं कि संख्याओं $\frac{7}{8}, \frac{11}{25}$ एवं $\frac{99}{200}$ में प्रत्येक सांत दशमलव निरूपित करते हैं, हम प्रेक्षण करते हैं कि यहाँ सभी भिन्नों में हर के अभाज्य गुणनखण्ड केवल 2 एवं 5 है। तब हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यदि $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या इस प्रकार है कि q के गुणनखण्ड केवल 2 और 5 हों, तब संख्या $\frac{p}{q}$ का दशमलव निरूपण सांत होता है।

पुनरावृत्त दशमलव को कभी-कभी आवृत्ति दशमलव भी कहा जाता। पुनरावृत्त दशमलव में यदि केवल एक अंक की पुनरावृत्त हो तब पुनरावृत्त अंक के ऊपर बिन्दु लगा कर प्रदर्शित किया जाता है। उदाहरणार्थ $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, $\frac{7}{6} = 1.16$ परन्तु यदि पुनरावृत्त संख्या एक से अधिक हो तब पुनरावृत्त अंक समूह में पहले एवं अंतिम अंक पर बिन्दु लगाकर अथवा पुनरावृत्त अंक समूह पर बार लगाकर प्रदर्शित किया जाता है। उदाहरणार्थ $\frac{15}{7} = 2.142857142857\ldots$ को $2.\dot{1}4285\dot{7}$ या $2.\overline{142857}$ द्वारा भी निरूपित किया जाता है।

अब अपरिमेय संख्याओं के निम्न दशमलव पर विचार करते हैं $\sqrt{2} = 1.414...$, $\sqrt{3} = 1.732...$, $\sqrt{5} = 2.236$ ... इन निरूपणों में हम देखते हैं कि दशमलव निरूपण न तो सांत है और न ही आवर्ती है। तब यह निष्कर्ष निकलता है कि कोई संख्या अपरिमेय है यदि और केवल यदि उसका दशमलव निरूपण असांत तथा अनावर्ती हो। पुनः दशमलव संख्याएँ 0.12112111211112..., 0.20020002... एवं 0.3000300003000003, ... आदि अपरिमेय संख्याओं को निरूपित करते हैं। इस प्रकार और भी कई उदाहरण दिये जा सकते हैं।

टिप्पणी : उपरोक्त विवेचना के आधार पर हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ अनंत होती हैं।

3.6 वास्तविक संख्याएँ (Real numbers)

इस अध्याय में अभी तक हमने प्राकृत संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक , परिमेय संख्याओं एवं अपरिमेय संख्याओं का अध्ययन किया। यदि हम सभी परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को एक साथ लेकर अध्ययन करें तो हमें संख्याओं का एक समुच्चय प्राप्त होता है जिसे वास्तविक संख्याओं का समुच्चय कहते हैं, दूसरे शब्दों में परिमेय एवं अपरिमेय संख्याएँ मिलकर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय बनाती हैं। इस समुच्चय को संकेत **R** से प्रकट करते हैं। इस प्रकार प्रत्येक वास्तविक संख्या या तो परिमेय संख्या होती है, या अपरिमेय। चूंकि प्रत्येक परिमेय एवं अपरिमेय संख्या को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। अतः प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है तथा प्रत्येक वास्तविक संख्या के संगत संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिन्दु होता है और विलोमतः संख्या रेखा पर प्रत्येक बिन्दु के संगत एक वास्तविक संख्या होती है। इसी कारण से; संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा कहते हैं।

वास्तविक संख्याओं पर परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के समान संक्रियाएँ योग, व्यवकलन, गुणन, और भाजन परिभाषित की जा सकती है। इसी प्रकार क्रम-संबंध 'से बड़ा है' वास्तविक संख्याओं पर भी लागू होता है।

यदि दो भिन्न-भिन्न वास्तविक संख्याएँ दी हुई हों तो उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से बड़ी होगी। वास्तविक संख्या रेखा पर बड़ी वास्तविक संख्या, छोटी वास्तविक संख्या से दाई ओर होती है। संख्या रेखा पर, 0 के दाई ओर की प्रत्येक वास्तविक संख्या धन संख्या होती है और 0 के बाई ओर की प्रत्येक वास्तविक संख्या ऋण संख्या होती हैं। प्रत्येक धन वास्तविक संख्या **a** के संगत एक ऋण वास्तविक संख्या **–a** होती है। पूर्व में हमने अध्ययन किया है कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का योग, व्यवकलन, गुणन व भाजन पुनः एक परिमेय संख्या होती है तथा इसे किसी एक संख्या द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरणार्थ दो परिमेय संख्याओं $\frac{2}{3}$ एवं $\frac{5}{7}$ लेने पर

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{29}{21}, \quad \frac{2}{3}-\frac{5}{7}=-\frac{1}{21}, \quad \frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{10}{21} \text{ व } \frac{2}{3}\div\frac{5}{7}=\frac{14}{15}$$

आदि निरूपण एक ही संख्या द्वारा किया जा सकता है। लेकिन दो अपरिमेय संख्याओं के योग, व्यवकलन, गुणन व भाजन को केवल एक संख्या के रूप में लिखना सदैव संभव नहीं होता है। उदाहरणार्थ दो अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ को लेने पर

