अध्याय 5
बहुपद एवं शेषफल प्रमेय
(Polynomials and Remaindar Theorem)

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

यदि $p(x) = x^{100} - 1$, तो $p(1) = 0$

दो व्यंजकों का गुणनफल = ल.स.×म.स.

हम पढ़ेंगे

- वास्तविक संख्याओं पर बहुपद
- बहुपदों की घात
- बहुपदों का योग, व्यवकलन
- बहुपदों का गुणन
- बहुपदों का भाग
- बहुपदों का वैदिक गणित विधि से हल करना तथा उत्तर की जाँच करना
- बहुपदों के गुणनखण्ड
- शेषफल प्रमेय
- बहुपदों के गुणनखण्ड, करने में शेषफल प्रमेय का अनुप्रयोग
- महत्तम समापवर्तक
- लघुत्तम समापवर्त्य

5.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हमने बीजीय व्यंजकों के योग, व्यवकलन, गुणन एवं भाजन का अध्ययन किया है तथा इन बीजीय व्यंजकों का गुणनखण्ड करना भी सीखा है। यहाँ हम गुणनखण्ड में प्रयुक्त होने वाली कुछ बीजीय सर्वसमिकाओं का स्मरण करना चाहेंगे यथा

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$ आदि।

यदि x कोई अनिर्धारित प्रतीक है तब एक विशेष प्रकार का बीजीय व्यंजक $p(x) = a_0+a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $(a^n \neq 0)$ जहाँ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, एक ऐसा व्यंजक हैं, जिसमें एक या एक से अधिक पद है। इस कारण इस बीजीय व्यंजक को बहुपद कहते हैं।

इस पाठ में हम इस प्रकार के व्यंजकों (बहुपदों) से संबंधित अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे। इसके अतिरिक्त शेषफल प्रमेय का उल्लेख कर इन प्रमेयों एवं उपरोक्त लिखित सर्वसमिकाओं के अतिरिक्त अन्य सर्वसमिकाओं के उपयोग से बहुपदों का गुणनखण्ड करना सीखेंगे। साथ-साथ अन्य विधियों के माध्यम से भी बहुपदों में योग, व्यवकलन, गुणन व भाजन, गुणनखण्ड आदि का अध्ययन करेंगे एवं बहुपदों के महत्तम समापवर्तक एवं लघुत्तम समापवर्त्य का अध्ययन भी करेंगे।

5.2 बहुपद (Polynomials)

पिछले पाठ में हम फलनों की अवधारणा से अवगत हो चुके हैं। इस पाठ में हम विशेष प्रकार के फलन जिन्हें

बहुपद कहा जाता है के बारे में अध्ययन करेंगे।

माना $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$, यह x का एक फलन है।

यदि x के स्थान पर किसी वास्तविक संख्या a को प्रतिस्थापित करें, तो हमें एक वास्तविक संख्या p(a) प्राप्त होती है।

उदाहरण के लिए a = 2, –1, आदि लेने पर

$p(2) = 2(2)^2 - 3(2)+4 = 2 \times 4 - 6 + 4 = 12 - 6 = 6$

$p(-1) = 2\ (-1)^2 - 3(-1) + 4 = 2 + 3 + 4 = 9$ इत्यादि।

अत: p(x) एक फलन है जिसका प्रांत (domain) सभी वास्तविक संख्याओं (real numbers) का समुच्चय (set) होता है। यहाँ प्रत्येक पद में x की प्रत्येक घात केवल ऋणेत्तर पूर्णांक (non-negative integer) है और x के प्रत्येक घात का गुणांक एक वास्तविक संख्या है। ऐसे फलन को वास्तविक संख्याओं पर बहुपद कहते हैं। इस प्रकार एक या अधिक पदों वाला बीजीय व्यंजक बहुपद कहलाता है।

अब हम बहुपद की परिभाषा इस प्रकार देंगे

एक चर x वाला बीजीय व्यंजक जिसमें x के घातों के अनेक पद हो अर्थात फलन

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_nx^n$, जहाँ $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं, $a_n \neq 0$ और n एक ऋणेत्तर (non negative) पूर्णांक है, एक बहुपद कहलाता है। यहाँ x चर राशि है इसे अनिर्धारित प्रतीक कहते हैं तथा वास्तविक संख्याओं $a_0, a_1, \dots, a_n$ को बहुपद के गुणांक कहते हैं। यदि $a_0, a_1, \dots, a_n$ सभी पूर्णांक हों तो बहुपद p(x) को पूर्णांकों पर बहुपद कहते हैं और यदि ये परिमेय संख्याएँ हों तो p(x) को परिमेय संख्याओं पर बहुपद कहेंगे।

उदाहरण के लिए

$5x^2 - 6x + 3$ पूर्णांकों पर बहुपद है।

$\frac{3}{4}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x - 1$ परिमेय संख्याओं पर बहुपद है।

और $3x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{3}$ वास्तविक संख्याओं पर बहुपद है।

यदि बहुपद में x के स्थान पर चर y हो तो इसे चर y में बहुपद कहते हैं।

उदाहरण के लिए $5y^2 - 6y + 3$ चर y में बहुपद है।

प्राय: बहुपदों को x के घातों के आरोही क्रम में, या अवरोही क्रम में लिखते हैं। बहुपद को इस प्रकार से लिखने की रीति को, बहुपद के मानक रूप (standard form of polynomial) में लिखना कहते हैं।

उदाहरण के लिए बहुपद $\frac{3}{4}x^3 - \frac{4x^2}{3} + 2x + 1$ मानक रूप में है, जहाँ चर के घातों को अवरोही क्रम में लिखा गया है और बहुपद $1 + 2x - \frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{4}x^3$ भी मानक रूप में है, जहाँ चर के घातों को आरोही क्रम में लिखा गया है परन्तु बहुपद $\frac{3}{4}x^3 + 2x + 1 - \frac{4}{3}x^2$ मानक रूप में नहीं है, क्योंकि चर के घात न तो आरोही क्रम में हैं और न ही अवरोही क्रम में।

बहुपद x^2+2x, में व्यंजक x^2 और $2x$ को बहुपद का पद कहा जाता है। जैसे बहुपद $3y^2+5y + 7$ में तीन पद $3y^2$, $5y$, 7 है इसी प्रकार

क्या आप बहुपद $-x^3+4x^2+7x-2$ के पद बता सकते हैं? इसमें चार पद हैं $-x^3$, $4x^2$, $7x$ और -2 है।

बहुपदों के प्रत्येक पद में वास्तविक संख्याएँ गुणांक कहलाती हैं। जैसे $-x^3+4x^2+7x-2$ में $-x^3$ में x^3 का गुणांक -1, x^2 का गुणांक 4, x का गुणांक 7 और $-2 = -2x^0$ अत: -2, x^0 का गुणांक है। (याद रखे $x^0=1$) क्या आपको x^2-x+7 में x का गुणांक पता है? यह -1 है।

2 भी एक बहुपद है क्योंकि 2 को $2x^0$ द्वारा लिखा जा सकता है। इसी प्रकार 3, -5, 7 आदि भी बहुपद हैं इन्हें अचर बहुपद कहते हैं। ऐसा बहुपद जिसके सभी गुणांक शून्य हों, शून्य बहुपद (zero polynomial) कहलाता है।

उदाहरण के लिए $0x^3-0x + 0$

और $0t^2 + 0t + 0$ आदि शून्य बहुपद है।

अब हम एक अन्य बीजीय व्यंजक जैसे $x + \frac{1}{x}$, $\sqrt{x} + 3$ और $\sqrt[3]{y} + y^2$ को लेते हैं। हमको यह पता है कि $x + \frac{1}{x}$ को $x + x^{-1}$ लिख सकते हैं। यहाँ दूसरे पद x^{-1} का घातांक (exponent) -1 है, जो एक पूर्ण संख्या (या ऋणेत्तर पूर्णांक) नहीं है। इसलिए यह बीजीय व्यंजक बहुपद नहीं है। इसी प्रकार $\sqrt{x} + 3$ को $x^{\frac{1}{2}} + 3$ लिख सकते हैं। यहाँ x का घातांक $\frac{1}{2}$ है जो एक पूर्ण संख्या नहीं है। तो क्या $\sqrt{x} + 3$ एक बहुपद है? नहीं, यह भी बहुपद नही होगा। पुन: $\sqrt[3]{y} + y^2$ के बारे में क्या कहा जा सकता है? यह भी बहुपद नहीं है (क्यों?)।

यदि बहुपद में x चर है तब बहुपदों को $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$... आदि से दर्शाते हैं। उदाहरण के लिए

$p(x) = 2x^2+5x-4$

$q(x) = x^3-1$ इसी प्रकार अन्य चरों y, u, आदि में बहुपदों को

$r(y) = y^3+y+1$

एवं $s(u) = 2-u-u^2+6u^5$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

किसी बहुपद में परिमिततः कितने भी पद हो सकते हैं। उदाहरणार्थ $x^{150}+x^{149}+x^{148}+ \ldots +x^2+x+1$ एक बहुपद है। जिसमें 151 पद है।

बहुपद $2x$, 2, $25x^3$, $-5x^2$, y और u^4 में हम देखते हैं कि हर बहुपद में एक ही पद है। जिन बहुपदों में एक पद होता है उसे एकपदी (monomial) कहते हैं। (`mono' अर्थात 'एक') अब इन बहुपदों को ध्यान से देखिए

$p(x) = x + 1$, $\quad q(x) = x^2-x$, $\quad r(y) = y^{30}+1$, $\quad t(u)= u^{43}-u^2$

इन सभी बहुपदों में प्रत्येक में कितने पद हैं? प्रत्येक बहुपद में दो पद हैं। जिन बहुपद में दो पद होते हैं उसे द्विपदीय (binomials) कहते हैं। ('bi' अर्थात 'दो')

इसी प्रकार जिन बहुपदों में तीन पद होते हैं। उन्हें त्रिपदीय (trinomials) कहते हैं। ('tri' अर्थात 'तीन')

उदाहरण के लिए

$p(x) = x + x^2 + 2$, $\quad q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$ $\quad r(u) = u + u^2-2$ सभी त्रिपदीय है।

5.3 बहुपदों की घात (Degree of polynomials)

अब बहुपद $p(x) = 3x^7- 4x^6 + x + 9$ को देखिए। इसमें x का उच्चतम घात वाला पद कौन सा है? यह है $3x^7$, इस पद में x की घात 7 है। उसी प्रकार बहुपद $q(y) = 5y^6- 4y^2- 6$ में उच्चतम घात वाले पद $5y^6$ में y की घात 6 है।

इस प्रकार किसी बहुपद में चर के उच्चतम घात वाले पद के घातांक को उस **बहुपद की घात** (degree of the polynomial) कहते हैं। किसी बहुपद $p(x)$ की घात को घात $(p(x))$ {degree $p(x)$} द्वारा लिखा जाता है। उदाहरणार्थ बहुपदों $p(x) = x^7- 3x^5 + 4$, $f(x) = 5y^2- 3y + 2$, $r(x) = 2+3x^2+4x^3$ में घात $p(x) = 7$, घात $f(x) = 2$, घात $r(x) = 3$ है।

घातों के आधार पर बहुपदों का वर्गीकरण किया जा सकता है।

(i) रेखीय बहुपद : घात एक वाले बहुपद को रेखीय बहुपद कहते हैं।

जैसे : $3x + 5$, $2x - 3$, $x - 7$ आदि।

(ii) द्विघात बहुपद : घात दो वाले बहुपद को द्विघात बहुपद कहते हैं।

जैसे : $3x^2 - 5x + 2$, $5y^2 - 7y + 1$, $z^2 - 4$ आदि।

द्विघात बहुपद का सामान्य रूप $ax^2 + bx + c$ होता है जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$

(iii) त्रिघात बहुपद : घात तीन वाले बहुपद को त्रिघात बहुपद कहते हैं।

जैसे : $2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$, $3y^3 - 5y + 8$, $y^3 - 8$ आदि।

त्रिघात बहुपद का सामान्य रूप $ax^3 + bx^2 + cx + d$ होता है, जहाँ a, b, c, d वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$

(iv) चतुर्घात बहुपद : घात चार वाले बहुपद को चतुर्घात बहुपद कहते हैं।

जैसे : $3x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 5x + 9$, $x^4 + 2x^3 - x + 5$ आदि।

चतुर्घात बहुपद का सामान्य रूप $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ होता है। जहाँ a, b, c, d, e वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$

> **टिप्पणी :** (1) अशून्य अचर बहुपद की घात शून्य होती है।
> (2) शून्य बहुपद की घात परिभाषित नहीं की जाती है।

उदाहरण 1. निम्नलिखित बहुपदों में x^3 के गुणांक (coefficient) को लिखिए

(i) $3x^3 + 2x^2$ (ii) $5x^6 + x^3 + 1$ (iii) $4x^2 + 5x + 6$

हल : (i) $3x^3$ में x^3 का गुणांक 3 है।

(ii) x^3 में x^3 का गुणांक 1 है।

(iii) x^3 वाले पद नहीं है इसलिए x^3 का गुणांक शून्य है।

उदाहरण 2. निम्नलिखित बहुपदों के घात (degree) लिखिए

(i) $3x^7 + 2x^4 + 7$ (ii) $3t + \sqrt{11}$

हल : (i) चर की उच्चतम घात 7 है अत: बहुपद की घात 7 है।

(ii) चर की उच्चतम घात 1 है अत: बहुपद की घात 1 है।

उदाहरण 3. $t = a, t = 2$ पर बहुपद $4t^4+5t^3 - t^2 + 6$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: माना $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$ तब

$$p(a) = 4a^4 + 5a^3 - a^2 + 6$$

$$p(2) = 4(2)^4 + 5(2)^3 - 2^2 + 6$$

$$= 64 + 40 - 4 + 6$$

$= 106$ उत्तर

प्रश्नावली 5.1

1. निम्नलिखित फलनों में कौन-कौन से बहुपद है?

