ਪਾਠ-7

ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ

(SYSTEM OF PARTICLES AND ROTATIONAL MOTION)

7.1 ਭੂਮਿਕਾ (INTRODUCTION)

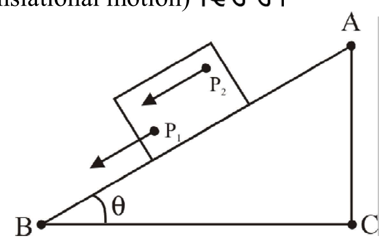
ਪਿਛਲੇ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਆਦਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਕਣ (ਇੱਕ ਕਣ ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਪੁੰਜ (point mass) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਤੌਰ ’ਤੇ ਇਸਦਾ ਕੋਈ ਅਕਾਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ) ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਫਿਰ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ ਕਣ ਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ।

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜ਼ਿੰਦਗੀ ਵਿੱਚ ਜਿੰਨੇ ਪਿੰਡ ਸਾਡੇ ਸੰਪਰਕ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਉਹ ਸਾਰੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਪਿੰਡਾਂ (extended bodies) (ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ) ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਪੂਰੇ ਤੌਰ ’ਤੇ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਮ ਕਰਕੇ ਉਸਦਾ ਬਿੰਦੂ ਵਾਲਾ ਆਦਰਸ਼ ਮਾਡਲ ਨਾਕਾਫ਼ੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ (ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ) ਅਨਿਸ਼ਚਿਤਤਾ ਤੋਂ ਪਰੇ ਹੋ ਜਾਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ, ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਪਿੰਡ ਮੁੱਢਲੇ ਪੱਧਰ ਤੇ ਕਣਾਂ ਦਾ ਸਿਸਟਮ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਵਿਵੇਚਨਾ ਇੱਕ ਸਮੁੱਚੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤੀ ਤੋਂ ਹੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (centre of mass) ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਧਾਰਨਾ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ, ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਉਪਯੋਗਿਤਾ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਵੱਡੇ ਪਿੰਡਾਂ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (rigid Body) ਮੰਨ ਕੇ ਹੀ ਹੱਲ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। **ਆਦਰਸ਼ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (ideal rigid body) ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਪਿੰਡ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਇੱਕ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ’ਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (definite) ਅਤੇ ਅਪਰਿਵਰਤਨੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ (unchanging shape) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣ ਜੋੜਿਆਂ (pairs) ਵਿੱਚਲੀ ਦੂਰੀ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।** ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਪਿੰਡ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦ੍ਰਿੜ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਪਿੰਡ ਬਲਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਅਧੀਨ ਆਪਣੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਬਦਲ ਲੈਂਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਏ ਬਦਲਾਵ ਨਿਕਾਰਨਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਿਗੁਣੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕਈ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ– ਪਹੀਆ, ਲੱਟੂ, ਸਟੀਲ ਦੇ ਬੀਮ ਅਤੇ ਇੱਥੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਅਣੂ, ਗ੍ਰਹਿ ਵਰਗੇ ਪਿੰਡਾਂ ਗਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਨਹੀਂ ਦੇਵਾਂਗੇ ਕਿ ਪਿੰਡ ਦੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਵ ਆਇਆ ਹੈ, ਉਹ ਮੁੜਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਕੰਬਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਮੰਨ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

7.1.1 ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਗਤੀਆਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ? (What kind of motion can a rigid body have ?)

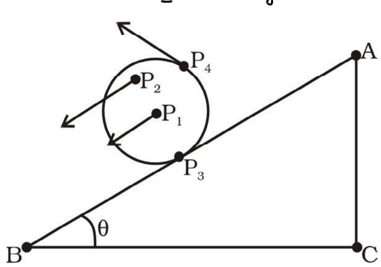
ਆਓ, ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ। ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਲਾਕ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜੋ ਇੱਕ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ (inclined plane) ਸਿੱਧਾ (ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਇੱਧਰ-ਉੱਧਰ ਹੋਏ) ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਫਿਸਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਲਾਕ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਹੈ। ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਇਸ ਦੀ ਗਤੀ ਅਜਿਹੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਚਲ ਰਹੇ ਹਨ, ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਸਾਰੇ ਕਣ ਸਮਾਨ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚਲਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 7.1)। ਇੱਥੇ ਇਹ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ (Translational motion) ਵਿੱਚ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.1** *ਇੱਕ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਇੱਕ ਬਲਾਕ ਦੀ ਹੇਠਾਂ ਵਲ ਨੂੰ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ (ਫਿਸਲਨ) (ਬਲਾਕ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਵੇਂ P_1 ਜਾਂ P_2... ਕਿਸੇ ਵੀ ਛਿਣ ਸਮਾਨ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ)*

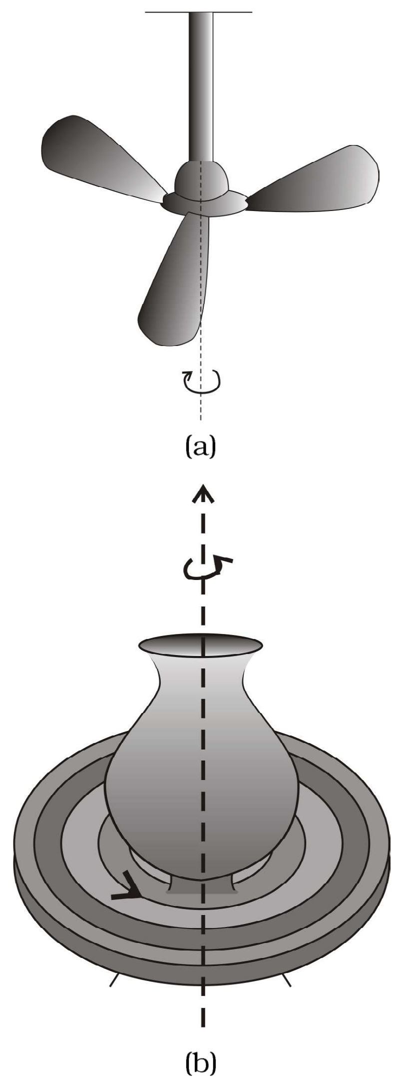
ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ (Pure translational motion) ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਖ਼ਾਸ ਛਿਣ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ ਸਮਾਨ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ।

ਆਓ, ਹੁਣ ਉਸੇ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਰੁੜ੍ਹਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਧਾਤੂ ਜਾਂ ਲੱਕੜੀ ਦੇ ਵੇਲਣ (Cylinder) ਦੀ ਗਤੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। (ਚਿੱਤਰ **7.2**) ਇਹ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (ਵੇਲਣ) ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਉਸਦੀ ਤਲੀ ਤੱਕ ਸਥਾਨਾਂਤਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਹੈ। ਪਰ ਚਿੱਤਰ 7.2 ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣ ਕਿਸੇ ਖ਼ਾਸ ਛਿਣ ਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਵੇਗ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਚਲ ਰਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਪਿੰਡ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਗਤੀ ਸਥਾਂਨਾਤਰੀ ਹੋਣ ਦੇ ਨਾਲ ਕੁਝ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵੀ ਹੈ।

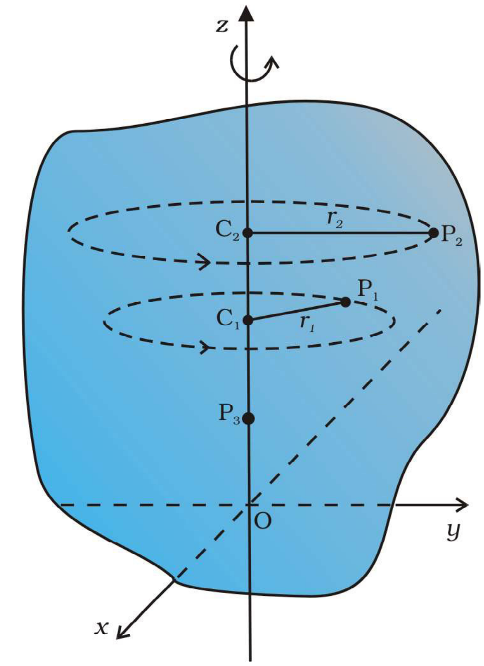


ਚਿੱਤਰ **7.2** *ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਰੁੜ੍ਹਦਾ ਵੇਲਣ (cylinder) । ਇਹ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਤੇ ਬਿੰਦੂ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ P_4 ਦੇ ਵੇਗ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਨ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੀਰਾਂ ਨਾਲ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ) ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਸੰਪਰਕ ਬਿੰਦੂ P_3 ਦਾ ਵੇਗ ਕਿਸੇ ਵੀ ਛਿਣ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਇਹ ਵੇਲਣ ਬਿਨਾਂ ਫਿਸਲੇ ਰੁੜ੍ਹਦਾ ਹੈ।)*

ਇਹ 'ਕੁਝ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵੀ' ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਉ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (rigid body) ਲਈਏ ਜਿਸ ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੋਕ ਲਗਾਈ ਗਈ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਨਾ ਕਰ ਸਕੇ। ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਨੂੰ ਰੋਕਣ ਦੀ ਸਧਾਰਨ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਕਰ ਦਿਤਾ ਜਾਵੇ। ਉਦੋਂ ਇਸ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (rigid body) ਦੀ ਇੱਕ ਮਾਤਰ ਸੰਭਾਵਿਤ ਗਤੀ **ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ (rotation)** ਹੋਵੇਗੀ। ਉਹ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਜਿਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸਦੀ **ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਧੁਰਾ (axis of rotation)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲੇ ਦੇਖੋ ਤਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਛੱਤ ਵਾਲਾ ਪੱਖਾ, ਘੁਮਿਆਰ ਦਾ ਚੱਕ (Potter's wheel) (ਚਿੱਤਰ 7.3 (a)



ਚਿੱਤਰ **7.3** ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ (a) ਛੱਤ ਦਾ ਪੱਖਾ (b) ਘੁਮਿਆਰ ਦਾ ਚੱਕ।



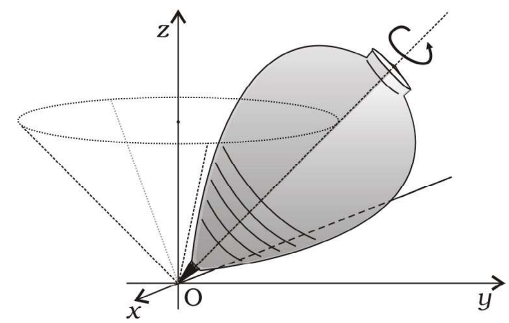
ਚਿੱਤਰ 7.4 z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ। ਪਿੰਡ ਦੀ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ P_1 ਜਾਂ P_2 ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਤੇ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ (C_1 ਜਾਂ C_2) ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (r_1 ਜਾਂ r_2) ਧੁਰੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (P_1 ਜਾਂ P_2) ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ ਹੈ। ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ P_3 ਵਰਗਾ ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ (b), ਵਿਸ਼ਾਲ ਚੱਕਰੀ ਝੂਲਾ (ਜਾਇੰਟ ਵਹੀਲ (Giant wheel)), ਮੈਰੀ ਗੋ ਰਾਊਂਡ (merry-go-round) ਵਰਗੇ ਅਨੇਕ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਨ ਮਿਲ ਜਾਣਗੇ ਜਿੱਥੇ ਕਿਸੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਹੋ ਰਹੀ ਹੋਵੇ।

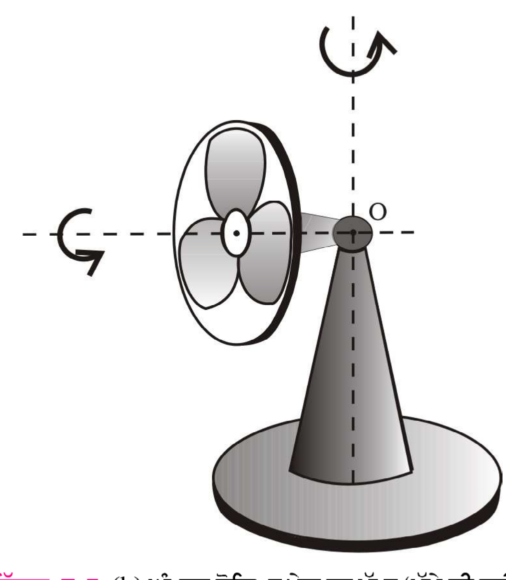
ਆਓ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਮਝਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੀਏ ਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਕੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਲੱਛਣ ਕੀ ਹਨ ? ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਚੱਕਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 7.4 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ (ਨਿਰਦੇਸ਼ ਫਰੇਮ ਦਾ z-ਧੁਰਾ) ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਧੁਰੇ ਤੋਂ r_1 ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੋਈ ਕਣ P_1 ਲਓ। ਇਹ ਕਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ r_1 ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ C_1, ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਚੱਕਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਕਣ P_2 ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਤੋਂ r_2 ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਣ P_2 ਅਰਧ ਵਿਆਸ r_2 ਦੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ C_2 ਵੀ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਚੱਕਰ ਵੀ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ P_1 ਅਤੇ P_2 ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਤਲ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਹਨ। ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ, ਜਿਵੇਂ P_3 ਦੇ ਲਈ, $r = 0$ ਹੈ। ਇਹ ਕਣ, ਪਿੰਡ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਸਮੇਂ ਵੀ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰੰਤੂ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਧੁਰਾ ਸਥਿਰ ਨਹੀਂ ਵੀ ਰਹਿੰਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਮੁੱਖ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ, ਇੱਕ ਹੀ ਥਾਂ ਤੇ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਲੱਟੂ (ਚਿੱਤਰ 7.5 (a))।

(ਲੱਟੂ ਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਲੱਟੂ ਇੱਕ ਸਥਾਨ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ



ਚਿੱਤਰ 7.5 (a) ਘੁੰਮਦਾ ਹੋਇਆ ਲੱਟੂ (ਇਸਦੀ ਟਿਪ O ਦਾ ਧਰਤੀ ਦੀ ਸਤਹਿ ਨਾਲ ਸੰਪਰਕ ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਰ ਹੈ)



ਚਿੱਤਰ 7.5 (b) ਘੁੰਮਦਾ ਹੋਇਆ ਮੇਜ਼ ਦਾ ਪੱਖਾ (ਪੱਖੇ ਦੀ ਧੁਰੀ, ਬਿੰਦੂ O ਸਥਿਰ ਹੈ)

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।) ਆਪਣੇ ਅਨੁਭਵ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘੁੰਮਦੇ ਲੱਟੂ ਦਾ ਧੁਰਾ, ਭੂਮੀ ਤੇ ਇਸਦੇ ਸੰਪਰਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਦੇ ਲੰਬ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ (ਕੋਣ) ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ

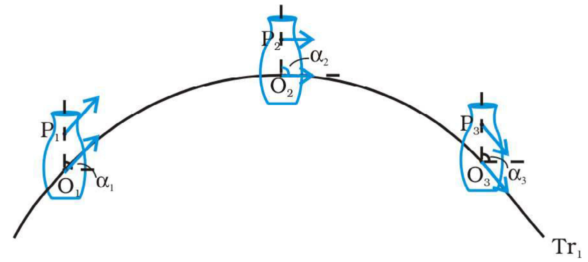
ਚਿੱਤਰ 7.5 (a) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। (ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਦਿਸ਼ਾ (vertical) ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਲੱਟੂ ਦੇ ਧੁਰੇ ਦਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘੁੰਮਣ ਪੁਰਸਰਣ (Precession) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ)। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ **ਲੱਟੂ ਦਾ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਧਰਤੀ ਨੂੰ ਛੂਹ ਰਿਹਾ ਹੈ**, ਸਥਿਰ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਛਿਣ, ਲੱਟੂ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਧੁਰਾ, ਇਸ ਦੇ ਸੰਪਰਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਸਰਲ ਉਦਾਹਰਨ ਮੇਜ਼ ਤੇ ਰਖਿਆ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲਾ ਪੱਖਾ ਜਾਂ ਪੈਡੇਸਟਲ ਪੱਖਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪੱਖੇ ਦਾ ਧੁਰਾ, ਖਿਤਜੀ ਤਲ ਵਿੱਚ, ਡੋਲਨ ਗਤੀ (ਇੱਧਰ ਤੋਂ ਉੱਧਰ ਘੁੰਮਣ) ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗਤੀ ਖੜ੍ਹੇ-ਦਾਅ ਰੇਖਾ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤੇ ਧੁਰੇ ਦੀ ਧੁਰੀ ਟਿਕੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 7.5 (b) ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O)।

ਜਦੋਂ ਪੱਖਾ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਧੁਰਾ ਇੱਧਰ ਤੋਂ ਉਧਰ ਡੋਲਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਵੀ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਵਧੇਰੇ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਲੱਟੂ ਜਾਂ ਪੇਡੇਸਟਲ ਪੱਖੇ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਵਿੱਚ, **ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਨਾ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ।** ਇਸ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਧੁਰਾ ਤਾਂ ਸਥਿਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਪਰ ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਆਪਣੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ, ਵਧੇਰੇ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀ ਸਰਲ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀਆਂ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖਾ (ਮਤਲਬ ਧੁਰਾ) ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਦੱਸਿਆ ਨਾ ਜਾਵੇ, ਸਾਡੇ ਲਈ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ ਦੁਆਲ਼ੇ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

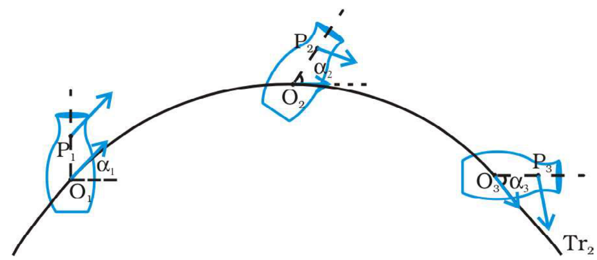
ਇੱਕ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਬੇਲਨ ਦਾ ਰੁੜ੍ਹਨਾ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਗਤੀਆਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ — ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ। ਇਸ ਲਈ ਰੁੜ੍ਹਨ ਗਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਜਿਸ 'ਕੁਝ ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ' ਦਾ ਜਿਕਰ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਕੀਤਾ ਸੀ ਉਹ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਜ਼ਰੀਏ ਨਾਲ ਚਿੱਤਰ 7.6 (a) ਅਤੇ (b) ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਾਫ਼ੀ ਸਿੱਖਿਆਦਾਇਕ ਪਾਓਗੇ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤੀ, ਸਮਾਨ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀ (identical translational trajectory) ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 7.6 (a) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਗਤੀ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.6 (b) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਗਤੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗਤੀਆਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। (ਤੁਸੀਂ ਖੁਦ ਭਾਰੀ ਪੁਸਤਕ ਵਰਗੇ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਨੂੰ ਸੁੱਟ ਕੇ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਦੋਨੋਂ ਗਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।)

