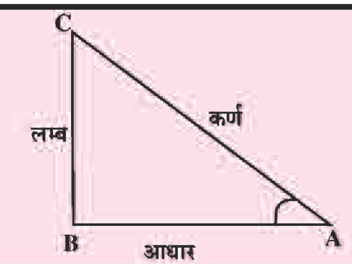
अध्याय 8

त्रिकोणमिति (Trigonometry)



हम पढ़ेंगे :

- समकोण त्रिभुज द्वारा त्रिकोणमितिय अनुपात ज्ञात करना
- त्रिकोणमितीय निष्पत्तियाँ

$\sin A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ $\quad$ $\text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$

$\cos A = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$ $\quad$ $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

$\tan A = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ $\quad$ $\cot A = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ $\quad$ $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\quad$ $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

$\text{cosec } A = \frac{1}{\sin A}$ $\quad$ $\text{Sin } A = \frac{1}{\text{cosec } A}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A}$ $\quad$ $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

- $0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$ कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात ज्यामितिय उपपत्ति द्वारा 30^0, 45^0, तथा 60^0 कोणों का मान एवं 0^0 व 90^0 के मानों की स्वयं सिद्धि के रूप में करना
- ऊँचाई और दूरी : त्रिकोणमितिय अनुपात के आधार पर सरल प्रश्न हल करना।

8.1 भूमिका (Introduction)

त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है, जिसका सम्बन्ध त्रिभुज की भुजाओं और कोणों से है। त्रिकोणमिति गणित की प्राचीन एवं महत्वपूर्ण शाखा है। भारतीय खगोलशास्त्र में इसका उपयोग ग्रहों के स्थान की गणना में होता था। प्रचीन भारतीय गणितज्ञों आर्यभट्ट, वराहमिहिर तथा ब्रह्मगुप्त एवं यूनान के ज्योतिष वैज्ञानिक हिपैरकस (Hipparcus) आदि का त्रिकोणमिति के क्षेत्र में महत्व-पूर्ण योगदान है।

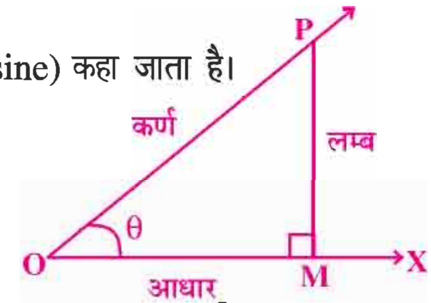
त्रिकोणमिति का खगोलशास्त्र, अभियां-त्रिकी(Engineering) एवं ऊँचाई, दूरी आदि के अध्य-यन में उपयोग है। इस अध्याय में त्रिकोणमिति की अवधारणा व त्रिकोणमितिय अनुपातों के बारे में पढ़ेंगे तथा कुछ न्यून कोणों के लिए इन अनुपातों के मानों को भी ज्ञात करेंगे, अध्याय के अन्त में इन अनुपातों के आधार पर अज्ञात ऊँचाई और दूरी को ज्ञात करेंगे।

8.2 त्रिकोणमितिय अनुपात (Trigonometric ratios)

मान लीजिए $\overrightarrow{OX}$ एक किरण है और OP एक परिक्रामी किरण है, जिसमें बिन्दु O को स्थिर रखते हुए वामावर्त दिशा में परिक्रमा करती हुई एक धनात्मक न्यून कोण $\angle XOP$ बनाती है। बिन्दु P से $PM \perp OX$ खींचकर समकोण ΔPOM बनाया।

आकृति 8.1 मे समकोण ΔPOM की सम्मुख भुजा OP कर्ण, न्यूनकोण θ की सम्मुख भुजा PM लम्ब तथा न्यूनकोण θ की आसन्न भुजा OM आधार कहलाती है।

(i) sine (ज्या) : कोण θ के लिए अनुपात $\frac{PM}{OP}$ को ज्या (sine) कहा जाता है। कोण θ के sine को sinθ लिखा जाता है।



आकृति 8.1

$$\sin\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}} = \frac{PM}{OP}$$

(ii) cosine (कोज्या) : कोण θ के लिए अनुपात $\frac{OM}{OP}$ को कोज्या (cosine) कहा जाता है। कोण θ के cosine को cosθ लिखा जाता है।

$$\cos\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}} = \frac{OM}{OP}$$

(iii) tangent (स्पर्शज्या) : कोण θ के लिए अनुपात $\frac{PM}{OM}$ को स्पर्शज्या कहा जाता है। कोण θ के tangent को tanθ लिखा जाता है।

$$\tan\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}} = \frac{PM}{OM}$$

(iv) cosecant (व्युज्या) : कोण θ के लए अनुपात $\frac{OP}{MP}$ को cosecant कहा जाता है। कोण θ के लिए cosecent को cosecθ लिखा जाता है।

$$\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}} = \frac{OP}{MP}$$

(v) secant (व्युकोज्या) : कोण θ के लिए अनुपात $\frac{OP}{OM}$ को secant कहा जाता है। कोण θ के secent को secθ लिखा जाता है।

$$\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}} = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}} = \frac{OP}{OM}$$

(vi) cotangent (कोटिस्पर्शज्या) : कोण θ के लिए अनुपात $\frac{OM}{MP}$ को cotangent कहा जाता है। कोण θ के cotangent को cotθ लिखा जाता है।

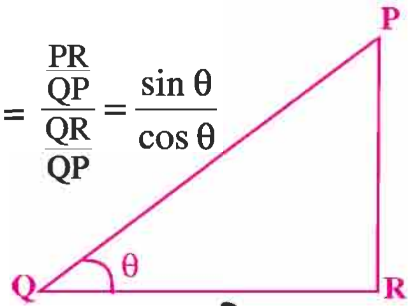
$$\cot\theta = \frac{\text{कोण } \theta \text{ की आसन्न भुजा}}{\text{कोण } \theta \text{ की सम्मुख भुजा}} = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}} = \frac{OM}{MP}$$

sinθ, cosθ और tanθ में सम्बन्ध

कोण θ के अनुपातों sinθ, cosθ और tanθ में सम्बन्ध है। यदि इनमें से कोई एक ज्ञात हो तो अन्य दो का परिकलन आसानी से किया जा सकता है।

चित्रानुसार $\sin\theta = \frac{PR}{QP}$, $\cos\theta = \frac{QR}{QP}$ अतः $\tan\theta = \frac{RP}{QR} = \frac{\frac{PR}{QP}}{\frac{QR}{QP}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



आकृति 8.2

टिप्पणी :

(1) sinθ, cosθ, tanθ, secθ, cosecθ, cotθ का यह अर्थ नहीं है कि sin, cos, tan, sec, cosec, cot आदि में θ का गुणा किया गया है। उदाहरणार्थ sin एवं θ दो भिन्न-राशियाँ नहीं है sinθ एक ही राशि है जो किसी समकोण त्रिभुज में दिये हुए न्यूनकोण की सम्मुख भुजा और कर्ण के अनुपात को दर्शाता है। बिना कोण के sin, cos आदि का कोई अर्थ नहीं है।

(2) जिस न्यूनकोण को आधार मान कर त्रिकोणमितीय अनुपात निकलते है वह आधार (आसन्न भुजा) और कर्ण के बीच बनता है।