(i) $4x^2 - 3x + 2$ (v) $x + 2\sqrt{x}$

(ii) $u^3 - u^2 - \sqrt{2}$ (vi) $y^4 + y + 5$

(iii) $\sqrt{2}\sqrt{t} + \sqrt{3}\,t$ (vii) $5x^3 - 2x^2 + 3\sqrt{x}$

(iv) $\sqrt{2}\,y^3 + \sqrt{3}y$ (viii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

2. निम्नलिखित बहुपदों को एकपदी, द्विपदी और त्रिपदी में वर्गीकृत कीजिए?

(i) y^2 (v) $y + y^2 + 4$

(ii) $m^2 + 8m$ (vi) 7

(iii) $7u^6 + 12u$ (vii) $1 + x$

(vi) $3t$ (vii) $x - x^3$

3. निम्नलिखित बहुपदों में x^2 के गुणांक (coefficient) लिखिए?

(i) $2 + x^2 + x$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$

(ii) $2 - x^2 + x^3$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

4. निम्नलिखित बहुपदों के घात (degree) ज्ञात कीजिए?

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (iv) $5t - \sqrt{7}$

(ii) $4 - y^2$ (v) $x^5 - x^4 + 3$

(iii) 3 (vi) $2 - y^2 - y^3 + 2y^8$

5. बहुपद $5x - 4x^2 + 3$ का मान ज्ञात कीजिए, जब

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$, (iii) $x = 2$

6. निम्नलिखित बहुपदों को रेखीय, द्विघात, त्रिघात बहुपदों में वर्गीकृत कीजिए?

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $x + x^2 + 3$

(iv) $1 + 3y$ (v) $3u$ (vi) $7x^3$

5.4 बहुपदों का योग एवं अन्तर (व्यवकलन) (Sum and difference of polynomials)

स्मरण कीजिए कि दो बीजीय व्यंजकों का योग एवं व्यवकलन सदृश (like) (समान) पदों को उनके चिह्नों सहित एक साथ लेकर ज्ञात करते हैं। इसी प्रकार, दो बहुपदों का योग एवं व्यवकलन भी चिह्नों सहित सदृश घातों को एकत्रित कर और गुणांकों का योग एवं व्यवकलन कर, ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 4. यदि $p(x) = x^4-3x^3+2x + 6$ और $q(x) = x^3-3x+2$ हैं तो $p(x) + q(x)$ तथा $p(x) - q(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{aligned}
p(x) + q(x) &= (x^4-3x^3+2x+6) + (x^3-3x+2) \\
&= x^4 + (-3x^3+x^3) + (2x-3x) + (6+2) \\
&= x^4 + (-3+1)x^3 + (2-3)x + 8 \\
&= x^4-2x^3-x + 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x)-q(x) &= (x^4-3x^3+2x+ 6)-(x^3-3x+2) \\
&= x^4-3x^3+2x + 6 -x^3+3x-2 \\
&= x^4 +(-3x^3-x^3) + (2x+3x) + (6-2) \\
&= x^4+(-3-1)x^3 + (2+3) x + 4 \\
&= x^4 - 4x^3 + 5x + 4
\end{aligned}$$

सुविधा के लिए ऊपर की संक्रियाओं को, निम्नलिखित रूप में लिखकर भी हल कर सकते हैं।

$$\begin{array}{rl}
p(x) = & x^4-3x^3+2x+6 \\
+\,q(x) = & +\quad x^3-3x+2 \\ \hline
p(x)+q(x) = & x^4-2x^3-x+8 \\ \hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
p(x) = & x^4-3x^3+2x+6 \\
-\,q(x) = & \underset{-}{} \; x^3 \underset{+}{-} 3x \underset{-}{+} 2 \\ \hline
p(x)-q(x) = & x^4-4x^3+5x+4 \\ \hline
\end{array}$$

> **टिप्पणी :** यदि बहुपदों के योगफल या अन्तर की घात ज्ञात करना हो तो हम योगफल या अन्तर बहुपद में सबसे बड़े घात वाले पद के घातांक को योगफल या अन्तर की घात कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण 4 में $\{p(x) + q(x)\}$ की घात 4 है एवं $\{p(x)-q(x)\}$ की घात 4 है।

प्रश्नावली 5.2

1. निम्नलिखित बहुपद समूहों का योगफल ज्ञात कीजिए एवं प्रत्येक योगफल की घात भी ज्ञात कीजिए।

(i) x^3-5x^2+x+2 और x^3-3x^2+2x+1

(ii) $3x^2+5x-2$ और $-3x^2-5x+6$

(iii) y^6-3y^4 और $y^4+y^3+2y^2-6$

(iv) t^2+t-7 और t^3+t^2+3t+4

(v) $3u^2-3u+6$, $-u^2+4u+3$ और $-2u^2+4$

(vi) x^3-3x^2+4x-4 और $x^3-3x^2+4x-12$

(vii) $5a^2+10a-2$, a^2+2a-1 और $6a-4$

(viii) x^3+3x^2+3x-7 और x^3-3x^2+3x+7

2. निम्नलिखित में पहले बहुपद में से दूसरे बहुपद को घटाइए और अन्तर ज्ञात कीजिए एवं प्रत्येक अन्तर की घात ज्ञात कीजिए।

(i)	x^3-3x^2+6,	x^2-x+4
(ii)	$u^7-3u^6+4u^2+2$,	u^6-u-4
(iii)	y^3-3y^2+y+2,	y^3+2y+1
(iv)	t^4-3t^3+2t+6,	t^4-3t^3-6t+2
(v)	x^3+3x^2+3x+7,	x^3-3x^2+7
(vi)	$5x^4+x^2+1$,	$3x^4+x^2$
(vii)	$14y^5+10y^4+6y^3+y^2+5y+3$,	$2y^3+1$
(viii)	$9x^3+3x^2+1-5x$,	$3x-1$.

3. u^4+3u^3+2u+6 और u^4-3u^2+6u+2 के योगफल में से $4u^3-3u+4$ घटाइए और घात ज्ञात कीजिए?

4. x^4-x^2+x+2 में क्या जोड़े कि योगफल x^2+x+4 प्राप्त हो जाए?

5. x^3-2x^2+4x+1 में से क्या घटाए कि अन्तर 1 प्राप्त हो?

6. $p(u)+q(u)$ तथा $p(u)-q(u)$ ज्ञात कीजिए जबकि $p(u)=u^3-u^2+2$ और $q(u)=u+1$

5.5 बहुपदों का गुणनफल (Product of Polynomials) :

दो बहुपदों का गुणनफल ज्ञात करने के लिये बीजीय व्यंजकों के गुणनफल से संबंध वितरण नियम लगाया जाता है तथा बाद में योग एवं व्यवकलन हेतु समान घातों वाले पदों का समूहन किया जाता है। इसे हम निम्न उदाहरण द्वारा आसानी से समझ सकते हैं।

उदाहरण 5. बहुपदों x^2-3x+2 एवं x^3-6x^2+x+1 का गुणनफल ज्ञात कीजिए?

हल : $(x^2-3x+2)\ (x^3-6x^2+x+1)$

$= x^2(x^3-6x^2+x+1)\ -3x(x^3-6x^2+x+1)+2(x^3-6x^2+x+1)$ (वितरण नियम)

$= x^5-6x^4+x^3+x^2-3x^4+18x^3-3x^2-3x+2x^3-12x^2\ +2x+2$

$= x^5+(-6x^4-3x^4)+(x^3+18x^3+2x^3)+(x^2-3x^2-12x^2)+(-3x+2x)+2$ (समूहन)

$=x^5-(6+3)x^4+(1+18+2)x^3+\ (1-3-12)x^2+(-3+2)x+2$ (वितरण नियम)

$= x^5-9x^4+21x^3-14x^2-x+2$

टिप्पणी : उपरोक्तानुसार दो बहुपदों के गुणनफल की विधि पूरी तरह स्पष्ट हो जाती है। फिर भी सुविधा के लिये हम उक्त प्रश्न को निम्नानुसार लिखकर गुणनफल प्राप्त कर सकते हैं।

$$\begin{array}{l}
\quad x^3-6x^2+x+1 \\
\quad \times \quad x^2-3x+2 \\
\hline
x^5-6x^4+x^3+x^2 \\
\quad -3x^4+18x^3-3x^2-3x \\
\qquad\qquad 2x^3-12x^2+2x+2 \\
\hline
\quad x^5-9x^4+21x^3-14x^2-x+2 \\
\hline
\end{array}$$

(सदृश पदों को एक दूसरे के ऊपर नीचे लिखें)

5.5.1 बहुपदों के गुणन की एक अन्य विधि

दो बहुपदों के गुणनफल के लिये हम यहाँ एक अन्य विधि का प्रयोग करना चाहेंगे, जिसमें गुणनफल और आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। यह विधि सूत्र ''ऊर्ध्व तिर्यक'' के प्रयोग पर आधारित है। इस विधि से अंकों के गुणन की तरह बहुपदों के गुणन भी सरलता से किये जा सकते हैं। इस विधि को निम्न उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

टिप्पणी : दो, तीन या अधिक अंकीय संख्याओं के बीजांक का निर्धारण निम्नानुसार किया जाता है। जैसे 12 का बीजांक = 3(1+2), 89 का बीजांक = 17 (8+9), 17 का बीजांक 8 अत: 89 का बीजांक = 8 (1+7) होगा। 125 का बीजांक = 8(1+2+5), 325 का बीजांक = 10(3+2+5) = 1 (1+0) होगा।

उदाहरण 6. बहुपद $3y+1$ को बहुपद $2y+4$ से गुणा कीजिए?

हल : (सूत्र ऊर्ध्व-तिर्यक)

$$\begin{array}{r} 3y + 1 \\ \times\, 2y + 4 \\ \hline 6y^2 + 14y + 4 \end{array}$$

(1) प्रथम स्तंभ :

$$\begin{array}{r} +1 \\ +4 \\ \hline +4 \\ \hline \end{array}$$

↑ ऊर्ध्व गुणा

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ :

$$\begin{array}{l} 3y + 1 \\ 2y + 4 \\ \hline (3y \times 4) + (2y \times 1) \\ = 12y + 2y \\ = 14y \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

(3) द्वितीय स्तंभ :

$$\begin{array}{r} 3y \\ \times\, 2y \\ \hline 6y^2 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्व गुणा

उत्तर की जाँच : सूत्र

$$\left(\begin{array}{c}\text{प्रथम व्यंजक के} \\ \text{गुणांकों का बीजांक}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c}\text{द्वितीय व्यंजक के} \\ \text{गुणांकों का बीजांक}\end{array}\right) = \begin{array}{c}\text{उत्तर के गुणांकों} \\ \text{का बीजांक}\end{array}$$

यहाँ प्रथम बहुपद के गुणांकों का बीजांक = 4, द्वितीय बहुपद के गुणांकों का बीजांक = 6 एवं उत्तर के बहुपद के गुणांकों का बीजांक = 24 का बीजांक = 6

अत: बाये पक्ष का बीजांक = 24 का बीजांक = 6

इसी प्रकार दाएं पक्ष का बीजांक = 24 का बीजांक = 6

बाया पक्ष = दाया पक्ष। अत: उत्तर की पुष्टि होती है।

उदाहरण 7. बहुपदों x^2-3x+2 और $6x^2+x+1$ का गुणनफल ऊर्ध्व-तिर्यक विधि से ज्ञात कीजिए?