ਆਓ ਇਸ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਵਰਣਿਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਸਾਰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੱਸੀਏ। **ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਚੂਲ ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ — ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਜਾਂ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ।**

ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤੀ ਜੋ ਜਾਂ ਤਾਂ ਚੂਲ ਤੇ ਟਿਕਿਆ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.6** (a) ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤੀ ਜੋ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਹੈ।



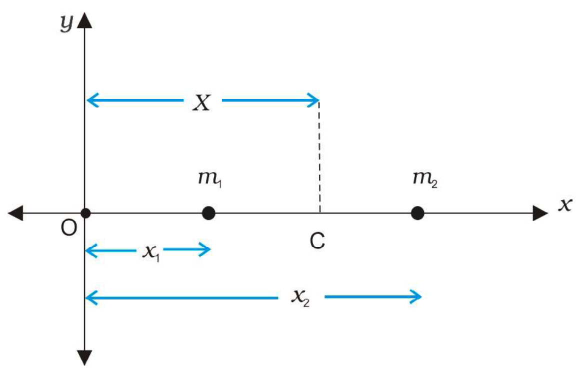
ਚਿੱਤਰ **7.6** (b) ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਅਜਿਹੀ ਗਤੀ ਜੋ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀਆਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.6 (a) ਅਤੇ (b) ਇੱਕ ਹੀ ਪਿੰਡ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਗਤੀਆਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿ P, ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਮਰਜ਼ੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, O ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਅਗਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਥੇ ਇਹ ਕਹਿਣਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਬਿੰਦੂ O ਦੀ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀ ਹੀ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀ Tr_1 *ਅਤੇ* Tr_2 *ਹਨ। ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਛਿਣਾਂ ਤੇ, ਬਿੰਦੂਆਂ O ਅਤੇ P ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਚਿੱਤਰ 7.6 (a) ਅਤੇ 7.6 (b) ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ* O_1, O_2, O_3 *ਅਤੇ* P_1, P_2, P_3 *ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 7.6 (a) ਤੋਂ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਿੰਡ ਦੇ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ O ਅਤੇ P ਦੇ ਵੇਗ, ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਵੀ ਗਿਆਤ ਹੈ, ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ OP, ਦਾ ਦਿਸ਼ਾਮਾਨ (orientation), ਮਤਲਬ ਕਿ ਉਹ ਕੋਣ ਜੋ OP ਇੱਕ ਨਿਯਤ ਦਿਸ਼ਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਖਿਤਜੀ ਦਿਸ਼ਾ) ਨਾਲ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ* $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ *। ਚਿੱਤਰ 7.6 (b) ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਨਾਲ ਨਿਰਮਿਤ ਗਤੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂਆਂ O ਅਤੇ P ਦੇ ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਤੇ ਵੇਗਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਣਾਂ* α_1, α_2, α_3 *ਦੇ ਮਾਨ ਵੀ ਭਿੰਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।*

ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਕਿਸੇ ਅਜਿਹੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ (ਜਿਵੇਂ ਛੱਤ ਵਾਲਾ ਪੱਖਾ) ਜਾਂ ਫਿਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੋ ਖੁਦ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਇੱਧਰ ਤੋਂ ਉਧਰ ਘੁੰਮਦੇ ਮੇਜ਼ ਦੇ ਪੱਖੇ ਵਿੱਚ)। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਹੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

7.2 ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (CENTRE OF MASS)

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸਦੀ ਮਹੱਤਤਾ ਤੇ ਚਾਣਨਾ ਪਾਵਾਂਗੇ। ਸਰਲਤਾ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੋਨੋਂ ਕਣਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ x-ਧੁਰਾ ਮੰਨਾਂਗੇ (ਚਿੱਤਰ 7.7)



ਚਿੱਤਰ 7.7

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਕਣਾਂ ਦੀ, ਕਿਸੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x_1 ਅਤੇ x_2 ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਕਣਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ C ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸਦੀ O ਤੋਂ ਦੂਰੀ, X ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ—

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad ...(7.1)$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.1) ਵਿੱਚ X ਨੂੰ ਅਸੀਂ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦਾ ਪੁੰਜ-ਭਾਰਿਤ ਔਸਤ (mass-weighted mean) ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇ ਦੋਨੋਂ ਕਣਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $m_1 = m_2 = m$, ਤਾਂ

$$X = \frac{mx_1 + mx_2}{2m} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਰਾਬਰ ਪੁੰਜ ਦੇ ਦੋ ਕਣਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਠੀਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚੋ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਜੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ n ਕਣ ਹੋਣ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1, m_2, ... m_n ਹੋਣ ਅਤੇ ਸਭ ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰਖਿਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (centre of mass) ਹੋਵੇਗਾ।

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_1 + m_2 + ... + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad ...(7.2)$$

ਜਿਥੇ $x_1, x_2 \dots x_n$ ਕਣਾਂ ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਹਨ, x ਵੀ ਉਸੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸੰਕੇਤ $\sum$ (ਯੂਨਾਨੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਅੱਖਰ ਸਿਗਮਾ) ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ n ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜੋੜਫ਼ਲ

$$\sum m_i = M$$

ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਤਿੰਨ ਕਣ ਹਨ ਜੋ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਪਰ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਰਖੇ ਗਏ ਹਨ। ਉਦੋਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਤਿੰਨ ਕਣ ਰਖੇ ਗਏ ਹਨ x ਅਤੇ y ਧੁਰੇ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨ ਕਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨ ਕਣਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1, m_2 ਅਤੇ m_3 ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ C ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ (X, Y) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨ ਹਨ –

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad ...(7.3a)$$

$$Y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \qquad ...(7.3b)$$

ਬਰਾਬਰ ਪੁੰਜ ਵਾਲੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ $m = m_1 = m_2 = m_3$,

$$X = \frac{m(x_1 + x_2 + x_3)}{3m} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$Y = \frac{m(y_1 + y_2 + y_3)}{3m} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ਅਰਥਾਤ ਬਰਾਬਰ ਪੁੰਜ ਵਾਲੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਤਿੰਨ ਕਣਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੇਂਦਰਕ (centroid) ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.3 a, b) ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ, ਸੌਖਿਆਂ, ਅਜਿਹੇ n ਕਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ ਵਿਆਪੀਕਰਨ (generlization) ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਹੋ ਕੇ, ਸਪੇਸ ਵਿੱਚ ਫੈਲੇ ਹੋਣ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (X, Y, Z) ਹੈ, ਜਿੱਥੇ

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{M} \qquad ...(7.4a)$$

$$Y = \frac{\sum m_i y_i}{M} \qquad ...(7.4b)$$

$$Z = \frac{\sum m_i z_i}{M} \qquad ...(7.4c)$$

ਜਿੱਥੇ $M = \sum m_i$ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁਲ ਪੁੰਜ ਹੈ। ਸੂਚਕ i (index i) ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ n ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ, m_i, iਵੇਂ ਕਣ ਦਾ ਪੁੰਜ ਹੈ ਅਤੇ i ਵੇਂ ਕਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ (x_i, y_i, z_i) ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀ-ਵੈਕਟਰ (position vectors) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ (7.4 a, b, c) ਨੂੰ ਸੰਯੋਜਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇ $\vec{r_i}$, iਵੇਂ ਕਣ ਦਾ ਸਥਿਤੀ-ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{R}$ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਸਥਿਤੀ-ਸਦਿਸ਼ ਹੈ

$$\mathbf{r}_i = x_i\,\hat{\mathbf{i}} + y_i\,\hat{\mathbf{j}} + z_i\,\hat{\mathbf{k}}$$

ਅਤੇ $$\mathbf{R} = X\,\hat{\mathbf{i}} + Y\,\hat{\mathbf{j}} + Z\,\hat{\mathbf{k}}$$

ਤਾਂ $$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \vec{\mathbf{r}}_i}{M} \qquad \text{...(7.4 d)}$$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਲਿਖਿਆ ਯੋਗ ਸਦਿਸ਼-ਯੋਗ ਹੈ।

ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖੇਪਤਾ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ। ਜੇ ਸੰਦਰਭ-ਫਰੇਮ (frame of reference) (ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਸਟਮ, (coordinate system) ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਣ-ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਹੀ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੀਟਰ ਛੜ ਜਾਂ ਫਲਾਈ ਵਹੀਲ, ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ-ਨੇੜੇ ਰਖੇ ਗਏ ਕਣਾਂ ਦਾ ਸਿਸਟਮ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ (7.4 a, b, c, d) ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਕਣਾਂ (ਪਰਮਾਣੂਆਂ ਜਾਂ ਅਣੂਆਂ) ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਇੰਨੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਣਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸੰਯੁਕਤ ਪ੍ਰਭਾਵ ਗਿਆਤ ਕਰਨਾ ਅਸੰਭਵ ਕਾਰਜ ਹੈ। ਪਰ ਕਿਉਂਕਿ ਕਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ ਬਹੁਤ ਘਟ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪੁੰਜ ਦੀ ਵੰਡ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜੇ ਪਿੰਡ ਦੀ n ਛੋਟੇ ਪੁੰਜ ਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕਰੀਏ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ $\Delta m_1, \Delta m_2 \ldots \Delta m_n$ ਹੋਣ ਅਤੇ i ਵਾਂ ਖੰਡ Δm_i ਬਿੰਦੂ (x_i, y_i, z_i) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ ਅਜਿਹਾ ਸੋਚੀਏ ਤਾਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਮਾਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਂਵੇਗਾ—

$$X = \frac{\sum(\Delta m_i)x_i}{\sum \Delta m_i}, Y = \frac{\sum(\Delta m_i)y_i}{\sum \Delta m_i}, Z = \frac{\sum(\Delta m_i)z_i}{\sum \Delta m_i}$$

ਜੇ ਅਸੀਂ n ਨੂੰ ਵੱਡਾ ਹੋਰ ਵੱਡਾ ਕਰੀਏ ਅਰਥਾਤ Δm_i ਨੂੰ ਹੋਰ ਛੋਟਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ ਕਾਫ਼ੀ ਯਥਾਰਥ ਮਾਨ (exact) ਦੱਸਣਗੇ। ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ i-ਕਣਾਂ ਦੇ ਯੋਗ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਕਲ (integral) ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰਾਂਗੇ।

$$\sum \Delta m_i \to \int \mathrm{d}m = M,$$

$$\sum(\Delta m_i)x_i \to \int x\,\mathrm{d}m,$$

$$\sum(\Delta m_i)y_i \to \int y\,\mathrm{d}m,$$

ਅਤੇ $$\sum(\Delta m_i)z_i \to \int z\,\mathrm{d}m$$

ਇੱਥੇ M, ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਹੈ। ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$X = \frac{1}{M}\int x\,\mathrm{d}m, Y = \frac{1}{M}\int y\,\mathrm{d}m \text{ and } Z = \frac{1}{M}\int z\,\mathrm{d}m \qquad \text{...(7.5a)}$$

ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨ ਅਦਿਸ਼ ਵਿਅੰਜਕਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ ਸਦਿਸ਼ ਵਿਅੰਜਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\int \vec{\mathbf{r}}\,\mathrm{d}m \qquad \text{...(7.5b)}$$

ਜੇ ਅਸੀਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਚੁਣ ਲਈਏ ਤਾਂ

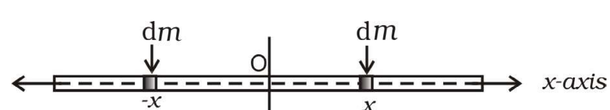
$$\mathbf{R} = 0$$

ਅਰਥਾਤ, $$\int \mathbf{r}\,\mathrm{d}m = 0$$

ਜਾਂ $$\int x\,\mathrm{d}m = \int y\,\mathrm{d}m = \int z\,\mathrm{d}m = 0 \qquad \text{...(7.6)}$$

ਅਕਸਰ ਸਾਨੂੰ ਨਿਯਮਿਤ ਆਕਾਰ (regular shape) ਦੇ ਸਮਅੰਗੀ (homogeneous) ਪਿੰਡਾਂ, ਜਿਵੇਂ ਰਿੰਗ, ਡਿਸਕ, ਗੋਲੇ, ਛੜਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। (ਸਮਅੰਗੀ ਪਿੰਡ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪੁੰਜ ਦੀ ਵੰਡ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ।) ਸਮਤਾ (symmetry) ਦਾ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਸੌਖਿਆ ਇਹ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਕੇਂਦਰ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਆਓ, ਇੱਕ ਪਤਲੀ ਛੜ ਤੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜਿਸਦੀ ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਮੋਟਾਈ (ਜੇ ਇਸਦਾ ਪਰਿਖੇਤਰ (cross section) ਆਇਤਾਕਾਰ ਹੈ) ਜਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (ਜੇ ਛੜ ਵੇਲਣਾਕਾਰ ਹੈ), ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਛੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰਖੀਏ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਇਸਦੇ ਜਿਆਮਿਤੀ (geometrical) ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਲੈ ਲਈਏ ਤਾਂ ਪਰਾਵਰਤਨ ਸਮਤਾ (reflection symmetry) ਦੇ ਨਜ਼ਰੀਏ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ x ਤੇ ਸਥਿਤ dm ਘਟਕ (element dm) ਦੇ ਬਰਾਬਰ dm ਦਾ ਘਟਕ $-x$ ਤੇ ਵੀ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ (ਚਿੱਤਰ 7.8)

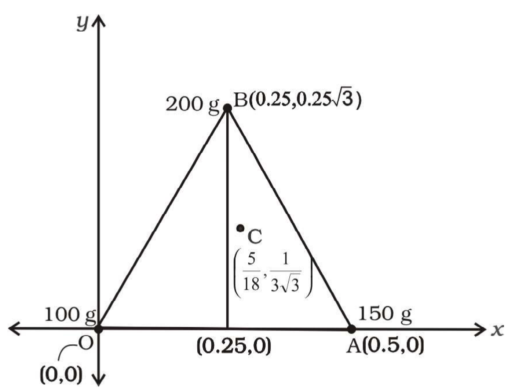


ਚਿੱਤਰ **7.8** ਇਕ ਪਤਲੀ ਛੜ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ

ਸਮਕਲ (integral) ਵਿੱਚ ਹਰ ਜੋੜੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਕਾਰਨ ਖੁਦ xdm ਦਾ ਮਾਨ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.6) ਦਸਦੀ ਹੈ ਕਿ ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਸਮਕਲ (integral) ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਉਹ ਉਸ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਅੰਗ ਛੜ ਦਾ ਜਿਆਮਿਤੀ ਕੇਂਦਰ ਇਸਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਰਾਵਰਤਨ ਸਮਤਾ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮਤਾ ਦਾ ਇਹੀ ਤਰਕ, ਸਮਅੰਗੀ ਰਿੰਗਾਂ, ਡਿਸਕਾਂ, ਗੋਲਿਆਂ ਅਤੇ ਇਥੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਚੱਕਰਾ ਆਕਾਰ ਜਾਂ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਰਿਖੇਤਰ (cross section) ਵਾਲੀ ਮੋਟੀ ਛੜ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਜਿਹੇ ਸਾਰੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x, y, z) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰੇਕ ਪੁੰਜ ਘਟਕ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(-x, -y, -z)$ ਤੇ ਵੀ ਉਸ ਪੁੰਜ ਦਾ ਘਟਕ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। (ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਹੀਏ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ, ਪਰਾਵਰਤਨ-ਸਮਤਾ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ)। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ, ਸਮੀਕਰਨ (7.5a) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਾਰੇ ਸਮਕਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਹੀ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.1*** **ਇੱਕ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿੱਖਰਾਂ (vertices) ਤੇ ਰਖੇ ਗਏ ਤਿੰਨ ਕਣਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕਣਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100g, 150g ਅਤੇ 200g ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 0.5 m ਹੈ।**



ਚਿੱਤਰ ***7.9***

ਹੱਲ : x ਅਤੇ y −ਧੁਰਾ ਚਿੱਤਰ 7.9 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਚੁਣੀਏ ਤਾਂ ਸਮਬਾਹੂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿੱਖਰ ਬਿੰਦੂਆਂ O, A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (0, 0), (0.5, 0) ਅਤੇ (0.25, $0.25\sqrt{3}$) ਹੋਣਗੇ। ਮੰਨਿਆ ਕਿ 100g, 150 g ਅਤੇ 200 g ਦੇ ਪੁੰਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ O, A ਅਤੇ B ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਤਾਂ

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$= \frac{\left[100(0) + 150(0.5) + 200(0.25)\right]\ \text{g m}}{(100 + 150 + 200)\ \text{g}}$$

$$= \frac{75 + 50}{450}\,\text{m} = \frac{125}{450}\,\text{m} = \frac{5}{18}\,\text{m}$$

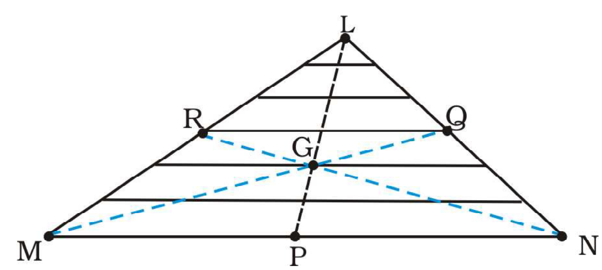
$$Y = \frac{\left[100(0) + 150(0) + 200(0.25\sqrt{3})\right]\ \text{g m}}{450\ \text{g}}$$

$$= \frac{50\sqrt{3}}{450}\,\text{m} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\text{m} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\,\text{m}$$

ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ C ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OAB ਦਾ ਜਿਆਮਿਤੀ ਕੇਂਦਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ਹੈ ? ◀

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.2*** **ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਕਾਰ ਦਾ ਪਤਲੇ ਵਰਕ (lamina) ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ : ਵਰਕ (ΔLMN) ਨੂੰ ਅਧਾਰ (MN) ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਪਤਲੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.10 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

