अध्याय 6
लघुगणक (Logarithms)

$$\log_m ab = \log_m a + \log_m b$$

$$\log_m\left(\frac{a}{b}\right) = \log_m a - \log_m b$$

हम पढ़ेंगे :

- वास्तविक संख्याओं के परिमेय घात
- लघुगणक की परिभाषा और उनके नियम
- सामान्य लघुगणक (जिसका आधार 10 हो)
- पूर्णांश और अपूर्णांश
- प्रतिलघुगणक और अर्थ
- लघुगणक सारणी का उपयोग
- लघुगणक का अनुप्रयोग (अंक गणित व क्षेत्रमिति में)

6.1 भूमिका (Introduction)

लघुगणक की सहायता से संख्याओं के गुणन व भाजन की लम्बी एवं जटिल प्रक्रिया जोड़ एवं घटाने के रूप में परिवर्तित होकर सरल व संक्षिप्त हो जाती है। लघुगणक के खोजकर्ता स्कॉटलैंड के महान गणितज्ञ बैरन जॉन नैपियर (John Napier) सन् 1614 माने जाते हैं।

जैन गणितज्ञों को घातांकों के नियम का पता था। उनके अनुयोग द्वारा सूत्र में एक के बाद एक वर्गों या वर्गमूलों का वर्णन है।

आधुनिक गणित में वर्गों और वर्गमूलों को अनुक्रमानुसार दिया गया है

$$\ldots \quad (a), (a^2), [(a^2)]^2, \{(a^2)^2\}^2$$

$$\sqrt{a},\ \sqrt{\sqrt{a}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$$

इसी सूत्र में इस प्रकार के कथन भी है :

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^3$$

$$a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{8}} = \left(a^{\frac{1}{8}}\right)^3$$

इस बात के प्रमाण मिलते हैं कि बाद के काल के जैन गणितज्ञों (700ई.) ने 2 और 3 आधार के लघुगणकों का विकास भी कर लिया था। आधुनिक भाषा में $32 = 2^5$ अथवा $5=\log_2 32$

5 को 32 का अर्धछेद कहा जाता था।

- 32 का अर्धछेद $5 = \log_2 32$
- 243 का त्रिकछेद $5 = \log_3 243$
- 1024 का चतुर्थछेद $5 = \log_4 1024$

यद्यपि कैलकुलेटर और कम्प्यूटर के प्रयोग ने गणित की संक्रियाओं को अत्यधिक सरल बना दिया है तथापि लघुगणक का अनुप्रयोग अपने स्थान पर आज भी महत्वपूर्ण तथा उपयोगी है तथा लघुगणक हमारे लिए सहायक है। लघुगणक संख्याओं के घातों और घातांकों के नियमों पर आधारित है।

आइए, लघुगणक की संकल्पना एवं उससे संबंधित नियमों को समझें।

6.2 वास्तविक संख्या के परिमेय घात (Rational powers of a real number)

वास्तविक संख्याओं के घात ठीक उसी प्रकार परिभाषित होते हैं जैसे कि परिमेय संख्याओं के घात और घातांक नियम वास्तविक संख्याओं के घातों पर लागू होते हैं।

$2^3 = 8$

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$ (n गुणनखण्ड)

$a^m = a \times a \times a \times \ldots \times a$ (m गुणनखण्ड)

यदि m और n धन पूर्णांक हों तथा $m > n$ हो, तो $a \neq 0$ के लिए

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a \times a \times a \times \ldots \times a \text{ (m गुणनखण्ड)}}{a \times a \times a \times \ldots \times a \text{ (n गुणनखण्ड)}}$$

$= a \times a \times a \times \ldots \times a$ (m–n गुणनखण्ड)

$= a^{m-n}$

यदि $m = n$ हो, तो

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n} = a^0 = 1$$

यदि $m = 0$, हो तो

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

यहां $m > n$, $m = n$ अथवा $m < n$ है। वास्तविक संख्या a को हम आधार (base) और n को a के nवें घात का घातांक (exponent) कहा जाता है।

6.2.1 पूर्णांकी घातांकों के नियम (Laws of integral exponents)

यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हों, $a, b \neq 0$ और m, n दो धन पूर्णांक हों, तो

(i) $a^m . a^n = a^{m+n}$

(ii) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^n = a^n b^n$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

इन नियमों की उपपत्तियाँ सीधे परिभाषा से प्राप्त हो जाती हैं।

उदाहरण : (i) $3^2 \times 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$

(ii) $2^5 \div 2^2 = 2^{5-2} = 2^3$

(iii) $(5^3)^4 = 5^{3\times4} = 5^{12}$

(iv) $(6 \times 7)^2 = 6^2 \times 7^2$

(v) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$

परिमेय घातांक : यदि a एक वास्तविक संख्या है और $a > 0$, तो परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$ के लिए $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}}$

उदाहरण : $5^{\frac{3}{2}} = (5^3)^{\frac{1}{2}} = (125)^{\frac{1}{2}}$

6.3 लघुगणक की परिभाषा और उनके नियम (Definition and laws of logarithms) :

6.3.1 परिभाषा : यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, $a > 0$ तथा $a \neq 1$ के लिए $a^x = m$ हो, तो हम कहते हैं कि आधार a पर m का लघुगणक (logarithm) x है, इसे हम इस प्रकार लिखते हैं:

$a^x = m \Leftrightarrow \log_a{}^m = x$

यहाँ log लघुगणक (logarithm) का संक्षिप्त रूप है।

उदाहरण 1. (i) $2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$

(ii) $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$

(iii) $9^{1/2} = 3 \Leftrightarrow \log_9 3 = \frac{1}{2}$

(iv) $5^0 = 1 \Leftrightarrow \log_5 1 = 0$

यदि $\log_2 8 = x$

तो $2^x = 8$

या $2^x = 2^3$

या, $x = 3$

उदाहरण 2. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\log_3 81$ (ii) $\log_2 \sqrt{16}$ (iii) $\log_{10} 10^4$ (iv) $\log_m m^4$

हल : (i) $\log_3 81$

मान लीजिए $\log_3 81 = p \Rightarrow 3^p = 81$

$3^p = 81$

$3^p = 3^4$

$p = 4$

अत: $\log_3 81 = 4$ उत्तर

(ii) $\log_2 \sqrt{16}$

मान लीजिए $\log_2 \sqrt{16} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{16}$

$2^x = \sqrt{2^4}$

$2^x = 2^{\frac{4}{2}}$

$2^x = 2^2$

$x = 2$

अत: $\log_2 \sqrt{16} = 2$ उत्तर

(iii) $\log_{10} 10^4$

मान लीजिए $\log_{10} 10^4 = m \Rightarrow 10^m = 10^4$

या, $10^m = 10^4$

या, $m = 4$

अत: $\log_{10} 10^4 = 4$ उत्तर

(iv) $\log_m m^4$

मान लीजिए $\log_m m^4 = y \Rightarrow m^y = m^4$

या, $y = 4$, अत: $\log_m m^4 = 4$ उत्तर

टिप्पणी :