(3) त्रिकोणमितीय अनुपातों sinθ, cosθ आदि को अंग्रेजी के छोटे अक्षरों (small letters) s,c,t, इत्यादि से लिखते हैं।

(4) चूंकि त्रिकोणमितिय अनुपात समकोण त्रिभुजों की भुजाओं के अनुपात होते हैं इसलिए यह इकाई रहित होते हैं।

8.3 त्रिकोणमितिय अनुपातों में सम्बंध (Relations in trigonometric ratios)

(i) sinθ और cosecθ में संबंध समकोण ΔABC में ∠A=θ तो $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ और $\text{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$ अनुपात के आधार पर हम देखते हैं कि $\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ या $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

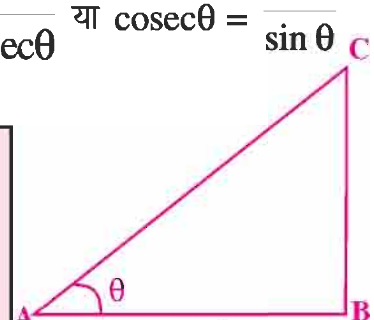
अतः cosecθ व्युत्क्रम है sinθ का

इसलिए $\boxed{\sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1}$

$\sin\theta \times \text{cosec}\theta$

$= \sin\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$

$= 1$



आकृति 8.3

(ii) cosθ और secθ में सम्बंध

समकोण ΔABC में $\angle A = \theta$ तो $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$ और $\sec\theta = \dfrac{AC}{AB}$

अनुपात के आधार पर हम देखते हैं कि $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ या $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

अतः secθ व्युत्क्रम है cosθ का

इसलिए $\boxed{\cos\theta \times \sec\theta = 1}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos\theta \times \sec\theta \\ &= \cos\theta \times \frac{1}{\cos\theta} \\ &= 1 \end{aligned}}$$

(iii) tanθ और cotθ में सम्बंध

समकोण ΔABC में $\angle A = \theta$ तो $\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$ और $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$ अनुपात के आधार पर हम देखते हैं कि $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ या $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

अतः cotθ व्युत्क्रम है tanθ का

इसलिए $\boxed{\tan\theta \times \cot\theta = 1}$

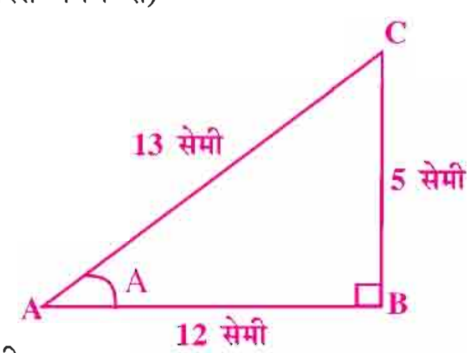
$$\boxed{\tan\theta \times \cot\theta = \tan\theta \times \frac{1}{\tan\theta} = 1}$$

उदाहरण 1. त्रिभुज ABC में $\angle B$ समकोण है, यदि $AB = 12$ सेमी और $BC = 5$ सेमी, तो सभी त्रिकोणमितिय अनुपात लिखिए।

हल: त्रिभुज ABC बनाया जिसका कोण B समकोण है $AB = 12$ सेमी, $BC = 5$ सेमी

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ (ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से)

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$$
$$= \sqrt{(12)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{144 + 25}$$
$$= \sqrt{169} \quad = 13 \text{ सेमी.}$$



आकृति 8.4

कोण A के लिये आसन्न भुजा $AB = 12$ सेमी.

सम्मुख भुजा $BC = 5$ सेमी, और कर्ण $AC = 13$ सेमी

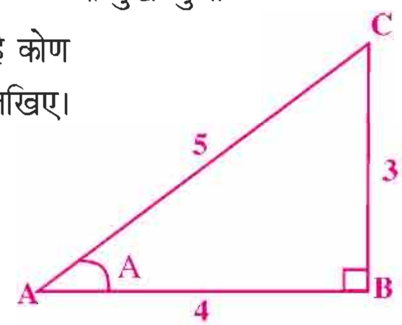
$$\sin A = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}, \quad \cos A = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$$

$$\tan A = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}, \quad \cot A = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}, \quad \text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$$

उदाहरण 2. आकृति 8.5 त्रिभुज ABC में कोण B समकोण है कोण A के लिए सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों की माप लिखिए।

हल : आकृति 8.5 के अनुसार भुजा AC कर्ण है तथा कोण A की सम्मुख भुजा BC है। AB आसन्न भुजा है।



आकृति 8.5

$$\sin A = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}, \quad \cos A = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4}, \quad \cot A = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$$

$$\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{4}, \quad \text{cosec } A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख भुजा}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{3}$$

उदाहरण 3. ΔABC में $\angle B$ समकोण है, $AB = 4$, $BC = 3$ यदि $\angle A = \theta, \angle C = \varnothing$ तो ज्ञात कीजिए।

$\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \sin \varnothing, \cos \varnothing$ और $\tan \varnothing$

हल: समकोण त्रिभुज ΔABC बनाइए जिसमें $\angle B = 90^0$ है,

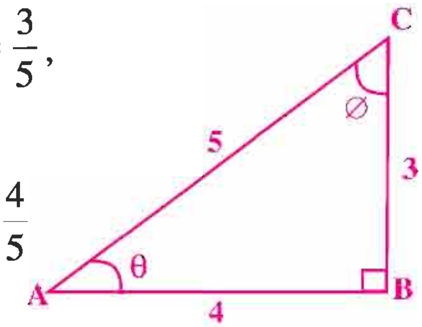
अब $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)

$$\therefore \; AC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

कोण θ के लिये आसन्न भुजा $AB = 4$, सम्मुख भुजा $BC = 3$

अतः $$\sin\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5},$$

$$\cos\theta = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$$



आकृति 8.6

$$\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4},$$

कोण $\varnothing$ के लिए आसन्न भुजा $BC = 3$, सम्मुख भुजा $AB = 4$

तो $\sin\varnothing = \frac{4}{5}$, $\cos\varnothing = \frac{3}{5}$, $\tan\varnothing = \frac{4}{3}$

उदाहरण 4. यदि $\tan B = \sqrt{3}$, तो $\sin B$ और $\cos B$ ज्ञात कीजिए।

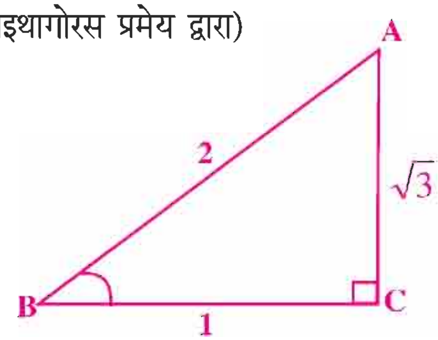
हल : एक समकोण त्रिभुज ABC बनाइये जिसमे $\angle C = 90^0$ तथा

$$\tan B = \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}}$$ (पाइथागोरस प्रमेय द्वारा)

$$AB = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sin B = \frac{CA}{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos B = \frac{BC}{BA} = \frac{1}{2}$$