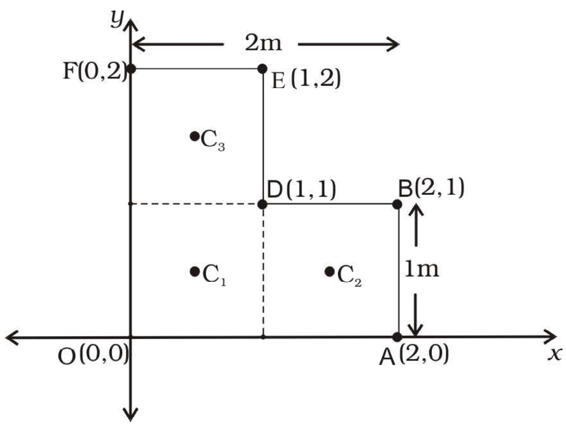


ਚਿੱਤਰ ***7.10***

ਸਮਤਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਪੱਟੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਉਸਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਮਧੱਕਾ (centroid) LP ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਪੂਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇਸ ਮੱਧਿਕਾ LP ਤੇ ਕੀਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਤਰਕ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਮਧੱਕਾ MQ ਅਤੇ NR ਤੇ ਵੀ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤਿੰਨਾਂ ਮੱਧਕਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗਾਮੀ ਬਿੰਦੂ (Point of concurrence of the medians) ਦਿੱਤੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੇਂਦਰਕ (centroid) G ਹੈ। ◀

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.3*** **ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ L– ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਫਲਕ (ਇੱਕ ਪਤਲੀ ਚਪਟੀ ਪਲੇਟ) ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਗਿਆਤ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.11 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ। ਫਲਕ ਦਾ ਪੁੰਜ 3 kg ਹੈ।**

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 7.11 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ X ਅਤੇ Y ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਚੁਣੋ ਤਾਂ L- ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਫਲਕ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਉਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਅਸੀਂ L- ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਾ ਕੇ ਬਣਿਆ ਹੋਇਆ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ 1 m ਹੈ। ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦਾ ਪੁੰਜ 1 kg ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਫਲਕ ਸਮਅੰਗੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ C_1, C_2 ਅਤੇ C_3 ਹਨ, ਜੋ ਸਮਤਾ ਦੇ ਵਿੱਚਾਰ ਨਾਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਜਿਆਮਿਤੀ ਕੇਂਦਰ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (1/2, 1/2), (3/2, 1/2), (1/2, 3/2) ਹਨ। ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ L- ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (X, Y) ਇਹਨਾਂ ਪੁੰਜ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ ***7.11***

ਇਸ ਲਈ

$$X = \frac{[1(1/2)+1(3/2)+1(1/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

$$Y = \frac{[1(1/2)+1(1/2)+1(3/2)]\,\text{kg m}}{(1+1+1)\,\text{kg}} = \frac{5}{6}\text{m}$$

L ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਰੇਖਾ OD ਤੇ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਸੀ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ, ਕਿਵੇਂ ? ਜੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨੀਏ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.11 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ L ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਫਲਕ ਦੇ ਤਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਵੱਖ- ਵੱਖ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਫਲਕ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ? ◀

7.3 ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ (MOTION OF CENTRE OF MASS)

ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਜਾਣਨ ਤੋਂ ਬਾਦ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਾਂ ਕਿ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦੇ ਭੌਤਿਕ ਮਹੱਤਵ ਦੀ ਵਿਵੇਚਨਾ ਕਰ ਸਕੀਏ। ਸਮੀਕਰਨ (7.4 d) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$M\mathbf{R} = \sum m_i\mathbf{r}_i = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots + m_n\mathbf{r}_n \quad \ldots(7.7)$$

ਸਮੀਕਰਨ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਵਕਲਿਤ ਕਰਨ ਤੇ (differentiating both sides with respect to time)

$$M\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + m_n\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_n}{dt}$$

ਜਾਂ $M\boldsymbol{V} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{v}_n \quad \ldots(7.8)$

ਜਿੱਥੇ $\boldsymbol{v}_1 (= \mathrm{d}\boldsymbol{r}_1/\mathrm{d}t)$ ਪਹਿਲੇ ਕਣ ਦਾ ਵੇਗ ਹੈ, $\mathbf{v} = d\boldsymbol{R}/dt$ ਦੂਸਰੇ ਕਣ ਦਾ ਵੇਗ ਹੈ, ਆਦਿ ਅਤੇ $\mathbf{v} = d\boldsymbol{R}/dt$ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਵੇਗ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ m_1, m_2 ... ਆਦਿ ਦੇ ਮਾਨ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਦਲਦੇ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਅਵਕਲਿਤ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਵਹਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.8) ਨੂੰ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਵਕਲਿਤ ਕਰਨ ਤੇ

$$M\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_2}{\mathrm{d}t} + \ldots + m_n\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_n}{\mathrm{d}t}$$

ਜਾਂ

$$M\mathbf{A} = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + m_n\boldsymbol{a}_n \quad \ldots(7.9)$$

ਜਿੱਥੇ $\boldsymbol{a}_1 = d\boldsymbol{v}_1/dt$ ਪਹਿਲੇ ਕਣ ਦਾ ਪ੍ਰਵੇਗ ਹੈ, $\boldsymbol{a}_2 = d\boldsymbol{v}_2/dt$ ਦੂਸਰੇ ਕਣ ਦਾ ਪ੍ਰਵੇਗ ਹੈ, $A = dV/dt$ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਪ੍ਰਵੇਗ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ, ਪਹਿਲੇ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਬਲ ਹੈ $\mathbf{F}_1 = m_1\mathbf{a}_1$, ਦੂਸਰੇ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਬਲ ਹੈ $\mathbf{F}_2 = m_2\mathbf{a}_2$ ਆਦਿ। ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਨ (7.9) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ–

$$M\mathbf{A} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots + \mathbf{F}_n \quad \ldots(7.10)$$

ਇਸ ਲਈ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਨੂੰ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਪ੍ਰਵੇਗ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਉਸ ਕਣ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਲਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲ $\mathbf{F}_1$ ਦੀ ਗੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਇਹ ਕੋਈ ਇਕੱਲਾ ਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਬਲਕਿ, ਇਸ ਕਣ 'ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਲਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ (vector sum) ਹੈ। ਇਹੀ ਗੱਲ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਕਣਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹਰੇਕ ਕਣ 'ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਉਹਨਾਂ ਬਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਹੋਣਗੇ ਜੋ ਸਿਸਟਮ ਤੋਂ ਬਾਹਰਲੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲੱਗੇ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲ ਹੋਣਗੇ ਜੋ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਕਣ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ 'ਤੇ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਨਿਯਮ

ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲ ਹਮੇਸ਼ਾ ਬਰਾਬਰ ਮਿਕਦਾਰ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ (7.10) ਵਿੱਚ ਬਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.10) ਨੂੰ ਫਿਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$MA = \mathbf{F}_{ext} \quad ...(7.11)$$

ਜਿੱਥੇ $\mathbf{F}_{ext}$ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕਣਾਂ 'ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਸਾਰੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.11) ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ **ਕਿ ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਪੁੰਜ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਬਲ ਉਸ ਤੇ ਲਗੇ ਹੋਣ।**

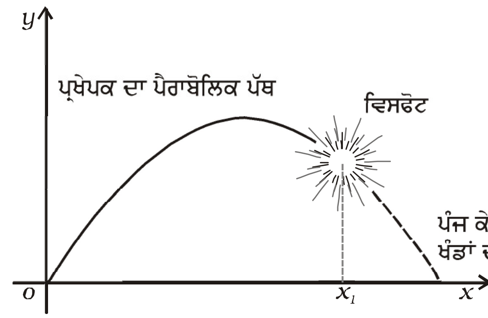
ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਨ ਦੇ ਲਈ, ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਨਹੀਂ ਚਾਹੀਦੀ, ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਜਾਣਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.11) ਵਿਉਤਪੰਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਵੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰਨੀ ਪੈਂਦੀ। ਸਿਸਟਮ ਕਣਾਂ ਦਾ ਅਜਿਹਾ ਇਕੱਠ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਰ੍ਹਾਂ-ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਆਂਤਰਿਕ ਗਤੀਆ ਹੋਣ, ਅਤੇ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੋਇਆ ਜਾਂ, ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੋਵੇਂ ਕਰਦਾ ਹੋਇਆ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਕਿਹੋ-ਜਿਹਾ ਵੀ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਘਟਕ ਕਣਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਗਤੀਆਂ ਹੋਣ, ਇਸਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (centre of mass) ਸਮੀਕਰਨ (7.11) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੀ ਗਤੀ ਕਰੇਗਾ।

ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਕਣ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਆਉਣ ਦੀ ਬਜਾਏ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਘਟਕ ਮਤਲਬ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਗਿਆਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸਦੇ ਲਈ, ਬੱਸ ਪੂਰੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗੇ ਸਾਰੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਨੂੰ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤੇ ਲੱਗੇ ਹੋਏ ਮੰਨਣਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਹ ਕਾਰਜ-ਵਿਧੀ ਅਸੀਂ ਪਿੰਡਾਂ ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨਾਲ ਜੁੜੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ ਅਪਣਾਈ ਸੀ। ਬੇਸ਼ਕ, ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਕੋਈ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਾਰਨ ਨਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਕਹੇ ਹੀ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ, ਅਤੇ ਕਣਾਂ ਵਿੱਚ ਆਂਤਰਿਕ ਗਤੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਸੀ ਅਤੇ ਜੇ ਸੀ ਤਾਂ ਨਿਗੁਣੀ ਸੀ। ਅੱਗੇ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਮੰਨਣ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਰਹੇਗੀ। ਨਾ ਸਿਰਫ ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੀ ਪਹਿਲਾਂ ਅਪਣਾਈ ਗਈ ਵਿਧੀ ਦਾ ਮਤਲਬ ਸਮਝ ਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਬਲਕਿ, ਅਸੀਂ ਉਹ ਵਿਧੀ ਵੀ ਗਿਆਤ ਕਰ ਲਈ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਦੁਆਰਾ (i) ਅਜਿਹੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵੀ ਹੋਵੇ, (ii) ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਜਿਸਦੇ ਕਣਾਂ ਵਿੱਚ ਤਰ੍ਹਾਂ-ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਆਂਤਰਿਕ ਗਤੀਆਂ ਹੋਣ, ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਨੂੰ ਵੱਖ ਕਰਕੇ ਸਮਝਿਆ ਤੇ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.12 ਸਮੀਕਰਨ (7.11) ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਪੈਰਾਬੋਲਿਕ ਪੱਥ 'ਤੇ ਚੱਲਦਾ ਹੋਇਆ ਇੱਕ ਪ੍ਰਖੇਪਕ (projectile) ਹਵਾ ਵਿੱਚ



ਚਿੱਤਰ ***7.12*** ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਖੇਪਕ ਦੇ ਖੰਡਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਵਿਸਫੋਟ ਤੋਂ ਬਾਦ ਵੀ ਉਸੇ ਪੈਰਾਬੋਲਿਕ ਪੱਥ ਤੇ ਚਲਦਾ ਹੋਇਆ ਪਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਸ ਤੇ ਇਹ ਵਿਸਫੋਟ ਨਾ ਹੋਣ ਤੇ ਚਲਦਾ।

ਫਟ ਕੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਖਿੱਲਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਵਿਸਫੋਟ ਕਾਰਕ ਬਲ ਅੰਤਰਿਕ ਬਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਪ੍ਰਖੇਪਕ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਖੰਡਾਂ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਵਿਸਫੋਟ ਦੇ ਬਾਦ ਵੀ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਵਿਸਫੋਟ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਸੀ, ਅਰਥਾਤ ਧਰਤੀ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਆਕਰਸ਼ਣ ਬਲ। ਇਸ ਲਈ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪ੍ਰਖੇਪਕ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਪੈਰਾਬੋਲਿਕ ਪੱਥ ਵਿਸਫੋਟ ਦੇ ਬਾਦ ਵੀ ਉਹੀ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਵਿਸਫੋਟ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ।

7.4 ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ (LINEAR MOMENTUM OF A SYSTEM OF PARTICLES)

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਵਿਅੰਜਕ ਹੈ

$$p = m\mathbf{v} \quad ...(7.12)$$

ਅਤੇ, ਇੱਕਲੇ ਕਣ ਦੇ ਲਈ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸੰਕੇਤਿਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad ...(7.13)$$

ਜਿੱਥੇ $\mathbf{F}$ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਬਲ ਹੈ। ਆਓ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ n ਕਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m_1, m_2 ..., m_n$ ਹਨ ਅਤੇ ਵੇਗ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ...\boldsymbol{v}_n$ ਹਨ। ਕਣ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਬਲ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ

ਉਹਨਾਂ ਤੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਵੀ ਲਗੇ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ (linear momentum) m_1v_1, ਦੂਸਰੇ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ m_2v_2 ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ ਕਣਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਵੀ ਹਨ।

n ਕਣਾਂ ਦੇ ਇਸ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ, ਇਕੱਲੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗਾਂ ਦੇ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ (vector sum) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \ldots + \mathbf{p}_n$$

$$= m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \ldots + m_n\mathbf{v}_n \quad \ldots(7.14)$$

ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ (7.8) ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ’ਤੇ,

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V} \quad \ldots(7.15)$$

ਇਸ ਲਈ ਕਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ, ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਵੇਗ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.15) ਦਾ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਵਕਲਨ (differentiate) ਕਰਨ ’ਤੇ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M\frac{d\mathbf{V}}{dt} = M\mathbf{A} \quad \ldots(7.16)$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.16) ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਨ (7.11) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ’ਤੇ

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \quad \ldots(7.17)$$

ਇਹ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਕਥਨ ਹੈ। ਜੋ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਦਾ ਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ (7.17) ਦੇ ਅਧਾਰ ’ਤੇ,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathbf{P} = \text{ਸਥਿਰ ਅੰਕ} \quad (7.18a)$$

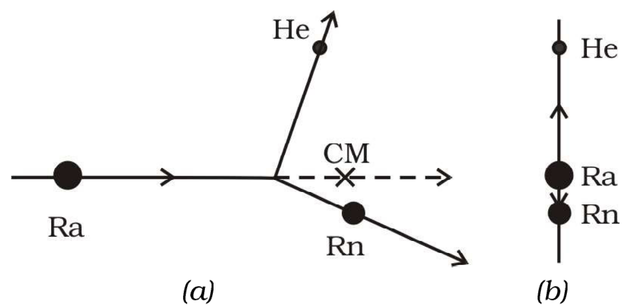
ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਸੁਰੱਖਿਅਣ ਦਾ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.15) ਦੇ ਕਾਰਨ, ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਸਿਸਟਮ ਨੂੰ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਵੇਗ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲਾਂਗੇ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।)

ਧਿਆਨ ਦਿਉ, ਕਿ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ, ਮਤਲਬ ਉਹਨਾਂ ਬਲਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਜੋ, ਕਣ ਇਕ-ਦੂਸਰੇ ਤੇ ਲਗਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੀ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀ ਕਾਫੀ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਸਿਸਟਮ ’ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਸਥਿਰ ਵੇਗ ਨਾਲ ਹੀ ਚਲਦਾ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ, ਮੁਕਤ ਕਣ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਗਤੀ ਨਾਲ ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਪੱਥ ਤੇ ਚਲਦਾ ਹੈ।

ਸਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨ (7.18 a) ਜਿਹਨਾਂ ਅਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ ਹੈ, ਉਹ ਹਨ —

$$P_x = c_1,\ P_y = c_2 \text{ and } P_z = c_3 \quad (7.18\text{ b})$$

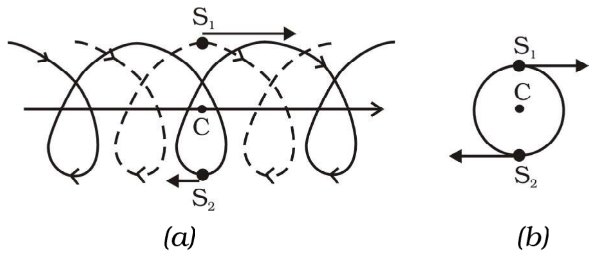
ਜਿੱਥੇ P_x, P_y, P_z ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ $\mathbf{P}$ ਦੇ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਹਨ ਅਤੇ c_1, c_2, c_3 ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ *7.13* (a) ਇੱਕ ਭਾਰੀ ਕੇਂਦਰਕ ਜਾਂ ਨਿਊਕਲੀਅਸ (Ra) ਇੱਕ ਹਲਕੇ ਨਾਭਿਕ (Rn) ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਲਫਾ-ਕਣ (He) ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ। (b) ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਸਥਿਰ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਉਸੇ ਭਾਰੀ ਕਣ (Ra) ਦਾ ਵਿਖੰਡਨ। ਦੋਵੇਂ ਪੈਦਾ ਹੋਏ ਕਣ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਆਉ, ਰੇਡੀਅਮ ਦੇ ਨਿਊਕਲੀਅਸ ਵਰਗੇ ਕਿਸੇ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਅਸਥਾਈ ਨਿਊਕਲੀਅਸ ਦੇ ਰੇਡਿਓਐਕਟਿਵ ਖੈ (decay) ਤੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਰੇਡੀਅਮ ਦਾ ਨਿਊਕਲੀਅਸ ਇੱਕ ਰੇਡਨ ਦੇ ਨਿਊਕਲੀਅਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਲਫਾ ਕਣ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਿਤ (fission) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਖੈ-ਕਾਰਕ ਬਲ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲ ਹਨ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਨਕਾਰਨਯੋਗ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ, ਖੈ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਖੈ ਤੋਂ ਬਾਦ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਖੰਡਨ ਵਿੱਚ ਪੈਦਾ ਹੋਏ ਦੋਨੋਂ ਕਣ, ਰੇਡਨ ਦਾ ਨਿਊਕਲੀਅਸ ਅਤੇ ਅਲਫਾ-ਕਣ, ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਲਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀ ਉਹੀ ਬਣੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤੇ ਖੈ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਮੂਲ ਰੇਡੀਅਮ ਨਿਊਕਲੀਅਸ ਗਤੀਮਾਨ ਸੀ (ਚਿੱਤਰ 7.13 a)।