1. $x^1 = x$, $\log_x x = 1$ किसी संख्या का लघुगणक 1 होता है यदि आधार संख्या के बराबर हो। जैसे $\log_2 2 = 1$, $\log_{10} 10 = 1$, $\log_5 5 = 1$
2. यदि संख्या बढ़ती है तो उसका लघुगणक भी बढ़ता है।
3. 1 का लघुगणक शून्य होता है, कोई भी आधार होने पर। जैसे $a^0 = 1$, $\therefore \log_a 1 = 0$
4. लघुगणक में आधार 10 होने पर सामान्य (common) लघुगणक कहते हैं। जब आधार 10 है तो हम इसे उल्लेख नहीं करते हैं।

प्रश्नावली 6.1

1. निम्नलिखित को लघुगणक के रूप में लिखिए

(i) $3^2 = 9$ (iii) $10^{-2} = .01$

(ii) $5^3 = 125$ (iv) $6^0 = 1$

2. निम्नलिखित को लघुगणक के रूप में लिखिए

(i) $8^{-2} = \frac{1}{64}$ (iii) $10^{-2} = .01$

(ii) $10^{-4} = .001$ (iv) $m^n = q$

3. निम्नलिखित को घातांकी रूप में लिखिए

(i) $\log_3 243 = 5$ (iii) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$

(ii) $\log_2 1 = 0$ (iv) $\log_r n = q$

4. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\log_3 27$ (iii) $\log_{10} .001$

(ii) $\log_2 \frac{1}{4}$ (iv) $\log_6 216$

6.3.2 लघुगणकों के नियम :

निम्नलिखित विवरणों में लघुगणक का आधार a है, जहां $a > 0$ और $a \neq 1$ है।

पहला नियम : $\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_a m = x$ और $\log_a n = y$ तो $a^x = m$ और $a^y = n$

$a^x . a^y = mn$

या, $a^{x+y} = mn$

या, $\log_a mn = x+y$

या, $\boxed{\log_a mn = \log_a m + \log_a n}$

दूसरा नियम $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_a m = x$ और $\log_a n = y$ तो $a^x = m$ और $a^y = n$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n}$$

या, $a^{x-y} = \frac{m}{n}$

या, $\log_a \frac{m}{n} = x-y$

या, $\boxed{\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n}$

तीसरा नियम : $\log_a (m^n) = n \log_a m$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_a m = x$

$a^x = m$

या, $(a^x)^n = m^n$

या, $a^{nx} = m^n$

या, $\log_a(m^n) = nx$

या, $\boxed{\log_a (m^n) = n \log_a m}$

चौथा नियम : $\log_b n = \log_a n \times \log_b a$

उपपत्ति : मान लीजिए $\log_a n = u \Rightarrow n = a^u$ (यहाँ हम 'या' के स्थान पर $\Rightarrow$ का प्रयोग करते हैं)

और $\log_b a = v \Rightarrow b^v = a$

$\therefore n = a^u = (b^v)^u$ [$\because$ $(a = b^v]$

$\Rightarrow n = b^{uv} \Rightarrow \log_b n = uv$

$\Rightarrow \log_b n = \log_a n \times \log_b a$

टिप्पणी : (1) पहले नियम के अनुसार दो संख्याओं के गुणनफल का लघुगणक उनके लघुगणकों के योगफल के बराबर होता है।

(2) दूसरे नियम के अनुसार दो संख्याओं के अनुपात का लघुगणक उनके लघुगणकों के अंतर के बराबर होता है।

उदाहरण 3. (i) $2 \log x + 3 \log y = 4$ को इस रूप से लिखें जिसमें लघुगणक का प्रयोग न हो।

हल :

$$2 \log x + 3 \log y = 4$$

$$\Rightarrow \log x^2 + \log y^3 = 4 \log 10$$

$$\Rightarrow \log (x^2 y^3) = \log 10^4$$

$$\Rightarrow x^2 . y^3 = 10^4$$

(ii) $\frac{\log 4}{\log 2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{\log 4}{\log 2} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = \frac{2 \log 2}{\log 2} = 2$$

उदाहरण 4. यदि $\log x = m + n$ और $\log y = m - n$, $\log\left(\frac{10x}{y^2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए

हल :

$$\log\left(\frac{10x}{y^2}\right) = \log 10x - \log y^2$$

$$= \log 10 + \log x - 2 \log y$$

$$= 1 + m + n - 2(m - n)$$

$$= 1 + m + n - 2m + 2n$$

$$= 1 - m + 3n$$

उदाहरण 5. $\log \sqrt[4]{100}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\log \sqrt[4]{100} = \log (100)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} \log (10^2)$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 \log 10$$

$$= 2 \times \frac{1}{4} \log 10$$

$$= \frac{1}{2} \log 10$$

$$= \frac{1}{2}$$ उत्तर

उदाहरण 6. मान ज्ञात कीजिए

(i) $\log_3 27\sqrt[3]{729}$ (ii) $\log_2\sqrt{\frac{64}{16}}$ (iii) $\log_3\sqrt[3]{81}$

हल : (i) $\log_3 27\sqrt[3]{729} = \log_3 27 + \log_3\sqrt[3]{729}$

$= \log_3 27 + \log_3\sqrt[3]{3^6}$

$= \log_3 3^3 + \log_3 3^{6/3} = \log_3 3^3 + \log_3 3^2$

$= 3\log_3 3 + 2\log_3 3$

$= 3 + 2 = 5$

हल : (ii) $\log_2\sqrt{\frac{64}{16}}$ $= \log_2\sqrt{64} - \log_2\sqrt{16}$

$= \log_2\sqrt{2^6} - \log_2\sqrt{2^4}$

$= \log_2 2^3 - \log_2 2^{4/2}$

$= \log_2 2^3 - \log_2 2^2$

$= 3\log_2 2 - 2\log_2 2$

$= 3-2$

$= 1$

हल : (iii) $\log_3\sqrt[3]{81}$ $= \log_3 (81)^{1/3}$

$= \frac{1}{3}\log_3 81$

$= \frac{1}{3}\log_3 3^4$

$= 4\times\frac{1}{3}\log_3 3$

$= \frac{4}{3}\log_3 3$

$= \frac{4}{3}\times 1$

$= \frac{4}{3}$

प्रश्नावली 6.2

निम्नलिखित प्रश्नों में यदि आधार का उल्लेख न हो तो आधार 10 मान लीजिए।

1. सिद्ध कीजिए

(i) $3 \log 2 + \log 5 = \log 40$

(ii) $5 \log 3 - \log 9 = \log 27$

(iii) $5 \log 3 + \log 9 = \log 2187$

(iv) $4 \log 5 + 2 \log 4 = 4$

(v) $\log (1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$

(vi) $3 \log 4 + 2\log 5 - \frac{1}{3} \log 64 - \frac{1}{2} \log 16 = 2$

(vii) $7 \log \frac{10}{9} - 2 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$