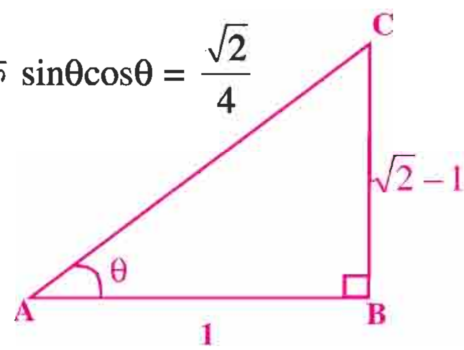
आकृति 8.7

उदाहरण 5. यदि $\tan\theta = \sqrt{2} - 1$, तो सत्यापित कीजिए कि $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$

हल: $$\tan\theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{आसन्न भुजा}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1}$$

मान लीजिए ΔABC एक समकोण त्रिभुज है

जिसमें $\angle A = \theta$, $\angle B = 90^0$



आकृति 8.8

सम्मुख भुजा BC = $\left(\sqrt{2}-1\right)$ और आसन्न भुजा AB = 1

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{2}-1)^2} \qquad = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$

इस प्रकार,

$\sin\theta = \dfrac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$

$$\therefore \sin\theta \ \cos\theta = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(4-2\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

उदाहरण 6. यदि $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, तो दिखाइए कि $3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha = 0$

हल: $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$

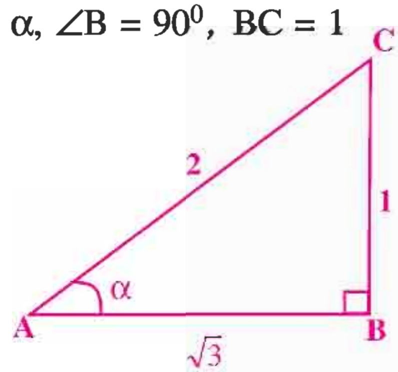
एक समकोण त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $\angle A = \alpha$, $\angle B = 90^0$, BC = 1 और कर्ण AC = 2

अतः ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AB^2 = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{2^2 - 1^2}$

$= \sqrt{4-1} \qquad = \sqrt{3}$



आकृति 8.9

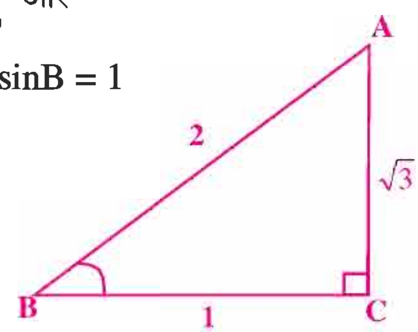
∴ आसन्न भुजा = AB = $\sqrt{3}$, सम्मुख भुजा BC = 1 सेमी., कर्ण AC = 2 सेमी.

$$\cos\alpha = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

∴ $3\cos\alpha - 4\cos^3\alpha$

$$= 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

उदाहरण 7. यदि ΔABC में $\angle C$ समकोण है, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ और $\tan B = \sqrt{3}$ तो दिखाइए $\sin A\cos B + \cos A\sin B = 1$



आकृति 8.10

हल : $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

मान लीजिए BC = 1 और AC = $\sqrt{3}$

ΔABC में $AB^2 = BC^2 + AC^2$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$\angle A$ के लिए सम्मुख भुजा = BC, आसन्न भुजा = AC, कर्ण = AB

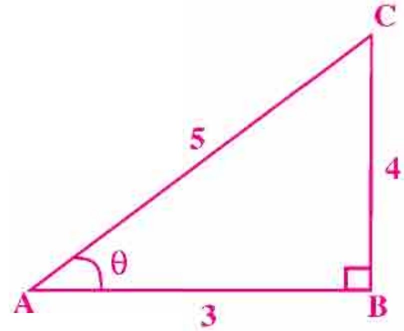
$$\therefore \quad \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2} \text{ और } \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle B$ के लिए सम्मुख भुजा = AC, आसन्न भुजा = BC, कर्ण = AB

इसी तरह, $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}$ और $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \quad \sin A\cos B + \cos A\sin B = \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 1$$

उदाहरण 8. यदि $\cos\theta = \frac{3}{5}$, तो $\left(\frac{5\operatorname{cosec}\theta - 4\tan\theta}{\sec\theta + \cot\theta}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।



आकृति 8.11

हल:

$$\cos\theta = \frac{\text{आसन्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \frac{3}{5}$$

मान लीजिए ΔABC, जिसमें $\angle B = 90^0$, $\angle A = \theta$

आसन्न भुजा $AB = 3$ और कर्ण $AC = 5$

ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से $\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$,

$$BC^2 = AC^2 - AB^2$$

$$\therefore \quad BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16}$$

$$= 4$$

$\therefore$ आसन्न भुजा $AB = 3$, सम्मुख भुजा $BC = 4$ और कर्ण $AC = 5$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{4}{3}, \cot\theta = \frac{3}{4}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{5\operatorname{cosec}\theta - 4\tan\theta}{\sec\theta + \cot\theta} = \frac{\left(5 \times \frac{5}{4} - 4 \times \frac{4}{3}\right)}{\frac{5}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{11/12}{29/12}$$

$$= \frac{11}{12} \times \frac{12}{29}$$

$$= \frac{11}{29}$$

प्रश्नावली 8.1

1. ΔABC में $\angle A$ समकोण है। यदि $BC = \sqrt{2}$, $AB = AC = 1$, तो $\sin B, \cos B, \tan B$ का माप लिखिए।

2. ΔABC में $\angle A$ समकोण है। यदि $AB = 20$, $AC = 21$, $BC = 29$ तो $\sin B$, $\cos C$ और $\tan B$ का माप लिखिए।

3. यदि $\operatorname{cosec} A = \sqrt{10}$, तो शेष त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. यदि $\sin B = \frac{1}{2}$ तो दिखाइए कि $3\cos B - 4\cos^3 B = 0$

5. यदि $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ तो दिखाइए कि $\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sec\alpha}$

6. यदि $\cot B = \frac{12}{5}$ तो दिखाइए कि
$\tan^2 B - \sin^2 B = \sin^4 B \sec^2 B$

7. यदि ΔABC में $\angle C = 90^0$ $\tan A = 1$ और $\tan B = 1$ तो $\cos A\cos B - \sin A\sin B$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि ΔABC में $\angle C = 90^0$, और $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ तो दिखाइए कि
$\sin A\cos B + \cos A\sin B = 1$

9. यदि $\tan\theta = \frac{12}{5}$, तो ज्ञात कीजिए $\sin\theta, \cos\theta$ और दिखाइए कि $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

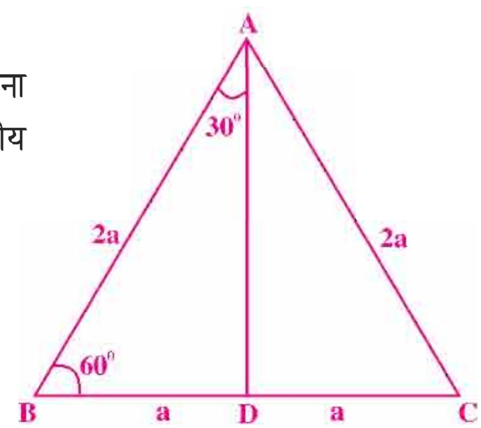
10. यदि $\tan A = \frac{3}{4}$, तो $\tan^2 A + \sin A\sec A$ का मान ज्ञात कीजिए।