हल :

$$\begin{array}{r} x^2-3x+2 \\ \times \quad 6x^2+x+1 \\ \hline 6x^4-17x^3+10x^2-x+2 \end{array}$$

(1) प्रथम स्तंभ :

$$\begin{array}{r} +2 \\ +1 \\ \hline +2 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्व गुणा

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ :

$$\begin{array}{c} -3x + 2 \\ x + 1 \\ \hline (-3x \times 1) + (2 \times x) \\ = -3x + 2x \\ = -x \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

(3) प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ :

$$\begin{array}{c} x^2-3x + 2 \\ 6x^2+x + 1 \\ \hline (x^2\times 1)+(6x^2\times 2) + (-3x \times x) \\ = x^2+12x^2-3x^2 \\ = 10x^2 \end{array}$$

चित्रानुसार गुणा कर जोड़िए

(4) द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ :

$$\begin{array}{c} x^2-3x \\ 6x^2 + x \\ \hline (x^2 \times x) + [6x^2 \times (-3x)] \\ x^3 - 18x^3 \\ = -17x^3 \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

(5) तृतीय स्तंभ :

$$\begin{array}{c} x^2 \\ 6x^2 \\ \hline 6x^4 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्व गुणा

उदाहरण 8. $p(y).q\ (y)$ ज्ञात कीजिए जबकि

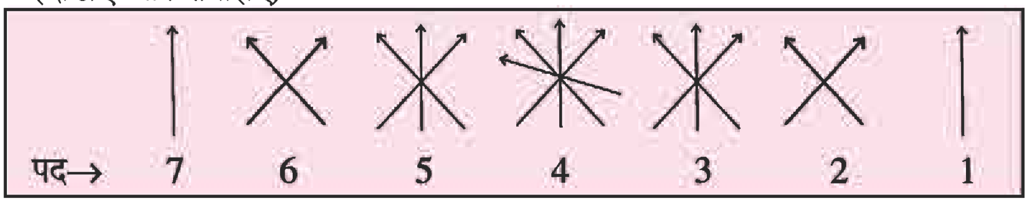
$p(y) = y^2+3y+1$ और $q(y) = y^3-y^2+4$

हल : y^2+3y+1 और y^3-y^2+4 इन बहुपदों को निम्नलिखित अनुसार घात के घटते क्रम में लिखेंगे। जिस घात वाले पद का कोई गुणांक न हो वहां गुणांक 0 (शून्य) लिखेंगे।

$$\begin{array}{r} 0y^3+y^2+3y+1 \\ y^3-y^2+0y+4 \\ \hline 0+y^5+2y^4-2y^3+3y^2+12y+4 \end{array}$$

निम्नलिखित संकेतों की सहायता से प्रश्न हल करेंगे

(देखिए और समझिए)



इकाई की ओर से

(1) प्रथम स्तंभ :

$$\begin{array}{r} +1 \\ +4 \\ \hline +4 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्व गुणा

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ :

$$\begin{array}{r} 3y+1 \\ 0y+4 \\ \hline 12y+0 = 12y \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

(3) प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ :

$$\begin{array}{r} y^2 + 3y + 1 \\ -y^2 + 0y + 4 \\ \hline 4y^2 - y^2 + 0 = 3y^2 \end{array}$$

चित्रानुसार गुणा कर जोड़िए

(4) प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ स्तंभ :

$$\begin{array}{r} 0y^3+y^2+3y + 1 \\ y^3-y^2+0y + 4 \\ \hline 0y^3+y^3+0y^3-3y^3 = -2y^3 \end{array}$$

बाहर-बाहर का तिर्यक गुणा तथा भीतर-भीतर का तिर्यक गुणा कर जोड़िए।

(5) इकाई की ओर से प्रथम स्तंभ छोड़ें :

$$\begin{array}{r} 0y^3 + y^2 + 3y \\ y^3 - y^2 - 0y \\ \hline 0 + 3y^4 - y^4 = 2y^4 \end{array}$$

चित्रानुसार गुणा कर जोड़िए

(6) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ छोड़े अत: तृतीय, चतुर्थ स्तंभ लिया :

$$\begin{array}{r} 0y^3 + y^2 \\ y^3 - y^2 \\ \hline 0 + y^5 = y^5 \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

(7) चतुर्थ स्तंभ :

$$\begin{array}{c} 0y^3 \\ y^3 \\ \hline 0y^6 = 0 \end{array}$$

↑ ऊर्ध्व गुणा

टिप्पणी :

1. सूत्र ऊर्ध्व-तिर्यक द्वारा प्रश्न का हल बायें से दायें या दायें से बायें किया जा सकता है।
2. प्रश्न का हल मौखिक गणना करते हुए सीधे एक पंक्ति में लिखा जा सकता है। प्रक्रिया लिखने की आवश्यकता नहीं है।
3. किन्हीं दो बहुपदों के गुणनफल की घात, गुणनफल में उच्चतम घात वाले पद का घातांक होती है।

प्रश्नावली 5.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक में $p(x)$ को $q(x)$ से गुणा कीजिए और इस गुणनफल का घात ज्ञात कीजिए:

(i) $p(x) = x + 3$ और $q(x) = x-2$

(ii) $p(x) = 7x + 7$ और $q(x) = 3x-6$

(iii) $p(x) = x^2 - 4x + 4$ और $q(x) = x-2$

(iv) $p(x) = x^2 + 3x + 2$ और $q(x) = x^2+3x+1$

(v) $p(x) = 4x^2 + 9x-1$ और $q(x) = 3x-7$

(vi) $p(x) = x^3+4x^2+3x-2$ और $q(x) = 7x^3+9x$

(vii) $p(x) = x^2-2x + 12$ और $q(x) = 9x^2-11$

2. यदि $p(y) = y^2-2y+1$ और $q(y) = y^3-3y^2+2y-1$ तो $p(y)q(y)$ का मान ज्ञात कर घात ज्ञात कीजिए।

3. $p(u)\ q(u)$ ज्ञात कीजिए जबकि $p(u) = u^2+3u + 1$ और $q(u) = u^3-u^2+4$

5.6 बहुपदों का भाग (Division of polynomials)

बहुपदों में भाग को समझने के लिये हम पूर्णांकों के विभाजन की प्रक्रिया का स्मरण करना चाहेंगे। पूर्णांकों के भाग में दो अलग-अलग स्थितियां देखने में आती है। पहली स्थिति वह है जहाँ एक पूर्णांक दूसरे पूर्णांक से पूरी तरह विभाजित हो जाती हैं। उदाहरण के लिए, जब हम 15 को 3 से भाग देते है, तो भागफल 5 प्राप्त होता है। वास्तव में, हम केवल $15 \div 3$ को 5 के रूप में सरल कर रहे होते हैं। दूसरी स्थिति उन पूर्णांकों के संदर्भ में देखने को मिलती है, जहाँ एक पूर्णांक दूसरे से पूरी तरह विभाजित नहीं होती और कुछ शेष प्राप्त होता है। उदाहरणतः 15 को 4 से पूरी तरह विभाजित नहीं किया जा सकता है। 15 को 4 से भाग देने पर भागफल 3 और शेष 3 प्राप्त होता है। इन दोनों ही स्थितियों को हम क्रमशः निम्नानुसार लिख सकते हैं।

$$15 = 5 \times 3 + 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

एवं

$$15 = 4 \times 3 + 3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

(1) में 15 भाज्य, 3 भाजक, 5 भागफल तथा 0 शेषफल कहलाते हैं।

(2) में 15 भाज्य, 4 भाजक, 3 भागफल तथा 3 शेषफल कहलाते हैं।

प्रथम स्थिति में 0 शेष है, तब हम कहते हैं कि 3, 15 का एक गुणनखण्ड है। लेकिन दूसरी स्थिति में 4 को 15 का गुणनखण्ड नहीं कहा जा सकता। यहाँ ध्यान देना आवश्यक है कि भाजक सदैव अशून्य होना चाहिए क्योंकि शून्य से भाजन परिभाषित नहीं होता है।

इसी प्रकार अब मान लीजिए कि $p(x)$ और $g(x)$ कोई दो बहुपद हैं जहां $g(x) \neq 0$ तब यदि हम ऐसे दो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ इस प्रकार ज्ञात कर सकें कि

$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x)$ जहाँ $r(x) = 0$ या घात $r(x) <$ घात $g(x)$

तब हम कहते हैं कि $p(x)$ को $g(x)$ से भाग देने पर $q(x)$ भागफल और $r(x)$ शेषफल प्राप्त होता है। यदि शेषफल $r(x)$ शून्य हो, तो हम कहते हैं कि भाजक $g(x)$ भाज्य $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है।

एक बहुपद को, उससे कम घात वाले बहुपद से भाग देने की विधि को हम इन उदाहरणों द्वारा आसानी से समझ सकते हैं।

5.6.1 बहुपद को एकपदी से भाग देना

उदाहरण 9. $34x^3 - 17x^2 + 51x$ को $17x$ से भाग दीजिए

हल :

$$17x\,\overline{)\,34x^3 - 17x^2 + 51x\,}\,(2x^2 - x + 3$$
$$\underline{-\,34x^3}$$
$$-17x^2$$
$$\underline{\mp 17x^2}$$
$$51x$$
$$\underline{-\,51x}$$
$$0$$

यहाँ बहुपद $34x^3-17x^2+51$, $17x$ से पूर्णतः विभाजित हो जाता है अतः $17x$ दिये गये बहुपद का गुणनखण्ड है एवं इसे हम $34x^3-17x^2+51 = (2x^2-x+3) \times 17x + 0$ द्वारा लिख सकते हैं।

5.6.2 बहुपद को द्विपदी से भाग देना

उदाहरण 10. $-14x^2-13x+12$ को $2x+3$ से भाग दीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{r l}
 & -7x + 4 \\
2x+3 \,\big) & \overline{-14x^2-13x+12} \\
 & \underline{\overset{+}{-}14x^2 \overset{+}{-} 21x} \\
 & \quad\quad 8x + 12 \\
 & \quad\quad \underline{\overset{-}{}8x \pm 12} \\
 & \quad\quad\quad 0
\end{array}
$$

उदाहरण 11. बहुपद $p(x)$ को बहुपद $g(x)$ से भाग दीजिए, जबकि $p(x) = x^4+1$ और $g(x) = x+1$

हल :

$$
\begin{array}{r l}
 & x^3-x^2+x-1 \\
x+1 \,\big) & \overline{x^4 + 1} \\
 & \underline{\overset{-}{}x^4 \pm x^3} \\
 & \quad -x^3+1 \\
 & \underline{\mp x^3 \mp x^2} \\
 & \quad\quad x^2+1 \\
 & \quad\quad \underline{\overset{-}{}x^2 \pm x} \\
 & \quad\quad -x + 1 \\
 & \quad\quad \underline{\overset{+}{-} x \overset{+}{-} 1} \\
 & \quad\quad\quad 2
\end{array}
$$

हम देखते हैं कि भाजक $g(x)$ की घात, भाज्य $p(x)$ के घात से कम है।

यहाँ भागफल $q(x) = x^3-x^2+x-1$

और शेषफल $r(x) = 2$ है।

हम लिख सकते हैं

$x^4+1 = (x^3-x^2+x-1) \times (x+1)+2$

अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

टिप्पणी : भाग देने की यह प्रक्रिया तब समाप्त हो जाती है जबकि या तो शेषफल शून्य (0) हो जाता है या शेषफल का घात भाजक के घात से कम हो जाता है। इस उदाहरण में शेषफल $r(x) = 2$ शून्य नहीं है। अत: भाजक $x+1$, $p(x) = x^4+1$ का गुणनखण्ड नहीं होगा।

5.6.3 बहुपद का त्रिपदी से भाग

उदाहरण 12. $p(y)$ को $g(y)$ से भाग दीजिए, जबकि $p(y)=y^3-3y^2-y+3$ और $g(y)=y^2-4y+3$

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & y + 1 \\
y^2-4y+3 & y^3-3y^2-y+3 \\
 & \underline{\overset{-}{}\; \underset{+}{y^3} \underset{+}{-} 4y^2 \underset{-}{+} 3y} \\
 & y^2-4y+3 \\
 & \underline{\overset{-}{}\; \underset{+}{y^2} \underset{+}{-} 4y \underset{-}{+} 3} \\
 & 0
\end{array}
$$