$\sqrt{2}+\sqrt{3},\ \sqrt{2}-\sqrt{3},\ \sqrt{2}\,.\sqrt{3}=\sqrt{6}$ एवं $\sqrt{2}\div\sqrt{3}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ आदि चूंकि वास्तविक संख्याओं में समस्त परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं का समावेश होता है। अत: दो वास्तविक संख्याओं का योग व गुणन किया जा सकता है। यद्यपि दो वास्तविक संख्याओं का योगफल व गुणनफल भी एक वास्तविक संख्या होती है, इसको सरल रूप में, एक ही संख्या द्वारा लिखना सदैव संभव नहीं होता। उदाहरण के लिए 2 और $\sqrt{3}$ के योगफल को $2+\sqrt{3}$ लिखते हैं और $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के योगफल को $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ लिखते हैं। पुन: 2 और $\sqrt{3}$ के गुणनफल को $2\sqrt{3}$ एवं $\sqrt{2}$ व $\sqrt{3}$ के गुणन को $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ आदि द्वारा निरूपित किया जाता है।

इसी प्रकार हम व्यवकलन और भाजन की संक्रियाएँ लागू करते हैं। हाँ, शून्य से भाजन संभव नहीं होता है। पुन: परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं की तरह ही वास्तविक संख्याओं के दशमलव निरूपण किए जा सकते हैं। **सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को 'R' से प्रदर्शित किया जाता है।**

3.7 वास्तविक संख्याओं के गुणधर्म (Property of Real Numbers)

हम जानते हैं कि व्यवकलन एवं भाजन संक्रियाएँ क्रमश: योग एवं गुणन संक्रियाओं की प्रतिलोम संक्रियाएँ हैं अत: यहाँ हम केवल दो मौलिक संक्रियाओं योग एवं गुणन को लेकर ही वास्तविक संख्याओं का अध्ययन करेंगे।

हम यह प्रेक्षण करते हैं कि किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं का योग एवं गुणन पुन: एक वास्तविक संख्या होती है। वास्तविक संख्याओं के इस गुण को संवरक गुणधर्म कहते हैं अर्थात वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R योग एवं गुणन संक्रिया के सापेक्ष संवृत्त होता है। समुच्चय R में इस गुणधर्म को गणितीय भाषा में निम्नानुसार लिखा जाता है

1. $a+b\in R$ सभी $a, b\in R$ (योग का संवरक नियम)

   एवं $a\,.b\in R$ सभी $a, b\in R$ (गुणन का संवरक नियम)

   परिमेय संख्याओं में योग एवं गुणन संक्रियाओं के सापेक्ष नीचे दिये अन्य और भी गुणधर्म होते हैं (जिनका हम उनके नामों सहित उल्लेख करेंगे)

2. $a+b=b+a$ सभी $a, b\in R$ (योग का क्रम विनिमेय नियम)

   एवं $a\,.b=b\,.a$ सभी $a, b\in R$ (गुणन का क्रम विनिमेय नियम)

3. $a+(b+c)=(a+b)+c$ सभी $a, b, c\in R$ (योग का साहचर्य नियम)

   एवं $a\,(b.c)=(a.b).c$ सभी $a, b, c\in R$ (गुणन का साहचर्य नियम)

4. दो परिमेय संख्याएँ 0 एवं 1 इस प्रकार होती है कि

$0 + a = a + 0 = a$ सभी $a \in R$

एवं $1.a = a.1 = a$ सभी $a \in R$

(0 एवं 1 क्रमशः योगात्मक एवं गुणात्मक तत्समक कहलाते हैं)

5. प्रत्येक संख्या $a (\neq 0) \in R$ के संगत वास्तविक संख्याएँ $-a$ एवं $\frac{1}{a} \in Q$

इस प्रकार होती है कि $a + (-a) = (-a) + a = 0$ एवं $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$

(संख्याएँ $-a$ एवं $1/a$ क्रमशः संख्या a के योगात्मक एवं गुणात्मक प्रतिलोम कहलाते हैं)

6. $a.(b + c) = a.b + a.c$ एवं $(b + c).a = b.a + c.a$ सभी $a, b, c \in R$ क्रमशः बायां एवं दाया वितरण नियम (बंटन नियम) कहलाते हैं।

इस प्रकार (1) से (6) गुणधर्ण वास्तविक संख्याओं में पाये जाते हैं।

3.8 वास्तविक संख्याओं के निरपेक्ष मान (Absolute value of a real number)

हमने पिछले अनुच्छेदों में जाना कि संख्या रेखा पर वास्तविक संख्याओं को बिन्दुओं के रूप में व्यक्त किया जा सकता है और संख्या रेखा के प्रत्येक बिन्दु के लिए कोई-न-कोई वास्तविक संख्या विद्यमान होती है। किसी भी वास्तविक संख्या a और उसकी संगत ऋणात्मक संख्या $-a$ में यह गुण होता है कि वह संख्या रेखा पर जिन भी बिन्दुओं से प्रदर्शित की जाती है वह बिन्दु मूल बिन्दु से समान दूरी पर स्थित होते हैं उदाहरणार्थ संख्या रेखा पर संख्याएँ 2 और -2 मूल बिन्दु के दोनों ओर समान दूरी पर स्थित होंगी। इस दूरी को संख्याओं 2 और -2 के निरपेक्ष मान कहते हैं और इसे संकेत $|2|$ और $|-2|$ से दर्शाते हैं। अतः $|2| = 2$ तथा $|-2| = 2$.