ਜੇ ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਸੰਦਰਭ ਫਰੇਮ ਤੋਂ ਇਸ ਖੈ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਣਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਖਾਸ ਕਰਕੇ ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਪੈਦਾ ਹੋਏ ਕਣ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਤੀਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਸਥਿਰ ਰਹੇ, ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.13 (b) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.14** (a) ਬਾਇਨਰੀ ਸਿਸਟਮ ਬਣਾਉਂਦੇ ਦੋ ਤਾਰਿਆਂ S_1 ਅਤੇ S_2 ਦੀਆਂ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀਆਂ, ਜੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ C ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ। (b) ਉਸੀ ਬਾਇਨਰੀ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤੀ ਜਦੋਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ C ਸਥਿਰ ਹੈ।

ਕਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਿਸਟਮ ਸੰਬੰਧੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸੀ ਗਈ ਰੇਡੀਓਐਕਟਿਵ ਖੈ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ, ਪ੍ਰਯੋਗਸ਼ਾਲਾ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਫਰੇਮ (frame of reference) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਫਰੇਮ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਸੌਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ (astrology) ਵਿੱਚ ਜੋੜੇ (ਬਾਇਨਰੀ, Binary) ਤਾਰਿਆਂ ਦਾ ਮਿਲਣਾ ਇੱਕ ਆਮ ਗੱਲ ਹੈ। ਜੇ ਕੋਈ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਨਾ ਲੱਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਤਾਰਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇੱਕ ਮੁਕਤ ਕਣ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.14 (a) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਪੁੰਜ ਵਾਲੇ ਦੋਨੋਂ ਤਾਰਿਆਂ ਦੀਆਂ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀਆਂ ਵੀ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਗੁੰਝਲਦਾਰ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਜੇ ਅਸੀਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਫਰੇਮ ਵਿੱਚੋਂ ਦੇਖੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਤਾਰੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤੇ ਤੇ ਗਤੀਮਾਨ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਸਥਿਰ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਅਕਾਰ ਪਥ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਉਲਟ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ ਬਣੇ ਰਹਿਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 7.14 (b)। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਤਾਰਿਆਂ ਦੀ ਟਰੈਜੇਕਟਰੀ ਦੋ ਗਤੀਆਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਬਣੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (i) ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਗਤੀ (ii) ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਤਾਰਿਆਂ ਦੇ ਚੱਕਰ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਥ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਕੱਲੇ ਕਣ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਇਰਦ- ਗਿਰਦ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਕਰਕੇ ਦੇਖਣਾ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਹੀ ਉਪਯੋਗੀ ਤਕਨੀਕ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

7.5 ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ (VECTOR PRODUCT OF TWO VECTORS)

ਅਸੀਂ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਭੌਤਿਕੀ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਪਾਠ 6 (ਕਾਰਜ, ਊਰਜਾ, ਸ਼ਕਤੀ) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਅਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੌਤਿਕ ਰਾਸ਼ੀ, ਕਾਰਜ, ਦੋ ਸਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀਆਂ, ਬਲ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦੇ ਅਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਗੁਣਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ (vector product) ਹੈ। ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਟਾਰਕ (Torque) ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ (angular momentum) , ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ (Definition of vector product) –

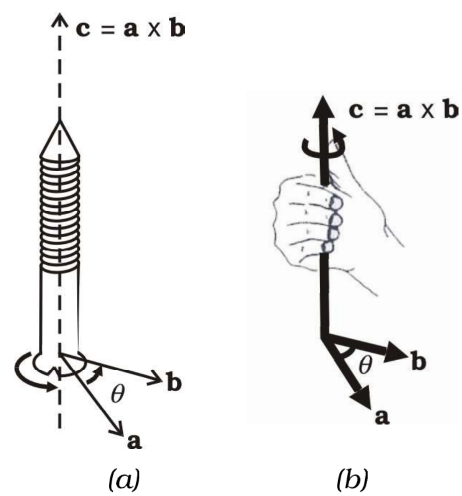
ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਦਿਸ਼ $\boldsymbol{c}$ ਹੈ

(*i*) $\boldsymbol{c}$ ਦੀ ਮਿਕਦਾਰ (magnitude),

$\boldsymbol{c} = ab\sin\theta$ ਹੈ, ਜਿਥੇ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ (magnitude, ਮਿਕਦਾਰ) ਹਨ ਅਤੇ θ ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਲਾ ਕੋਣ ਹੈ।

(*ii*) $\boldsymbol{c}$ ਉਸ ਤਲ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(*iii*) ਜੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲਾ ਪੇਚ (right handed screw) ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖੀਏ ਕਿ ਇਸਦਾ ਸਿਖਰ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ ਇਸ ਤਲ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸਿਖਰ ਨੂੰ $\boldsymbol{a}$ ਤੋਂ $\boldsymbol{b}$ ਵੱਲ ਘੁਮਾਈਏ, ਤਾਂ ਪੇਚ ਦੀ ਨੋਕ $\boldsymbol{c}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਵਧੇਗੀ। ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਦਾ ਨਿਯਮ ਚਿੱਤਰ 7.15 a ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.15** (a) ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਦਾ ਨਿਯਮ (b) ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੱਸਣ ਲਈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦਾ ਨਿਯਮ (right hand rule)

ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੇ ਨਿਯਮ (right hand rule) ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਆਪਣੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀ ਹਥੇਲੀ ਨੂੰ $\boldsymbol{a}$ ਤੋਂ $\boldsymbol{b}$ ਵੱਲ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਖੋਲੋ। ਤੁਹਾਡੇ ਫੈਲੇ ਹੋਏ ਅੰਗੂਠੇ ਦਾ ਸਿਰਾ $\boldsymbol{c}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਸੇਗਾ।

ਇਹ ਯਾਦ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕੋਣ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 7.15 (a) ਅਤੇ (b) ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਦੂਸਰਾ $(360° - \theta)$ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਨਿਯਮਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚਲਾ ਛੋਟਾ ਕੋਣ $(<180°)$ ਲੈ ਕੇ ਨਿਯਮ ਲਗਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ θ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਵਿੱਚ, ਗੁਣਾ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕ੍ਰਾਸ (cross) $(\times)$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਕ੍ਰਾਸ ਗੁਣਨ (cross product) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦਾ ਅਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ, ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (commutative law) ਦੀ ਪਾਲਨਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ $\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.\boldsymbol{a}$

ਪਰ, ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ, ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ ਦੀ ਪਾਲਨਾ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ, ਅਰਥਾਤ

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ (magnitude) ($ab\sin\theta$) ਬਰਾਬਰ ਹਨ; ਅਤੇ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਉਸ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\boldsymbol{a}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b}$ ਮੌਜੂਦ ਹਨ। ਪਰ, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਨੂੰ $\boldsymbol{a}$ ਤੋਂ $\boldsymbol{b}$ ਵੱਲ ਘੁਮਾਉਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ ਦੇ ਲਈ $\boldsymbol{b}$ ਤੋਂ $\boldsymbol{a}$ ਵੱਲ। ਨਤੀਜਾ, ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਸਦਿਸ਼ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$$

ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਰੋਚਕ ਗੁਣ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਪਰਾਵਰਤਨ ਵਿਵਹਾਰ (behaviour under reflection) । ਪਰਾਵਰਤਨ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ (ਅਰਥਾਤ ਦਰਪਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਲੈਣ 'ਤੇ) ਸਾਨੂੰ $x \to -x, y \to -y$ ਅਤੇ $z \to -z$ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਨਤੀਜੇ ਵੱਜੋਂ ਸਾਰੇ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਘਟਕਾਂ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $a \to -a, b \to -b$ । ਦੇਖੋ ਕਿ ਪਰਾਵਰਤਨ ਵਿੱਚ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ਦਾ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

$$\boldsymbol{a}\times\mathbf{b} \to (-\boldsymbol{a})\times(-\mathbf{b}) = \boldsymbol{a}\times\mathbf{b}$$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਾਵਰਤਨ ਨਾਲ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਅਦਿਸ਼ ਅਤੇ ਸਦਿਸ਼ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਗੁਣਨ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਉੱਪਰ ਵੰਡਣਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (Distributive over addition) । ਇਸ ਲਈ

$$\boldsymbol{a}.(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}.\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

ਅਸੀਂ $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ਨੂੰ ਘਟਕਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕੁਝ ਪ੍ਰਾਥਮਿਕ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ,

(i) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = 0$ (0 ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ, ਮਤਲਬ ਜ਼ੀਰੋ ਮਿਕਦਾਰ ਵਾਲਾ ਸਦਿਸ਼) ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $a^2 \sin 0° = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪੁੱਜਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},\ \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

(ii) $\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $\sin 90^0$ ਹੈ ਜਾਂ 1 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\hat{\mathbf{i}}$ ਅਤੇ $\hat{\mathbf{j}}$ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਇਕਾਈ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ 90° ਦਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}$ ਇਕ ਇਕਾਈ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ। $\hat{\mathbf{i}}$ ਅਤੇ $\hat{\mathbf{j}}$ ਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਦਿਸ਼ $\hat{\mathbf{k}}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \text{ ਅਤੇ } \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਗੁਣ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ —

$$\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}},\quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\quad \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਵਿਅੰਜਨਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇ $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੇ ਤਾਂ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ।

ਹੁਣ,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}})\times(b_x\hat{\mathbf{i}} + b_y\hat{\mathbf{j}} + b_z\hat{\mathbf{k}})$$

$$= a_xb_y\hat{\mathbf{k}} - a_xb_z\hat{\mathbf{j}} - a_yb_x\hat{\mathbf{k}} + a_yb_z\hat{\mathbf{i}} + a_zb_x\hat{\mathbf{j}} + a_zb_y\hat{\mathbf{i}}$$

$$= (a_yb_x - a_zb_x)\hat{\mathbf{i}} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{\mathbf{k}}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਰਲ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ। $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵਿਅੰਜਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੇਂਟ (determinant) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਵਿੱਚ ਆਸਾਨ ਹੈ।

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.4*** **ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ $\boldsymbol{a} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k})$ ਅਤੇ $\boldsymbol{b} = (-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k})$ ਦੇ ਅਦਿਸ਼ ਅਤੇ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**

ਹੱਲ :

$$\mathbf{a}\square\mathbf{b} = (3\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}})\square(-2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 3\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -6 - 4 - 15$$
$$= -25$$

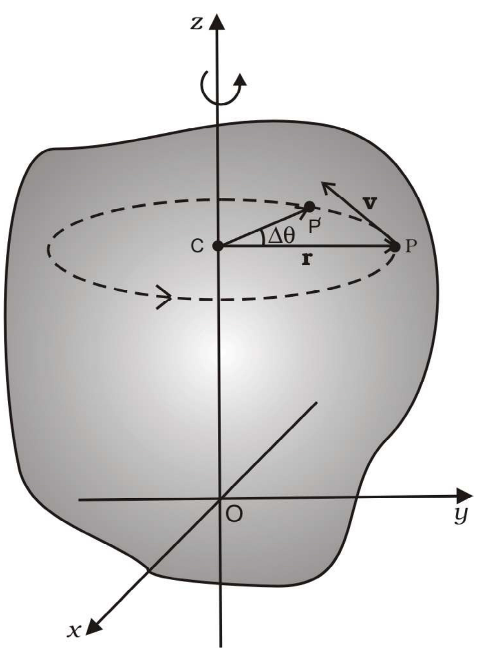
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}}\\ 3 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=7\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}-5\hat{\mathbf{k}}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-7\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}+5\hat{\mathbf{k}}$$

7.6 ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ (ANGULAR VELOCITY AND ITS RELATION WITH LINEAR VELOCITY)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕੋਣੀ ਵੇਗ (angular velocity) ਕੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀ ਕੀ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ ? ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਮਝ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ ਇੱਕ ਪੱਥ ਤੇ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ਉਸਦੇ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.16** ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ। ਸਥਿਰ (z–) ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਕਿਸੇ ਕਣ P ਦਾ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪੱਥ ਤੇ ਚੱਲਣਾ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ (c), ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ।

ਆਓ ਚਿੱਤਰ 7.4 ਨੂੰ ਮੁੜ ਦੇਖੀਏ। ਜਿਵੇਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਚੱਕਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 7.16 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 7.4 ਨੂੰ ਫਿਰ ਬਣਾਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ (z–) ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦੇ, ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ, ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਣ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ। ਇਹ ਕਣ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ C, ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ, ਜੋ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ P ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ **v** ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਚੱਕਰ ਦੇ P ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨਿਆ ਕਿ Δt ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਬਾਦ ਕਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ P′ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 7.16)। Δt ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਣ ਦੇ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਕੋਣ PCP′ ਦਾ ਮਾਪ $\Delta\theta$ ਹੈ। Δt ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕਣ ਦਾ ਔਸਤ ਕੋਣੀ ਵੇਗ $\Delta\theta/\Delta t$ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ Δt ਦਾ ਮਾਨ ਘਟਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਨੇੜੇ ਲੈ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਨੁਪਾਤ $\Delta\theta/\Delta t$ ਦਾ ਮਾਨ ਇੱਕ ਸੀਮਾਂਤ ਮਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ P ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਣ ਦਾ ਤਤਕਾਲਿਕ ਕੋਣੀ ਵੇਗ $d\theta/dt$ ਹੈ।

ਤਤਕਾਲਿਕ ਕੋਣੀ ਵੇਗ (instantaneous angular velocity) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ω ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ (ਗ੍ਰੀਕ ਅੱਖਰ ਔਮੇਗਾ)। ਚੱਕਰੀ ਗਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੇ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ υ ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ω ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਰਲ ਸਮੀਕਰਨ $\upsilon=\omega r$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ r ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਛਿਣ ਤੇ ਸਮੀਕਰਨ $\upsilon=\omega r$ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਰ eö¶ã ° r_i ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦਾ, ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਤੇ, ਰੇਖੀ ਵੇਗ v_i ਹੋਵੇਗਾ

$$\upsilon_i=\omega\, r_i \qquad \ldots(7.19)$$

ਇੱਥੇ ਵੀ ਸੂਚਕ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ n ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ, ਜਿਥੇ n ਪਿੰਡ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

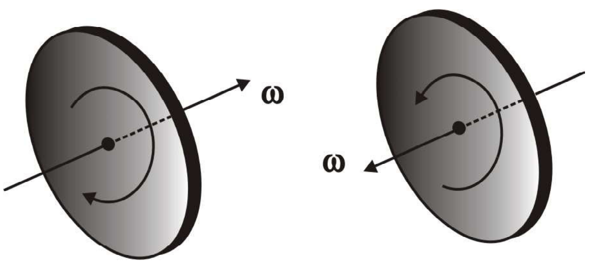
ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ $r=0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\upsilon=\omega r=0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਣ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਧੁਰਾ ਸਥਿਰ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਦਾ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਲਿਆ ਹੈ। **ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ω ਨੂੰ ਪੂਰੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।**

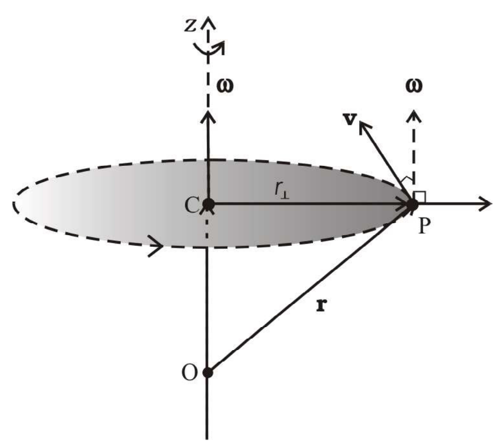
ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਦਾ ਲੱਛਣ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣ, ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਛਿਣ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚੱਲਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸ਼ੁੱਧ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਛਿਣ ਤੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣ ਬਰਾਬਰ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਨਾਲ ਘੁੰਮਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਇਹ ਲੱਛਣ, ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ (ਜਿਵੇਂ ਸੈਕਸ਼ਨ 7.1 ਵਿੱਚ

ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ) ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰ ਕਣ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਚੱਕਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਹੁਣ ਤੱਕ ਦੇ ਵਿਵੇਚਨ ਤੋਂ ਅਜਿਹਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਇੱਕ ਅਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਪਰ ਤੱਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ, ਇਹ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ ਦੇ ਸਮਰਥਨ ਜਾਂ ਪੁਸ਼ਟੀ ਲਈ ਕੋਈ ਤਰਕ ਨਹੀਂ ਦੇਵਾਂਗੇ, ਬਸ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਇਰਦ ਗਿਰਦ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ, ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਸਦਿਸ਼, ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲਾ ਪੇਚ ਅੱਗੇ ਵਧੇਗਾ ਜਦੋਂ ਉਸਦੇ ਸਿਰੇ ਨੂੰ ਪਿੰਡ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ। ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.17 (a)। ਇਸ ਸਦਿਸ਼ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $\omega = d\theta/dt$ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ ***7.17*** (a) ਜੇ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਦੇ ਸਿਰੇ ਨੂੰ ਪਿੰਡ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪੇਚ ਕੋਣੀ ਵੇਗ **ω** ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਵਧੇਗਾ। ਜੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ (ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ anticlockwise or clockwise) ਬਦਲੇਗੀ ਤਾਂ **ω** ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੀ ਬਦਲ ਜਾਵੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ ***7.17*** (b) ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ **ω** ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ, ਸਥਿਰ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। P ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ ਹੈ। ਇਹ **ω** ਅਤੇ ***r*** ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਕਣ ਜਿਸ ਚੱਕਰ ਤੇ ਚੱਲਦਾ ਹੈ ਉਸਦੇ ਉੱਪਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ ਨੂੰ ਠੀਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਝੀਏ ਅਤੇ ਜਾਣੀਏ ਕਿ ਇਹ ਕੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 7.17 (b) ਨੂੰ ਦੇਖੋ, ਜੋ ਉਂਞ ਤਾਂ ਚਿੱਤਰ 7.16 ਦਾ ਹੀ ਭਾਗ ਹੈ ਪਰ, ਇੱਥੇ ਇਸ ਨੂੰ ਕਣ P ਦਾ ਪੱਥ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਦੁਬਾਰਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ (z-) ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਸਦਿਸ਼ ω ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ-ਸਦਿਸ਼ (position vector) $\boldsymbol{r} = \mathbf{OP}$ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੀ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਹੁਣ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OP} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{OC} + \mathbf{CP})$

ਪਰ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OC} = \mathbf{0}$ ਕਿਉਂਕਿ **ω**, **OC** ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$