8.4 विभिन्न कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात (Trigonometric ratios of some specific angles)

ज्यामिति में हम 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 कोणों की रचना करना सीख चुके हैं। आइए अब विभिन्न कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों को ज्ञात करें।

30^0 का त्रिकोणमितिय अनुपात:

मान लीजिए ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है, जिसमें प्रत्येक भुजा की लम्बाई 2a है (आकृति 8.12)। ΔABC के प्रत्येक कोण की माप 60^0 है (क्योंकि समबाहु Δ के सभी कोण समान माप के होते हैं।



आकृति 8.12

बिन्दु A से, $AD \perp BC$ खींचिए।

इस तरह $BD = CD = a$ $(BC = 2a)$

$\angle ADB = 90^0$, $\angle BAD = 30^0$

समकोण त्रिभुज : ΔABD में पाइथागोरस प्रमेय से $AB^2 = AD^2 + BD^2$

या $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$$

कोण 30^0 के लिए सम्मुख भुजा $BD = a$, कर्ण $= 2a$, आसन्न भुजा $AD = a\sqrt{3}$

अब $\sin 30^0 = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^0 = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{cosec} 30^0 = \dfrac{1}{\sin 30^0} = 2$

$\sec 30^0 = \dfrac{1}{\cos 30^0} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 30^0 = \dfrac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3}$

60^0 का त्रिकोणमितीय अनुपात :

समकोण त्रिभुज ΔADB (आकृति 8.12) में $\angle B = 60^0$ तथा कोण B के लिए आसन्न भुजा $BD = a$, सम्मुख भुजा $AD = a\sqrt{3}$, कर्ण $AB = 2a$

$\therefore \sin 60^0 = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

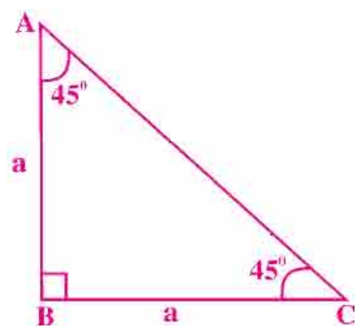
$\tan 60^0 = \dfrac{AD}{BD} = \dfrac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$, $\operatorname{cosec} 60^0 = \dfrac{1}{\sin 60^0} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

$\sec 60^0 = \dfrac{1}{\cos 60^0} = 2$, $\cot 60^0 = \dfrac{1}{\tan 60^0} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

45^0 का त्रिकोणमितिय अनुपात :

मान लीजिए ΔABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें $\angle B = 90^0$ और $\angle A = 45^0$

तो $\angle C = 45^0$



आकृति 8.13

$\angle A = \angle C$ इसलिए $AB = BC$

यदि $AB = BC = a$ तो

ΔABC में पाइथागोरस प्रमेय से

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

$\therefore$ आसन्न भुजा $BC = a$, सम्मुख भुजा $BA = a$, कर्ण $= a\sqrt{2}$

$$\sin 45^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^0 = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45^0 = \frac{AC}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$$

$$\cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = 1$$

टिप्पणी : आकृति 8.13 में $\angle A$ माप भी 45^0 है। इसलिए $\angle A$ के आधार पर भी ज्यामितीय अनुपातों की गणना की जा सकती है। विद्यार्थी $\angle A = 45^0$ के लिए ज्यामितीय अनुपातों को ज्ञात करें।
आप पायेगें कि तब भी मान उपरोक्त मानों के समान ही होंगे।

0^0 और 90^0 के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

हमने $\sin\theta$ और $\cos\theta$, इत्यादि को प्रत्येक न्यूनकोण θ के लिए परिभाषित किया है, अर्थात कोण θ के लिए, जहाँ $0^0 < \theta < 90^0$

यदि $\theta = 0^0$ या $\theta = 90^0$, तो हम इनके लिए अलग से परिभाषा देते हैः

(क) $\sin 0^0 = 0,\ \cos 0^0 = 1,\ \tan 0^0 = 0,\ \sec 0^0 = 1$
(coses 0^0 और $\cot 0^0$, परिभाषित नहीं है)

(ख) $\sin 90^0 = 1,\ \cos 90^0 = 0,\ \operatorname{cosec} 90^0 = 1,\ \cot 90^0 = 0,$

($sec 90^0$ और $\tan 90^0$ परिभाषित नहीं है)

नीचे एक सारणी के रूप में 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, और 90^0 के त्रिकोणमितीय अनुपातों को प्रदर्शित किया गया है।

त्रिकोणमिति अनुपात	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं है।

अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात इनकी सहायता से ज्ञात किये जा सकते हैं।

त्रिकोणमिति अनुपात	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
$\sin\theta$	0	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$
$\cos\theta$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	0

संकेत : पहले 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, व 90^0 के स्तम्भों में $\sin\theta$ की पंक्ति के लिए क्रमशः 0, 1, 2, 3 व 4 लिखें। इन सबको संख्या 4 से भाग दें। इस भागफल (अनुपात) का वर्गमूल लेकर सरलीकरण करें। यही संख्याएँ $\sin\theta$ के θ की विभिन्न मानों पर अभीष्ट मान है $\cos\theta$ के लिए पूर्णांक 4 से 0 तक अवरोही क्रम में लिखकर उपरोक्त क्रिया को दोहराएँ।

उदाहरण 9: मान ज्ञात कीजिए

$2\sin^2 30^0 \ \tan 60^0 - 3\cos^2 60^0 \ \sec^2 30^0$

हल: चूँकि

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \qquad \tan 60^0 = \sqrt{3}, \qquad \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$\sec 30^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \ 2\sin^2 30^0 \ \tan 60^0 - 3\cos^2 60^0 \ \sec^2 30^0$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\sqrt{3}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= 2.\frac{1}{4}.\sqrt{3} - 3.\frac{1}{4}.\frac{4}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$$

उदाहरण 10 सत्यापित कीजिए कि $\sin 60^0 = 2\sin 30^0 \ \cos 30^0$

हल: बायाँ पक्ष $= \sin 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

दायाँ पक्ष $= 2\sin 30^0 \ \cos 30^0$

$$= 2.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

अतः जाँच से ज्ञात हुआ कि निर्दिष्ट समता सत्य है।

उदाहरण 11 $3\sin^2 30^0 + 2\tan^2 60^0 - 5\cos^2 45^0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ व्यंजक

$= 3\sin^2 30^0 + 2\tan^2 60^0 - 5 \ \cos^2 45^0$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 3\times\frac{1}{4}+2\times3-5\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4}+6-\frac{5}{2}$$

$$= \frac{3+24-10}{4} = \frac{17}{4} = 4\frac{1}{4}$$

उदाहरण 12. यदि $A = 60^0$ और $B = 30^0$, तो $\sin(A\text{-}B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ का सत्यापन कीजिए।

हल : $A = 60^0$ और $B = 30^0$, $A - B = (60^0 - 30^0) = 30^0$

बायाँ पक्ष $\therefore \sin(A\text{-}B) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