किसी वास्तविक संख्या (धनात्मक या ऋणात्मक) का निरपेक्ष मान सदैव धन संख्या होता है। वास्तविक संख्या a के निरपेक्ष मान को संकेत $|a|$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरणार्थ इस प्रकार वास्तविक संख्याओं के निरपेक्ष मान को हम निम्नानुसार परिभाषित करते हैं। सभी $a \in R$ के लिए

$|a| = a$ यदि $a > 0$, (अर्थात a धन वास्तविक संख्या है)

$|a| = 0$ यदि $a = 0$

या $|a| = -a$ यदि $a < 0$ (अर्थात a ऋण वास्तविक संख्या है)

इस प्रकार $|3| = 3$ क्योंकि $3 > 0$

और $|-3| = 3$, क्योंकि $-3 < 0$.

प्रश्नावली 3.1

1. क्या शून्य एक परिमेय संख्या है, क्या इसे $\frac{p}{q}$; $p, (q \neq 0) \in I$ के रूप में लिखा जा सकता है।

2. निम्नलिखित संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए

   (1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{15}{7}$ (3) $\sqrt{3}$

   (4) $\sqrt{5}$ (5) 1.3 (6) 2.7

3. निम्नलिखित संख्याओं के दशमलव निरूपण कीजिए

   (1) $\frac{1}{11}$ (2) $4\frac{1}{8}$ (3) $\frac{13}{3}$

   (4) $\frac{11}{2}$ (5) $\frac{7}{5}$ (6) $\frac{2}{5}$

4. निम्नलिखित संख्याओं को $\frac{p}{q}$ के रूप में निरूपित कीजिए जहाँ p एवं $(q \neq 0)$ पूर्णांक हैं

   (1) 0.6 (2) 0.12 (3) 2.3

   (4) 3.24 (5) 0.55 (6) 4.8

5. निम्नलिखित संख्याओं को परिमेय व अपरिमेय संख्याओं में वर्गीकरण कीजिए।

   (1) $\sqrt{23}$ (2) $\sqrt{225}$ (3) $\sqrt{26}$

   (4) 7.478478... (5) 2.414 (6) 1.233223...

6. निम्नलिखित में किन परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण सांत है

   (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{7}{20}$ (3) $\frac{2}{13}$

   (4) $\frac{27}{40}$ (5) $\frac{13}{125}$ (6) $\frac{23}{7}$

7. निम्न कथनों में सत्य एवं असत्य कथनों का वर्गीकरण कीजिए

   1. किन्हीं दो परिमेय/अपरिमेय संख्याओं का योग एवं व्यवकलन भी एक परिमेय/अपरिमेय संख्या होती है।
   2. अशून्य परिमेय संख्या एवं अशून्य अपरिमेय संख्या का गुणन एवं भाजन एक परिमेय संख्या होती है।

3. कोई वास्तविक संख्याएँ प्राकृत संख्या नहीं होती है।

4. सभी पूर्णांक, वास्तविक संख्याएँ हैं।

8. $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

9. $\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

10. 0 और 0.1 के बीच पांच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

11. $-\frac{2}{5}$ और $-\frac{1}{5}$ के बीच दो परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

12. संख्याओं $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। $\frac{1}{7}$ के दशमलव निरूपण की सहायता से $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ और $\frac{6}{7}$ के दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

13. आपने देखा है कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है। सिद्ध कीजिए कि $2+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

14. सिद्ध कीजिए कि $3\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

15. निम्नलिखित में से प्रत्येक में बीच की दूरी ज्ञात कीजिए

(i) -2 और -4

(ii) -2 और 4

(iii) -7 और $|-7|$

16. निम्नलिखित संख्या युग्मों के मध्य स्थित चिह्न? के स्थान पर ">", "=", "<" में से यथोचित प्रतीक लगाइए-

(i) $|7-2|\ ?\ (|7|-|2|)$ (ii) $|2-7|\ ?\ (|2|-|7|)$

(iii) $|8-(-3)|\ ?\ (|8|-|-3|)$ (iv) $|-8-3|\ ?\ (|-8|-|3|)$

3.9 करणी (Surds)

हम जानते हैं कि कोई भी परिमेय संख्या, अपरिमेय नहीं होती एवं अपरिमेय संख्या, परिमेय नहीं होती। इस प्रकार परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं के समुच्चयों का सर्वनिष्ठ एक रिक्त समुच्चय होगा। ऐसे दो समुच्चय जिनका सर्वनिष्ठ रिक्त हो असंयुक्त कहलाते हैं। इस प्रकार वास्तविक संख्याओं का समुच्चय **R,** दो असंयुक्त समुच्चयों अर्थात सभी परिमेय संख्याओं के समुच्चय और सभी अपरिमेय संख्याओं के समुच्चय का सम्मिलन होता है। इस प्रकार यदि कोई वास्तविक संख्या **x,** परिमेय संख्या नहीं है, तो वह अपरिमेय संख्या होगी।

हमें ज्ञात है कि ऐसी कोई परिमेय संख्या नहीं है जिसका वर्ग 2 हो। परन्तु एक ऐसी वास्तविक संख्या (अपरिमेय) अवश्य होती है, जिसका वर्ग 2 हो।

इस वास्तविक संख्या का दशमलव निरूपण निम्नानुसार होता है

1.4142135 ...