ਸਦਿਸ਼ $\omega \times \mathbf{CP}$, **ω** ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ ਮਤਲਬ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਵੀ ਅਤੇ ਕਣ P ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ **CP** ਦੇ ਵੀ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਚੱਕਰ ਦੇ P ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{CP}$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ω (CP) ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ω ਅਤੇ **CP** ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ **CP** ਨੂੰ $r_\perp$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ r ਨਾਲ ਨਹੀਂ, ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਤਾਂਕਿ ਇਸਦੇ ਅਤੇ **OP** = **r** ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ ਵਿੱਚ ਭੁਲੇਖੇ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਬਚਿਆ ਜਾ ਸਕੇ।

ਇਸ ਲਈ $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $\omega r_\perp$ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕਣ P ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹੀ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad ...(7.20)$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਨ (7.20) ਉਹਨਾਂ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਲਾਟੂ ਦਾ ਘੁੰਮਣਾ (ਚਿੱਤਰ 7.6 (a))। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ, r, ਕਣ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ (position vector) ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਲੈ ਕੇ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਵਸਤੂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸਦਿਸ਼ ω ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ। ਹਾਂ, ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਛਿਣ-ਛਿਣ ਤੇ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਵਧੇਰੇ ਵਿਆਪਕ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ ω ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਬਦਲਦੇ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।

7.6.1 ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ (Angular Acceleration)

ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਅਸੀਂ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਸੰਬੰਧੀ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਵੀ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵਧਾ ਰਹੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਸੰਬੰਧੀ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਇਆ ਸੀ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਬਾਰੇ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ। ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਦੀਆਂ ਗਤਿਜ (kinetic) ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (variables) ਜਿਵੇਂ ਰੇਖੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ($\Delta\mathbf{r}$) ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ($\mathbf{v}$) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ($\boldsymbol{\theta}$) ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ($\boldsymbol{\omega}$) ਦੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ ਇਹ ਸੁਭਾਵਿਕ ਹੀ ਹੈ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਨੂੰ ਵੇਗ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਸੀ ਉਂਵ ਹੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਨੂੰ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ($\boldsymbol{\alpha}$) ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ, ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮਤਲਬ,

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \qquad ...(7.21)$$

ਜੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਧੁਰਾ ਸਥਿਰ ਹੈ ਤਾਂ $\boldsymbol{\omega}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ($\boldsymbol{\alpha}$) ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੀ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਤਦ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨ ਅਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad ...(7.22)$$

7.7 ਟਾਰਕ ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ (TORQUE AND ANGULAR MOMENTUM)

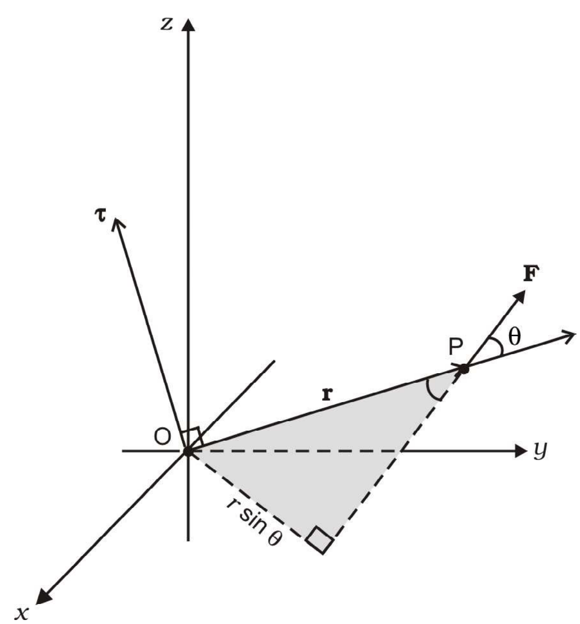
ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਵਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਰਾਸ਼ੀਆਂ, ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ, ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮਾਂ, ਖਾਸ ਕਰਕੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਦਾ ਵਿਵੇਚਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੂਮਿਕਾ ਅਦਾ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

7.7.1 ਇੱਕ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਲ ਦਾ ਟਾਰਕ (Moment of force (Torque))

ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ, ਕਿ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤੀ, ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਅਤੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਪਿੰਡ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਲਿਆਉਣ ਦੇ ਲਈ (ਮਤਲਬ ਇਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਪੈਦਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ) ਬਲ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਤਾਂ ਸੁਭਾਵਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਬਲ ਦੇ ਤੁੱਲ ਰੂਪ ਕਿਹੜੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ? ਇਕ ਨਿੱਗਰ ਸਥਿਤੀ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਲੱਭਣ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਕਿਸੇ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਨੂੰ ਖੋਲਣ ਜਾਂ ਬੰਦ ਕਰਨ ਦੀ ਉਦਾਹਰਨ ਲਈਏ। ਦਰਵਾਜਾ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਹੈ ਜੋ ਕਬਜ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਖੜੇਦਾਅ ਰੇਖੀ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦਰਵਾਜੇ ਨੂੰ ਕੌਣ ਘੁੰਮਾਉਂਦਾ ਹੈ ? ਇਹ ਤਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੀ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਤੇ ਬਲ ਨਹੀਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾਵੇਗਾ ਇਹ ਨਹੀਂ ਘੁੰਮ ਸਕਦਾ। ਪਰ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਲ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਕਾਰਜ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਬਜ਼ਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਬਲ, ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਪੈਦਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ ਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮਾਣ ਦਾ ਬਲ ਜਦੋਂ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਕਿਨਾਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਨੂੰ ਘੁਮਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਸਰਕਾਰਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਬਲ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੀ ਨਹੀਂ, ਸਗੋਂ ਇਹ ਕਿੱਥੇ ਅਤੇ ਕਿਵੇਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਬਲ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ, **ਬਲ ਦੀ ਮੋਮਟ** (Moment of force) ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ **ਟਾਰਕ (Torque)** ਜਾਂ **ਕਪਲ (Couple)** ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਅਸੀਂ ਬਲ ਦੀ ਮੋਂਮਟ ਅਤੇ ਟਾਰਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਅਰਥ ਮੰਨ ਕੇ ਕਰਾਂਗੇ।) ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕਣ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਟਾਰਕ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾ ਕੇ ਕਣਾ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਅਤੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਕਾਰਨ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਮਤਲਬ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਨਾਲ ਇਸਦਾ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਜਾਣਗੇ।

ਜੇ P ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਕਣ ਤੇ ਬਲ $\mathbf{F}$ ਲੱਗਿਆ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ (position vector) $\boldsymbol{r}$ ਹੋਵੇ (ਚਿੱਤਰ 7.18), ਤਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ



ਚਿੱਤਰ 7.18 $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\boldsymbol{\tau}$ ਉਸ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\boldsymbol{r}$ ਅਤੇ $\mathbf{F}$ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਲਗਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲ ਦਾ ਟਾਰਕ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad ...(7.23)$$

ਬਲ ਦਾ ਮੋਮਟ ਜਾਂ ਟਾਰਕ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਸੰਕੇਤ ਚਿੰਨ੍ਹ ਯੂਨਾਨੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ τ (ਟਾਓ) ਹੈ। τ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੈ।

$$\tau = r\,F\sin\theta \qquad ...(7.24a)$$

ਜਿੱਥੇ r ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ $\boldsymbol{r}$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਮਤਲਬ OP ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ, F, ਬਲ **F** ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੈ ਅਤੇ θ, $\boldsymbol{r}$ ਅਤੇ **F** ਦੇ ਵਿੱਚ ਛੋਟਾ ਕੋਣ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਟਾਰਕ ਦਾ ਵਿਮੀ ਸੂਤਰ $[ML^2T^{-2}]$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਂ ਉਹੀ ਹਨ ਜੋ ਕਾਰਜ ਅਤੇ ਊਰਜਾ ਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ, ਇਹ ਕਾਰਜ ਤੋਂ ਬਿਲਕੁਲ ਵੱਖ ਭੌਤਿਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਟਾਰਕ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ, ਜਦੋਂਕਿ ਕਾਰਜ ਇੱਕ ਅਦਿਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ। ਟਾਰਕ ਦਾ SI ਮਾਤਰਕ ਨਿਊਟਨ ਮੀਟਰ (Nm) ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਟਾਰਕ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਦੱਸੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$\tau = (r\sin\theta)F = r_\perp F \qquad ...(7.24b)$$

ਜਾਂ
$$\tau = r\,F\sin\theta = rF_\perp \qquad ...(7.24c)$$

ਜਿੱਥੇ $r_\perp = r\sin\theta$ ਬਲ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਰੇਖਾ (line of action) ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਲੰਬ ਦੂਰੀ ਹੈ ਅਤੇ $F_\perp$ (= F sinθ), $\boldsymbol{r}$ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ **F** ਦਾ ਘਟਕ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜਦੋਂ $\boldsymbol{r} = 0$ ਜਾਂ F = 0 ਜਾਂ θ = 0° ਜਾਂ 180° ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\tau = 0$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਜੇ ਬਲ ਪਰਿਮਾਣ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਬਲ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲੱਗ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਬਲ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਰੇਖਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਤੁਹਾਡਾ ਧਿਆਨ ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ (vector product) ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣ ਇਸ ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਜੇ ਬਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਉਲਟਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇਗੀ ਤਾਂ ਟਾਰਕ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੀ ਉਲਟੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਰ ਜੇ $\boldsymbol{r}$ ਅਤੇ **F** ਦੋਵਾਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਉਲਟਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਬਲ ਦੇ ਮੋਮਟ (ਟਾਰਕ) ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ।

7.7.2 ਕਿਸੇ ਕਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ (Angular momentum of a particle)

ਜਿਵੇਂ ਟਾਰਕ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਬਲ ਦਾ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ, ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ (angular momentum) ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ (linear momentum) ਦਾ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਕਣ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਕੱਲੇ ਕਣ ਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਇਸਦੀ ਉਪਯੋਗਿਤਾ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਤਦ, ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਸਹਿਤ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਟਾਰਕ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਵੀ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ (ਰੇਖੀ) ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਮੋਮਟ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨਾਮ ਨਾਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

m ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ $\boldsymbol{p}$ ਦਾ ਇੱਕ ਕਣ ਲਓ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ, ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ $\boldsymbol{r}$ ਹੋਵੇ। ਤਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਸ ਕਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ l ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸਮੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇਗਾ–

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \qquad ...(7.25\text{ a})$$

ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੈ

$$l = rp\sin\theta \qquad ...(7.26\text{ a})$$

ਜਿੱਥੇ p ਸਦਿਸ਼ $\boldsymbol{p}$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੈ ਅਤੇ θ, $\boldsymbol{r}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{p}$ ਵਿਚਕਾਰ ਛੋਟਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਲਿਖੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$l = rp_\perp \text{ ਜਾਂ } r_\perp p \qquad ...(7.26\text{ b})$$

ਜਿੱਥੇ $r_\perp$ (= r sin θ) ਸਦਿਸ਼ $\boldsymbol{p}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀ ਹੈ ਅਤੇ $\boldsymbol{p}_\perp$ (= $\boldsymbol{p}$ sin θ), $\boldsymbol{r}$ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ p ਦਾ ਘਟਕ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ($\boldsymbol{p}$ = 0) ਜਾਂ ਕਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਵੇ ($\boldsymbol{r}$ = 0) ਜਾਂ ਫਿਰ $\boldsymbol{p}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਵੇ θ = 0° ਜਾਂ 180° ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਉਮੀਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ (l = 0) ।

ਭੌਤਿਕ ਰਾਸ਼ੀਆਂ, ਟਾਰਕ ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਆਪਸੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਬਲ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਵਿੱਚਲੇ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ। ਇੱਕ ਕਣ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਵਿਉਤਪੰਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ ਨੂੰ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਅਵਕਲਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (differentiate with respect to time)

$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਵਕਲਨ ਦਾ ਗੁਣਨ ਨਿਯਮ ਲਾਗੂ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

ਹੁਣ ਕਣ ਦਾ ਵੇਗ $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ ਅਤੇ $\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}$ ਲਿਖਣ, ਤੇ

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\,\mathbf{v} = 0,$$

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਗੁਣਨਫਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ $d\boldsymbol{p} / dt = \mathbf{F}$

$$\therefore \qquad \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \boldsymbol{\tau}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \boldsymbol{\tau}$$

ਜਾਂ
$$\frac{d\boldsymbol{l}}{dt} = \boldsymbol{\tau} \qquad ...(7.27)$$

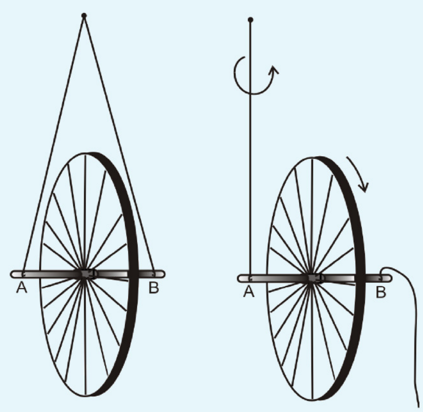
ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਵਿੱਚ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਤੇ ਲੱਗ ਰਹੇ ਟਾਰਕ ਦੇ

ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ (7.27), $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ ਜੋ ਇੱਕਲੇ ਕਣ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਦੇ ਲਈ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਦਾ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ।

ਸਾਈਕਲ ਦੇ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ

(ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਅਤੇ ਟਾਰਕ)

ਇੱਕ ਸਾਈਕਲ ਦਾ ਪਹੀਆ ਲਓ, ਜਿਸਦੀ ਧੁਰੀ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲੀ ਹੋਵੇ। ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧੁਰੀ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਸਿਰਿਆਂ A ਅਤੇ B ਨਾਲ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਰੱਸੀ ਬੰਨੋ। ਦੋਵੇਂ ਰੱਸੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੱਥ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫੜੋ ਕਿ ਪਹੀਆ ਖੜੇ ਦਾਅ ਰਹੇ (verticle) । ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਰੱਸੀ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿਓ, ਤਾਂ ਧੁਰੀ ਝੁੱਕ ਜਾਵੇਗੀ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਹੱਥ ਨਾਲ ਦੋਵੇਂ ਰੱਸੀਆਂ ਨੂੰ ਫੜ ਕੇ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਖੜੇਦਾਅ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਦੂਸਰੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਇਸਦੀ ਧੁਰੀ ਤੇ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਘੁਮਾਓ। ਹੁਣ ਫਿਰ ਇੱਕ ਰੱਸੀ ਨੂੰ, ਮੰਨ ਲਓ B ਨੂੰ, ਆਪਣੇ ਹੱਥੋਂ ਛੱਡ ਦਿਓ। ਦੇਖੋ ਕੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?



ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਬਾਦ ਵਿੱਚ

ਪਹੀਆ ਲਗਭਗ ਖੜੇਦਾਅ ਤਲ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਘੁੰਮਣ ਤਲ ਉਸ ਰੱਸੀ A ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਤੁਸੀਂ ਹੱਥ ਵਿੱਚ ਫੜ ਰੱਖੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹੀਏ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਜਾਂ ਫਿਰ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਰੱਸੀ A ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪੁਰਸਰਣ (precess) ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਹੀਏ ਦਾ ਘੁੰਮਣਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਨੂੰ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਗਿਆਤ ਕਰੋ। ਜਦੋਂ ਤੁਸੀਂ ਘੁੰਮਦੇ ਪਹੀਏ ਨੂੰ ਰੱਸੀ A ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਫੜਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਇੱਕ ਟਾਰਕ ਕਾਰਜ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਇਹ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਡੇ ਉੱਪਰ ਛੱਡਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚੋ ਕਿ ਟਾਰਕ ਕਿਵੇਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੀ ਹੈ ?) ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਤੇ ਟਾਰਕ ਦੇ ਅਸਰ ਨਾਲ, ਪਹੀਆ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਦੇ ਇਰਦ ਗਿਰਦ ਪੁਰਸਰਣ (process) ਕਰਨ ਲੱਗਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਟਾਰਕ ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ

(Torque and angular momentum for a system of particles)

ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ, ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਇਰਦ ਗਿਰਦ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਗਿਆਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਕੱਲੇ ਕਣ ਦੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗਾਂ ਦੇ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸਲਈ n ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ,

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \ldots + \boldsymbol{l}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i$$

i ਵੇਂ ਕਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਹੋਵੇਗਾ,

$$\boldsymbol{l}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

ਜਿੱਥੇ $\boldsymbol{r}_i$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸਾਪੇਖ i ਵੇਂ ਕਣ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ (position vector) ਹੈ ਅਤੇ $\boldsymbol{p} = (m_i \boldsymbol{v}_i)$ ਉਸ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਹੈ। (ਕਣ ਦਾ ਪੁੰਜ m_i ਅਤੇ ਵੇਗ $\boldsymbol{v}_i$ ਹੈ)। ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \qquad \ldots(7.25\text{b})$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.25 a) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ, ਇੱਕ ਕਣ ਦੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (7.23) ਅਤੇ (7.25 b) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ ਤਾਂ

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \boldsymbol{l}_i\right) = \sum_i \frac{d\boldsymbol{l}_i}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i \qquad \ldots(7.28\text{a})$$

ਜਿੱਥੇ $\boldsymbol{\tau}_i$, i ਵੇਂ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗ ਰਿਹਾ ਟਾਰਕ ਹੈ,

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

i ਵੇਂ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਬਲ $\mathbf{F}_i$, ਇਸ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ $\mathbf{F}_i^{ext}$ ਅਤੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਕਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ $\mathbf{F}_i^{int}$ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਅਤੇ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਦੇ ਯੋਗਦਾਨ ਨੂੰ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext} + \boldsymbol{\tau}_{\text{int}}$$

ਜਿੱਥੇ $\boldsymbol{\tau}_{int} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{int}$

ਅਤੇ $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{ext}$

ਅਸੀਂ, ਨਾ ਸਿਰਫ ਨਿਊਟਨ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਨਿਯਮ, ਮਤਲਬ ਇਹ ਤੱਥ ਕਿ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੋਈ ਦੋ ਕਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲੱਗਦੇ ਹਨ,