दायाँ पक्ष $\sin A \cos B - \cos A \sin B = \sin 60^0 \cos 30^0 - \cos 60^0 \sin 30^0$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ $\therefore$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उदाहरण 13. यदि $\theta = 30^0$, तो $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ का सत्यापन कीजिए।

हल : $\theta = 30^0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\theta = 60^0$

बायाँ पक्ष $\sin 2\theta = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

दायाँ पक्ष $2\sin\theta\cos\theta = 2\sin 30^0 \cos 30^0 = \left(2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

उदाहरण 14 सत्यापित कीजिए

$$\frac{\tan 60^0 - \tan 30^0}{1+\tan 60^0 \tan 30^0} = \tan 30^0$$

हल : बायाँ पक्ष $= \frac{\tan 60^0 - \tan 30^0}{1+\tan 60^0 \tan 30^0}$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{(3-1)}{\sqrt{3}\times2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

दायाँ पक्ष $= \tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ दायाँ पक्ष = बायाँ पक्ष

अर्थात् $\frac{\tan 60^0 - \tan 30^0}{1+\tan 60^0 \tan 30^0} = \tan 30^0$

उदाहरण 15. मान ज्ञात कीजिए

$$\sin^2 30^0 \cos^2 45^0 + 4\tan^2 30^0 + \frac{1}{2}\sin^2 90^0 + \frac{1}{8}\cot^2 60^0$$

हल : $\sin^2 30^0 \cos^2 45^0 + 4\tan^2 30^0 + \frac{1}{2}\sin^2 90^0 + \frac{1}{8}\cot^2 60^0$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{2}\times(1)^2 + \frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{8}\times\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{3+32+12+1}{24}$$

$$= \frac{48}{24} = 2$$

उदाहरण 16. आकृति 8.14 के अनुसार ΔABC एक समकोण त्रिभुज है। यदि $\angle A = 30^0$, $\angle B = 90^0$ और $AB = 9$ सेमी तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए

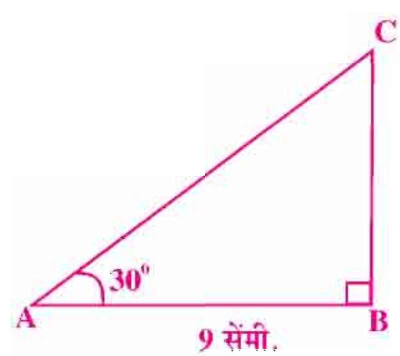
(i) BC (ii) AC

हल: मानाकि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है

(i) ΔABC में $\tan 30^0 = \frac{BC}{AB}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{9}$$

$$BC = \frac{9}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$



आकृति 8.14

$\therefore BC = 3\sqrt{3}$ सेमी.

(ii) ΔABC में

$$\cos 30^0 = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{AC}$$

$$\sqrt{3}.AC = 18$$

$$AC = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\therefore AC = 6\sqrt{3}$$

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित व्यंजको के मान ज्ञात कीजिए

(i) $\text{cosec}^2 30^0 \cos^2 45^0 - \text{cosec}^2 60^0$

(ii) $\sin 60^0 \cos 45^0 + \cos 60^0 \sin 45^0$

(iii) $\cos 60^0 \cos 45^0 - \sin 60^0 \sin 45^0$

(iv) $\sin 60^0 \cos 30^0 + \cos 60^0 \sin 30^0$

(v) $\tan 30^0 \tan 45^0 + \sec 30^0 \tan 45^0$

मान ज्ञात कीजिए

2. $2\sin^2 30^0 - 3\cos^2 30^0 + \tan^2 60^0 + 3\sin^2 90^0$

3. $\cot^2 30^0 - 2\cos^2 30^0 - \frac{3}{4}\sec^2 45^0 + \frac{1}{4}\text{cosec}^2 30^0$

4. $(\sin^2 30^0 + 4\cot^2 45^0 - \sec^2 60^0)\ (\text{cosec}^2 45^0 \sec^2 30^0)$

5. $\frac{4}{\cot^2 30^0} + \frac{1}{\sin^2 30^0} - 2\cos^2 45^0 - \sin^2 0^0$

6. $$\frac{\tan^2 60^0 + 4\cos^2 45^0 + 3\operatorname{cosec}^2 60^0 + 2\cos^2 90^0}{2\operatorname{cosec} 30^0 + 3\sec 60^0 - \frac{7}{3}\cot^2 30^0}$$

7. $$\frac{\sin 30^0}{\cos 60^0} + \frac{\cot 45^0}{\sec 60^0} - \frac{\sin 60^0}{\tan 45^0} - \frac{\cos 30^0}{\sin 90^0}$$

निम्नलिखित का सत्यापन कीजिए

8. $\cos 60^0 = 1 - 2\sin^2 30^0 = 2\cos^2 30^0 - 1$

9. $\cos 90^0 = 1 - 2\sin^2 45^0 = 2\cos^2 45^0 - 1$

10. $\sin 60^0 = 2\sin 30^0 \cos 30^0$

11. मान ज्ञात कीजिए

$$\frac{1}{\cos^2 30^0} + \frac{4}{\sin 30^0} - \frac{1}{2}\tan^2 45^0 - 8\sin^2 90^0$$

12. सिद्ध कीजिए

(i) $$\frac{\cos 30^0 - 1}{\cos 60^0} = \frac{1 - \tan 60^0}{1 + \tan 60^0}$$

(ii) $$\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1 + \sin 30^0 + \cos 60^0} = \cos 30^0$$

13. यदि $A = B = 45^0$, सिद्ध कीजिए

(i) $\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

(ii) $\cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

14. यदि $A = 60^0$ और $B = 30^0$, सिद्ध कीजिए

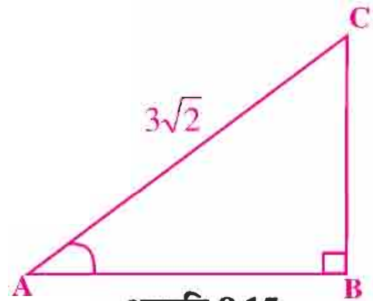
$$\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$$

15. यदि $\tan A = \frac{1}{3}$, $\tan B = \frac{1}{2}$ और $\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 45^0$

16. आकृति 8.15 में, ΔABC एक समकोण त्रिभुज है $\angle B = 90^0$ और $\angle A = 45^0$

$AC = 3\sqrt{2}$ सेमी

ज्ञात कीजिए (i) BC (ii) AB

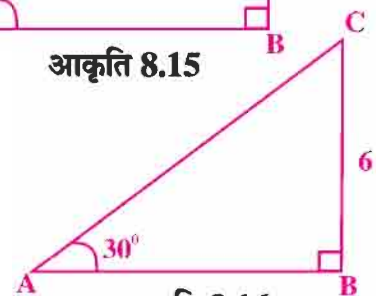


आकृति 8.15

17. आकृति 8.16 में, ΔABC एक समकोण त्रिभुज है $\angle B = 90^0$ और $\angle A = 30^0$,

यदि BC = 6 सेमी.