(viii) $2 \log \left(\frac{11}{13}\right) + \log \left(\frac{130}{77}\right) - \log \left(\frac{55}{91}\right) = \log 2$

2. सिद्ध कीजिए कि

$\log (mnp) = \log m + \log n + \log p$

3. सिद्ध कीजिए कि

$\log (a_1, a_2, \dots a_k) = \log a_1 + \log a_2 + \dots + \log a_k$

4. सिद्ध कीजिए कि

$\log \left(\frac{50}{147}\right) = \log 2 + 2 \log 5 - \log 3 - 2 \log 7$

5. सिद्ध कीजिए कि $4 \log \frac{24}{25} - 16 \log \frac{9}{10} + 7 \log \frac{81}{80} = \log 5$

6. निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए

$\log (x + 1) + \log (x - 1) = \log 11 + 2 \log 3$

7. सिद्ध कीजिए

(i) $\log_5 3 \,.\, \log_3 4 \,.\, \log_2 5 = 2$

(ii) $\log_a x \,.\, \log_b y = \log_b x \times \log_a y$

8. x का मान ज्ञात कीजिए $\log x - \log(x-1) = \log 3$.

6.4 सामान्य लघुगणक (Common Logarithms) :

इस पद्धति में लघुगणक का आधार 10 लिया जाता है। जब आधार नहीं दिया होता है तब हम 10 को ही आधार मानकर लघुगणक का प्रयोग करते हैं। साधारण लघुगणक का उपयोग समस्त व्यवहारिक संख्यात्मक गणनाओं में अधिक किया जाता है। ब्रिग ने सर्वप्रथम 10 के आधार पर लघुगणक सारणी (Logarithmic Table) तैयार की। इसलिए इसको **ब्रिग पद्धति** भी कहते हैं।

टिप्पणी : सभी प्रायोगिक गणनाओं में जहाँ आधार नहीं दिया गया हो वहाँ इसे 10 माना जाता है।

6.4.1 आधार 10 के सापेक्ष लघुगणक

आधर 10 पर लघुगणक का प्रयोग करना अति सुविधाजनक है। आइए निम्नलिखित उदाहरणों को देखें

$\log_{10} 1000 = 3$, क्योंकि $10^3 = 1000$

$\log_{10} 100 = 2$, क्योंकि $10^2 = 100$

$\log_{10} 10 = 1$, क्योंकि $10^1 = 10$

$\log_{10} 1 = 0$, क्योंकि $10^0 = 1$

$\log_{10} 0.1 = -1$, क्योंकि $10^{-1} = 0.1$

$\log_{10} 0.01 = -2$, क्योंकि $10^{-2} = 0.01$

$\log_{10} 0.001 = -3$, क्योंकि $10^{-3} = 0.001$

6.4.2 दशमलव का मानक रूप :

दशमलव रूप में दी गई किसी भी संख्या को हम दो संख्याओं

(i) 10 की पूर्णांकी घात

(ii) 1 और 10 के बीच की संख्या के गुणनफल के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए

(1) 36.2, 10 और 100 के बीच में

$$\therefore 36.2 = \frac{36.2 \times 10^1}{10} = 3.62 \times 10^1$$

(2) 10001, 10000 और 100000 के बीच में

$$\therefore 10001 = \frac{10001}{10^4} \times 10^4$$

$$= 1.0001 \times 10^4$$

(3) .006, 0.001 और .01 के बीच में

$$\therefore .006 = \frac{.006 \times 10^3}{10^3}$$

$$= 6.0 \times 10^{-3}$$

(4) .00015, .0001 और .001 के बीच में

$$\therefore 0.00015 = \frac{.00015 \times 10^4}{10^4}$$

$$= 1.5 \times 10^{-4}$$

प्रत्येक स्थिति में, हम दिए हुए दशमलव को 10 की एक ऐसी घात से भाग या गुणा करते हैं कि दशमलव बिन्दु के बाई ओर केवल एक शून्येत्तर अंक रह जाए और फिर 10 के उसी घात से विपरीत संक्रिया करते हैं और उसे अलग से प्रकट करते हैं। अत: प्रत्येक धन दशमलव को इस प्रकार लिख सकते हैं-

$n = m \times 10^p$

जहां p पूर्णांक (धन, ऋण अथवा शून्य है,, और $1 \leq m < 10$ है। दशमलव के इस रूप को n का मानक रूप (standard form of n) कहते हैं।

दशमलव संख्या को मानक रूप में लिखने के चरण

चरण (1) दशमलव बिन्दु के बाई ओर शून्येत्तर अंक आने के लिए आवश्यकतानुसार बिन्दु को कुछ स्थान दाई या बाई ओर ले जाइए।

चरण (2) (i) यदि आप दशमलव बिन्दु को p स्थान बाई ओर ले गए हैं तो प्राप्त दशमलव को 10^p से गुणा कीजिए।

(ii) यदि आप दशमलव बिन्दु को p स्थान दाई ओर ले गए हैं तो प्राप्त दशमलव को 10^{-p} से गुणा कीजिए।

(iii) यदि आप ने दशमलव बिन्दु को स्थानांतरित नहीं किया तो प्राप्त दशमलव को 10^0 से गुणा करें।

(iv) दिए गए दशमलव का मानक रूप प्राप्त करने के लिए 10 की घात से प्राप्त नया दशमलव लिखें।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्नलिखित संख्याओं को दशमलव रूप में लिखिए जिनमें 10 के घात का कोई गुणनखण्ड न हो

(i) 2.3×10^2

(ii) 2.5×10^{-3}

(iii) 1.3×10^{-1}

(iv) 61.25×10^{-2}

(v) 61.25×10^2

(vi) 8.132×10^5

2. निम्नलिखित में प्रत्येक को मानक रूप में लिखिए

(i) 6.234

(ii) 62.34

(iii) 623.4

(iv) 6234

(v) 62340

(vi) .06234

6.5 लघुगणकों का पूर्णांश एवं अपूर्णांश (Characteristic and Mantissa of the Logarithms)

प्रत्येक संख्या का लघुगणक दो संख्याओं का योगफल होता है, जिनमें एक संख्या पूर्णांक तथा दूसरी दशमलव में होती है। मान लीजिए संख्या n का मानक रूप :

$n = m \times 10^p$ जहां $1 \leq m < 10$

दोनों पक्षों का आधार 10 पर लघुगणक लेने और लघुगणक नियमों का प्रयोग करने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\begin{aligned} \log n &= \log m + \log 10^p \\ &= \log m + p \log 10 \\ &= P + \log m \end{aligned}$$