ਬਲਕਿ ਇਹ ਵੀ ਮੰਨ ਕੇ ਚੱਲਾਂਗੇ ਕਿ ਇਹ ਬਲ ਦੋਵੇਂ ਕਣਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਦਾ, ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ ਵਿੱਚ ਯੋਗਦਾਨ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ। ਕਿਉਂਕਿ, ਹਰੇਕ ਕਿਰਿਆ – ਪ੍ਰਤਿਕਿਰਿਆ ਜੋੜੇ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮੀ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ। ਇਸਲਈ $\boldsymbol{\tau}_{int} = \mathbf{0}$ ਅਤੇ ਇਸਲਈ $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$ ਕਿਉਂਕਿ $\boldsymbol{\tau} = \sum \boldsymbol{\tau}_i$ ਸਮੀਕਰਨ (7.28 a) ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ, ਕਿ

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext} \qquad \text{...(7.28 b)}$$

ਇਸ ਲਈ, **ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਵਿੱਚ ਸਮੇਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਉਸ ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕਾਂ ਦੇ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਰਹੇ ਕਿ ਜਿਸ ਬਿੰਦੂ (ਇਥੇ ਸਾਡੇ ਸੰਦਰਭ-ਫਰੇਮ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ) ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਉਸੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।** ਸਮੀਕਰਨ 7.27 ਇੱਕ ਕਣ ਲਈ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ (7.28 b) ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਲਈ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਹੈ।

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਦੀ ਗੱਲ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਕਣ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਜਾਂ ਆਂਤਰਿਕ ਟਾਰਕਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਸਮੀਕਰਨ (7.28 b) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮੀਕਰਨ (7.17) ਦਾ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚਲਾ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ।

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{ext} \qquad \text{...(7.17)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ (7.17) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਸਮੀਕਰਨ (7.28 b) ਵੀ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਿਸਟਮਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬੇਸ਼ੱਕ ਉਹ ਪਿੰਡ ਦ੍ਰਿੜ ਹੋਣ ਜਾਂ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗਤੀਆਂ ਨਾਲ ਰਚਿਆ ਮਿਚਿਆ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਣਾਂ ਦਾ ਸਿਸਟਮ।

ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਸੁਰਖਿਅਣ (conservation of angular meomentum)

ਜੇ $\boldsymbol{\tau}_{ext} = \mathbf{0}$, ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ (7.28 b) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

$$\mathbf{L} = \text{ਸਥਿਰ ਅੰਕ} \qquad \text{...(7.29 a)}$$

ਇਸ ਲਈ, ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਜੇ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.29 a) ਤਿੰਨ ਅਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ।

$$L_x = K_1,\ L_y = K_2 \text{ and } L_z = K_3 \qquad \text{...(7.29 b)}$$

ਜਿੱਥੇ K_1, K_2 ਅਤੇ K_3 ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ ਜਿੱਥੇ L_x, L_y ਅਤੇ L_z ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ **L** ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਹਨ। ਇਹ ਕਥਨ ਕਿ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਇਹ ਵੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਤਿੰਨੇ ਘਟਕ ਵੀ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਹਨ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.29 a), ਸਮੀਕਰਨ (7.18 a) ਦਾ ਸਮ ਤੁੱਲ ਹੈ। ਮਤਲਬ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਸੁਰੱਖਿਅਣ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਤੁੱਲ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.18 a) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅਨੇਕ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹਨ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਰੋਚਕ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.5 **ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਬਲ $7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$ ਦਾ ਟਾਰਕ ਗਿਆਤ ਕਰੋ। ਬਲ ਜਿਸ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ $\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ ਹੈ।**

ਹੱਲ : $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

ਅਤੇ $\mathbf{F} = 7\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}} - 5\hat{\mathbf{k}}$

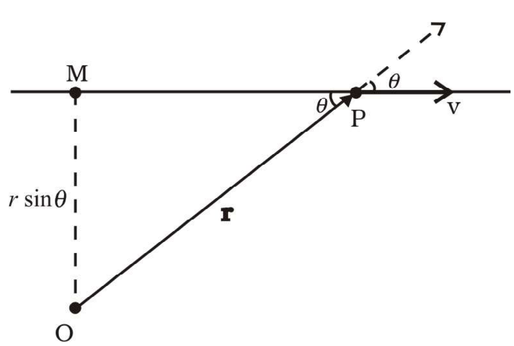
ਟਾਰਕ $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ਗਿਆਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੇਂਟ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ।

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = (5-3)\hat{\mathbf{i}} - (-5-7)\hat{\mathbf{j}} + (3-(-7))\hat{\mathbf{k}}$$

ਜਾਂ $\boldsymbol{\tau} = 2\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$

ਉਦਾਹਰਨ 7.6 **ਦਰਸਾਓ, ਕਿ ਸਥਿਰ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚੱਲਦੇ ਇੱਕ ਕਣ ਦਾ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਉਸਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।**

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਕੋਈ ਕਣ P ਕਿਸੇ ਛਿਣ t ਤੇ **v** ਵੇਗ ਨਾਲ ਚੱਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ, ਇਸ ਕਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ, ਮਨਮਰਜ਼ੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ *7.19*

ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਣ mvrsinθ ਹੈ, ਜਿਥੇ θ, **r** ਅਤੇ **v** ਦੇ ਵਿੱਚਲਾ ਕੋਣ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.19)। ਜਦੋਂਕਿ ਕਣ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਆਪਣੀ ਸਥਿਤੀ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ, ਫਿਰ ਵੀ, **v** ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾ ਉਹੀ ਬਣੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ OM $= r \sin\theta$ ਸਥਿਰ ਹੈ।

$\boldsymbol{l}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ, $\boldsymbol{r}$ ਅਤੇ $\boldsymbol{v}$ ਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ, ਸਤਹਿ ਦੇ ਅੰਦਰ ਵੱਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਦਿਸ਼ਾ ਵੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ।

ਇਸ ਲਈ, $\boldsymbol{l}$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਲਈ ਇਹ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਹੈ। ਕੀ ਕਣ ਤੇ ਕੋਈ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਲੱਗਿਆ ਹੈ ? ◀

7.8 ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦਾ ਸੰਤੁਲਨ (EQUILIBRIUM OF A RIGID BODY)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਆਪਕ ਕਣ-ਸਿਸਟਮ (general system of particles) ਦੀ ਬਜਾਏ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦੀ ਗਤੀ ਤੇ ਆਪਣਾ ਧਿਆਨ ਕੇਂਦਰਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਤੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਦੇ ਕੀ ਪ੍ਰਭਾਵ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ? (ਅੱਗੇ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਣ 'ਬਾਹਰੀ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂ ਕਿਹਾ ਨਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਅਤੇ ਟਾਰਕਾਂ ਨਾਲ ਹੀ ਵਿਵਹਾਰ ਕਰਾਂਗੇ)। ਬਲ, ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਵੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਲਿਆਉਂਦੇ ਹਨ, ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ (7.17) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇਸ ਦੇ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਪਰ, ਬਲਾਂ ਦਾ ਇਹ ਇੱਕ ਮਾਤਰ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਕਾਰਨ, ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਵੇਗਾ ਅਰਥਾਤ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸਮੀਕਰਨ (7.28 b) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲੇਗਾ।

ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਨੂੰ ਯੰਤਰਿਕ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਉਦੋਂ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਇਸਦੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਹੀ ਮਾਨ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾ ਬਦਲਦਾ ਹੋਵੇ ਭਾਵ ਕਿ ਉਸ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਹੋਵੇ ਨਾ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

(1) ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਲ ਯਾਨੀ ਬਲਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ :

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{0} \quad \ldots(7.30\text{ a})$$

ਜੇ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ ਤਾਂ ਉਸ ਪਿੰਡ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਸਮੀਕਰਨ (7.30 a) ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ।

(2) ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ, ਅਰਥਾਤ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਟਾਰਕ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ —

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 \ldots + \boldsymbol{\tau}_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{0} \quad (7.30\text{b})$$

ਜੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਬਦਲੇਗਾ। ਸਮੀਕਰਨ (7.30 b) ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿ ਜੇ ਉਹ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਬਦਲ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਕੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਬਦਲੇਗੀ ? ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਸਮੀਕਰਨ (7.30 b) ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਪ੍ਰਭਾਵ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਅਰਥਾਤ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਉਸ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਉੱਪਰ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੀ ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ 7.7 ਵਿੱਚ ਬਲ ਯੁਗਮ (couple) (ਅਰਥਾਤ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਉੱਪਰ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ। n ਬਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਵਿਅੰਜਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਤੁਹਾਡੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.30 a) ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਨ (7.30 b) ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਸਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤਿੰਨ ਅਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਨ (7.30 a) ਦੇ ਸੰਗਤ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਹਨ।

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,, \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \ \text{ਅਤੇ} \ \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \quad ..(7.31\text{a})$$

ਜਿੱਥੇ F_{ix}, F_{iy} ਅਤੇ $\mathbf{F}_{iz}$ ਬਲ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਬਲ F_i ਦੇ ਘਟਕ ਹਨ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਮੀਕਰਨ (7.30 b) ਜਿਹੜੇ ਤਿੰਨ ਅਦਿਸ਼ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ ਹਨ, ਉਹ ਹਨ

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_{ix} = 0\,, \ \sum_{i=1}^{n} \tau_{iy} = 0 \ \text{ਅਤੇ} \ \sum_{i=1}^{n} \tau_{iz} = 0 \quad \ldots(7.31\text{b})$$

ਜਿੱਥੇ τ_{ix}, τ_{iy} ਅਤੇ τ_{iz} ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਰਕ $\boldsymbol{\tau}_i$ ਦੇ ਘਟਕ ਹਨ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.31 a) ਅਤੇ (7.31 b) ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਯੰਤਰਿਕ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਛੇ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੱਸਦੇ ਹਨ ਜੋ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਲ ਇੱਕ ਹੀ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਯੰਤਰਿਕ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ ਸਿਰਫ਼ ਤਿੰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕੀਤੇ

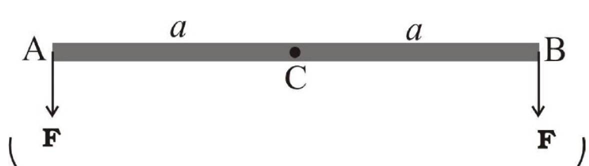
ਜਾਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੋਣਗੀਆਂ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਸਾਰੇ ਬਲਾਂ ਦੇ, ਇਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਮਰਜ਼ੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਦੋ ਆਪਸੀ ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘਟਕਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਵੱਖੋ-ਵੱਖ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ।

ਤੀਸਰੀ ਸ਼ਰਤ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ। ਬਲਾਂ ਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਰਕ ਦੇ ਘਟਕਾਂ ਦਾ ਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ, ਇੱਕ ਕਣ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਗੱਲ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਕਣ ਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਸਿਰਫ਼ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (ਸਮੀਕਰਨ 7.30 a) ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੇ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਤੇ ਲਗੇ ਸਾਰੇ ਬਲਾਂ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਯੋਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਬਲ ਇੱਕ ਹੀ ਕਣ ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਸੰਗਾਮੀ (concurrent) ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸੰਗਾਮੀ ਬਲਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ ਸੰਤੁਲਨ ਦਾ ਵਿਵੇਚਨ ਪਹਿਲੇ ਪਾਠਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਪਿੰਡ ਆਂਸ਼ਿਕ ਸੰਤੁਲਨ (Partial equilibrum) ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਕਿ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਪਰ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਨਾ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਫਿਰ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਪਰ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਨਾ ਹੋਵੇ।

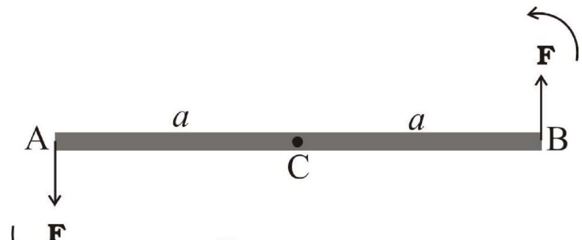
ਇੱਕ ਹਲਕੀ (ਨਿਗੂਣੇ ਪੁੰਜ ਵਾਲੀ) ਸੁਤੰਤਰ ਛੜ (AB) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਦੋ ਸਿਰਿਆਂ (A ਅਤੇ B) ਤੇ, ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਬਲ, **F**, ਚਿੱਤਰ 7.20 (a) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਛੜ ਦੇ ਲੰਬ ਲੱਗੇ ਹੋਣ।



ਚਿੱਤਰ **7.20 (a)**

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਛੜ AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ C ਹੈ ਅਤੇ CA = CB = a ਹੈ। A ਅਤੇ B ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਲਾਂ ਦੇ C ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕ, ਪਰਿਮਾਣ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ (aF) ਹਨ, ਪਰ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਾਂਦੇ ਹਨ। ਛੜ ਤੇ ਕੁਲ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ। ਸਿਸਟਮ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ

$$\sum \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$$



ਚਿੱਤਰ **7.20 (b)**

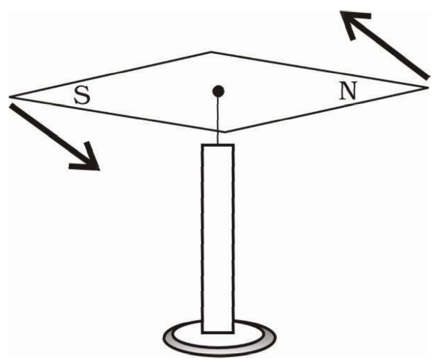
ਚਿੱਤਰ **7.20** (b) ਵਿੱਚ, ਚਿੱਤਰ (**7.20** a) ਵਿੱਚ B ਸਿਰੇ ਤੇ ਲਗਾਏ ਗਏ ਬਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਉਲਟ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਹੁਣ ਉਸ ਛੜ ਤੇ ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਤੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਲ, ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਸਿਰੇ A ਤੇ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ B ਸਿਰੇ ਤੇ। ਇਥੇ ਦੋਵੇਂ ਟਾਰਕ ਬਰਾਬਰ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ ਉਹ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਉਹ ਇਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਛੜ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਘੁਮਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਛੜ ਤੇ ਲਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਛੜ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਹ ਛੜ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁੱਧ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਸੰਭਵ ਹੈ। (ਅਰਥਾਤ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਰਹਿਤ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ)

ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਲੇ, ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲੱਗੇ ਬਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਨਾ ਹੋਣ, **ਬਲ ਯੁਗਮ (couple) ਜਾਂ ਟਾਰਕ (Torque)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਬਲ ਯੁਗਮ (ਜੋੜਾ) ਬਿਨਾਂ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਘੁਮਾ ਕੇ ਕਿਸੇ ਬੋਤਲ ਦਾ ਢੱਕਣ ਖੋਲਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਡੀਆਂ ਉਂਗਲੀਆਂ ਢੱਕਣ ਤੇ ਇੱਕ ਬਲ ਯੁਗਮ (couple) ਲਗਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। [ਚਿੱਤਰ 7.21 (a)]। ਇਸਦਾ ਦੂਸਰਾ ਉਦਾਹਰਨ ਧਰਤੀ ਦੇ ਚੁੰਬਕੀ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਚੁੰਬਕੀ ਸੂਈ (magnetic compass) ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 7.21 (b)] । ਧਰਤੀ ਦਾ ਚੁੰਬਕੀ ਖੇਤਰ, ਚੁੰਬਕੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉੱਤਰੀ ਅਤੇ ਦੱਖਣੀ ਧਰੁਵਾਂ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਬਲ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉੱਤਰੀ ਧਰੁਵ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਬਲ ਉੱਤਰ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਅਤੇ ਦਖਣੀ ਧਰੁਵ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਬਲ ਦੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਅਵਸਥਾ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾਂ ਜਦੋਂ ਸੂਈ ਉੱਤਰ ਦੱਖਣ

ਚਿੱਤਰ **7.21** (a) ਢੱਕਣ ਨੂੰ ਘੁਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਡੀਆਂ ਉਂਗਲਾਂ ਉਸ ਤੇ ਇੱਕ ਬਲ ਯੁਗਮ ਲਗਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ।

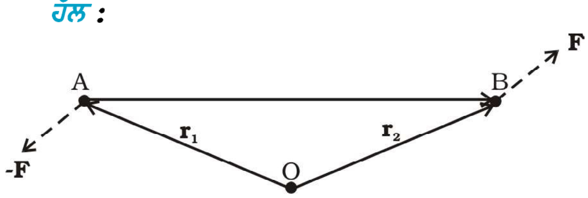
ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਸੰਕੇਤ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਦੋਨੋਂ ਬਲਾਂ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਤੇ, ਧਰਤੀ ਦੇ ਚੁੰਬਕੀ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕਾਰਨ, ਇੱਕ ਬਲ ਯੁਗਮ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.21** (b) ਧਰਤੀ ਦਾ ਚੁੰਬਕੀ ਖੇਤਰ, ਸੂਈ ਦੇ ਧਰੁਵਾਂ ਤੇ, ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਮਾਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਲ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦੋ ਬਲ ਇੱਕ ਬਲ ਯੁਗਮ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 7.7 ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਲ ਯੁਗਮ ਦਾ ਟਾਰਕ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਉੱਪਰ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਤੁਸੀਂ ਟਾਰਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੋ।

ਹੱਲ :



ਚਿੱਤਰ **7.22**

ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਲਓ ਜਿਸ ਤੇ ਚਿੱਤਰ 7.22 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਬਲ ਯੁਗਮ (couple) ਲੱਗਿਆ ਹੈ। ਬਲ **F ਅਤੇ –F** ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ B ਅਤੇ A ਤੇ ਲੱਗੇ ਹਨ। ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ (position vector) ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\mathbf{r}_2$ **ਅਤੇ** $\mathbf{r}_1$ ਹਨ। ਆਓ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਬਲਾਂ ਦੇ ਟਾਰਕ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਬਲ ਯੁਗਮ ਦਾ ਟਾਰਕ = ਯੁਗਮ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੇ ਬਲਾਂ ਦੇ ਟਾਰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$$= \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{F}) + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}$$
$$= \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}$$
$$= (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{F}$$

ਜਾਂ $\mathbf{r}_1 + \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2$

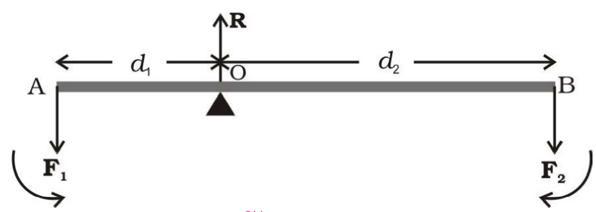
$\therefore \quad \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