ज्ञात कीजिए (i) AB (ii) AC



आकृति 8.16

8.5 ऊँचाई और दूरी (Height and distance)

इस अध्याय के आरम्भ में हमने त्रिकोणमिति की परिभाषा पर चर्चा की थी। हमने जाना था कि किसी त्रिभुज के कुछ कोण और भुजाएँ ज्ञात होने पर शेष भुजाओं व कोणों की माप ज्ञात करना ही त्रिकोणमिति है।

इस कक्षा में हम किसी समकोण त्रिभुज की सहायता से अज्ञात ऊँचाई और दूरियाँ ज्ञात करना सीखेंगे।

मान लीजिए, हम एक वृक्ष की ऊँचाई बिना उसकी चोटी C तक जाए, ज्ञात करना चाहते हैं। हम भूमि पर उसके आधार B से कुछ दूरी पर, (मान लें 20 मीटर) बिन्दु A पर खड़े हो जाते हैं। हम ΔBAC को माप सकते हैं और मान लें कि यह कोण 30^0 है।

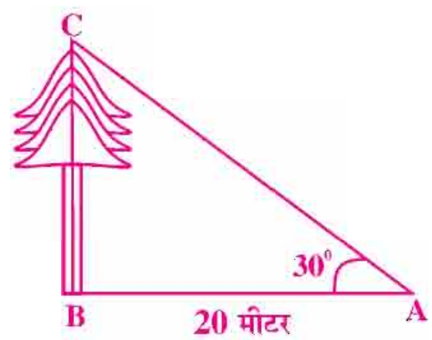
हम देखते है कि समकोण ΔABC जिसमें $\angle B = 90^0$ तथा $\angle CAB = 30^0$

$$\tan 30^0 = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{BC}{20}$$

$$BC = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} = 11.5$$

BC = 11.5 मीटर (लगभग)



आकृति 8.17

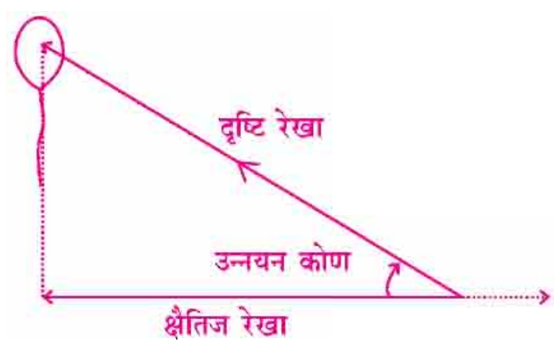
ध्यान दीजिए की उपरोक्त वृक्ष की ऊँचाई को बिना नापे एक त्रिकोणमितीय अनुपात की सहायता से ज्ञात कर लेते हैं।

जब कभी किसी अभियन्ता के सम्मुख नदी की चौड़ाई व पर्वत की ऊँचाई ज्ञात करने की समस्या आती है, (जिसे मापक टेप द्वारा मापना असंभव व असुविधा जनक हो) तो वह प्रकृति में एक बड़े

त्रिभुज की कल्पना करता है, जिसकी एक भुजा, वह रेखा है जो नदी के दूसरे पार हो और इस त्रिभुज की कोई अन्य भुजा आसानी से मापक टेप द्वारा मापी जा सके और उसका एक कोण, षष्टक (sextant) व किसी अन्य भूमाप यंत्र द्वारा मापा जा सके। एक भुजा और कोण के ज्ञात होने पर, अभियन्ता, अपने त्रिकोणमितिय अनुपातों के ज्ञान द्वारा अज्ञात भुजा को, अर्थात् नदी की चौड़ाई व पर्वत की ऊँचाई को ज्ञात कर लेता है।

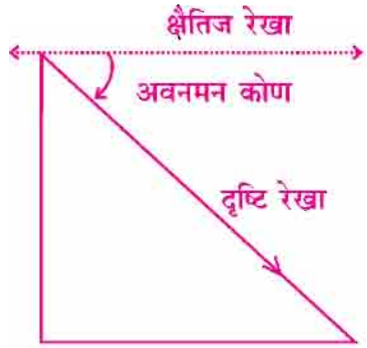
8.5.1 उन्नयन और अवनमन कोण

मान लीजिए हम एक वस्तु को देख रहे हैं। देखते समय वह रेखा जो हमारी आँख से वस्तु को जिसे हम देख रहे हैं, जोड़ती है दृष्टि रेखा कहते हैं और क्षैतिज रेखा, वह रेखा है जो हमारी आँख से सीधे भूमि के समांतर जाती है। यदि वस्तु आँख की क्षैतिज रेखा से ऊपर हो, अर्थात यदि वस्तु आँख से ऊँचे स्तर पर हो, तो हमें वस्तु देखने के लिए अपने सिर को उठाना पड़ेगा। हमारी दृष्टि रेखा एक कोण से मुड़ जाती है। इस कोण को वस्तु का उन्नयन कोण (angle of elevation) कहते हैं।



आकृति 8.18

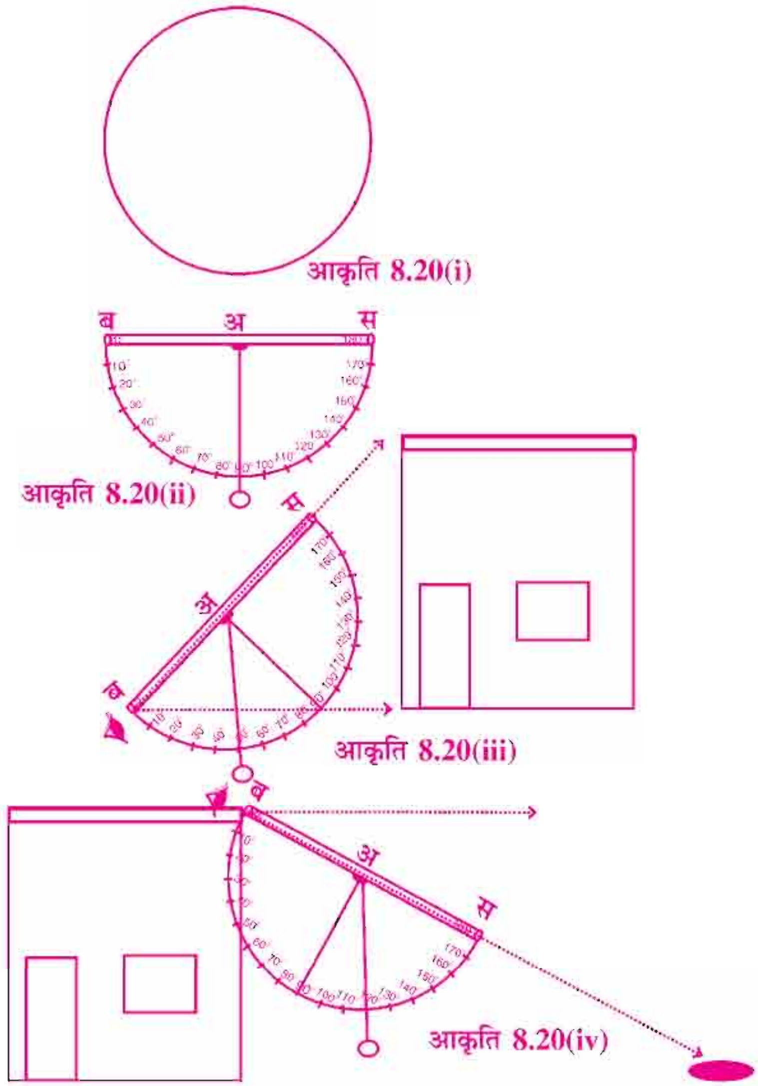
यदि वस्तुः आँख की क्षैतिज रेखा से नीचे हो, (अर्थात यदि वस्तु आँख से नीचे स्तर पर हो) तो हमें उस वस्तु को देखने के लिए, अपना सिर नीचे की ओर झुकाना पड़ता है, हमारी दृष्टि रेखा, एक कोण से झुक जाती है। इस कोण को उस वस्तु का अवनमन कोण (angle of Depression) कहते हैं।