जो कि एक असांत अनावर्ती दशमलव है। अत: हम $\sqrt{2}$ का दशमलव के कुछ स्थानों तक शुद्ध मान ज्ञात कर सकते, हैं। इस प्रकार विभिन्न गणनाओं में $\sqrt{2}$ को इसी तरह लिखना अधिक उपयुक्त होता है। इसी प्रकार की $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{21}$ आदि अन्य अपरिमेय संख्याएँ हैं, इन्हें परिमेय संख्याओं के वर्गमूल कहते हैं।

अपरिमेय संख्या जिसका घन 2 हो, को $\sqrt[3]{2}$ या $2^{\frac{1}{3}}$ के रूप में लिखते हैं। तथा इसे 2 का घनमूल कहते हैं, अन्य घनमूल $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{7}$... आदि है।

इस प्रकार की संख्याओं जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt[4]{5}, \sqrt[4]{21}$ इत्यादि को "करणी" (Surds) कहते हैं। इनमें से प्रत्येक एक अपरिमेय संख्या है।

व्यापक रूप में, यदि **a** एक धन परिमेय संख्या है जिसे किसी परिमेय संख्या के **n**वें घात के रूप में प्रकट नहीं कर सकते को $\sqrt[n]{a}$ या $a^{\frac{1}{n}}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

अर्थात **a** के **n**वें मूल को $\sqrt[n]{a}$ या $a^{\frac{1}{n}}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। प्रतीक $\sqrt[n]{a}$ को **करणी चिह्न कहते हैं** जिसमें **n** को करणी घात एवं **a** को करणीगत कहते हैं, तथा $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या होगी।

उपरोक्तानुसार इस कथन से कि $\sqrt[n]{a}$ एक करणी है यह बोध होता है कि

(i) **a** एक धनात्मक परिमेय संख्या है,

(ii) $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अत: यदि किसी संख्या को $\sqrt[n]{a}$ के रूप में व्यक्त किया जा सके जहाँ **a** एक परिमेय संख्या और

$\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या है तो परिभाषा के अनुसार $\sqrt[n]{a}$ करणी होगा। उदाहरणार्थ यद्यपि $\sqrt{\sqrt{2}}$ एक करणी प्रतीक नहीं होता है क्योंकि यह एक अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ का वर्ग मूल है पर इसे एक करणी माना जाता है क्योंकि इसे $\sqrt[4]{2}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 1. (i) $\sqrt[3]{5}$ का करणीघात 3 है।

(ii) $\sqrt{50}$ का करणी घात 2 है।

(iii) $\sqrt{64}$ एक करणी नहीं है, क्योंकि 64 परिमेय संख्या 8 का वर्ग है।

(iv) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है, परन्तु यह एक करणी नहीं है क्योंकि $3+2\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

टिप्पणी : जब एक करणी में, करणीगत को एक प्रतीक जैसे $\sqrt[n]{a}$ में a द्वारा प्रकट किया जाए, तो यह समझा जाता है कि a वे सभी प्रतिबंध संतुष्ट करता है जिससे कि $\sqrt[n]{a}$ को करणी कह सके।

3.9.1 करणियों के नियम

(i) आपको याद होगा कि यदि n कोई धन पूर्णांक हो और a एक धन परिमेय संख्या हो तो $\sqrt[n]{a}$ संख्या a का nवाँ मूल है।

$$\therefore \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

(ii) यदि $\sqrt[n]{a}$ और $\sqrt[n]{b}$, एक ही घात की दो करणियाँ हैं, तब

$$\text{तब } \left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n$$

$$= ab$$

$$\therefore \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

(iii) यदि $\sqrt[n]{a}$ और $\sqrt[n]{b}$ एक ही घात की दो करणियाँ हैं तब

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

(iv) यदि m, n दो धन पूर्णांक हों, तो किसी भी धन परिमेय संख्या a के लिए,

$$\left[\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right]^{mn} = \left[\sqrt[n]{a}\right]^{n} = a$$

$$\therefore \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$$

(v) यदि m, n और p, धन पूर्णांक हों, तो किसी भी धन परिमेय संख्या के लिए,

$$\therefore \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{\left(a^p\right)^m}} = \sqrt[mn]{a^{pm}}$$

उदाहरण 2. 1. $\sqrt[3]{(5)^3} = 5$

2. $\sqrt{125} = \sqrt{25 \times 5} = \sqrt{25}.\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

3. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$

4. $\sqrt[6]{64} = \sqrt[2\times 3]{64}$

$= \sqrt{\sqrt[3]{64}}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

5. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5\times 3]{3} = \sqrt[15]{3}$

एक दी हुई करणी को सरल करने में या दो दी हुई करणियों को एक ही रूप में प्रकट करने के लिये हम करणियों के नियमों का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिये हमने ऊपर दिखाया है कि

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^2 \times 5} = 5\sqrt{5}$$

इसी प्रकार

$$\sqrt[3]{144} = \sqrt[3]{2^4 . 3^2} = \sqrt[3]{2^3 . 2 . 3^2} = 2.\sqrt[3]{18}$$