ਬਲ ਯੁਗਮ ਦਾ ਮੋਮੰਟ = $\mathbf{AB} \times \mathbf{F}$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮਾਨ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਰਥਾਤ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਅਸੀਂ ਟਾਰਕ ਲਏ ਹਨ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ◀

7.8.1 ਮੋਮੰਟ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Principle of moment)

ਇੱਕ ਆਦਰਸ਼ ਲੀਵਰ (lever), ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਹਲਕੀ (ਅਰਥਾਤ ਨਿਗੁਣੇ ਪੁੰਜ ਵਾਲੀ) ਛੜ ਹੈ ਜੋ ਆਪਣੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਏ ਗਏ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਸਕਦੀ ਹੋਵੇ। ਇਹ ਬਿੰਦੂ **ਫਲਕਰਮ (fulcrum)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਬਚਿਆਂ ਦੇ ਖੇਡ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸੀ-ਸਾ (sea-saw), ਲੀਵਰ ਦਾ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ। ਦੋ ਬਲ F_1 ਅਤੇ F_2, ਜੋ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਲੀਵਰ ਦੇ ਸਿਰਿਆ ਤੇ, ਇਸਦੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਫਲਕਰਮ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ d_1 ਅਤੇ d_2 ਦੂਰੀਆਂ ਤੇ ਲਗਾਏ ਗਏ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.23 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.23**

ਇਹ ਲੀਵਰ ਯਾਂਤਰਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਤੁਲਿਤ ਸਿਸਟਮ ਹੈ। ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਫਲਕਰਮ (fulcrum) ਤੇ ਬਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਕਿਰਿਆ ਬਲ **R** ਹੈ। ਇਹ ਬਲਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਹੈ। ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ

$$R - F_1 - F_2 = 0 \qquad \text{...(i)}$$

ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ, ਫਲਕਰਮ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਮੋਮੰਟ ਲੈਣ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਮੋਮੰਟਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ

$$d_1F_1 - d_2F_2 = 0 \qquad \text{...(ii)}$$

ਆਮ ਕਰਕੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੀ ਮੋਮੰਟਾਂ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੀ ਮੋਮੰਟਾਂ ਨੂੰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਪ੍ਰਤੀਕਿਰਿਆ ਬਲ R, ਫਲਕਰਮ ਤੇ ਹੀ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਮੋਮੰਟ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ।

ਲੀਵਰ ਦੇ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ, F_1 ਅਕਸਰ ਕੋਈ ਲੋਡ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਚੁਕਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਨੂੰ **ਭਾਰ (load)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਫਲਕਰਮ ਤੋਂ ਇਸ ਦੀ ਦੂਰੀ d_1 **ਭਾਰ ਦੀ ਭੁਜਾ** (load arm) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਬਲ F_2, ਲੋਡ ਨੂੰ ਚੁਕਣ ਲਈ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਬਲ, **ਐਫਰਟ (effort ਕੋਸ਼ਿਸ਼)** ਹੈ। ਫਲਕਰਮ ਤੋਂ ਇਸਦੀ ਦੂਰੀ **ਐਫਰਟ ਭੁਜਾ** (effort arm) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (ii) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ —

$$d_1F_1 = d_2F_2 \qquad \text{...(7.32 a)}$$

ਜਾਂ ਭਾਰ × ਭਾਰ ਭੁਜਾ = ਐਫਰਟ × ਐਫਰਟ ਭੁਜਾ

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ, ਕਿਸੇ ਲੀਵਰ ਦੇ ਲਈ ਮੋਮੈਂਟਾਂ ਦਾ ਨਿਯਮ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਅਨੁਪਾਤ F_1/F_2 ਯਾਂਤਰਿਕ ਲਾਭ (Mechanical advantage M.A.) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\text{M.A.} = \dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{d_2}{d_1}$ ...(7.32b)

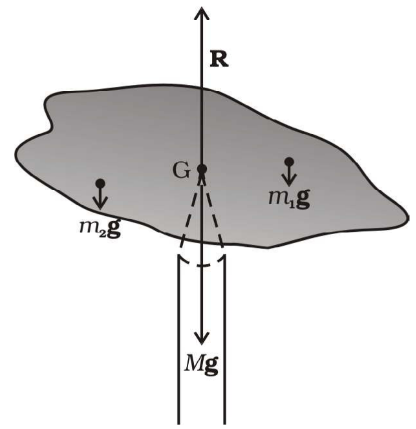
ਜੇ ਐਫਰਟ (effort) ਭੁਜਾ d_2 ਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਭਾਰ ਭੁਜਾ d_1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਯਾਂਤਰਿਕ ਲਾਭ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਯਾਂਤਰਿਕ ਲਾਭ (M.A) ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘੱਟ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਐਫਰਟ (effort) ਨਾਲ ਵੱਧ ਭਾਰ ਚੁੱਕਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸੀ-ਸਾ (sea-saw) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਲੀਵਰਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਉਦਾਹਰਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਆਲੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਮਿਲ ਜਾਣਗੇ। ਤਕੜੀ (balance) ਵੀ ਇੱਕ ਲੀਵਰ ਹੈ। ਕੁਝ ਹੋਰ ਲੀਵਰਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਨ ਆਪਣੇ ਆਸ-ਪਾਸ ਲਭੋ। ਹਰੇਕ ਦੇ ਲਈ ਲੰਬ, ਭਾਰ, ਭੁਜਾ, ਐਫਰਟ ਅਤੇ ਐਫਰਟ ਭੁਜਾ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਕਰੋ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੌਖਿਆਂ ਹੀ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਲ F_1 ਅਤੇ F_2 ਲੀਵਰ ਦੇ ਲੰਬ ਨਾ ਹੋਣ ਬਲਕਿ ਕੋਈ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਵੀ ਮੋਮੈਂਟ ਦਾ ਨਿਯਮ (law of moment) ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7.8.2 ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ (Centre of gravity)

ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਈ ਲੋਕਾਂ ਨੇ ਆਪਣੀ ਕਾਪੀ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਉਂਗਲ ਦੀ ਨੋਕ ਤੇ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਚਿੱਤਰ 7.24 ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆਕਲਾਪ ਹੈ ਜੋ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਨਿਯਮਿਤ (irregular) ਅਕਾਰ ਦਾ ਗੱਤੇ ਦਾ ਟੁੱਕੜਾ ਅਤੇ ਪੈਂਸਿਲ ਵਰਗੀ ਬਾਰੀਕ ਨੋਕ ਵਾਲੀ ਵਸਤੂ ਲਉ। ਕਈ ਵਾਰ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਕੇ ਤੁਸੀਂ ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ G ਲਭ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਸਦੇ ਹੇਠਾਂ ਪੈਂਸਿਲ ਦੀ ਨੋਕ ਰੱਖਣ ਤੇ ਗੱਤੇ ਦਾ ਟੁੱਕੜਾ ਉਸ ਨੋਕ ਤੇ ਸੰਤੁਲਿਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। (ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਗੱਤੇ ਦਾ ਟੁੱਕੜਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿਤਜੀ ਅਵਸਥਾ (horizontal) ਵਿੱਚ ਰਹਿਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਤੁਲਨ ਬਿੰਦੂ (Balance point) ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ (C.G.) ਹੈ। ਪੈਂਸਿਲ ਦੀ ਨੋਕ ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ (verticle) ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਬਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਕਾਰਨ ਗੱਤੇ ਦਾ ਟੁਕੜਾ ਯਾਂਤਰਿਕ ਸੰਤੁਲਨ(mechanical equilibrium) ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.24 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪੈਂਸਿਲ ਦੀ ਨੋਕ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਕਿਰਿਆ ਬਲ R ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦੇ ਕੁੱਲ ਭਾਰ M**g** (ਅਰਥਾਤ ਇਸ ਤੇ ਧਰਤੀ ਦੇ ਗੁਰੂਤਾਕਰਸ਼ਣ ਬਲ) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਉਲਟ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਅਵਸਥਾ (translational equilibrium) ਵਿੱਚ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਹ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ (rotational equilibrium) ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਜੇ ਅਜਿਹਾ ਨਾ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਅਸੰਤੁਲਿਤ ਟਾਰਕ (Torque) ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਹ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਝੁੱਕ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਡਿੱਗ ਜਾਂਦਾ।

ਗੁਰੂਤਾ ਬਲ ਦੇ ਕਾਰਨ ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਤੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਬਲਾਂ ਦੇ ਮੋਮੈਂਟ ਪ੍ਰਭਾਵ ਪਾਉਂਦੇ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਕੱਲੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਭਾਰ $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ ... ਆਦਿ G ਤੋਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਦੂਰੀਆਂ ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ **7.24** ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਨੂੰ ਪੈਂਸਿਲ ਦੀ ਨੋਕ ਤੇ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕਰਨਾ। ਪੈਂਸਿਲ ਦੀ ਨੋਕ ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $m_1\mathbf{g}$, $m_2\mathbf{g}$ ... ਆਦਿ ਬਲਾਂ ਦਾ ਇਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਲਿਆ ਗਿਆ ਟਾਰਕ (Torque) ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ।

ਜੇ $\mathbf{r}_i$ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ i ਵੇਂ ਕਣ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ (position vector) ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਗੁਰੂਤਾ ਬਲ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕ $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times m_i\,\mathbf{g}$ ਹੋਵੇਗਾ।

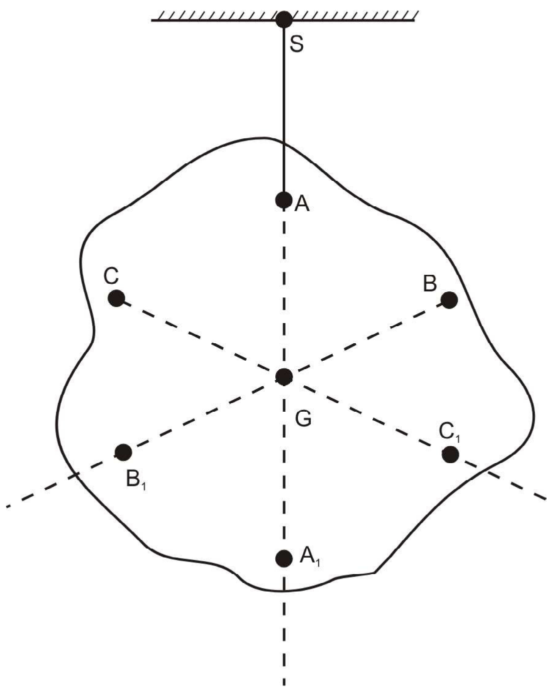
ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੁੱਲ ਗੁਰੂਤਾ ਬਲ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ

$$\boldsymbol{\tau}_g = \sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{g} = \mathbf{0} \qquad ...(7.33)$$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੁੱਲ ਗੁਰੂਤਾ ਬਲ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ।

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ (7.33) ਵਿੱਚ **g** ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਜੋੜ ਚਿੰਨ੍ਹ Σ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਆ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$ । ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ (position vector) $\mathbf{r}_i$ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਨਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਸੈਕਸ਼ਨ 7.2 ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ (7.4 a) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਜੇ $\sum m_i\mathbf{r}_i = \mathbf{0}$, ਤਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਿੰਡ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ। ਸਾਡੇ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੱਲ ਆਉਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਇਸ ਲਈ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਵਸਤੂ ਦਾ ਅਕਾਰ ਇੰਨਾਂ ਛੋਟਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ **g** ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇ ਪਿੰਡ ਇੰਨਾਂ ਵੱਡਾ ਹੁੰਦਾ ਕਿ ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਭਾਗ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ

ਦੂਸਰੇ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ g ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇਕੋਂ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਨਹੀਂ ਰਹਿਣਗੇ। ਮੂਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (concepts) ਹਨ। ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਨਾਲ ਕੁਝ ਲੈਣਾ-ਦੇਣਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਸਿਰਫ ਪੁੰਜ ਦੀ ਵੰਡ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ।

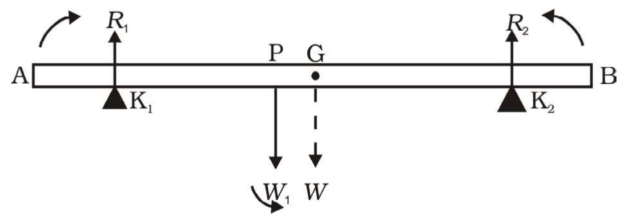


ਚਿੱਤਰ **7.25** ਅਨਿਯਮਿਨ ਅਕਾਰ ਦੀ ਸਤਹਿ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ। ਸਤਹਿ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ G ਇਸ ਨੂੰ A ਕੋਨੇ ਤੇ ਲਟਕਾਉਣ ਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪੈਂਦਾ ਹੈ।

ਸੈਕਸ਼ਨ 7.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਈ ਅਨਿਯਮਿਤ, ਸਮਅੰਗ, ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ ਜੇ ਪਿੰਡ ਵਿਸ਼ਾਲ ਅਕਾਰ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸੇ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਚਿੱਤਰ 7.25 ਗੱਤੇ ਦੇ ਟੁੱਕੜੇ ਵਰਗੇ ਕਿਸੇ ਅਨਿਯਮਿਤ ਅਕਾਰ ਦੀ ਸਤਹਿ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸਤਹਿ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੇ ਲਟਕਾ ਦਿਓ ਤਾਂ A ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਰੇਖਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਲੰਘੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ ਰੇਖਾ AA_1 ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਤਹਿ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਬਿੰਦੂ ਜਿਵੇਂ B ਜਾਂ C ਨਾਲ ਲਟਕਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੱਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ। ਸਮਝਾਓ ਕਿ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਉਂ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ ? ਕਿਉਂਕਿ ਇਥੇ ਪਿੰਡ ਛੋਟਾ ਜਿਹਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਇਸਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਵੀ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.8 :*** **70 ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਲੰਬੀ ਅਤੇ 4.00 kg ਪੁੰਜ ਦੀ ਧਾਤ ਦੀ ਛੜ ਆਪਣੇ ਦੋਨੋਂ ਸਿਰਿਆਂ ਤੋਂ 10 ਸੈਂ.ਮੀ. ਦੂਰ ਰੱਖੇ ਦੋ ਨਾਈਫ ਐਜ਼ਾਂ (knife edge) ਤੇ ਟਿਕੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ 40 ਸੈਂ.ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ 6.00 kg ਪੁੰਜ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਰ ਲਟਕਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਾਈਫ ਐਜ਼ਾਂ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ। (ਛੜ ਨੂੰ ਸਮਾਂਗੀ (homogeneous) ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਆਡੀਕਾਟ (uniform cross section) ਵਾਲੀ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।**



ਚਿੱਤਰ **7.26**

ਚਿੱਤਰ **7.26** ਵਿੱਚ ਛੜ ਨੂੰ AB ਨਾਲ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। K_1 ਅਤੇ K_2 ਨਾਈਫ ਐਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਿਖਾ ਰਹੇ ਹਨ। G ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਲਟਕਾਏ ਗਏ ਬਲ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਛੜ ਦਾ ਭਾਰ W ਇਸਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ G 'ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਛੜ ਬਰਾਬਰ ਆਡੀਕਾਟ (uniform cross section) ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਸਮਅੰਗੀ ਪਦਾਰਥ ਤੋਂ ਬਣੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ G ਇਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ। AB = 70 cm, AG = 35 cm, AP = 30 cm, PG = 5 cm, $AK_1 = BK_2$ = 10 cm ਅਤੇ $K_1G = K_2G$ = 25 cm ਅਤੇ, W = ਛੜ ਦਾ ਭਾਰ = 4.00 kg ਅਤੇ W_1= ਲਟਕਾਇਆ ਗਿਆ ਭਾਰ = 6.00 kg; R_1 ਅਤੇ R_2 ਨਾਈਫ ਐਜ਼ਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰਾਂ ਦੇ ਲੰਬ ਪ੍ਰਤਿਕਿਰਿਆ ਬਲ ਹਨ।

ਛੜ ਦੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ

$$R_1+R_2-W_1-W=0 \qquad \ldots(i)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ W_1 ਅਤੇ W ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ ਅਤੇ R_1 ਅਤੇ R_2 ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਲੱਗਦੇ ਹਨ।

ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਬਲਾਂ ਦੇ ਟਾਰਕ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕ ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸਹੂਲੀਅਤ ਰਹੇਗੀ G ਹੈ। R_2 ਅਤੇ W_1 ਦੇ ਟਾਰਕ ਧਨਾਤਮਕ (ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ) ਅਤੇ R_1 ਦਾ ਟਾਰਕ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ

$$-R_1(K_1G)+W_1(PG)+R_2(K_2G)=0 \qquad (ii)$$

ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ W = 4.00 g N, W_1 = 6.00 g N, ਜਿੱਥੇ g = ਗੁਰੂਤਾ ਦੇ ਕਾਰਨ ਪ੍ਰਵੇਗ x = 9.8 m/s^2

ਸਮੀਕਰਨ (i) ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਕ ਮਾਨ ਭਰਨ 'ਤੇ

$$R_1+R_2-6.00g-4.00\,g=0$$

ਜਾਂ $R_1 + R_2 = 10.00\ g \quad N = 98N$ (iii)

ਸਮੀਕਰਨ (ii) **ਤੋਂ**

$$-0.25\ R_1 + 0.05\ W_1 + 0.25\ R_2 = 0$$

ਜਾਂ $R_2 - R_1 = 1.2g \quad N = 11.76\ N$ (iv)

ਸਮੀਕਰਨ (iii) **ਅਤੇ** (iv) **ਤੋਂ**

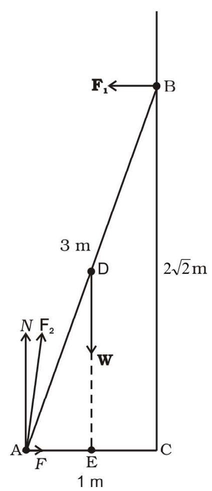
$$R_1 = 54.88\ N$$

$$R_2 = 43.12\ N$$

ਇਸ ਲਈ ਨਾਈਫ ਐਜ਼ਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰਾਂ 'ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਕਿਰਿਆ ਬਲ ਹਨ—