आकृति 8.19

क्रियाकलाप 1

- गत्ते पर परकार की सहायता से एक वृत खींचिए एवं उसे काट लीजिए आकृति 8.20(i)
- फिर उसे आधा काट दें।
- चित्रानुसार चाँदा जैसा स्कैच पैन से बना ले षष्टक (sextant) जैसी आकृति 8.20(ii)
- बिन्दु अ पर एक धागे से कंकड़ बांध लें।
- ब से स तक एक पाइप का टुकड़ा लगा लें।
- बने उपकरण को साथ लेकर मकान से थोड़ी दूर (लगभग 200 मीटर) पीछे हट जाए उपकरण, की सहा- यता से चित्रानुसार मकान के ऊपरी सिरे को देखने पर क्षैतिज रेखा से बना कोण ही **उन्नयन कोण** होगा आकृति 8.20(iii)
- किसी मकान की छत से नीचे किसी पत्थर को देखने पर क्षैतिज रेखा से बना कोण **अवनमन कोण** होगा (आकृति 8.20(iv)



आकृति 8.20(i)

आकृति 8.20(ii)

आकृति 8.20(iii)

आकृति 8.20(iv)

अब अज्ञात ऊँचाई या दूरी ज्ञात करने के लिए हम उन्नयन कोण (या अवनमन कोण) की सहायता से समकोण त्रिभुज का निर्माण करते हैं।

इस समकोण त्रिभुज में ज्ञात दूरियों (या ऊँचाई) को अंकित करते हैं। अब निर्दिष्ट कोण के संदर्भ में ऐसी त्रिकोणमितीय अनुपात को लिखते हैं जिसमें अज्ञात भुजा व ज्ञात भुजा दोनों सम्मिलित हों। इस प्रकार प्राप्त समीकरण से अज्ञात भुजा ज्ञात करते हैं। आइए कुछ उदाहरणों द्वारा इसे समझें।

उदाहरण 17. एक मीनार भूमि पर लम्बवत (ऊर्ध्वाधर) है। भूमि पर, मीनार के आधार से 15 मी. दूरी पर एक बिन्दु से उसकी चोटी का उन्नयन कोण 60^0 है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए P मीनार की चोटी है, और M उसी का आधार बिन्दु तथा भूमि पर, O वह बिन्दु है जहाँ से P का उन्नयन कोण 60^0 है।

$OM = 15$ मी, $\angle MOP = 60^0$

मीनार की ऊँचाई, PM की लम्बाई है।

अब $\tan 60^0 = \frac{PM}{OM}$

$\tan 60^0 = \frac{PM}{15}$

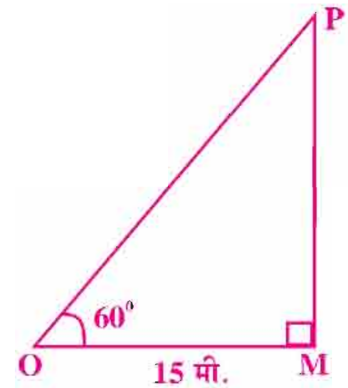
$\therefore$ $PM = 15 \times \tan 60^0$

$= 15 \times \sqrt{3}$

$= 15 \times 1.732$

$= 26$ मी. (लगभग)

मीनार की ऊँचाई $= 26$ मी. (लगभग) उत्तर



आकृति 8.21

उदाहरण 18: हवा के चलने से एक वृक्ष टूट जाता है। वृक्ष का ऊपरी हिस्सा टूटकर जमीन पर 30^0 के कोण पर है और जड़ से 30 मी. की दूरी पर है। तो वृक्ष की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए AB एक वृक्ष है, जो बिन्दु C से टूट गया है। BC जमीन पर बिन्दु D पर है।

$AD = 30$ मी. और $\angle ADC = 30^0$

मान लीजिए $AC = x$ और $CB = y$, तब $CD = y$

फिर $\frac{AC}{AD} = \tan 30^0$ या $\frac{x}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = 10\sqrt{3}$

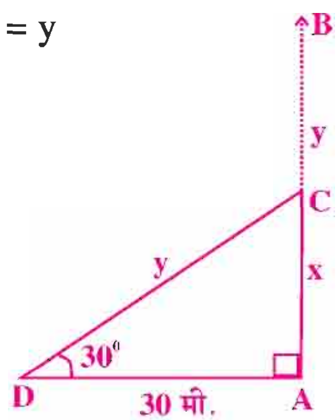
$\frac{DC}{AD} = \sec 30^0$ या $\frac{y}{30} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$y = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ वृक्ष की ऊँचाई $= (x+y)$ मी.

$= 10\sqrt{3} + 20\sqrt{3}$

$= 30\sqrt{3}$ मी. $= 51.96$ मी.



आकृति 8.22

उदाहरण 19. एक लम्बा वृक्ष, नदी के एक किनारे पर ऊर्ध्वाधर खड़ा है। दूसरे किनारे पर, वृक्ष के ठीक सम्मुख बिन्दु पर, वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण 60^0 है। उसी किनारे पर इस बिन्दु से

20 मी. पीछे वृक्ष की चोटी का उन्नयन कोण 30^0 है। वृक्ष की ऊँचाई और नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

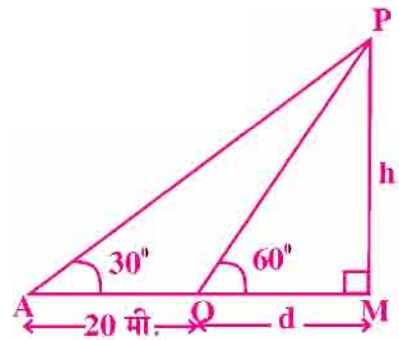
हल : मान लीजिए PM वृक्ष है, और h इसकी ऊँचाई है। मान ले कि दूसरे किनारे पर, वृक्ष के ठीक संम्मुख O बिन्दु है, तब OM ही नदी की चौड़ाई है। मान लीजिए, यह चौड़ाई d मी. है।

तथा A बिन्दु O से 20 मी. पीछे की ओर है।

PM = h मी, OM = d मी., AO = 20 मी.

$\angle MOP = 60^0, \ \angle MAP = 30^0$

ΔPAM में $\tan 30^0 = \dfrac{h}{d+20}$



आकृति 8.23

$h = (d+20)\tan 30^0$

या $h = \dfrac{d+20}{\sqrt{3}}$ ------- (i)

$\therefore \ \tan 60^0 = \dfrac{h}{d}$

या $h = d \ \tan 60^0$

या $h = d\sqrt{3}$ ------ (ii)

अतः $d\sqrt{3} = \dfrac{d+20}{\sqrt{3}}$ [समीकरण (i) और (ii) से]

या $3d = d + 20$

$\therefore$ $2d = 20$

या $d = 10$ मी.