जहाँ P एक पूर्णांक है, और चूंकि $1 \leq m < 10$, अतः $0 \leq \log m < 1$, log m का मान सदैव 0 और 1 के बीच में होता है।

जब log n को P + log m के रूप में लिखा जाता है, जहां P एक पूर्णांक है और $0 \leq \log m < 1$, तब हम P को log n का पूर्णांश (characteristic) कहेंगे और log m को log n का अपूर्णांश

(Mantissa) कहेंगे। ध्यान दीजिए कि पूर्णांश सदैव एक पूर्णांक (धन, ऋण व शून्य) होता है और अपूर्णांश कभी भी ऋणात्मक नहीं होता। वह सदैव संख्या 1 से कम होता है। यदि हमें log n के पूर्णांश और अपूर्णांश ज्ञात हो जाये, तो log n प्राप्त करने के लिए हमें उन्हें केवल जोड़ना होता है, इस प्रकार, हम log n निम्नलिखित रूप में ज्ञात करेंगे-

1. संख्या n को मानक रूप में लिखिए। जैसे $n = m \times 10^p$, $1 \leq m < 10$
2. (10 के घातांक वाले) इस व्यंजक से log n का पूर्णांश देखिए।
3. लघुगणक सारणी से, log m का मान देखिए जिसकी विधि हम नीचे बताएंगे।
4. $\log n = P + \log m$ लिखिए।

यदि किसी संख्या n का पूर्णांश P मान लीजिए 2 हो और अपूर्णांश .4133 हो, तो $\log n = 2 + .4133$ जिसे हम 2.4133 लिख सकते हैं। परन्तु यदि किसी संख्या m का पूर्णांश P मान लीजिए –2 है और अपूर्णांश 0.4123 तो $\log m = -2 + .4123$ हम इसे –2.4123 नहीं लिख सकते हैं (क्यों?) इस भ्रम को दूर करने के लिए हम –2 के स्थान पर $\bar{2}$ लिखते हैं और इस प्रकार $\log m = \bar{2} + .4123$ हैं।

टिप्पणी : पूर्णांश धनात्मक या ऋणात्मक संख्या हो सकती है जबकि भिन्नांश (अपूर्णांश) को सदैव धनात्मक रखा जाना चाहिए।

6.5.1 किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश ज्ञात करने की विधि

घातांक के नियम से हम जानते हैं कि

$$10^0 = 1 \quad \therefore \log_{10} 1 = 0$$
$$10^1 = 10 \quad \therefore \log_{10} 10 = 1$$
$$10^2 = 100 \quad \therefore \log_{10} 100 = 2$$
$$10^3 = 1000 \quad \therefore \log_{10} 1000 = 3$$

इन परिणामों से स्पष्ट है कि 1 और 10 के मध्य संख्याओं के लघुगणक 0 और 1 के मध्य होंगे, अर्थात पूर्णांकों में एक अंक संख्या के लघुगणक 0+ एक धनात्मक भिन्न होगी जिसमें पूर्णांश 0 है। 10 और 100 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 1 और 2 के मध्य होंगे, अर्थात पूर्णांश 1 होगा। इसी प्रकार 100 और 1000 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक 2 और 3 के मध्य होंगे, अर्थात् पूर्णांश 2 होगा।

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि 1 या इससे बड़ी किसी संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव धनात्मक होता है एवं संख्या के लघुगणक का पूर्णांक भाग के अंकों की संख्या से एक कम होता है। जैसे लघुगणक के पूर्णांक भाग में n अंक हैं तो इसका पूर्णांश (n–1) होगा।

उदाहरण : संख्या 42.5 के पूर्णांक भाग (42) में दो अंक है अत: इसके लघुगणक अर्थात log 42.5 का पूर्णांश 2–1 =1 होगा। इसी प्रकार log 425.23 का पूर्णांश 3–1 = 2 होगा।

(ii) 0 से बड़ी और 1 से छोटी संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश-

हम जानते हैं कि

$10^0 = 1$ $\therefore \log_{10} 1 = 0$

$10^{-1} = \frac{1}{10} = .1$ $\therefore \log_{10} .1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{100} = .01$ $\therefore \log_{10} .01 = -2$

$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$ $\therefore \log_{10} .001 = -3$

इन परिणामों से स्पष्ट है कि .1 और 1 के मध्य की सभी संख्याओं का लघुगणक का पूर्णांश –1 होगा अर्थात दशमलव के पश्चात् सार्थक अंक से पूर्व एक भी शून्य न रखने वाली संख्या के लघुगणक का पूर्णांश –1 होगा।

0.01 और .1 के मध्य की संख्याओं के लघुगणक का पूर्णांश –2 होगा अर्थात दशमलव के पश्चात सार्थक अंक से पूर्व एक शून्य रखने वाली संख्या के लघुगणक का पूर्णांश –2 होगा।

इस प्रकार 1 से कम किसी धनात्मक संख्या के लघुगणक का पूर्णांश सदैव ऋणात्मक एवं दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य आये हुए शून्य की संख्याओं से एक अधिक होता है, जैसे दशमलव व प्रथम सार्थक अंक के मध्य n शून्य आयें तो इसके लघुगणक का पूर्णांश –(n+1) या $\left(\overline{n+1}\right)$ होगा।

उदाहरण : log .032 का पूर्णांश –2 तथा log .00035 का पूर्णांश –4 होगा।

टिप्पणी : सार्थक अंक (Significant digit): दशमलव बिन्दु के पश्चात् शून्येतर संख्या से पहले के अथवा अंत के सभी शून्यों को हटा देने पर जो अंक बचते हैं वे सार्थक अंक कहलाते हैं, जैसे .000123 अथवा .123000 में सार्थक अंक 123 हैं तथा 1 प्रथम सार्थक अंक है। अब यदि 1 से छोटी धन संख्याओं जैसे 0.0003 अथवा 0.007294 का लघुगणक ज्ञात करना हो तो हम देखते हैं कि

$$\log 0.0003 = \log \frac{3}{10000} = \log (3\times10^{-4})$$

$$= \log 10^{-4} + \log 3$$

$$= -4 + 0.4771$$

$$= \bar{4}.4771$$

और $\log 0.007294 = \log \frac{7.294}{1000}$

$$= \log 7.294 \times 10^{-3}$$

$= \log 10^{-3} + \log 7.294$

$= -3 + 0.8629$

$= \bar{3}.8629$

पूर्णांश ज्ञात करने की क्रियाविधि

(i) यदि दी गई संख्या 1 से बड़ी हो, तो

पूर्णांश = (दशमलव बिन्दु के बाई ओर अंकों की संख्या) – 1

(ii) यदि दी गयी संख्या 1 से कम हो

पूर्णांश = – {(दशमलव बिन्दु और प्रथम सार्थक अंक के मध्य शून्यों की संख्या) +1}

6.5.2 किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने की विधि

किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए हम लघुगणक सारणी (logarithm Table) को प्रयोग में लाते हैं। यह सारणी पुस्तक के अंत में दी गई है।