एवं $\sqrt[4]{1875} = \sqrt[4]{5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3} = \sqrt[4]{5^4 \times 3} = 5\sqrt[4]{3}$

कोई करणी अपने सरलतम रूप में तब होती है जब

(i) करणीघात n के करणी चिह्न के अंदर, करणीगत का कोई गुणनखण्ड किसी परिमेय संख्या का nवां घात न हो;

(ii) करणी चिह्न के नीचे कोई भिन्न न हो, और

(iii) करणी का करणीघात यथासंभव छोटा हो।

इस प्रकार $5\sqrt{5}$ एवं $2\sqrt[3]{18}$ व $5\sqrt[4]{3}$ करणी के सरलतम रूप है।

उदाहरण 3. सरल कीजिए $\sqrt{\dfrac{125}{63}}$

हल :

$$=\sqrt{\frac{125}{63}}=\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{63}}=\frac{\sqrt{5\times5\times5}}{\sqrt{3\times3\times7}}=\frac{5.\sqrt{5}}{3.\sqrt{7}}$$

$$=\frac{5.\sqrt{5}}{3.\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{5.\sqrt{35}}{21}$$

ऐसी करणी को, जिसका एक गुणनखण्ड 1 के अतिरिक्त कोई अन्य परिमेय संख्या है, और दूसरा गुणनखण्ड अपरिमेय संख्या है, को **मिश्र करणी** (mixed surd) कहते हैं।

ऐसी करणी को, जिसका एक गुणनखण्ड 1 हो और अन्य गुणनखण्ड अपरिमेय संख्या हो, **शुद्ध (पूर्ण) करणी** (Pure Surd) कहते हैं।

उदाहरणार्थ $\sqrt{10}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{7}$ शुद्ध करणियाँ हैं।

एवं $7\sqrt{3}, 5\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[5]{8}$ मिश्र करणियाँ हैं।

करणियों के नियमों की सहायता से हम एक पूर्ण करणी को मिश्र करणी के रूप में या इसका विलोम प्राप्त कर सकते हैं इसे निम्न उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 4. $\dfrac{3}{4}\sqrt{32}$ को पूर्ण करणी के रूप में लिखिए।

हल :

$$\frac{3}{4}\sqrt{32}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2.32}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)\times32}$$

$= \sqrt{18}$

उदाहरण 5. $\sqrt[3]{256}$ को उसके सरलतम मिश्र करणी के रूप में लिखिए।

हल :
$$\sqrt[3]{256} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2^2}$$
$$= \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^2}$$
$$= 2 \times 2 \times \sqrt[3]{4}$$
$$= 4.\sqrt[3]{4}$$

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित में कौनसी करणियाँ हैं

(1) $\sqrt{5} \times \sqrt{10}$ (2) $\sqrt{8} \times \sqrt{6}$ (3) $\sqrt{27} \times \sqrt{3}$

(4) $\sqrt{16} \times \sqrt{4}$ (5) $\sqrt{100} \times \sqrt{2}$ (6) $\sqrt{15} \times \sqrt{6}$

2. पूर्ण करणी के रूप में लिखिए

(1) $5\sqrt{6}$ (2) $2\sqrt[3]{4}$ (3) $3\sqrt[4]{5}$

(4) $10\sqrt{3}$ (5) $\frac{2}{3}\sqrt{32}$ (6) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$

(7) $4\sqrt[3]{3}$ (8) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{25}$ (9) $2\sqrt[5]{3}$

3. मिश्र करणी को सरलतम रूप में लिखिए

(1) $\sqrt{80}$ (2) $\sqrt[3]{72}$ (3) $\sqrt[5]{288}$

(4) $\sqrt{1350}$ (5) $\sqrt[5]{320}$ (6) $5.\sqrt[3]{135}$

(7) $\sqrt{125}$ (8) $\sqrt[4]{243}$ (9) $2.\sqrt[3]{2401}$

3.9.2 करणियों की तुलना

दो करणियों, जिनके करणीघात समान हो, की तुलना आसानी से कर सकते हैं। इसके लिए हमें उनके करणीगतों की तुलना करनी होती हैं, जैसे

$\sqrt[3]{25} > \sqrt[3]{24}$, $\sqrt[5]{84} > \sqrt[5]{80}$, इत्यादि।

यदि करणियाँ एक ही करणीघात की न हों, तो पहले उन्हें परिवर्तन करके एक ही करणीघात की बना लेने पर तुलना करना आसान हो जाता है, इसे निम्न उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 6. $\sqrt[3]{3}$ और $\sqrt[4]{5}$ में कौन सी बड़ी है?

हल : 3 और 4 का ल.स. (L.C.M.) = 12

अब $\sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[12]{81}$

और $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125}$

अब स्पष्ट है कि चूंकि $125 > 81$

इसलिए $\sqrt[12]{125} > \sqrt[12]{81}$

अतः $\sqrt[4]{5} > \sqrt[3]{3}$

उदाहरण 7. निम्न करणियों को अवरोही क्रम से लिखिए

$\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[12]{25}$

हल : 4, 6 और 12 का ल.स. = 12

अतः $\sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{27}$

$\sqrt[6]{10} = \sqrt[12]{10^2} = \sqrt[12]{100}$

और $\sqrt[12]{25} = \sqrt[12]{25}$

अब $100 > 27 > 25$

स्पष्टतः $\sqrt[12]{100} > \sqrt[12]{27} > \sqrt[12]{25}$

अत : $\sqrt[6]{10} > \sqrt[4]{3} > \sqrt[12]{25}$

प्रश्नावली 3.3

1. कौन सी करणी बड़ी है?