5.6.4 बहुपद को बहुपद से भाग देना

उदाहरण 13. बहुपद $3y^4-y^3+12y^2+2$ को $3y^2-1$ से भाग दीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{r|l}
 & y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3} \\
3y^2-1 & 3y^4-y^3+12y^2+2 \\
 & \underline{\underset{-}{3y^4} \qquad \underset{+}{-}y^2} \\
 & -y^3+13y^2+2 \\
 & \underline{\underset{+}{-}y^3 \qquad \underset{-}{+}\frac{1}{3}y} \\
 & 13y^2 - \frac{1}{3}y + 2 \\
 & \underline{\underset{-}{13y^2} \qquad \underset{+}{-}\frac{13}{3}} \\
 & -\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}
\end{array}
$$

- y में अनुपस्थित पद के लिए खाली (रिक्त) स्थान छोड़कर। समान घात के पदों को एक-दूसरे के नीचे लिखना महत्वपूर्ण है, भले ही कुछ स्थान खाली क्यों न छोड़ना पड़े, जिससे योग प्रक्रिया में त्रुटि होने से बचा जा सकता है
- जब तक शेषफल की घात भाजक की घात से छोटी नहीं होती, भाग की प्रक्रिया करते रहना चाहिये
- शेषफल की घात भाजक की घात के बराबर है; भाग की प्रक्रिया करते रहना चाहिये
- शेषफल की घात भाजक की घात से छोटी है आगे भाग की प्रक्रिया संभव नहीं है

इस प्रकार, $3y^4-y^3+12y^2+2$ को $3y^2-1$ से भाग देने पर भागफल $y^2-\frac{1}{3}y+\frac{13}{3}$ और शेष $-\frac{1}{3}y+\frac{19}{3}$ प्राप्त होता है एवं हम इसे निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$3y^4-y^3+12y^2+2 = (3y^2-1)\left(y^2-\frac{1}{3}y+\frac{13}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}y+\frac{19}{3}\right)$$

(अर्थात भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल)

5.7 बहुपदों के भाग के लिये एक अन्य विधि (Another method for division of polynomials)

बहुपदों में भाजन की क्रिया हेतु हम एक अन्य विधि का अध्ययन करना चाहेंगे यह विधि "परावर्त्य विधि" के नाम से जानी जाती है। इस विधि से संख्याओं में भाग की तरह बहुपदों के भाग भी सुगमता से किये जा सकते हैं। इस विधि को उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 14. $x^4+2x^3-3x^2+x-1$ को $x-2$ से भाग दीजिए?

हल : (विधि परावर्त्य)

$(x^4+2x^3-3x^2+x-1) \div (x-2)$

भाजक) भाज्य

$x-2$) $x^4+2x^3-3x^2+x-1$

भाजक $x-2$	+1	+2	–3	+1	–1
संशोधित भाजक +2		+2	+8	+10	+ 22
	+1	+4	+5	+11	21

चरण (1) सर्वप्रथम संशोधित भाजक का निर्माण करें जिसे अचर पद का चिह्न बदल कर ज्ञात करते हैं।

चरण (2) भाज्य के गुणांक चिह्न सहित लिखे।

चरण (3) संशोधित भाजक (+2) है जिसमें एक अंक है इसलिए भाज्य की इकाई की ओर से एक अंक छोड़कर खड़ी रेखा (विभाजन रेखा) खींचेंगे। यहाँ -1 के बायें विभाजन रेखा खींचेंगे।

चरण (4) भाज्य का बायाँ प्रथम अंक उत्तर का प्रथम अंक है। नीचे उत्तर में लिखें।

चरण (5) इस प्रथम अंक का गुणा संशोधित भाजक से कर गुणनफल को भाज्य के बायें से द्वितीय अंक के नीचे लिखेंगे।

चरण (6) + 2

+ 2

+ 4 यह उत्तर का द्वितीय अंक है। इस + 4 का गुणा संशोधित भाजक +2 से करेंगे तथा अगले अंक के नीचे लिखेंगे। $(+4) \times (+2) = 8$ को -3 के नीचे लिखेंगे।

चरण (7) अब $-3+8 = 5$ उत्तर में नीचे लिखेंगे।

चरण (8) $(+5)\times(+2) = +10$ अगले अंक +1 के नीचे लिखेंगे। दोनों का जोड़ $+1+10 = 11$ नीचे उत्तर में लिखेंगे।

चरण (9) $+11\times(+2) = 22$ को विभाजन रेखा के बाद -1 के नीचे लिखेंगे। अब $-1+22 = 21$

चरण (10) दोनों खड़ी रेखाओं के बीच का हिस्सा भागफल को निरूपित करता है। अर्थात $+1, +4, +5, +11$ भागफल के गुणांक हैं अत: $x^3+4x^2+5x+11$ भागफल प्राप्त होता है।

चरण (11) विभाजन रेखा के बाद शेषफल 21 है।

उत्तर की जाँच :

भाज्य के गुणांकों की बीजांक = |भाजक के गुणांकों का बीजांक| × |भागफल के गुणांकों का बीजांक| + शेषफल का बीजांक

यहाँ वॉ.प. $= 1+2-3+1-1 = 0$

एवं दॉ.प. $= (-1\times3)+3$

$= -3+3 = 0$

अत: वॉ.प. = दॅ.प.

अत: उत्तर की पुष्टि होती है।

उदाहरण 15. $4x^3-5x-9$ को $2x+1$ से भाग दीजिए?

हल :

भाजक	भाज्य	भाज्य घात के घटते क्रम में
$2x+1$	$4x^3-5x-9$	$4x^3+0x^2-5x-9$

भाजक $2x+1$ में 2 का भाग देकर x का गुणांक 1 कर लेंगे क्योंकि इस विधि में भाजक में चर की अधिकतम घात वाले पद का गुणांक 1 (एक) होना चाहिए।

अत: $\frac{2x+1}{2} = x+\frac{1}{2}$

नया भाजक $x+\frac{1}{2}$ भाज्य के गुणांक चिह्न सहित घात के घटते क्रम में

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +4 & +0 & -5 & -9 \\ \text{संशोधित भाजक } -\frac{1}{2} & & -2 & +1 & 2 \\ \hline & +4 & -2 & -4 & -7 \end{array}$$

(1) संशोधित भाजक का निर्माण करें।

(2) उत्तर का प्रथम अंक + 4

(3) संशोधित भाजक × उत्तर का प्रथम अंक $-\frac{1}{2}\times4 = -2$ को शून्य के नीचे लिखेंगे।

(4) $+0-2 = -2$ उत्तर का द्वितीय अंक

(5) $-\frac{1}{2} \times (-2) = 1$ को अगले बायें अंक -5 के नीचे लिखेंगे।

(6) $-5 + 1 = -4$ उत्तर का तीसरा अंक

(7) संशोधित भाजक $\times$ उत्तर का तीसरा अंक

$-\frac{1}{2} \times -4 = 2$ का विभाजन रेखा के बाद -9 के नीचे लिखेंगे।

(8) $-9 + 2 = -7$ शेषफल है।

(9) $+4, -2, -4$ भागफल में 2 का भाग देंगे क्योंकि भाजक में 2 का भाग दिया है। अत: $+2, -1, -2$ द्वारा भागफल प्राप्त होगा।

अर्थात $\frac{1}{2}\ (+4 -2\ \ -4) = 2 -1 -2$

अत: भागफल $2x^2 - x - 2$ होगा एवं शेषफल -7 होगा।

उदाहरण 16. $p(x)$ को $g(x)$ से भाग दीजिए जबकि $p(x) = x^4 + 1$ और $g(x) = x+1$

हल :

भाजक	भाज्य
$x+1$	x^4+1

(1) भाज्य x^4+1 को घात के घटते क्रम में लिखेंगे जो घात इसमें नहीं है उनके गुणांक शून्य (0) लिखेंगे। भाग देने की प्रक्रिया पूर्ववत् है। देखिए और समझिए

भाजक	भाज्य
$x+1$	$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

भाजक $x+1$	भाज्य के पद गुणांक चिह्न सहित				
	x^4	x^3	x^2	x	
	$+1$	$+0$	$+0$	$+0$	$+1$
संशोधित -1 भाजक		-1	$+1$	-1	$+1$
	$+1$	-1	$+1$	-1	$+2$

भागफल $= x^3 - x^2 + x - 1$

शेषफल $= 2$

उत्तर की जाँच :

भाज्य के गुणांकों का बीजांक $=$ | भाजक के गुणांकों का बीजांक $\times$ भागफल के गुणांक का बीजांक | $+$ शेषफल का बीजांक

यहाँ वाम पक्ष $= 2$ एवं

दायां पक्ष $= (2 \times 0) + 2 = 2$

$2 = 2$ दोनों बीजांक बराबर है अत: उत्तर सही है।

प्रश्नावली 5.4

1. भाग दीजिए

(i) $-3x^3$ को x^2 से

(ii) $x+2x^2+3x^3$ को $2x$ से

(iii) $3y^3+15y^2+12y$ को $3y$ से

(iv) $4q^3-10q^2+5q$ को $2q$ से

(v) $5x^3+3x^2+x$ को $2x$ से

(vi) $5z^3-6z^2+7z$ को $2z$ से

(vii) $-4p^3+4p^2+p$ को $2p$ से

(viii) $8y^3+16y^2+2y$ को $4y$ से

(ix) $4q^4+5q^3-q^2+6q$ को $2q$ से

(x) $y^4-3y^3+\frac{1}{2}y^2$ को $3y$ से

2. बहुपद को द्विपदी से भाग दीजिए

(i) x^2+6x+8 को $x+4$ से

(ii) y^2-y-12 को $y-4$ से

(iii) $z^2-8z+15$ का $z-5$ से

(iv) $x^2+7x+10$ को $x+5$ से

(v) y^2-5y+6 को $y-2$ से

(vi) $2x^2+5x+3$ को $2x+3$ से

(vii) $8y^2-2y-1$ को $2y-1$ से

(viii) $6x^2+x-1$ को $2x+1$ से

3. बहुपद को त्रिपदी से भाग दीजिए

$y^5+y^4-5y^3+7y^2+12y$ को y^3-3y^2+4y से

4. बहुपद $5x(x^2-x+1)-(4x+4x^4)$ को $(4x-1)$ से भाग दीजिए।

5. परावर्त्य विधि द्वारा भागफल ज्ञात कीजिए

(i) x^3+8x^2-7x-2 को $x-1$ से भाग दीजिए

(ii) $x^3-27x^2+8x+18$ को $x-1$ से भाग दीजिए

(iii) $p^3-3p^2+4p-12$ को $p-3$ से भाग दीजिए।

5.8 बहुपदों के गुणनखण्ड (Factorisation of polynomials)

हमने पिछली कक्षा में पढ़ा है कि दो या दो से अधिक बीजीय व्यंजक को गुणा करने पर नया बीजीय व्यंजक प्राप्त होता है। सामान्यत: इसका व्युत्क्रम भी सत्य है कि किसी बीजीय व्यंजक में अन्य व्यंजक से भाग देने पर भी नया बीजीय व्यंजक प्राप्त होता है।

व्युत्क्रम प्रक्रिया के अंतर्गत किसी दिए गए बीजीय व्यंजक को सरलतम व्यंजकों के रूप में प्राप्त करते हैं जिनका गुणनफल दिया गया व्यंजक होगा। यह व्युत्क्रम प्रक्रिया "गुणनखण्ड करना" कहलाता है। सरलतम व्यंजकों को "गुणनखण्ड" कहते हैं।

उदाहरण के लिए

$(a+b)$ और $(a-b)$ का गुणन a^2-b^2 है

अर्थात $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

व्युत्क्रम प्रक्रिया के अंतर्गत

जब हम a^2-b^2 का गुणनखण्ड करते हैं तो हमें $(a+b)$ और $(a-b)$ दो गुणनखण्ड प्राप्त होते हैं। अर्थात

(1) $(a+b)$ और $(a-b)$ का गुणन a^2-b^2 है तथा

(2) $(a+b)$ और $(a-b)$, a^2-b^2 के दो गुणनखण्ड है।

बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड के लिये हमने अभी तक जिन विधियों का अध्ययन किया है वे इस प्रकार है।

(1) दो या दो से अधिक पदों से उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (common factor) निकालना।

जैसे : $2x^2y + 6xy^2 + 10x^2y^2$

$= 2xy\,(x+3y+5xy)$

(2) पदों के समूह में से उभयनिष्ठ गुणनखण्ड निकालना

जैसे : $2x^4+2x^3y + 3xy^2+3y^3$

$= (2x^4+2x^3y) + (3xy^2+3y^3)$

$= 2x^3\,(x+y) + 3y^2\,(x+y)$

$= (2x^3+3y^2)\,(x+y)$

(3) सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा गुणनखण्ड :