और $h = d\sqrt{3}$

$= 10\sqrt{3}$

$= 10 \times 1.73 = 17.3$ मी.

अतः नदी की चौड़ाई = 10 मी.

वृक्ष की ऊँचाई = 17.3 मी.

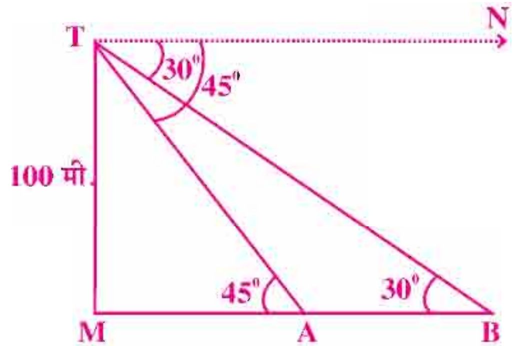
= 17.3 मी. (लगभग)

उदाहरण 20. एक प्रकाश स्तंभ को 100 मी. ऊँची चोटी से देखने पर, दो जहाजों के, जो इसकी ओर आ रहे हैं, अवनमन कोण क्रमशः 30^0 और 45^0 हैं। यदि एक जहाज ठीक दूसरे के पीछे हो। तो दोनो जहाजों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : मान ले TM प्रकाश स्तंभ है A, B दो जहाज है और TN क्षैतिज रेखा है, T को A तथा B से मिलाये, तो A और B के अवनमन कोण क्रमशः $\angle NTA$ और $\angle NTB$ हैं। अतः ये कोण क्रमशः 45^0 और 30^0 है।

अतः $\angle MAT = 45^0$ और $\angle MBT = 30^0$

समकोण ΔMAT में



आकृति 8.24

$$\tan \angle MAT = \frac{MT}{MA}$$

$$\tan 45^0 = \frac{100}{MA}$$

$$1 = \frac{100}{MA}$$

$\therefore$ MA = 100 मी. ....(i)

समकोण ΔMBT में

$$\tan \angle MBT = \frac{MT}{MB}$$

$$\tan 30^0 = \frac{100}{MB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{MB}$$

$\therefore$ $MB = 100\sqrt{3}$ ....(ii)

(i) और (ii) से

$$\begin{aligned} AB &= MB - MA \\ &= 100\sqrt{3} - 100 \\ &= 100(\sqrt{3} - 1) \\ &= 100(1.73 - 1) \\ &= 100 \times .73 \end{aligned}$$

AB = 73 मीटर (लगभग)

अतः दोनों जहाजों के बीच की दूरी = 73 मीटर (लगभग) उत्तर

प्रश्नावली 8.3

1. एक मीनार के आधार से 30 मी. दूर भूमि पर, एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 60^0 है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
2. एक बिन्दु A पर एक मीनार का उन्नयन कोण 60^0 है, यदि मीनार की दूरी बिन्दु A से 10 मी. है तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
3. एक व्यक्ति एक भवन के ऊपर रखी टंकी को जिसे वह भवन से 350 मीटर की दूरी से देखता है तो उसका उन्नयन कोण 60^0 का बनता है, भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. एक सीढ़ी जिसकी लम्बाई 5 मी. हैं, जब दीवार पर लगाएँ तो जमीन से सीढ़ी 45^0 का कोण बनती है। दीवार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. एक मीनार को सड़क पर खड़े व्यक्ति द्वारा देखे जाने पर उन्नयन कोण 30^0 का बनता है, यदि मीनार की ऊँचाई 30 मी. है, तो मीनार से व्यक्ति की दूरी ज्ञात कीजिए।
6. एक खम्बा 12 मी. ऊँचा है, खम्बे की चोटी से तार का एक सिरा बंधा है और तार का दूसरा सिरा भूमि पर स्थिर किया है, यदि खम्बा लम्बवत रखा गया है, तार का भूमि से झुकाव 60^0 का है, तो तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
7. एक उपग्रह को पृथ्वी पर स्थित दो वेधशालाओं से देखने पर (जो उपग्रह की एक ही दिशा में स्थित है) क्रमशः 30^0 एवं 60^0 के कोण बनते है यदि दोनों वेधशालाओं के बीच की दूरी 4000 कि.मी. हो तो उपग्रह की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
8. एक ऊँचे टीले से भवन को देखने पर उसके शिखर और आधार के अवनमन कोण क्रमशः 45^0 एवं 60^0 है यदि भवन की ऊँचाई 7 मी. हो तो टीले की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
9. एक सड़क 60 मी. ऊँची मीनार के आधार तक, सीधे जाती है। मीनार की चोटी से सड़क पर दो कारों के अवनमन कोण क्रमशः 30^0 और 45^0 है। दो कारों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए और बताइए ये प्रत्येक कार, मीनार के आधार से कितनी दूर है?
10. 120 मी. चौड़ी नदी के मध्य मे, एक छोटा टापू है। इस टापू पर एक लम्बा खम्बा है A और B दो बिन्दु नदी के विपरीत ओर, किनारे पर इस प्रकार है कि बिन्दु A, B और खम्बा समरेख है। यदि A और B पर खम्बे के सिरे के उन्नयन कोण 30^0 और 60^0 हो तो खम्बे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
11. भूमि पर एक बिन्दु A से, एक 12 मी. ऊँचे भवन की चोटी और एक हैलीकॉप्टर जो भवन की चोटी के ठीक ऊपर कुछ ऊँचाई पर जा रहा है, उनका उन्नयन कोण क्रमशः 30^0 और 45^0 है। हैलीकॉप्टर की भूमि से ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
12. एक मीनार की चोटी से, 12 मी. ऊँचे भवन के शिखर और आधार के अवनमन कोण क्रमश 30^0 और 60^0 है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

13. एक मीनार की चोटी को जमीन से एक स्थान पर देखने से उन्नयन कोण 30^0 का बनता है। मीनार की ओर 60 मीटर चलने पर उन्नयन कोण 45^0 का बनता हो तो मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

14. एक 100 मीटर ऊँची मीनार की चोटी और उसके आधार से एक चट्टान की चोटी के उन्नयन कोण क्रमशः 30^0 और 45^0 है। चट्टान की ऊँचाई ज्ञात कीजिए?

याद रखने योग्य बातें :

$\sin\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$ $\quad$ $\cos\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$

$\text{cosec}\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$ $\quad$ $\sec\theta = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$

$\tan\theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$ $\quad$ $\cot\theta = \frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ $\quad$ $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$ $\quad$ $\cot A = \frac{1}{\tan A}$

$\text{cosec}\, A = \frac{1}{\sin A}$ $\quad$ $\text{Sin}\, A = \frac{1}{\text{cosec}\, A}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A}$ $\quad$ $\cos A = \frac{1}{\sec A}$

याद रखने योग्य बातें :

- पाइथागोरस प्रमेय को सत्यापन करना। (समकोण त्रिभुज में कर्ण पर का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।)