लघुगणक सारणी की निम्नलिखित विशेषताएं होती हैं-

(1) इनमें किसी संख्या के लघुगणक के भिन्नांश ही होते हैं।

(2) सारणी के तीन भाग होते हैं-

- (i) प्रथम भाग, इसमें 10 से 99 तक की संख्याएँ प्रथम स्तंभ में होती हैं।
- (ii) अगले दस स्तंभ : इसका प्रतिनिधित्व 0, 1, 2, 3... 9 तक की संख्याएँ करती हैं।
- (iii) माध्य अंतर के स्तंभ : अंत की तीन स्तंभ जो प्रत्येक तीन उप स्तम्भों में विभक्त होते हैं एवं इनका प्रतिनिधित्व 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 संख्याएँ करती हैं।

अपूर्णांश ज्ञात करने की क्रिया विधि :

भिन्नांश ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि का प्रयोग करते हैं। इसे एक उदाहरण log 38.56 के माध्यम से स्पष्ट किया गया है।

(i) दी गई संख्या में यदि कोई दशमलव है तो उसे हटा दें। अत: यहाँ नई संख्या 3856 हो जाएगी।

(ii) प्राप्त संख्या के प्रथम दो अंकों से बनी संख्या सारणी के बांयीं ओर प्रथम स्तंभ में देखते हैं। यहाँ यह संख्या 38 है अत: प्रथम स्तंभ में हम 38 पर पहुँचते हैं।

(iii) चरण (i) में प्रस्तुत संख्या के तीसरे अंक 5 को सारणी के अगले दस स्तंभों में देखते हैं।

(iv) संख्या 38 की पंक्ति तथा अंक 5 का स्तंभ जहाँ मिलते हैं उस मान को लिख लेते हैं यहाँ पर यह मान 5855 है।

(v) चरण (i) में प्राप्त अनुपातिक संख्या के चौथे अंक 6 को सारणी के दांयी ओर दी गई मध्य अंतरिकी संख्याओं में देखते हैं।

(vi) संख्या 38 की पंक्ति तथा अनुपातिक अंक 6 के स्तंभ जहाँ परस्पर मिलते हैं वह मान 7 है।

(vii) इस प्रकार चरण (iv) तथा (vi) में प्राप्त संख्याओं का योग 5855+7 = 5862 है। दशमलव बिन्दु के पश्चात् यह संख्या लिखने पर हमें अपूर्णांश ज्ञात होता है।

$\because$ log 38.56 का अपूर्णांश .5862 है।

टिप्पणी : (i) दिये गये परिणामों से स्पष्ट है कि भिन्नांश के लिए प्राप्त संख्या के बाई ओर दशमलव बिन्दु लगाते हैं।

(ii) यदि जिस संख्या का लघुगणक ज्ञात करना है वह एक अंक की हो तो उसके आगे शून्य लिखकर उसका अपूर्णांश ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : log3 का अपूर्णांश ज्ञात करना है तो हम log 30 या log 300 का अपूर्णांश सारणी से ज्ञात करते हैं। log 3 का अपूर्णांश .4777 होगा।

(iii) यदि किसी लघुगणक में चार सार्थक अंकों से अधिक अंक हो तो चार अंकों का लघुगणक सारणी का उपयोग करते समय (क) आगे के अंक 5 से कम होने पर छोड़ देते हैं। (ख) आगे के अंक 5 या अधिक होने पर पूर्व के अंक को 1 संख्या जोड़कर लिख देते हैं। अत: प्राप्त चार अंकों की संख्या से अपूर्णांश ज्ञात करते हैं।

यदि किसी संख्या का लघुगणक ज्ञात करना है तो सबसे पहले हम मानक रूप में लिखते हैं, जैसे

$$n = m \times 10^p$$

$$\log n = \log m + p \log 10$$

$$\log n = p + \log m$$

जहाँ p पूर्णांश है। हम निम्न उदाहरणों के द्वारा पूर्णांश और अपूर्णांश ज्ञात करेंगे। लघुगणक केवल उन संख्याओं का ज्ञात करेंगे जिसमें केवल चार अंक हो।

संख्या	मानक रूप	पूर्णांश
62345.2	6.23452×10^4	4
6234.52	6.23452×10^3	3
623.452	6.23452×10^2	2
62.3452	6.23452×10^1	1
6.23452	6.23452×10^0	0
.623452	6.23452×10^{-1}	–1
.0623452	6.23452×10^{-2}	–2
.00623452	6.23452×10^{-3}	–3

अपूर्णांश ज्ञात करने के लिये लघुगणक सारणी का प्रयोग किया जाता है। आइए हम लघुगणक सारणी से अपूर्णांश ज्ञात करना सीखे। उपर्युक्त उदाहरणों में अपूर्णांश log 6.2345 है क्योंकि

$$62345.2 = 6.23452 \times 10^4$$

$$\log 62345.2 = \log 6.23452 + 4 \log 10$$

$$\log 62345.2 = 4 + \log 6.23452$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2 3 4 4 5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2 3 4 4 5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2 3 3 4 5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2 3 3 4 5 6 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8196	8102	8109	8116	8122	1 1 2 3 3 4 5 5 6

$$\log 62345.2 = 4 + .7948$$

$$= 4.7948$$

उदाहरण 7. नीचे दी गई संख्या के लघुगणक के पूर्णांश ज्ञात कीजिए-

(i) 5970 (ii) 225.35 (iii) 3.5795

(iv) 0.8598 (v) 0.0084

हल : (i) संख्या 5970 में 4 अंक हैं।

अत: इसके लघुगणक का पूर्णांश 4 – 1 = 3 है।

(ii) संख्या 225.35 में पूर्णांश 225 है जिसमें 3 अंक हैं। अत: संख्या 225.35 के लघुगणक का पूर्णांश 3–1 = 2 होगा।

(iii) संख्या 3.5795 में पूर्णांक 3 है जो कि एक अंक है अत: लघुगणक में पूर्णांश 1–1 = 0 होगा।

(iv) संख्या 0.8598 में दशमलव बिन्दु तथा प्रथम अंक 8 के मध्य एक भी शून्य नहीं है, अत: लघुगणक का पूर्णांश = –(0+1) = –1 या $\bar{1}$ होगा।

(v) संख्या 0.0084 में दशमलव बिन्दु तथा प्रथम सार्थक अंक 8 के मध्य 2 शून्य है अत: इस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश –(2+1) = –3 या $\bar{3}$ होगा।

उदाहरण 8. लघुगणक की सारणी की सहायता से निम्नलिखित संख्याओं का लघुगणक ज्ञात कीजिए-