सर्वसमिकाओं के प्रयोग द्वारा बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड किये जाते हैं। मुख्य रूप से निम्नलिखित सर्वसमिकाओं का प्रयोग किया जाता है।

(i) $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

(ii) $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$

(iii) $(x^2-y^2) = (x+y)\,(x-y)$

(iv) $(x+a)\,(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

(v) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(vi) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

उपरोक्त विधियों की सहायता से बहुपदों के गुणनखण्ड भी ज्ञात किए जाते हैं। इसे आगामी उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 17. सर्वसमिकाओं का प्रयोग कर दिए गए बहुपदों का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(i) $25x^2+40x+16$ (ii) $49y^2-28y+4$ (iii) $64x^2-81$

हल : (i) $25x^2+40x+16$

(सर्वसमिका $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$ का प्रयोग करने पर)

$25x^2+40x+16 = (5x)^2+2\,(5x)(4)\,+(2)^2$

$(5x+4)^2 = (5x+4)\,(5x+4)$ उत्तर

(ii) $49y^2-28y+4$

(सर्वसमिका $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$ का प्रयोग करने पर)

$49y^2-28y+4 = (7y)^2-2\,(7y)(2)\,+(4)^2$

$(7y-2)^2 = (7y-2)\,(7y-2)$ उत्तर

(iii) $64x^2-81$

(सर्वसमिका $a^2-b^2 = (a+b)\,(a-b)$ का प्रयोग करने पर)

$64x^2-81 = (8x)^2-(9)^2$

$= (8x+9)\,(8x-9)$ उत्तर

उदाहरण 18. सर्वसमिकाओं का प्रयोग कर दिए गए बहुपदों का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

(i) $x^2+8x+15$ (ii) $x^3+6x^2+12x+8$ (iii) $x^3-9x^2+27x-27$

हल : (i) $x^2+8x+15$

($x^2+(a+b)x+ab = (x+a)\,(x+b)$ का प्रयोग करने पर)

$x^2+8x+15 = x^2+(3+5)x+3\times5 = (x+3)\,(x+5)$ उत्तर

(ii) $x^3+6x^2+12x+8$

(सर्वसमिका $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$ का उपयोग करने पर)

$x^3+6x^2+12x+8= (x)^3+3(x^2)(2)\,+3(x)\,(2)^2+(2)^3 = (x+2)^3$ उत्तर

(iii) $x^3-9x^2+27x-27$ (सर्वसमिका $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$ का प्रयोग करने पर)

$= (x)^3-3(x^2)\,(3)\,+3x(3)^2-(3)^3 = (x-3)^3$ उत्तर

उदाहरण 19. गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए

(a) x^2+5x+6

हल : $x^2+(3+2)x+2\times3$

$= x^2+3x+2x+2\times3$

$= x(x+3)\,+2(x+3)$

$= (x+3)\,(x+2)$ उत्तर

(b) x^2-5x+6

हल : $x^2-(3+2)x+6$

$= x^2-3x-2x+3\times2$

$= x(x-3)\,-2\,(x-3)$

$= (x-3)\,(x-2)$ उत्तर

(c) x^2-x-6 (d) x^2+x-6

हल : $x^2-(3-2)x-(3\times2)$

$= x^2-3x + 2x-(3\times2)$

$= x(x-3) + 2(x-3)$

$= (x-3)\ (x+2)$

हल : $x^2+(3-2)x-(3\times2)$

$= x^2+3x-2x-(3\times2)$

$= x(x+3) -2\ (x+3)$

$= (x+3)\ (x-2)$

उपरोक्त उदाहरण में समस्त बहुपद x^2+bx+c प्रकार के हैं, इस प्रकार के बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर हम प्रेक्षण करते हैं कि बहुपद x^2+bx+c में

(i) x का गुणांक, गुणनखण्डों के द्वितीय पदों के बीजीय योग है।

(ii) अचर पद गुणनखण्डों के दूसरे पदों के गुणनफल है। अर्थात यदि $x^2+bx+c = (x+\alpha)(x+\beta)$ तब $b = \alpha+\beta$ और $c = \alpha\beta$

जैसे उपरोक्त उदाहरणों में

(a) में $2+3 = 5,\ 2\times3 = 6$

(b) में $-2-3 = -5,\ (-2)\ (-3) = 6$

(c) में $2-3 = -1,\ (2)\ (-3) = -6$

(d) में $-2+3 = 1,\ (-2)\ (3) = -6$

इसी प्रकार ax^2+bx+c प्रकार के बहुपदों का गुणनखण्ड करने के लिए हम दो पूर्णांक α, β इस प्रकार चुनते हैं कि $\alpha+\beta = b$ एवं $\alpha\beta = ac$ उदाहरणार्थ : $2x^2+7x+3 = 2x^2+6x+x+3$

$= 2x(x+3)+1\ (x+3) = (2x+1)\ (x+3)$ आदि।

हम यहाँ बहुपदों के गुणनखण्ड करने पर प्राप्त उत्तर सही है या नहीं की पुष्टि करने के लिये कुछ विधियों का उल्लेख करेंगे।

5.8.1 गुणनखण्ड के उत्तर की जाँच प्रथम विधि (सूत्र गुणित समुच्चयः समुच्चयगुणित)

गुणनखण्डों के गुणांकों के योग का गुणनफल, बहुपद के गुणांकों के योग के बराबर होता है। इसे हम निम्न उदाहरण द्वारा समझेंगे।

उदाहरण 20. बहुपद $x^2+14x + 45$ के गुणनखण्ड ज्ञात कर उत्तर की जाँच कीजिए?

हल : $x^2+14x + 45 = x^2+5x + 9x + 45$

$= x(x+5)+9\ (x+5)$

$= (x+5)\ (x+9)$

उत्तर की जाँच :

विधि (1) गुणनखण्डों के गुणांकों के योग का गुणनफल

= बहुपद के गुणांकों का योग

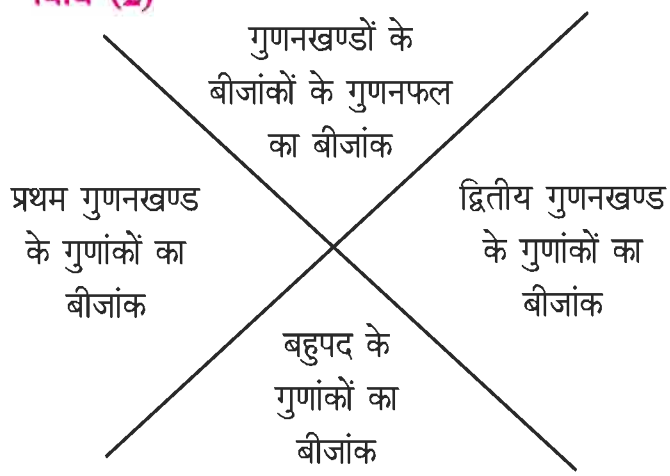
अत: वा.प. = (x+5) (x+9) में 6×10 = 60 1

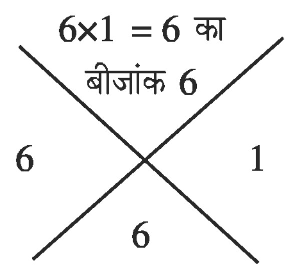
एवं दा.प. = $x^2+14x+45$ में 1+14+45 = 60 2

क्रमांक (1) एवं (2) से 60 = 60 उत्तर सही है।

इसी प्रकार एक और विधि निम्नानुसार है

विधि (2)





6 = 6

अत: उत्तर सही है

प्रश्नावली 5.5

1. गुणनफल ज्ञात कीजिए

(1)	(3–2x) (3+2x)	(2)	(x+4) (x+10)
(3)	(3x+4) (3x–5)	(4)	(x+8) (x–10)

2. गुणनखण्ड कीजिए

(1)	$x^2+9x+20$	(2)	$x^2+10x+24$
(3)	x^2-x-2	(4)	$x^2-11x+10$
(5)	$x^2-18x+65$	(6)	$x^3+12x^2+48x+64$
(7)	$x^3-15x^2+75x-125$	(8)	x^2-x-42
(9)	$1+3x+2x^2$	(10)	$40-13x+x^2$
(11)	$x^2+x-110$	(12)	$x^2-18x+65$
(13)	$1-30x+225x^2$	(14)	x^3-2x^2-3x+6
(15)	x^3+x^2+x+1	(16)	$7x^3-3x^2-21x+9$
(17)	$2x^3+6x^2-cx-3c$	(18)	x^2-4

(19) $25x^2-9$ (20) $9x^2-1$

(21) $81x^2-64$ (22) $1-100x^2$

(23) a^3-ax^2 (24) $12x^2-75$

(25) $3x^2-12a^2$ (26) $7-7x^2$

(27) $3a^2-3x^2$ (28) $3x^2-12$

3. गुणनखण्ड कीजिए व उत्तर की जाँच भी कीजिए।

(1) $5\sqrt{5}\,x^2+30x+8\sqrt{5}$ (2) $12x^2-7x+1$

(3) $5x^2+16x+3$ (4) $2x^2-7x-15$

(5) $9x^2+18x+8$ (6) $3x^2-14x+8$

(7) $2x^2+11x-21$ (8) $7x^2-25x+12$

5.9 शेषफल प्रमेय (Remainder theoram)

अब हम एक ऐसी विधि का वर्णन करेंगे जिसमें वास्तविक रूप से बिना भाग दिए ही शेषफल ज्ञात कर सकते हैं, जबकि बहुपद का घात एक से अधिक और भाजक द्विपद x-a के रूप में होता है। बहुपदों में भाग क्रिया में यह ध्यान देने योग्य है कि शेषफल का घात भाजक के घात से कम होगा या शेषफल शून्य होगा। चूँकि x-a का घात 1 है, अत: या तो शेषफल का घात शून्य होगा अर्थात यह एक अचर बहुपद होगा या शून्य भी हो सकता है। हम यहाँ अधिकतम 4 घात वाले बहुपदों का ही अध्ययन करेंगे।

आइए, अब बहुपदों में भाजन के कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 21. बहुपद $p(y) = y^4+y^3+2y^2-6y+1$ को $y+1$ से भाग दीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l}
 & y^3+2y-8 \\ \hline
y+1 & y^4+y^3+2y^2-6y+1 \\
 & \underline{\underset{-}{y^4}\underset{-}{+}y^3} \\ \hline
 & \qquad\quad 2y^2-6y+1 \\
 & \qquad\quad \underline{\underset{-}{2}y^2\underset{-}{+}2y} \\ \hline
 & \qquad\qquad -8y+1 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underset{+}{-}8y\underset{+}{-}8} \\ \hline
 & \qquad\qquad\qquad 9
\end{array}$$

भाग देने की क्रिया अब आगे किया जाना संभव नहीं है, क्योंकि शेषफल 9 है। इसका घात भाजक $y+1$ के घात से कम है और यह एक अचर राशि है।

यहाँ   भाज्य $p(y) = y^4+y^3+2y^2-6y+1$

भाजक $g(y) = y+1$

भागफल $g(y) = y^3+2y-8$

शेषफल $r(y) = 9$

अत: $g(y).q(y)+r(y) = p(y)$

इस प्रकार के बहुपदों में भाजन को एक और वैकल्पिक विधि द्वारा भी समझा जा सकता है। इसमें समूहन क्रिया द्वारा $(y+1)$ को एक खण्ड के रूप में प्राप्त किया जाता है। जो इस प्रकार है।

वैकल्पिक विधि

$$\begin{aligned} p(y) &= y^4+y^3+2y^2-6y+1 \\ &= y^3\,(y+1)+2y^2-6y+1 \\ &= y^3\,(y+1)+2y(y+1)-2y-6y+1 \end{aligned}$$

($2y$ को जोड़ने और घटाने से)

$$\begin{aligned} &= y^3\,(y+1) + 2y\,(y+1)-8y+1 \\ &= y^3\,(y+1) + 2y\,(y+1)-8(y+1)+8+1 \end{aligned}$$

(8 को घटाने और जोड़ने से)

$$\begin{aligned} &= y^3\,(y+1) + 2y\,(y+1)-8(y+1)+9 \\ &= (y+1)\,(y^3+2y-8)+9 \end{aligned}$$