(1) $\sqrt{2}$ या $\sqrt[3]{3}$ (2) $\sqrt{3}$ या $\sqrt[4]{10}$

(3) $\sqrt[4]{5}$ या $\sqrt[3]{4}$ (4) $\sqrt[3]{6}$ या $\sqrt[4]{8}$

(5) $\sqrt[8]{12}$ या $\sqrt[4]{6}$ (6) $\sqrt[3]{3}$ या $\sqrt[4]{4}$

(7) $\sqrt[4]{30}$ या $\sqrt[5]{45}$

2. निम्न करणियों को अवरोही क्रम में लिखिए :

(1) $\sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \sqrt{3}$ (2) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{3}, \sqrt[3]{4}$

(3) $\sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}, \sqrt{3}$ (4) $\sqrt[3]{2}, \sqrt[6]{3}, \sqrt[9]{4}$

(5) $\sqrt{5}, \sqrt[3]{11}, 2\sqrt[6]{3}$

3. $\sqrt[4]{ab}$ को करणी घात 12 में लिखिए।

3.10 करणियों का योग एवं व्यवकलन (Addition and subtraction of surds)

हम जानते हैं कि करणियाँ वास्तविक संख्याएँ हैं, अत: इन पर बंटन नियम लागू होता है। इस प्रकार

(i) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}=(5+4)\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

(ii) $4\sqrt{7}+5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=(4+5-3)\sqrt{7}=6\sqrt{7}$

यहाँ ध्यान दीजिए कि $5\sqrt{2}$ और $4\sqrt{2}$ में से प्रत्येक का अपरिमेय गुणनखण्ड समान है। जिन करणियों के अपरिमेय गुणनखण्ड समान हों, उन्हें **समरूप करणियाँ** (similar Surds) कहते हैं एवं बंटन नियम की सहायता से समरूप करणियों को जोड़ा एवं व्यवकलन किया जा सकता है।

उदाहरण 8. सरल कीजिए : $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

हल : प्रत्येक पद को उसके सरलतम रूप में रखने पर :

$$5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}+2\sqrt{3^2\times 3}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}$$

$$= 5\sqrt{3}+6\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= (5+6+\frac{1}{3})\sqrt{3} \text{ (बंटन नियम से)}$$

$$= \frac{34}{3}\sqrt{3}$$

उदाहरण 9. सरल कीजिए

$$\sqrt{252}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-3\sqrt{\frac{1}{6}}$$

हल : प्रत्येक पद को सरलतम रूप में रखने पर

$$\sqrt{252}=\sqrt{2^2\times3^2\times7}=6\sqrt{7}$$

$$5\sqrt{6}=5\sqrt{6}$$

$$\sqrt{294}=\sqrt{2\times3\times7^2}=7\sqrt{6}$$

$$3.\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{6\times6}}=\frac{3}{6}\sqrt{6}=\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

अत: $\sqrt{252}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-3\sqrt{\frac{1}{6}}$

$$=6\sqrt{7}-5\sqrt{6}+7\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$=6\sqrt{7}+(-5+7-\frac{1}{2})\sqrt{6}$$ (बंटन नियम से)

$$=6\sqrt{7}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$$

प्रश्नावली 3.4

सरल कीजिए

1. $5\sqrt{2}+20\sqrt{2}$
2. $2\sqrt{3}+\sqrt{27}$
3. $4\sqrt{3}-3\sqrt{12}+2\sqrt{75}$
4. $\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{2}$
5. $\sqrt{45}-3\sqrt{20}+4\sqrt{5}$
6. $4\sqrt{12}-\sqrt{50}-7\sqrt{48}$
7. $2\sqrt[3]{4}+7\sqrt[3]{32}-\sqrt[3]{500}$

8. $2\sqrt[3]{40}+3\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$

9. $3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}+7\sqrt{\frac{1}{3}}$

10. $\sqrt[4]{81}-8\sqrt[3]{216}+15\sqrt[5]{32}+\sqrt{225}$

11. $\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{250}$

12. $\sqrt{98}+\sqrt{\frac{25}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{32}$

13. $\sqrt{20}-\sqrt{45}+\sqrt{125}$

14. $6\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{16}+10\sqrt[3]{128}$

15. $\sqrt{63}+\sqrt{28}-\sqrt{175}$

3.11 करणियों का गुणन और भाजन (Multiplication and division of surds)

एक ही घात की दो करणियों को निम्नलिखित नियम के अनुसार, गुणा या भाग करके, उसी घात की करणी के रूप में लिख सकते हैं।

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ एवं $\sqrt[n]{a}\div\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

इस प्रकार

(i) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2\times 5}=\sqrt[3]{10}$

(ii) $\sqrt[5]{24}\div\sqrt[5]{6}=\sqrt[5]{\frac{24}{6}}=\sqrt[5]{4}$

यदि करणियां जिनका गुणन या भाजन करना है, एक ही घात की न हों, तो गुणा या भाग करने से पहले उनको समान घात में परिवर्तित कर गुणा या भाग किया जाता है, जैसा निम्न उदाहरणों में दर्शाया गया है।