(i) 2579 (ii) 5.3498 (iii) 0.3582 (iv) 0.003

हल : (i) संख्या 2579 में 4 अंक है अत: log 2579 का पूर्णांश = 4–1 = 3 होगा। संख्या के प्रथम दो अंकों 25 के संगत पंक्ति तथा तीसरे अंक 7 के संगत स्तंभ परस्पर जहाँ मिलते हो वह मान 4099 है। अब चौथे अंक 9 जो अनुपातिक अंक है के संगत स्तंभ तथा अंक 25 के संगत पंक्ति परस्पर जहाँ मिलते हों वह मान 15 है अब 15 को .4099 में योग करने से (4099 + 15) = 4114 प्राप्त होता है।

$\therefore \log 2579 = 3.4114$

(ii) log 5.3498 के लिए पूर्णांश 1–1 = 0, दी गई संख्या में पाँच अंक दिये हैं, जबकि हमें चार अंकों वाली सारणी से इसका मान ज्ञात करना है। अत: पांचवाँ अंक 5 से अधिक होने के कारण चौथे अंक में एक जोड़ने पर यह 10 हो जाता है, अत: चौथा अंक शून्य तथा तीसरा अंक 4 से 1 अधिक होकर 5 हो जाएगा। इस प्रकार हमें 5350 का लघुगणक ज्ञात करना है। अब लघुगणक सारणी में 53 वाली पंक्ति में एवं शीर्ष 5 वाले स्तंभ के कटान बिन्दु देखने पर यह 7284 आता है।

अत: log 5.3498 का मान 0.7284 होगा।

(iii) log (0.3582) के लिए पूर्णांश $= -(0+1) = -1 = \bar{1}$

भिन्नांश $= .(5539+2) = .5541$

$\therefore \log 0.3582 = \bar{1}.5541$

(iv) log 0.003 के लिए पूर्णांश $= -(2+1) = -3 = \bar{3}$

भिन्नांश $= .(4771)$

$\therefore \log 0.003 = \bar{3}.4771$

प्रश्नावली 6.4

1. निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक के पूर्णांश लिखिए

   (i) 2170 (ii) 30.125 (iii) 8.895

   (iv) 0.02 (v) 54 (vi) 0.0038

2. लघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नलिखित संख्याओं के लघुगणक लिखिए

   (i) 3182 (ii) 300 (iii) 38.27

   (iv) 8 (v) 0.0036 (vi) 0.0003258

6.6 प्रति लघुगणक तथा प्रतिलघुगणक सारणी (Antilogarithms and Antilogarithm tables)

लघुगणक की विपरीत क्रिया को प्रतिलघुगणक कहते हैं। इस प्रकार एक धनात्मक संख्या n किसी अन्य संख्या m का प्रति लघुगणक होती है, यदि $\log n = m$ अर्थात m का प्रतिलघुगणक n होता है

$\log n = m \Leftrightarrow \text{antilog } m = n$

(i) $\log 300 = 2.4771 \Leftrightarrow \text{antilog } 2.4771 = 300$

(ii) $\log 432.5 = 2.6360 \Leftrightarrow \text{antilog } 2.6360 = 432.5$

(iii) $\log 0.1257 = \bar{1}.0993 \Leftrightarrow \text{antilog } (\bar{1}.0993) = 0.1257$

(iv) $\log 0.000425 = \bar{4}.6284 \Leftrightarrow \text{antilog } (\bar{4}.6284) = 0.000425$

लघुगणक सारणी से भी लघुगणक ज्ञात करने की विपरीत प्रक्रिया अपना कर प्रतिलघुगणक ज्ञात कर सकते हैं। प्रतिलघुगणक ज्ञात करने के लिये इस पुस्तक के अंत में उपलब्ध प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

प्रतिलघुगणक ज्ञात करने की विधि

(i) दिए गए logn के मान के पूर्णांश भाग को छोड़ते हुए अपूर्णांश (धनात्मक है) के प्रथम दो अंकों के संगत प्रतिलघुगणक सारणी में पंक्ति का चयन करते हैं।

(ii) चरण (i) में चयनित पंक्ति में उस संख्या को देखते हैं जो अपूर्णांश के तीसरे अंक के शीर्ष वाले स्तंभ में हो।

(iii) चरण (i) में चयनित की गई पंक्ति में ही उस संख्या को देखते हैं जो अपूर्णांश के चौथे अंक के शीर्ष वाले अनुपातिक अंतर के स्तंभ में है। इस संख्या को चरण (ii) में प्राप्त संख्या में जोड़ देते हैं।

(iv) अब दिए गए log n के मान के पूर्णांश पर ध्यान देंगे। यदि यह पूर्णांश धनात्मक माना m है तो चरण (iii) में प्राप्त संख्या (m+1) अंकों के पश्चात् दशमलव बिन्दु लगायेंगे। यदि पूर्णांश ऋणात्मक, माना m है तो दशमलव बिन्दु के दाई ओर (n–1) शून्य लिखकर उसके पश्चात् चरण (iii) में प्राप्त संख्या को लिखेंगे।

टिप्पणी : यदि दिए गये log n का मान ऋणात्मक है तो इसके अपूर्णांश वाले भाग को धनात्मक बनाने के लिये इसमें 1 जोड़ कर पूर्णांश भाग में से 1 घटा देंगे। इस प्रकार प्राप्त संख्या का ही हम प्रतिलघुगणक ज्ञात करेंगे।

उदाहरण : –3.6432 में दशमलव भिन्न –0.6432 ऋणात्मक है। अत: हम –3.6432 को नीचे लिखे रूप में परिवर्तित करेंगे :

$$\begin{aligned} -3.6432 &= -3-1+1-0.6432 \\ &= -4+0.3568 \\ &= \bar{4}.3568 \end{aligned}$$

उदाहरण 9. 2.7523 का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल : (i) 2.7523 में भिन्नांश (अपूर्णांश) .7523 है।

(ii) प्रति लघुगणक सारणी से हम देखते हैं कि प्रथम स्तंभ में .75 के संगत पंक्ति तथा तीसरे अंक 2 के शीर्ष वाले स्तंभ की उभयनिष्ठ संख्या 5649 है।

(iii) अनुपातिक अंतर में 3 के नीचे इसी पंक्ति में संख्या 4 है।

(iv) चरण (ii) तथा (iii) की संख्याओं का योग $5649 + 4 = 5653$

(v) दी गई संख्या का पूर्णांश 2 है अत: संख्या का प्रतिलघुगणक 3 अंकों वाली संख्या होगी।

(vi) चरण (iv) में प्राप्त संख्या को तीन अंकों की संख्या बनाने के लिए उपयुक्त स्थान का दशमलव बिन्दु लगाकर इसे 565.3 लिखेंगे।

अत: $\text{antilog } 2.7523 = 565.3$.