इस प्रकार, $p(y) = (y^3+2y-8).r(y) + 9$, जहाँ $g(y) = y+1$

या, $p(y) = q(y).g(y) + r(y)$. अब हम शेषफल को सीधे इस प्रकार भी ज्ञात कर सकते हैं

$p(-1) = (-1)^4 + (-1)^3+2(-1)^2-6(-1)+1 = 1-1+2+6+1= 9$

उदाहरण 22. शेषफल ज्ञात कीजिए जहाँ बहुपद $p(y) = y^3+3y^2-5y+7$ को $y-4$ से भाग किया जाता है।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & y^2 + 7y + 23 \\ \hline y-4 & y^3 + 3y^2-5y+7 \\ & \underset{-}{}y^3 \underset{+}{-} 4y^2 \\ \hline & \quad 7y^2-5y+7 \\ & \quad \underset{-}{}7y^2 \underset{+}{-} 28y \\ \hline & \qquad 23y+7 \\ & \qquad \underset{-}{}23y \underset{+}{-} 92 \\ \hline & \qquad\quad 99 \end{array}$$

यहाँ शेषफल = 99 है।

पुनः, p (4) की गणना करने पर हम पाते हैं

$p(4) = (4)^3+3(4)^2-5(4)+7$

$= 64 + 48 - 20 + 7$

$= 119-20$

$= 99$

आप क्या पाते हैं? जब p(y), y–4 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल 99 प्राप्त होता है, एवं यह p(4) = 99 द्वारा सीधे भी प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 23. बहुपद $2y^2+6y-7$ को $y-3$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ हम गुणनखण्ड y–3 को बहुपद से लेकर प्रत्येक पद पर व्यवस्थित करते हैं। अब

$p(y) = 2y^2+6y-7$

$= 2y(y-3) + 6y+6y-7$

$= 2y(y-3)+12y-7$

$= 2y(y-3)+12(y-3)+36-7$

$= 2y(y-3) +12(y-3)+29$

$= (y-3)(2y+12)+29$ अतः शेषफल = 29 है।

पुनः इसे हम निम्नानुसार भी हल कर सकते हैं

$p(3) = 2(3)^2+6(3)-7$

$= 18+18-7$

$= 36-7$

$= 29$

इस प्रकार हम देखते हैं कि p(y) को y–3 से भाग देने से प्राप्त शेषफल 29 होता है, जो कि p(3) के बराबर होता है।

उपर्युक्त उदाहरणों के परिणाम को हम एक प्रमेय के रूप में प्रस्तुत करेंगे। इस प्रमेय को शेषफल प्रमेय कहते हैं, जो निम्नानुसार है।

शेषफल प्रमेय : **"मान लीजिए p(x) एक बहुपद है जिसका घात 1 या 1 से अधिक है और a एक वास्तविक संख्या है। यदि p(x) को x–a से भाग दिया जाये तो शेषफल p(a) होगा।"**

अब हम इस प्रमेय का प्रयोग इन उदाहरणों में करेंगे

उदाहरण 24. यदि $p(x) = 4x^4-3x^3+2x^2+x+5$ तो $x-2$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा?

हल : यहाँ $x-2$ की तुलना $x - a$ से करने पर हम पाते हैं।

$a = 2$ तब शेषफल प्रमेय से

शेषफल $= p(2) = 4(2)^4-3(2)^3+2(2)^2+2+5$

$= 4.16-3.8+2.4+2+5$

$= 64-24+8+2+5$

$= 79-24$

$= 55$

अतः शेषफल $= 55$

उदाहरण 25. यदि बहुपदों px^3+4x^2+3x-4 और x^3-4x+p को $x-3$ से भाग दिया जाता है तब शेषफल समान प्राप्त होता है। p का मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना, $p(x) = px^3+4x^2+3x-4$

$q(x) = x^3-4x+p$

$g(x) = x-3$

अब शेषफल प्रमेय के प्रयोग में $p(x), q(x)$ में $g(x)$ से भाग किया जाता है, तब शेषफल क्रमशः $p(3)$ एवं $q(3)$ होंगे अर्थात

$p(3) = p.(3)^3 + 4(3)^2+3(3)-4$

$= p.(27) + 4.(9) + 3(3)-4$

$= 27p + 41$

इसी प्रकार, $q(3) = (3)^3-4(3)+p$

$= 15 + p$

अब प्रश्नानुसार $p(3) = q(3)$

या, $27p + 41 = 15+p$

या, $26p = -26$, या $p= -1$

अतः p का मान -1 होगा। उत्तर

प्रश्नावली 5.6

1. यदि बहुपद $p(x) = 5x^4-4x^3+3x^2-2x+7$ है तो $x-5$ से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।
2. यदि $p(x)=3x^3-4x^2+5x+1$ और $g(x) = x-1$ तो $r(x)$ ज्ञात कीजिए।
3. यदि $p(y) = 6y^2-7y+9$ तो $y-2$ से भाग देने पर शेषफल क्या होगा?

4. $p(z) = 9z^3-8z^2+7z-6$ को $z-\frac{1}{2}$ से भाग देकर शेषफल ज्ञात कीजिए।

5. x^3-a^2x+x+2 को $x-a$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।

6. यदि ax^2+bx+c को $x-p$ से तब तक भाग दिया जाए जब तक शेषफल x से स्वतंत्र न हो, तो शेषफल क्या होगा?

7. शेषफल ज्ञात कीजिए जब $5x^3-x^2+6x-2$ को $1-5x$ से भाग दिया जाये।

8. यदि $f(x) = x^4-2x^3+3x^2-ax+b$ को $x-1$ और $x+1$ से भाग देने पर शेषफल क्रमशः 5 और 19 प्राप्त होते हैं तो a और b का मान ज्ञात कीजिए।

9. यदि $x+a$ एक गुणनखण्ड है तो $x^4+ax^3-3x+a+5$ में a का मान ज्ञात कीजिए।

10. k के किस मान के लिए बहुपद $2x^4+3x^3+4kx^2+5x+10$, $(x+3)$ से पूर्णतः विभाजित होगा।

5.10 शेषफल प्रमेय के अनुप्रयोग (Applications of remainder theoram)

शेषफल प्रमेय से हमने अभी उन प्रश्नों को हल करके देखा है, जहां शेषफल एक संख्या थी। विचार कीजिए कि यदि शेषफल का मान शून्य हो जाये तब हम यह कह सकते हैं कि किसी बहुपद $p(x)$ को $x-a$ से भाग देने पर शेषफल शून्य होगा। ऐसी स्थिति में $(x-a)$, $p(x)$ का गुणनखण्ड होता है।

अतः यदि किसी बहुपद $p(x)$ में x के स्थान पर संख्या a लिखने से बहुपद का मान शून्य हो तो $(x-a)$ बहुपद का गुणनखण्ड होता है।

आइए कुछ उदाहरणों की सहायता से समझें।

उदाहरण 26. यदि x^2-5x+6 एक बहुपद है तो सिद्ध कीजिए कि $x-2$ इसका एक गुणनखण्ड है।

हल : यहाँ $p(x) = x^2-5x+6$

यह सिद्ध करने के लिये कि $x-2$, $p(x)$ का एक गुणनखण्ड है,

अब $p(2) = (2)^2-5(2)+6$

$= 4-10+6$

$= 0$

अतः $x-2$, x^2-5x+6 का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 27. यदि $x^3+13x^2+32x+20$ एक बहुपद है तो सिद्ध कीजिए कि $x+10$ इसका एक गुणनखण्ड है।

हल : $p(x) = x^3+13x^2+32x+20$

चूंकि $p(-10) = (-10)^3+13(-10)^2+32(-10)+20$

$= -1000+1300-320+20$

$= 1320-1320$

$= 0$

अत: $x+10$ दिये गये बहुपद का एक गुणनखण्ड है।

उदाहरण 28. सिद्ध कीजिए कि $x-1$, बहुपदों $x^{100}-1$ और $x^{99}-1$ का गुणनखण्ड है।

हल : माना $p(x) = x^{100}-1$ एवं $q(x) = x^{99}-1$

$p(1) = 1^{100}-1 = 1-1$

$= 0$

एवं $q(1) = (1)^{99}-1$

$= 1^{99}-1 = 1-1$

चूँकि शेषफल शून्य है, अत: $x-1$, $x^{100}-1$ और $x^{99}-1$ का गुणनखण्ड है।

उदाहरण 29. क्या $x+1$ और $2x-3$, बहुपद $2x^3-9x^2+x+12$ के गुणनखण्ड हैं?

हल : माना, $p(x) = 2x^3-9x^2+x+12$

अब $x+1$ और $2x-3$, बहुपद $p(x)$ के गुणनखण्ड होंगे, यदि $p(-1)$ एवं $p\left(\frac{3}{2}\right)$ शून्य हों।

अत: $p(-1) = 2(-1)^3-9(-1)^2+(-1)+12$

$= -2-9-1+12$

$= 0$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) + 12$$

$$= 2.\frac{27}{8} - 9.\frac{9}{4} + \frac{3}{2} + 12$$

$$= \frac{27}{4} - \frac{81}{4} + \frac{3}{2} + 12$$

$$= \frac{27-81+6+48}{4}$$

$$= \frac{81+81}{4}$$

$$= 0$$

अत: $x+1$ और $2x-3$ दोनों दिये गये बहुपद के गुणनखण्ड हैं।

आइए अब शेषफल प्रमेय की सहायता से किसी बहुपद के गुणनखण्ड ज्ञात करना सीखें

यह सत्यापन कर सकते हैं कि कोई बहुपद $(x-a)$ किसी बहुपद $p(x)$ का गुणनखण्ड है या नहीं इसकी सहायता से हम किसी बहुपद के गुणनखण्ड ज्ञात कर सकते हैं। आइए निम्नलिखित उदाहरण द्वारा समझते हैं

उदाहरण 30. बहुपद $x^3+6x^2+11x+6$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : माना $x-a$ दिये गये बहुपद का एक गुणनखण्ड है अब हमें a का मान ज्ञात करना है अत: प्रयास और त्रुटि (Trial and Error) द्वारा गुणनखण्ड $x-a$ को $a=\pm 1, \pm 2, \pm 3$ आदि मानों से प्राप्त करते हैं।

यहाँ बहुपद में सभी गुणांक धनात्मक हैं। अत: 1, 2 और 3 मानों को नहीं लेंगे क्योंकि $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ शून्य नहीं होंगे। वास्तव में a के लिए कोई धनात्मक मान $p(a)$ को शून्य नहीं करेगा। अत: $p(x)$ के लिए ऋणात्मक मान ही लेंगे। हम पाते हैं कि

$p(-1) = p(-2) = p(-3) = 0$

अत: $p(x)$ के सरलतम गुणनखण्ड $x-(-1)$, $x-(-2)$, $x-(-3)$

या $x+1$, $x+2$ और $x+3$ होंगे।

अत: $p(x) = (x+1)\ (x+2)\ (x+3)$ उत्तर।

उदाहरण 31. बहुपद x^3-3x^2-9x-5 का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : x^3 का गुणांक 1 है। अत: बहुपद तीन रेखिक गुणनखण्ड $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ के रूप में होगा।

अत: $p(x) = (x-a)\ (x-b)\ (x-c)$

यहाँ अचर राशि -5 है। अत: $-abc = -5$ या $abc = 5$

इसका तात्पर्य हुआ कि a, b, c, 5 के गुणनखण्ड होंगे और ± 1, $+5$ के मान से हल प्राप्त करना होगा।

हम देखते हैं कि $p(1) \neq 0$, $p(-1)=0$, $p(5) = 0$, $p\ (-5) \neq 0$

अत: $x+1$, $x-5$ ही $p(x)$ के गुणनखण्ड होंगे।

इस प्रकार $p(x) = (x+1)\ (x-5)\ q(x)$

$= (x^2-4x-5)\ q(x)$

$(x+1)\ (x-5)$ का गुणनफल द्विघातीय है, जबकि व्यंजक तीन घात का है। अत: एक गुणनखण्ड और ज्ञात करने के लिए $q(x)$ मालूम करना है।

अब हमें $q(x)$ ज्ञात करना है। इसे प्राप्त करने के लिए $p(x)$ में से इस गुणनखण्ड x^2-4x-5 को उभयनिष्ठ (common) लेने पर

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^3-3x^2-9x-5 \;=\; x^3-4x^2-5x+x^2-4x-5 \\
&= x(x^2-4x-5)+1\,(x^2-4x-5) \\
&= (x^2-4x-5)\,(x+1) \\
&= (x+1)\,(x-5)\,(x+1) \\
&= (x+1)\,(x+1)\,(x-5) \qquad \text{उत्तर}
\end{aligned}
$$