उदाहरण 10. गुणा कीजिए : $\sqrt[3]{7}$ का $\sqrt{2}$ से

हल : 3 और 2 का लघुत्तम समापवर्त्य $= 6$

अब $\sqrt[3]{7}=\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[6]{49}$

और $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$

$\therefore \sqrt[3]{7} \times \sqrt{2} = \sqrt[6]{49} \times \sqrt[6]{8}$

$= \sqrt[6]{49 \times 8}$

$= \sqrt[6]{392}$

उदाहरण 11. भाग दीजिए $\sqrt{24}$ को $\sqrt[3]{200}$ से।

हल : 3 और 2 का लघुत्तम समापवर्त्य = 6

अब $\sqrt{24} = \sqrt[6]{24^3} = \sqrt[6]{13824}$

और $\sqrt[3]{200} = \sqrt[6]{200^2} = \sqrt[6]{40000}$

$\therefore \quad \sqrt{24} \div \sqrt[3]{200} = \sqrt[6]{13824} \div \sqrt[6]{40000}$

$$= \sqrt[6]{\frac{13824}{40000}}$$

$$= \sqrt[6]{\frac{216}{625}}$$

प्रश्नावली 3.5

सरल कीजिए और उत्तर को उसके सरलतम रूप में लिखिए

1. $\sqrt{14} \times \sqrt{21}$
2. $\sqrt{15} \times \sqrt{7}$
3. $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{22}$
4. $4\sqrt{12} \times 7\sqrt{6}$
5. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt{5}$
6. $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{3}$
7. $\sqrt[4]{28} \div \sqrt[3]{7}$
8. $\sqrt[6]{12} \div (\sqrt{3} . \sqrt[3]{2})$
9. $\sqrt{2} . \sqrt[3]{3} . \sqrt[4]{4}$
10. $\sqrt[3]{2} . \sqrt[4]{2} . \sqrt[12]{32}$
11. $\sqrt[3]{3} . \sqrt[4]{5}$
12. $3\sqrt{5} . 2\sqrt{7} . 5\sqrt{2}$
13. $\sqrt[3]{135} \div \sqrt[3]{5}$

3.12 करणी का परिमेयकरण (Rationalisation of surds)

जब दो करणियों का गुणनफल एक परिमेय संख्या हो तो उनमें से प्रत्येक को, दूसरे का **परिमेयकारी गुणक (प.गु.)** (ralionalising factor) कहते हैं।

यथा (i) $2\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 10,$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ का प.गु. है। इसी प्रकार

(ii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$

$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2$

$= 3-2$

$= 1,$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $\sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}+\sqrt{2}$ का प.गु. है।

> **टिप्पणी :** एक दी गई करणी का परिमेयकारी गुणक केवल एक ही नहीं होता है। यदि करणी का एक प.गु. ज्ञात हो तो इस प.गु. का किसी परिमेय सख्या से गुणनफल भी दी गई करणी का प.गु. होगा। अतः दी गई करणी के सभी प.गु. में से सरलतम प.गु. का लेना ही सुविधाजनक हैं।

(i) एक पदी करणी का परिमेयकरण

एक पदी करणी के परिमेयकारी गुणक को इन उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है।

उदाहरण 12. $\sqrt{32}$ का एक सरलतम परिमेयकारी गुणक ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$

अब $4\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \times 2 = 8$ एक परिमेय संख्या

अतः $\sqrt{2}, \sqrt{32}$ का सरलतम परिमेयकारी गुणक है।

उदाहरण 13. $\sqrt[3]{72}$ का सरलतम परिमेयकारी गुणक ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^2}$

$= 2^{\frac{3}{3}}.3^{\frac{2}{3}}$

$$= 2 . 3^{\frac{2}{3}}$$

अब $\left(2 . 3^{\frac{2}{3}}\right)\left(3^{1-\frac{2}{3}}\right) = 2 . 3^{\frac{2}{3}} . 3^{\frac{1}{3}}$

अब $2 . 3^{\frac{2}{3}} . 3^{\frac{1}{3}} = 2.3 = 6$, एक परिमेय संख्या।

अत: $3^{\frac{1}{3}}$ या $\sqrt[3]{3}$ करणी $\sqrt[3]{72}$ का सरलतम परिमेयकारी गुणक है।

उदाहरण 14. व्यंजक $\frac{2}{\sqrt{7}}$ को परिमेय हर वाले व्यंजक के रूप में लिखिए।

हल : $\frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}}$

$$= \frac{2}{7}\sqrt{7}$$

$\sqrt{b}$

उदाहरण 15. यदि $\sqrt{5} = 2.236$ (लगभग) हो तो $\frac{2}{\sqrt{5}}$ का मान, दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$= \frac{2 \times 2.236}{5}$$

$= 0.894$ (लगभग)

(ii) द्विपद द्विघात करणी का परिमेयकरण

यदि किसी व्यंजक का हर $a + \sqrt{b}$ के रूप वाला हो तो इसका परिमयकरण करने के लिए इसके अंश और हर दोनों को $a - \sqrt{b}$ से गुणा कर देते हैं। यदि हर $a - \sqrt{b}$ हो तो अंश और हर दोनों को