उदाहरण 10. $\bar{3}.0258$ का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल : (i) $\bar{3}.0258$ में भिन्नांश (अपूर्णांश) .0258 है।

(ii) .02 की पंक्ति तथा शीर्ष 5 वाले स्तंभ की उभयनिष्ठ संख्या 1059 है।

(iii) इसी पंक्ति में वह संख्या जो शीर्ष 8 वाले अनुपातिक अंतर के स्तंभ में ही रहे।

(iv) $\therefore 1059 + 2 = 1061$

(v) दी गई संख्या का पूर्णांश $\bar{3}$ है अत: $3-1 = 2$

(iv) से प्राप्त संख्या को .001061 लिखते हैं।

उदाहरण 11. यदि $\log x = 2.1997$ हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रति लघुगणक सारणी से, हम देखते हैं कि 1997 की संगत संख्या 1584 है और दी गई संख्या 2.1997 में पूर्णांश 2 है अत: प्राप्त संख्या 1584 को हम 158.4 लिखेंगे।

$$\therefore x = 158.4$$

उदाहरण 12. यदि $\log n = \bar{2}.5372$ है, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : प्रति लघुगणक सारणी से हम देखते हैं कि 5372 की संगत संख्या 3445 है और $\bar{2}.5372$ में पूर्णांश $\bar{2}$ है अर्थात -2 है।

$$\therefore x = 3.443 \times 10^{-2}$$
$$= 0.03445$$

उदाहरण 13. 0.0542 का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

हल : प्रति लघुगणक सारणी से हम देखते हैं कि 0.0542 की संगत संख्या 1133 है और 0.0542 का पूर्णांश 0 है अत:

$$\therefore x = 1.133 \times 10^{0}$$
$$= 1.133$$

प्रश्नावली 6.5

1. निम्नलिखित संख्याओं का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए

(i) 2.310 (ii) 3.4128 (iii) 0.0845

(iv) $\bar{2}.301$ (v) $\bar{4}.2462$

2. मान ज्ञात कीजिए

(i) antilog 4.2234 (ii) antilog $\bar{3}.5821$

(iii) antilog 0.5 (iv) antilog 0.0055

3. निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए

(i) $\log x = 0.0769$ (ii) $\log x = \bar{3}.5727$

(iii) $\log x = \bar{1}.138$ (iv) $\log x = 0.352$

4. नीचे दी गई प्रत्येक संख्या किसी संख्या का लघुगणक है। प्रत्येक को P+log m के रूप में लिखिए जहाँ P पूर्णांश और logm अपूर्णांश है। वह संख्या ज्ञात कीजिए

(i) 2.2016 (ii) –1.3048

(iii) –3.4623 (iv) –0.48

6.7 संख्यात्मक परिकलनों से लघुगणक का प्रयोग (Use of logarithms in numerical calculations)

उदाहरण 14. 3.6×1.52 ज्ञात कीजिए

हल : मान लीजिए $x = 3.6 \times 1.52$

तो $\log x = \log(3.6 \times 1.52)$

$= \log 3.6 + \log 1.52$

$\log 3.6 = 0.5563$

$\log 1.52 = 0.1818$

$\log x = 0.5563 + 0.1818$

$\log x = 0.7381$

$x = \text{antilog } 0.7381$

$x = 5.471$

उदाहरण 15. $\sqrt[3]{72.3}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : मान लीजिए $x = \sqrt[3]{72.3}$

$$\log x = \log (72.3)^{1/3}$$

$$\log x = \frac{1}{3} \log 72.3$$

$$\log x = \frac{1}{3} (1.8591)$$

$$\log x = 0.6197$$

$$x = \text{antilog } 0.6197$$

$$x = 4.166$$

उदाहरण 16. $\left(\frac{5^2 \times 3^7}{7^2 \times 2}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : मान लीजिए $x = \frac{5^2 \times 3^7}{7^2 \times 2}$

$$\log x = \log (5^2 \times 3^7) - \log (7^2 \times 2)$$

$$= \log 5^2 + \log 3^7 - \log 7^2 - \log 2$$

$$= 2 \log 5 + 7 \log 3 - 2 \log 7 - \log 2$$

$$2\log 5 = 2 \times (.6990)$$

$$= 1.3980$$

$$7\log 3 = 7 \times .4771$$

$$= 3.3397$$

$$2\log 7 = 2 \times .8451$$

$$= 1.6902$$

$$\log 2 = .3010$$

$$\log x = 1.3980 + 3.3397 - 1.6902 - .3010$$

$$= 4.7377 - 1.9912$$

$$= 2.7465$$

$$x = \text{antilog } 2.7465$$

$$x = 557.8$$

उदाहरण 17. $\frac{(1.23)^{1.5}}{11.2 \times 23.5}$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : मान लीजिए, $x = \frac{(1.23)^{\frac{3}{2}}}{11.2 \times 23.5}$

तो $\log x = \log \frac{(1.23)^{\frac{3}{2}}}{11.2 \times 23.5}$

$$= \log (1.23)^{3/2} - \log 11.2 - \log 23.5$$

$$= \frac{3}{2}\log 1.23 - \log 11.2 - \log 23.5$$

अब, $\log 1.23 = 0.0899$

$\frac{3}{2} \log 1.23 = 0.13485$

$\log 11.2 = 1.0492$

$\log 23.5 = 1.3711$

$\log x = 0.13485 - 1.0492 - 1.3711$

$= \bar{3}.71455$

$\therefore x = 0.005183$

प्रश्नावली 6.6

1. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए

(i) 0.0865×1.507

(ii) 16.4×981.4

(iii) $\frac{2.236}{0.0042}$

(iv) $\frac{8.25 \times 4.63}{3.28}$

(v) $\frac{3}{4} \times 2.143 \times (1.2)^3$

(vi) $(0.623)^3$

(vii) $352.6 \times 0.078 \times 0.5943$

(viii) $2465 \times .000007$

(ix) $(0.09634)^3$

(x) $\sqrt[5]{42.7}$

2. 48 का घनमूल दशमलव के दो स्थान तक शुद्ध मान ज्ञात कीजिए।
3. 2^{64} का लघुगणक लिखिए और इसकी सहायता से बताइए कि 2^{64} के संख्यांक में कितने अंक होंगे।
4. दशमलव के तीन स्थान तक शुद्ध मान ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{456.3 \times \sqrt[3]{0.4573}}{(6.15)^3}$

(ii) $\frac{(56.73)^3 \times (0.0371)^2}{86.21}$

6.10 अनुप्रयोग (Application)

लघुगणक को प्रयोग करके हम गुणा, भाग अथवा घातांकों से युक्त समस्याओं को क्रमशः योग, व्यवकलन व गुणन में परिवर्तित करके कम समय में और आसानी से हल कर सकते हैं। आइए, हम

लघुगणक के विभिन्न नियमों का प्रयोग करके व्यवहारिक जीवन के अनेक क्षेत्रों में इसके महत्व को निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा जानें।

(क) चक्रवृद्धि ब्याज

उदाहरण 18. 2700 रुपये पर 5 वर्ष का 10% वार्षिक की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल : मूलधन P, ब्याज दर R, समय n तथा गणना वार्षिक हो तो,

मिश्रधन $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

जहाँ $P = 2700$ रु.