अर्थात, $p(x)$ को x^2-4x-5 द्वारा भाग करने पर हमें सीधे-सीधे तीसरा गुणनखण्ड प्राप्त हो जायेगा।

प्रश्नावली 5.7

1. जाँच कीजिए कि क्या $x-3$, $p(x) = x^3-3x^2+4x-12$ का गुणनखण्ड है?
2. जाँच कीजिए कि $x-2$, $x+3$ और $x-7$, $x^3-6x^2-13x+42$ के गुणनखण्ड हैं।
3. यदि $x-a$, बहुपद $x^3-(a^2-1)\,x+2$ का गुणनखण्ड है तो a का मान ज्ञात कीजिए।
4. बिना भाग दिए सिद्ध कीजिए कि $x^4+2x^3-2x^2+2x-3$, x^2+2x-3 से पूर्णत: विभाजित हो जाता है।
5. निम्नलिखित बहुपदों में यदि $x+a$, प्रत्येक बहुपद का गुणनखण्ड है, तो प्रत्येक स्थिति में a का मान ज्ञात कीजिए।

   (i) $x^3+ax^2-2x+a+1$

   (ii) $x^4-a^2x^2+3x-a$
6. a के किस मान के लिए $2x^3+ax^2+11x+a+3$, $(2x-1)$ से पूर्णत: विभाजित होगा?
7. $x^3-3x^2+4x-13$ में क्या जोड़ा जाये कि यह $x-3$ से पूर्णत: विभाजित हो जाये।
8. $x^3-6x^2-15x+80$ में से क्या घटाया जाये कि यह x^2+x-12 से पूरा-पूरा विभाजित हो जाये।
9. जाँच कीजिए कि $x-y$, $y-z$, $z-x$ बहुपद $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$ के गुणनखण्ड हैं।
10. $p(x) = x^4-3x^2+2x+1$ को $x-1$ से भाग देने पर प्राप्त शेषफल ज्ञात कीजिए।
11. सिद्धि कीजिए कि $x-3$ बहुपद $x^3+x^2-17x+15$ का गुणनखण्ड है।
12. y^3-7y+6 के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
13. $x^3+13x^2+31x-45$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

5.11 बहुपदों के महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor of polynomials)

पिछली कक्षाओं में हम एक पदी व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करना सीख चुके हैं। पुनरावृत्ति के लिए हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 32. निम्नलिखित व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए

$$26x^3a^4y^5,\ 13x^3y^2a^2,\ 78x^6y^5z^3,\ 91z^7y^3z^5$$

हल :

$$26x^3a^4y^5 = 2 \times 13 \times x^3 \times a^4 \times y^5$$

$$13x^3y^2a^2 = 13 \times x^3 \times y^2 \times a^2$$

$$78x^6y^5z^3 = 2 \times 3 \times 13 \times x^6 \times y^5 \times z^3$$

$$91x^7y^3z^5 = 7 \times 13 \times x^7 \times y^3 \times z^5$$

उपर्युक्त व्यंजकों में पहले संख्याओं में बड़ी से बड़ी उभयनिष्ठ संख्या एवं घात ज्ञात करते हैं। 26, 13, 78 और 91 में बड़ी संख्या 13 उभयनिष्ठ संख्या है। इसी प्रकार x के घात वाले व्यंजकों में x^3, y के घात वाले व्यंजकों में y^2 उभयनिष्ठ प्राप्त होते हैं। a तथा z सभी व्यंजकों में नहीं है, अत: a और z उभयनिष्ठ प्राप्त नहीं होंगे।

अत: महत्तम समापवर्तक $= 13 \times x^3 \times y^2$

$= 13x^3y^2$ है

इस प्रकार एक से अधिक व्यंजकों का महत्तम समापवर्तक सबसे बड़ा (अंकों एवं घातों में) उभयनिष्ठ भाजक होता है।

यदि $13x^3y^2$ से सभी व्यंजकों में अलग-अलग भाग दिया जाय तो सभी व्यंजक पूर्णतया विभाजित हो जायेंगे। अर्थात प्रत्येक दशा में शेषफल शून्य होगा। **महत्तम समापवर्तक को प्राय: म.स.** द्वारा लिखते हैं।

5.11.1 गुणनखण्डों द्वारा महत्तम समापवर्तक (म.स.) ज्ञात करना

निम्न बहुपदों पर विचार कीजिए

$p(x) = 2(x-3)^2\ (x-4)\ (2x-7)$

$g(x) = 8(x-3)^2\ (x-4)\ (x-5)$

हम देखते हैं कि $(x-3)^2$, p(x) और g(x) दोनों का गुणनखण्ड है। हम कहते हैं $(x-3)^2$, p(x) और g(x) का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। इसी प्रकार (x–4) भी p(x) और g(x) का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। क्या कोई दूसरे उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है? हाँ, 2 एक अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं। अब हम इन सभी उभयनिष्ठ गुणनखण्डों का एक साथ गुणन, $r(x) = 2(x-3)^2 . (x-4)$ जो p(x) और g(x) का सबसे बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं क्योंकि $r(x) = 2(x-3)^2\ (x-4)$ बहुपदों p(x) और g(x) दोनों को पूर्णत: विभाजित करता है। यह r(x) ही p(x) एवं g(x) का महत्तम समापवर्तक कहलाता है, क्योंकि p(x), g(x) के अन्य उभयनिष्ठ भाजक r (x) को भी विभाजित करते हैं। अत: हम बहुपदों के म.स. को निम्नानुसार परिभाषित करेंगे।

बहुपद $r(x)$ को बहुपदों $p(x)$ और $g(x)$ का महत्तम समापवर्तक (म.स.) कहते हैं यदि

(1) $r(x)$ बहुपद $p(x)$ और $g(x)$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हो।

(2) $p(x)$ और $g(x)$ का प्रत्येक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड $r(x)$ का भी गुणनखण्ड हो।

आइए, अब हम कुछ उदाहरणों से महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने का प्रयास करते हैं।

उदाहरण 33. बहुपदों $2x^2(x+5)$ और $4x^2(x+5)^2\ (x+10)$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $2x^2\ (x+5) = 2 \times x^2 \times (x+5)$

$4x^2(x+5)^2\ (x+10) = 4 \times x^2 \times (x+5)^2 \times (x+10)$

यहाँ संख्याओं 2 और 4 का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 2, x के घात वाले व्यंजकों में x^2 तथा व्यंजकों $(x+5)$ के घातों में $(x+5)$ उभयनिष्ठ है।

अत: अभीष्ट महत्तम समापवर्तक $= 2 \times x^2 \times (x+5)$

$= 2x^2(x+5)$ उत्तर

उदाहरण 34. निम्नलिखित बहुपदों के म.स. ज्ञात कीजिए

$x^2+x-6,\ x^2+2x-8,\ 2x^2-5x+2$

हल : $x^2+x-6 = (x+3)(x-2)$ (बहुपदों का गुणनखण्ड करते हैं)

$x^2+2x-8 = (x+4)(x-2)$

$2x^2-5x+2 = (2x-1)\ (x-2)$

अत: उपरोक्त बहुपदों में गुणनखण्ड $x-2$ म.स. है।

5.11.2 भाग विधि द्वारा महत्तम समापवर्तक

दो बहुपदों का म.स. ज्ञात करने के लिये हम एक अन्य विधि का प्रयोग भी करते हैं, इस विधि में एक बहुपद का दूसरे बहुपद में भाग देते हैं। इस क्रिया में प्राप्त शेषफल से दूसरे बहुपद (जो प्रथम बार में भाजक था) में भाग देते हैं तथा इस प्रक्रिया को तब तक दोहराते हैं जब तक कि शेषफल शून्य प्राप्त नहीं होता तथा अंतिम (भाजक) शेषफल ही दोनों बहुपदों का महत्तम समापवर्तक होगा। तीन बहुपदों का म.स. ज्ञात करने के लिए प्रथम बहुपद का दूसरे बहुपद में भाग देने पर जो शेषफल प्राप्त होता है उससे तीसरे बहुपद में भाग देते हैं। यदि शेषफल शून्य प्राप्त होता है तो यही भाजक गुणनखण्ड तीनों बहुपदों का म.स. होगा।

बहुपदों के म.स. ज्ञात करने की इस विधि को इन उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 35. बहुपदों $x^2-7x + 12$ तथा $x^2-8x + 15$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2-7x+12 & x^2-8x+15 \\ & \underline{\overset{-}{x^2}\overset{+}{-}7x\overset{-}{+}12} \\ & \quad -x+3 \end{array}$$

$= -(x-3)$ प्रथम पद धनात्मक किया गया।

अब शेषफल $(x-3)$ का भाजक $x^2-7x+12$ में भाग देते हैं

$$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ \hline x-3 & x^2-7x+12 \\ & \underline{\overset{-}{x^2}\overset{+}{-}3x} \\ & \quad -4x+12 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-}4x\overset{-}{+}12} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

(शेषफल शून्य है)

अत: महत्तम समापवर्तक $= x-3$ है। (यदि $(x-3)$ से दोनों बहुपदों में अलग-अलग भाग दे तो दोनों बहुपद पूर्णरूप से विभाजित हो जाएंगे।

उदाहरण 36. भाग विधि से निम्नलिखित बहुपदों का म.स. ज्ञात कीजिए

$x^2+7x+12,\ x^2+9x+20,\ x^2+8x+16$

हल : पहले $x^2+7x+12$ का $x^2+9x+20$ में भाग देते हैं।

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x^2+7x+12 & x^2+9x+20 \\ & \underline{\overset{-}{x^2}\overset{-}{+}7x\overset{-}{+}12} \\ & \quad 2x+8 \end{array}$$

या, $2(x+4)$

अब शेषफल $x+4$ का तीसरे बहुपद $x^2+8x+16$ में भाग देते हैं-

$$\begin{array}{r|l} & x+4 \\ \hline x+4 & x^2+8x+16 \\ & \underline{\overset{-}{x^2}\overset{-}{+}4x} \\ & 4x+16 \\ & \underline{\overset{-}{4x}\overset{-}{+}16} \\ & \quad 0 \end{array}$$

(शेषफल शून्य है) अत: तीनों बहुपदों का म.स. $x+4$ है।

5.11.3 बहुपदों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की एक अन्य विधि

अब हम बहुपदों के महत्तम समापवर्तक निकालने की एक अन्य विधि का अध्ययन करेंगे। यह विधि सूत्र ''लोपन स्थापनाभ्याम'' पर आधारित है।

इस विधि में बहुपदों के उच्चतम एवं लघुतम घातों का लोप आवश्यकतानुसार मूलभूत संक्रियाओं (जोड़, घटाना, गुणा, भाग) की सहायता से किया जाता है।

इसमें मुख्य रूप से (1) लोपना-स्थापना सूत्र, संकलन, व्यवकलन प्रक्रिया तथा आद्यम-आदयेन नियम का अनुप्रयोग है। जिसे आगामी उदाहरणों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है।

उदाहरण 37. बहुपदों x^2+7x+6 तथा x^2-5x-6 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।

हल : बहुपदों x^2+7x+6 तथा x^2-5x-6 को देखने से ही ध्यान में आता है कि इन्हें आपस में घटाने पर x^2 का लोप हो जायेगा तथा जोड़ने पर 6 का लोप जायेगा। अत:

(1) व्यवकलन करने पर :

$$\begin{array}{r} x^2+7x+6 \\ -\;\; x^2 \underset{+}{-} 5x \underset{+}{-} 6 \\ \hline 12x+12 \end{array}$$

अब $(12x+12)$ में से 12 उभयनिष्ठ लेने पर

$(12x+12) = 12\ (x+1)$

(2) संकलन (योग) करने पर :

$$\begin{array}{l} x^2+7x+6 \\ x^2-5x-6 \\ \hline 2x^2+2x \end{array}$$

यहाँ $2x^2+2x$ में से $2x$ उभयनिष्ठ लेने पर

$2x^2+2x = 2x(x+1)$

अब हम प्रेक्षण करते हैं कि

(1) में $12(x+1)$ तथा (2) में $2x(x+1)$ दोनों में $(x+1)$ उभयनिष्ठ है। यही $(x+1)$ दोनों बहुपदों का म.स. है।

> **टिप्पणी :** यहाँ $12\ (x+1)$ एवं $2x(x+1)$ दोनों में 2 भी उभयनिष्ठ है जिसे म.स. की गणना में नहीं लिया गया है साधारणतः उभयनिष्ठ यदि एक पदीय हो तो छोड़ देते हैं क्योंकि एकपदीय तो विलोकनम् (देखकर ही) से ही ज्ञात हो जायेगा जैसे यहाँ दिए हुए दोनों ही बहुपदों x^2+7x+6 तथा x^2-5x-6 में 2 का भाग नहीं जाता। अत: म.स. में 2 नहीं होगा।

उदाहरण 38. $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$ एवं $4x^3 + 8x^2 + 3x + 20$ तथा $4x^2 + 20x + 25$ का म.स. ज्ञात कीजिए?