$a+\sqrt{b}$ से गुणा कर देते हैं। $a+\sqrt{b}$ को $a-\sqrt{b}$ का संयुग्मी (Conjugate) कहते हैं और $a-\sqrt{b}$ को $a+\sqrt{b}$ का संयुग्मी कहते हैं।

करणीघात 2 वाले करणी को द्विघात करणी (quadratic Surd) भी कहते हैं। द्विघात करणी वाले दो द्विपद व्यंजकों को, जिनमें केवल उन्हें जोड़ने वाले चिह्न (+ या –) का अन्तर होता है, परस्पर संयुग्मी कहा जाता है। जैसे $(\sqrt{6}+\sqrt{2})$ और $(\sqrt{6}-\sqrt{2})$ एक-दूसरे के संयुग्मी हैं। संयुग्मी करणियों का गुणनफल परिमेय संख्या होती है।

जैसे : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = (\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2$

$= 6-2$

$= 4$ परिमेय संख्या

अत: हम देखते हैं कि किसी द्विपद द्विघात करणी का संयुग्मी उस करणी का प.गु. होता है।

उदाहरण 16. $\dfrac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ को परिमेय हर वाले व्यंजक के रूप में लिखिए।

हल :

$$\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = \frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{6(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{18-12} = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

उदाहरण 17. यदि $\sqrt{6} = 2.4495$ है, तब निम्नलिखित का मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

हल :

$$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{3+2.\sqrt{3}.\sqrt{2}+2}{3-2}$$

$$= 5+2.\sqrt{6}$$

$= 5 + 2 \times 2.4495$

$= 5 + 4.8990$

$= 9.899$ (लगभग)

प्रश्नावली 3.6

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का सरलतम परिमेयकारी गुणक लिखिए

(i) $2\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{10}$ (iii) $\sqrt{75}$

(iv) $2.\sqrt[3]{5}$ (v) $\sqrt[3]{36}$ (vi) $\sqrt[3]{32}$

2. निम्नलिखित में प्रत्येक को परिमेय हर बना कर लिखिए

(i) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3.\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक व्यंजक का मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए, जबकि दिया हो : $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{10} = 3.162$ और $\sqrt{5} = 2.236$ (लगभग)

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(iv) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{5}}$ (v) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ (vi) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

4. यदि a और b दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो निम्नलिखित समताओं में a और b का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = a + b\sqrt{3}$ (ii) $\frac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$

(iii) $\dfrac{5+2\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ (iv) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+2\sqrt{5}} = a\sqrt{5} - b$

(v) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = a + b\sqrt{15}$ (vi) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = a - b\sqrt{6}$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक को, उसके हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए

(i) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ (ii) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (iii) $\dfrac{7+3\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}$

6. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए

(i) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}} - \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

(ii) $\dfrac{7\sqrt{3}}{\sqrt{10}+\sqrt{3}} - \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} - \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}+3\sqrt{2}}$

7. $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$ और $\sqrt{6} = 2.449$ (लगभग) लेकर, निम्नलिखित में से प्रत्येक मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए

(i) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(ii) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक को, उसके हर का परिमेयकरण करके सरल कीजिए

(i) $\dfrac{3}{5-\sqrt{3}} + \dfrac{2}{5+\sqrt{3}}$

(ii) $\dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2} - \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$

याद रखने योग्य बातें :

- जिन संख्याओं का प्रयोग वस्तुएं गिनने में करते है प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं। प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को प्रतीक N से प्रदर्शित करते हैं।
  $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- प्राकृत संख्याओं में शून्य को सम्मिलित करने पर संख्याएँ पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं। पूर्ण संख्याओं के समुच्चय को प्रतीक W द्वारा प्रदर्शित करते हैं। $W = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- ऋण संख्याओं, शून्य और प्राकृत संख्याओं को एक साथ लेने पर जो समुच्चय बनता है उसे पूर्णांकों का समुच्चय कहते हैं और प्रतीक I से प्रदर्शित करते है। इस प्रकार
  $I = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- यदि p एक पूर्णांक है और q एक शून्येतर पूर्णांक हैं तो संकेत $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या कहलाती हैं। ऐसी संख्याओं के समुच्चय को प्रतीक Q से प्रदर्शित करते हैं।
  $Q = \{\frac{p}{q} : p$ और $q \in I$ और $q \neq 0\}$
- दो परिमेय संख्याओं के मध्य अनंत परिमेय संख्याएँ होती हैं।
- परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण सांत दशमलव रूप में होता है।
- अपरिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण असांत और अनावर्ती होता है।
- $\sqrt[n]{a}$ एक करणी हैं यदि
  (i) a एक धनात्मक परिमेय संख्या है।
  (ii) $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या है।
- करणियों के नियम
  (i) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
  (ii) $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
  (iii) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[m.n]{a^m}$
  जहाँ a, b परिमेय संख्याएँ हैं तथा m, n धनात्मक पूर्णांक हैं।
- जब दो करणियों का गुणनफल एक परिमेय संख्या हो तो उन में से प्रत्येक को, दूसरे का परिमेयकारी गुणक कहते हैं।

प्रायोगिक कार्य (Project Work)

- परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं की अवधारणा को संख्या रेखा के माध्यम से दर्शाना।