$R = 10\%$

$n = 5$ वर्ष

अत: $A = 2700\left(1+\frac{10}{100}\right)^5$

या $A = 2700\left(\frac{11}{10}\right)^5$

दोनों तरफ log लेने पर

$\log A = \log 2700 + 5\log 11 - 5\log 10$

या $\log A = 3.4314 + 5\,(1.0414 - 1)$

$\log A = 3.4314 + 0.2070$

$\log A = 3.6384$

$A = \text{antilog}\ 3.6384$

$\Leftrightarrow\ A = 4349$ रु.

चक्रवृद्धि ब्याज $= 4349 - 2700$

$= 1649$ रु.

(ख) जनसंख्या वृद्धि : जब जनसंख्या का परिमाण एक दी हुई अवधि में बढ़ जाए, तो हम कहते हैं कि इस अवधि में वृद्धि हो गई। इस जनसंख्या की वृद्धि को मापने के लिए उस बढ़े हुए परिमाण का प्रारंभिक परिमाण से अनुपात होता हैं। इसी के सापेक्ष बढ़ोत्तरी को ही वृद्धि कहते हैं।

मान लीजिए जनसंख्या P_0 हो और इकाई अवधि के अंत पर परिमाण P_1 हो तो अनुपात $= \frac{p_1 - p_0}{p_0}$

एक इकाई अवधि में वृद्धि है। हम इसे वृद्धि की दर (rate of growth) कहते हैं। इस प्रकार, वृद्धि की दर = वृद्धि प्रति इकाई अवधि

सामान्य रूप से हम वृद्धि की दर को प्रतिशत रूप में प्रकट करते हैं। यदि r% वार्षिक वृद्धि दर है, तो n वर्ष के अंत में जनसंख्या होगी।

$$P_1 = P_0 \left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

यह सूत्र चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के अनुरूप है। अत: परिकलन भी इसी प्रकार किए जाते हैं।

उदाहरण 19. एक शहर की वर्तमान जनसंख्या 3,00,000 है। यदि शहर की जनसंख्या 10% वार्षिक दर से बढ़े तो 3 वर्ष पश्चात शहर की जनसंख्या कितनी हो जायेगी?

हल : यहाँ P वर्तमान जनसंख्या = 3,00,000

P_n = 3 वर्ष पश्चात की अनुमानित जनसंख्या

R = वृद्धि की दर 10% वार्षिक

n = समय

= 3 वर्ष

अत: $P_n = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$P_n = 3,00,000 \left(1+\frac{10}{100}\right)^3$$

$$P_n = 3,00,000 \left(\frac{11}{10}\right)^3$$

$$\log P_n = \log 3,00,000 + 3\,(\log 11 - \log 10)$$

$$\log P_n = 5.4771 + 3\,(1.0414 - 1)$$

$$\log P_n = 5.4771 + 3 \times 0.0414$$

$$\log P_n = 5.4771 + 0.1242$$

$$\log P_n = 5.6013$$

$$P_n = \text{antilog } 5.6013$$

$$P_n = 3,99,300$$

अत: शहर की जनसंख्या 3 वर्ष पश्चात् 3,99,300 हो जायेगी। उत्तर

(घ) क्षेत्रमिति : कुछ समतल आकृतियों के क्षेत्रफल संबंधी निम्नलिखित सूत्रों को पुनः याद करें:

(1) $A = ab$ सेमी^{2} (A आयात का क्षेत्रफल, भुजाएँ a सेमी और b सेमी)

(2) $A = ah$ सेमी^{2} (A समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल, आधार a सेमी, ऊँचाई h सेमी)

(3) $A = \frac{1}{2}ah$ सेमी^{2} (A त्रिभुज का क्षेत्रफल, आधार a सेमी, ऊंचाई h सेमी.

(4) $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ सेमी^{2} (A त्रिभुज का क्षेत्रफल, भुजाएँ a सेमी, b सेमी, c सेमी तथा 2s=a+b+c)

(5) $A = \frac{1}{2}d_1d_2$ सेमी^{2} (A समचतुर्भुज का क्षेत्रफल, विकर्ण : d_1 सेमी, d_2 सेमी)

(6) $A = \frac{1}{2}(a+b)h$ सेमी^{2} (A समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल भुजाएँ a सेमी, b सेमी) ऊंचाई h सेमी.

उदाहरण 20. एक त्रिभुज की भुजाओं के माप 30 सेमी, 16 सेमी और 28 सेमी हों, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए ΔABC एक त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ 30 सेमी, 28 सेमी, 16 सेमी है।

ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ सेमी^{2}

$a = 30$ सेमी, $c = 28$ सेमी, $b = 16$ सेमी.

जहाँ $(2s = a + b + c)$

$2s = 30 + 28 + 16 = 74$ सेमी

$s = \frac{74}{2} = 37$ सेमी

$A = \sqrt{37\times(37-16)(37-28)(37-30)}$ सेमी^{2}

$= \sqrt{37\times21\times9\times7}$ सेमी^{2}

$A = \sqrt{37\times21\times9\times7}$

लघुगणक लेने पर

$$\log A = \frac{1}{2}(\log 37 + \log 21 + \log 9 + \log 7)$$

$$= \frac{1}{2}(1.5682 + 1.3222 + 0.9542 + 0.8451)$$

$$= \frac{1}{2}(4.6897)$$

$$= 2.3449$$

$$A = 221.3 \text{ सेमी}^2$$

अत: Δ ABC का क्षेत्रफल = 221.3 सेमी^{2}

प्रश्नावली 6.7

1. एक व्यक्ति ने 28 वर्ष की आयु में 10,000 रुपये एक बचत बैंक के खाते में जमा किये। यदि ब्याज की दर 5% प्रतिवर्ष है तो बताइए कि जब उसकी आयु 38 वर्ष होगी तो उसे कुल कितनी राशि मिलेगी।
2. 5% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कितने वर्षों में मूलधन दुगना हो जाएगा?
3. एक समबाहु त्रिभुज की प्रत्येक भुजा 22.8 से.मी. लम्बी है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक कस्बे की वर्तमान जनसंख्या 1,20,000 है। यदि जनसंख्या 2 वर्ष में 1,37,400 हो जाती है तो जनसंख्या का वार्षिक दर कितनी होगी।

याद रखने योग्य बातें :

- यदि $a^x = n$ हो तो $\log_a n = x$ $[a > 0,\ a \neq 1,\ n > 0)]$
- $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$
- $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
- $\log_a (m)^n = n \log_a m$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a m = \log_b m \times \log_a b$
- $\log_b a \times \log_a b = 1$
- लघुगणक की विपरीत क्रिया प्रतिलघुगणक कहलाती है।