हल : बहुपदों $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$ एवं $4x^3 + 8x^2 + 3x + 20$ तथा $4x^2 + 20x + 25$ की अधिकतम एवं न्यूनतम घात वाले पदों का आवश्यकतानुसार लोप करते हुए म.स. ज्ञात करेंगे।

$2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 \quad (1)$

$4x^3 + 8x^2 + 3x + 20 \quad (2)$

$4x^2 + 20x + 25 \quad (3)$

बहुपद (1) में 2 का गुणा कर इसमें से बहुपद (2) को घटाने पर x^3 का लोप होगा

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 18x^2 + 8x - 30 \\ \underline{\overset{-}{}4x^3 \underset{-}{+} 8x^2 \underset{-}{+} 3x \underset{-}{+} 20} \\ 10x^2 + 5x - 50 \end{array} \quad (4)$$

अब बहुपद (3) में 10 का गुणा कर इसमें से बहुपद (4) को 4 का गुणा कर घटाने पर x^2 का लोप होगा।

अर्थात बहुपद (3) x10 – बहुपद (4) x 4 से

$$\begin{array}{r} 40x^2 + 200x + 250 \\ \underline{40x^2 \underset{-}{+} 20x \underset{+}{-} 200} \\ 180x + 450 \end{array}$$

अब 180x+450 में से 90 उभयनिष्ठ लेने पर 90(2x+5) होता है।

अत: म.स. (2x+5) है।

टिप्पणी : 90 को म.स. में शामिल नहीं किया गया है।

उदाहरण 39. बहुपदों $x^3 + 4x^2 + x - 6$ एवं $2x^2 + 2x - 4$ तथा $x^3 + x^2 - 5x + 3$ का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल : बहुपदों की अधिकतम एवं न्यूनतम घातों का आवश्यकतानुसार लोप करते हुए म.स. ज्ञात करेंगे।

$x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad (1)$

$2x^2 + 2x - 4 \quad (2)$

$x^3 + x^2 - 5x + 3 \quad (3)$

बहुपद क्रमांक (1) और बहुपद क्रमांक (3) से x^3 का लोप होगा अत:

$$\begin{array}{r} x^3+4x^2+x-6 \quad (1) \\ -\underline{\begin{matrix} x^3+x^2-5x+3 \\ - \quad - \quad + \quad - \end{matrix}} \quad (3) \\ 3x^2+6x-9 \end{array}$$

अब $3x^2+6x-9$ में से 3 सर्वनिष्ठ (उभयनिष्ठ)

लेने पर 3 (x^2+2x-3) अत: x^2+2x-3 प्राप्त हुआ यह बहुपद x^2+2x-3 ---(4) है।

बहुपद क्रमांक (4) में 2 का गुणा कर बहुपद क्रमांक (2) में से घटाने पर x^2 का लोप होगा अत:

$$\begin{array}{r} 2x^2+2x-4 \quad (2) \\ -\underline{\begin{matrix} 2x^2+4x-6 \\ - \quad - \quad + \end{matrix}} \quad (4)\times 2 \\ -2x+2 \end{array}$$

अत: $(-2x+2)$ में से -2 उभयनिष्ठ लेने पर $-2\ (x-1)$ होगा।

अत: म.स. $(x-1)$ होगा।

5.12 बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) Lowest Common multiple of polynomials)

हम निम्नलिखित बहुपदों तथा उनके गुणनखण्डों पर विचार करते हैं

$p_1(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)\ (x-2)$

$p_2(x) = x^2 + 2x - 8 = (x+4)\ (x-2)$

$p_3(x) = 2x^2 - 5x + 2 = (2x-1)\ (x-2)$

उपर्युक्त बहुपदों में से गुणनखण्डों का ऐसा बहुपद $p(x)$ बनाते हैं जिसमें यदि $p_1(x)$, $p_2(x)$ और $p_3(x)$ का अलग-अलग भाग दें तो $p(x)$ को पूर्ण रूप से विभाजित कर दें।

इसके लिए उभयनिष्ठ गुणनखण्डों में से सबसे अधिक घात वाले गुणनखण्ड को एक बार तथा शेष गुणनखण्डों के गुणनफल द्वारा $p(x)$ का निर्माण करते हैं। यहाँ सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड $(x-2)$ हैं तथा p_1, p_2 और p_3 में $(x-2)$ के अतिरिक्त $(x+3)$, $(x+4)$, $(2x-1)$ गुणनखण्ड है।

जब $p(x) = (x-2)(x+3)(x+4)\ (2x-1)$ है।

यह $p(x)$ ही बहुपदों $p_1(x)$, $p_2(x)$ तथा $p_3(x)$ का लघुत्तम समापवर्त्य कहलाता है। $p(x)$, p_1, p_2 और p_3 से पूर्ण रूप से विभाजित हो जाता है।

अत: लघुत्तम समापवर्त्य को निम्नानुसार परिभाषित करते हैं

लघुत्तम समापवर्त्य : दो या दो से अधिक बहुपदों का लघुत्तम समापवर्त्य एक ऐसा छोटे से छोटा बहुपद होता है जो दिए गए प्रत्येक बहुपद से पूर्ण रूप से विभाजित हो जाये।

आइए उदाहरण द्वारा **लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.)** की क्रिया को समझते हैं।

उदाहरण 40. $x^2+7x+12$, $x^2+9x+20$ तथा x^2-16 का लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

हल : $x^2 + 7x + 12 = (x+3)\ (x+4)$

$x^2 + 9x + 20 = (x+5)\ (x+4)$

$x^2 - 16 = (x-4)\ (x+4)$

लघुत्तम समापवर्त्य $= (x+4)(x+3)(x+5)(x-4)$ है जो कि प्रत्येक बहुपद से अलग-अलग भाग देने पर पूर्ण रूप से विभाजित हो जाता है।

आइए, अब हम एक विशेष प्रकार का सूत्र प्रतिपादित करते हैं जिसमें बहुपदों का ल.स. व म.स. और बहुपदों का आपस में संबंध प्रतिस्थापित किया गया है।

निम्न बहुपदों के महत्तम समापवर्तक और लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करते हैं

$p_1(x) = x^2+7x + 12 = (x + 3)\ (x + 4)$

$p_2(x) = x^2+9x + 26 = (x + 4)\ (x + 5)$

लघुत्तम समापवर्त्य $= (x+4)\ (x+3)(x+5)$

महत्तम समापवर्तक $= (x+4)$

अब $p(x)\ q(x) = (x^2+7x+12)\ .\ (x^2+9x+20) = (x+3)(x+4)(x+4)\ (x+5)$ -----(1)

तथा ल.स. $\times$ म.स. $= (x+4)\ (x+3)\ (x+5)\ (x+4)$ ------(2)

हम देखते हैं कि (1) = (2)

अत: एक निष्कर्ष पर पहुँचते हैं

ल.स. $\times$ म.स. = बहुपदों का गुणनफल

ल.स. $= \dfrac{\text{बहुपदों का गुणनफल}}{\text{म.स.}}$

म.स. $= \dfrac{\text{बहुपदों का गुणनफल}}{\text{ल.स.}}$

एक बहुपद $= \dfrac{\text{ल.स.} \times \text{म.स.}}{\text{दूसरा बहुपद}}$

उपरोक्त सूत्रों का प्रयोग अब हम इन उदाहरणों में करते है।

उदाहरण 41. बहुपदों $x^2-7x + 12$ और $x^2-9x + 20$ का म.स. x-4 है तो इन बहुपदों का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र : ल.स. $= \dfrac{\text{बहुपदों का गुणनफल}}{\text{म.स.}}$

$$= \frac{(x^2-7x+12) \times (x^2-9x+20)}{(x-4)}$$

$$= \frac{(x-4)\ (x-3)\ (x-5)\ (x-4)}{(x-4)}$$

$= (x-3)\ (x-5)\ (x-4)$

$= (x-3)\ (x^2-9x+20)$

$= x^3-12x^2 + 47x - 60$

अतः ल.स. $= x^3-12x^2 + 47x - 60$ उत्तर

उदाहरण 42. बहुपदों x^2+4x+4 और $x^2+11x+18$ का ल.स. $(x+2)^2(x+9)$ है तो म.स. ज्ञात कीजिए।

हल : **सूत्र :** म.स. = $\dfrac{\text{बहुपदों का गुणनफल}}{\text{ल.स.}}$

$$= \frac{(x^2+4x+4)\ (x^2+11x+18)}{(x+2)^2.(x+9)}$$

$$= \frac{(x+2)^2.(x+2)\ (x+9)}{(x+2)^2.(x+9)}$$

$= (x+2)$

अतः म.स. = $(x+2)$ उत्तर

उदाहरण 43. दो बहुपदों के ल.स. और म.स. के गुणनफल $(x-3)^2(x+9)^2(x-7)\ (x+1)$ है। यदि उनमें से एक बहुपद $(x-3).(x+9)(x+1)$ है तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

हल : सूत्र : प्रथम बहुपद × दूसरा बहुपद = ल.स. × म.स.

$(x+1)(x-3).(x+9) \times$ दूसरा बहुपद $= (x-3)^2(x+9)^2(x-7)(x+1)$

या, दूसरा बहुपद $= \dfrac{(x-3)^2(x+9)^2(x-7)(x+1)}{(x-3)\ (x+9)\ (x+1)}$

$= (x-7)(x-3)(x+9)$

अतः दूसरा बहुपद $= (x-7)(x-3)(x+9)$ उत्तर

प्रश्नावली 5.8

1. निम्नलिखित बहुपदों का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए (लोपन स्थापनाभ्यास के प्रयोग से भी हल करें।)

(1) $x^2-7x+12$, $x^2-8x+15$

(2) $3(x^2-9)(x+4)$, $12(x-3)^2$

(3) $4x^2+12x-72$, $3x^2-3x-18$

(4) $10x^2+13x+3$, x^2+3x+2, x^2-4x-5

(5) $x^2-7x+10$, x^2+2x-8, $3x^2-3x-6$

(6) $2x^2+x-1$, $2x^2-5x+2$, $6x^2+x-2$

(7) $x^2-10x+25$, x^2-25, $x-5$

(8) x^2-x-6, $x^2+2x-15$, $x^2-10x+21$ (भाग विधि से)।

2. निम्नलिखित बहुपदों का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए

(1) $3x^2-7x+2$, $3x^2+8x-3$

(2) x^2-2x+1, x^2+x-2

(3) x^3-3x-4, $x^2+2x-24$,

(4) x^2+3x+2, x^2+5x+6

(5) $x^2-9x+14$, $x^2-10x+21$

(6) x^2-5x+6, x^2-2x-3, x^2-x-2

(7) $4x^2-8x-12$, $9x^2-9x-54$, $6x^4-30x^2+24$

3. यदि $(x+2)$, ax^2-bx+c तथा bx^2-ax+c का महत्तम समापवर्तक हो, तो दिखाइए कि $a=b$

4. दो बहुपदों का म.स. $5(x+3)(x-1)$ और ल.स. $20(x^2-9)(x^2-3x+2)$ है।
एक बहुपद $10(x^2-9)(x-1)$ है तो दूसरा बहुपद ज्ञात कीजिए।

5. यदि बहुपदों $(x-3)(x^2+x-2)$ और x^2-5x+6 का म.स. $x-3$ है, तो ल.स. ज्ञात कीजिए।

याद रखने योग्य बाते :

- ऐसे बीजीय व्यंजकों को जिनके चरों के घातांक केवल ऋणेत्तर पूर्णांक हो, बहुपद कहा जाता है।
- जिस बहुपद में केवल एक चर आता हो उसे एक चर वाला बहुपद कहते हैं।
- एक चर वाले बहुपद के विभिन्न पदों के घातांकों में से सबसे बड़े घातांक को बहुपद की घात कहा जाता है।
- अचर शून्य घात वाला बहुपद होता है।

प्रायोजना कार्य (Project Work)

- प्रयोग द्वारा $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ की सत्यता सिद्ध करना।
- प्रयोग द्वारा $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ की सत्यता सिद्ध करना।
- प्रयोग द्वारा $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ की सत्यता सिद्ध करना।