K_1 ਤੇ 55 N ਅਤੇ K_2 ਤੇ 43 N ◀

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.9*** **20 kg ਪੁੰਜ ਦੀ ਇੱਕ 3 m ਲੰਬੀ ਪੌੜੀ ਇੱਕ ਰਗੜ ਰਹਿਤ ਕੰਧ ਨਾਲ ਝੁਕਾ ਕੇ ਟਿਕਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.27 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ ਫਰਸ਼ ਤੇ ਕੰਧ ਤੋਂ 1 m ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਕੰਧ ਅਤੇ ਫਰਸ਼ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਕਿਰਿਆ ਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।**



ਚਿੱਤਰ **7.27**

ਹੱਲ : ਪੌੜੀ AB ਦੀ ਲੰਬਾਈ = 3 m, ਇਸਦੇ ਪੈਰਾਂ ਦੀ ਕੰਧ ਤੋਂ ਦੂਰੀ AC = 1 m, ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ BC = $2\sqrt{2}$ m ਹੈ। ਪੌੜੀ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲ ਹਨ – ਇਸਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ D ਤੇ ਇਸਦਾ ਭਾਰ W । ਕੰਧ ਅਤੇ ਫਰਸ਼ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਕਿਰਿਆ ਬਲ F_1 ਅਤੇ F_2 । ਬਲ F_1 ਕੰਧ ਦਾ ਲੰਬ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੰਧ ਰਗੜ ਰਹਿਤ ਹੈ। ਬਲ F_2 ਨੂੰ ਦੋ ਘਟਕਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ- ਲੰਬ ਪ੍ਰਤਿਕਿਰਿਆ ਬਲ N ਅਤੇ ਰਗੜ ਬਲ F । ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ F ਪੌੜੀ ਨੂੰ ਕੰਧ ਤੋਂ ਦੂਰ ਫਿਸਲਣ ਤੋਂ ਰੋਕਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੰਧ ਵੱਲ ਹੈ। ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਲਈ, ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ ਬਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਜ਼ੀਰੋ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$N - W = 0 \qquad \text{(i)}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿਤਜੀ ਬਲ ਲੈ ਲਉ ਤਾਂ

$$F - F_1 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕ ਲੈਣ 'ਤੇ

$$2\sqrt{2}F_1 - (1/2)\ W = 0 \qquad \text{(iii)}$$

ਹੁਣ, $W = 20\ g = 20 \times 9.8\ N$

$= 196.0\ N$

$(g = 9.8\ m/s^2)$

ਸਮੀਕਰਨ (i) ਤੋਂ $N = 196.0$

ਸਮੀਕਰਨ (iii) ਤੋਂ

$$F_1 = W/4\sqrt{2} = 196.0/4\sqrt{2} = 34.6\,N$$

ਸਮੀਕਰਨ (ii) ਤੋਂ $F = F_1 = 34.6\,N$

ਇਸ ਲਈ $F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0\,N$

ਬਲ $F_2 = \sqrt{F^2 + N^2} = 199.0\,N$

ਬਲ F_2 ਖਿਤਜ ਨਾਲ α ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ।

$$\tan\alpha = N/F = 4\sqrt{2}\,,\ \alpha = \tan^{-1}(4\sqrt{2}) \approx 80^\circ$$ ◀

7.9 ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ (MOMENT OF INERTIA)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਇਹ ਉਲੇਖ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਅਸੀਂ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੀ ਚਲਾਵਾਂਗੇ। ਜਿਸ ਵਿਸ਼ੇ ਨਾਲ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਾਕਫ਼ ਹੋ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣਾ ਹਾਲੇ ਬਾਕੀ ਹੈ **ਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਪੁੰਜ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਕਿਹੜੀ ਹੈ ?** ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਦੇਵਾਂਗੇ, ਵਿਚਾਰ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਸੌਖਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। **ਆਓ, ਘੁੰਮਦੇ ਹੋਏ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤੀਜ ਊਰਜਾ** (kinetic energy) ਦੇ ਲਈ ਵਿਅੰਜਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦੇ ਹੋਏ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ, ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਕਾਰ ਪੱਥ ਤੇ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.16)। ਅਤੇ ਧੁਰੇ ਤੋਂ r_i ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ, ਜਿਵੇਂ ਸਮੀਕਰਨ (7.19) ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, $\upsilon_i = r_i\omega$ ਹੈ। ਇਸ ਕਣ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਹੈ

$$k_i = \frac{1}{2}m_i\upsilon_i^2 = \frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$$

ਜਿੱਥੇ m_i ਕਣ ਦਾ ਪੁੰਜ ਹੈ। ਪਿੰਡ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਤੀਜ ਊਰਜਾ K ਇਸ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਣਾਂ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

$$K = \sum_{i=1}^{n} k_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i r_i^2\omega^2)$$

ਇੱਥੇ n ਪਿੰਡ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕਣਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੀ ਹੈ ਕਿ ω ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ω^2 ਨੂੰ ਜੋੜ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤਦ,

$$K = \frac{1}{2}\omega^2\left(\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2\right)$$

ਅਸੀਂ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲੱਛਣਾਂ ਜਾਂ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰ (parameter) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਨਾਂ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ I (moment of inertia) ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \qquad (7.34)$$

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad (7.35)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿ ਪੈਰਾਮੀਟਰ I ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਇਹ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਅਤੇ ਉਸ ਧੁਰੇ ਦਾ ਗੁਣ ਜਾਂ ਲੱਛਣ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਿੰਡ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਨ (7.35) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਘੁੰਮਦੇ ਹੋਏ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦੀ ਰੇਖੀ (ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ) ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ $K = \frac{1}{2} m\upsilon^2$ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ। ਇਥੇ m ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਅਤੇ v ਉਸਦਾ ਵੇਗ ਹੈ। ਕੋਣੀ ਵੇਗ ω (ਕਿਸੇ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਵੇਗ υ (ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ) ਦੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ, ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਪੁੰਜ ਦੇ ਸਮਤਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ (7.34) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ ਸਰਲ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ।

(a) ਅਰਧ ਵਿਆਸ R ਅਤੇ ਪੁੰਜ M ਦੇ ਇੱਕ ਪਤਲੇ ਰਿੰਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੋ ਆਪਣੇ ਤਲ ਵਿੱਚ, ਆਪਣੇ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ω ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਨਾਲ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਰਿੰਗ ਦਾ ਹਰੇਕ ਪੁੰਜ ਘਟਕ ਇਸਦੇ ਧੁਰੇ ਤੋਂ R ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ $v = R\omega$ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਹੈ-

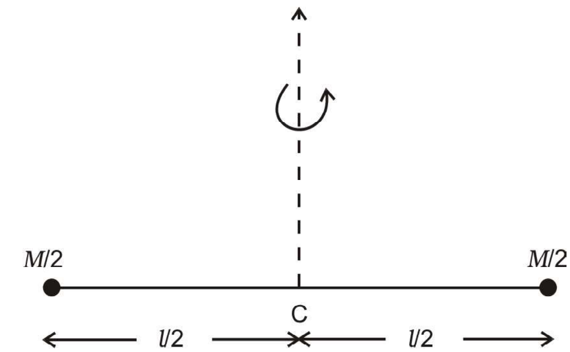
$$K = \frac{1}{2}M\upsilon^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega^2$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.35) ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਿੰਗ ਦੇ ਲਈ $I = MR^2$ ਹੈ।

(b) ਹੁਣ ਅਸੀਂ l ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਦ੍ਰਿੜ, ਭਾਰਹੀਣ ਛੜ ਦੇ ਸਿਰਿਆਂ ਤੇ ਲਗੇ ਦੋ ਪੁੰਜਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਸਿਸਟਮ ਇਸ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਛੜ ਦੇ ਖੜ੍ਹੇ ਦਾਅ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 7.28)। ਹਰੇਕ ਪੁੰਜ M/2 ਧੁਰੇ ਤੋਂ $l/2$ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਪੁੰਜਾਂ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਹੋਵੇਗਾ,

$$(M/2)\,(l/2)^2 + (M/2)\,(l/2)^2$$

ਇਸ ਲਈ ਪੁੰਜਾਂ ਦੇ ਇਸ ਜੋੜੇ ਦਾ, ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਛੜ ਦੇ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $I = Ml^2/4$ ਹੈ।



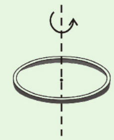
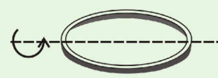
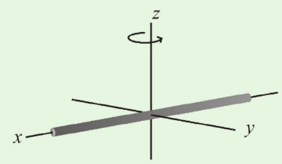
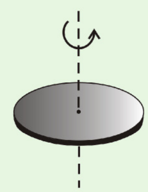
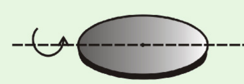
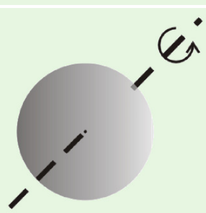
ਚਿੱਤਰ **7.28** ਪੁੰਜ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਵਾਲੀ, l ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਛੜ, ਜੋ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਧੁਰੇ ਦੇ ਇਰਦ ਗਿਰਦ ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਹੈ। ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁਲ ਪੁੰਜ M ਹੈ।

ਸਾਰਨੀ 7.1 ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਜਾਣੇ-ਪਛਾਣੇ ਨਿਯਮਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਠੋਸਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ, ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ, ਉਸਦੀ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਉਸਦੇ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਹੈ। ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਧੁਰੀ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਦਾ ਮਾਪ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮਾਪ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ ਪਿੰਡ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਣ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਪੁੰਜ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰਾਸ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਬਲਕਿ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ, ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਸਦੀ ਧੁਰੇ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਅਤੇ ਓਰੀਐਂਟੇਸ਼ਨ (orientation) ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇੱਕ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰ (Parameter) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨੂੰ **ਪਰਿਚਕਰਣ ਅਰਧ ੳÁÅ (radius of gyration)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਪਿੰਡ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਪੁੰਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਸਾਰਨੀ 7.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ, $I = Mk^2$, ਜਿੱਥੇ k ਦੀਆਂ ਵਿਮਾ ਉਹੀ ਹਨ ਜੋ ਲੰਬਾਈ ਦੀਆਂ। ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਛੜ ਦੇ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲਈ $k^2 = L^2/12$ ਅਰਥਾਤ $k = L/\sqrt{12}$ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਕਰਾ-ਆਕਾਰ ਚਕਲੀ (ਡਿਸਕ disk) ਦਾ ਉਸਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦੇ ਲਈ $k = R/2$ ਹੈ। k ਪਿੰਡ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦਾ ਇੱਕ ਜਿਆਮਤੀ ਗੁਣ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਪਰਿਚਕਰਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕਿਸੇ

ਸਾਰਣੀ 7.1 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੁੱਝ ਨਿਯਮਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ

ਲੜੀ ਨੰ.	ਪਿੰਡ	ਧੁਰਾ	ਚਿੱਤਰ	*I*
(1)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਪਤਲਾ, ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਦਾ ਰਿੰਗ (Ring)	ਰਿੰਗ ਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ		MR^2
(2)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲਾ ਪਤਲਾ, ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਜਾਂ ਰਿੰਗ	ਵਿਆਸ		$MR^2/2$
(3)	L ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਪਤਲੀ ਛੜ	ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ		$ML^2/12$
(4)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੀ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਡਿਸਕ	ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ, ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ		$MR^2/2$
(5)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੀ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਡਿਸਕ	ਵਿਆਸ		$MR^2/4$
(6)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਖੋਖਲਾ ਵੇਲਣ	ਵੇਲਣ ਦਾ ਧੁਰਾ		MR^2
(7)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਠੋਸ ਵੇਲਣ	ਵੇਲਣ ਦਾ ਧੁਰਾ		$MR^2/2$
(8)	R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਠੋਸ ਗੋਲਾ	ਵਿਆਸ		$2MR^2/5$

ਪਿੰਡ ਦੀ ਪਰਿਚਕਰਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸ (radius of gyration) ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਕਣ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪੁੰਜ ਸੰਪੂਰਨ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਇਸ ਦੀ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ (moment of inertia) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਉਸਦੇ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਆਕ੍ਰਿਤੀ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਸਦੇ ਪੁੰਜ ਦੀ ਵੰਡ ਅਤੇ ਇਸ ਧੁਰੇ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਅਤੇ ਓਰੀਐਂਟੇਸ਼ਨ (orientation) ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.34) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਤੁਰੰਤ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪੁੱਜ

ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਦਾ ਵਿਮੀ ਸੂਤਰ ML^2 ਅਤੇ ਇਸਦਾ SI ਮਾਤਰਕ kgm^2 ਹੈ।

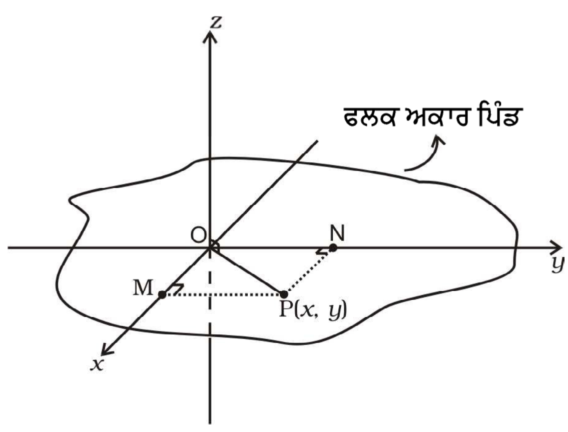
ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰਾਸ਼ੀ I ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਉਪਯੋਗ ਹਨ। ਭਾਫ਼ ਵਾਲਾ ਇੰਜਣ ਅਤੇ ਆਟੋਮੋਬਾਈਲ ਵਰਗੀਆਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਜੋ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਪੈਦਾ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਚਕਲੀ (disc) ਲਗੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਤੀਪਾਲਕ ਚੱਕਰ (flywheel), ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਪਣੇ ਵਿਸ਼ਾਲ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਹ ਚੱਕਰ ਵਾਹਨ ਦੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਅਚਾਨਕ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੋਣ ਦਿੰਦਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਗਤੀ ਹੌਲ਼ੀ-ਹੌਲ਼ੀ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਗੱਡੀ ਝਟਕੇ-ਖਾ ਕੇ ਨਹੀਂ ਚਲਦੀ ਅਤੇ ਵਾਹਨ ਤੇ ਸਵਾਰ ਯਾਤਰੀਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸਵਾਰੀ ਅਰਾਮਦਾਇਕ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

7.10 ਲੰਬ ਰੂਪ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ (THEOREMS OF PERPENDICULAR AND PARALLEL AXES)

ਇਹ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਦੋ ਉਪਯੋਗੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਸਾਂਗੇ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨਿਯਮਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇਸਦੇ ਕੁਝ ਸਰਲ ਉਪਯੋਗ ਸਿਖਾਂਗੇ।

ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (Theorem of perpendicular axes)

ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਫਲਕ ਅਕਾਰ (planar, lamina) ਪਿੰਡਾਂ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੋਇਆ ਕਿ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਪਿੰਡਾਂ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਮੋਟਾਈ ਹੋਰ ਵਿਮਾਂ (ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਜਾਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਚਿੱਤਰ 7.29 ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿ **ਇਸਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕਿਸੇ ਫਲਕ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ, ਫਲਕ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਦੋ ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ, ਜੋ ਕਿ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ, ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਗਿਆਤ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।**



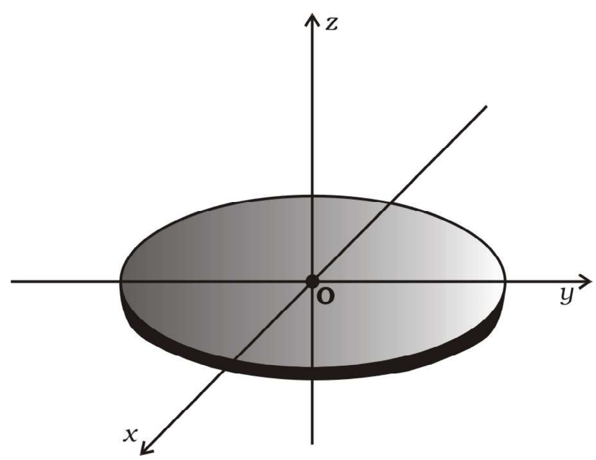
ਚਿੱਤਰ **7.29** ਫਲਕ ਅਕਾਰ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ। x ਅਤੇ y ਇਸਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਧੁਰੇ ਹਨ ਅਤੇ z ਧੁਰਾ ਇਸਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.29 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਕ ਅਕਾਰ ਦਾ ਪਿੰਡ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ O ਤੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ, z ਧੁਰਾ ਹੈ। ਫਲਕ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ z ਧੁਰੇ ਦੇ ਸੰਗਾਮੀ, ਮਤਲਬ ਕਿ O , ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ, ਦੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਧੁਰੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ x-ਧੁਰਾ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ y-ਧੁਰਾ ਮੰਨਿਆ ਹੈ। ਪ੍ਰਮੇਯ ਇਹ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ,

$$I_z = I_x + I_y \tag{7.36}$$

ਆਓ, ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਦੁਆਰਾ ਉਪਯੋਗਿਤਾ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

▶ ***ਉਦਾਹਰਨ 7.10*** **ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਚਕਲੀ (disc) ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਇਸਦੇ ਕਿਸੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?**



ਚਿੱਤਰ **7.30** ਇੱਕ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਚਕਲੀ (disc) ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ, ਜਦੋਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ, ਦੋ ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਚਕਲੀ (disc) ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੈਂਟ, ਉਸਦੇ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ $I = MR^2/2$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ M ਚਕਲੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਅਤੇ R ਇਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ (ਸਾਰਨੀ 7.1)

ਚਕਲੀ (disc) ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਫਲਕ ਅਕਾਰ ਪਿੰਡ ਸਮਝ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਇਸਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.30 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਚਕਲੀ ਦੇ ਕੇਂਦਰ O ਤੋਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਗਾਮੀ ਤਿੰਨ ਲੰਬ ਧੁਰੇ x, y, z ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਚਕਲੀ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ z ਇਸਦੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$I_z = I_x + I_y$$

ਹੁਣ, x ਅਤੇ y ਧੁਰੇ ਚਕਲੀ ਦੇ ਦੋ ਵਿਆਸਾਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤੀ (symmetry) ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਹਰੇਕ ਵਿਆਸ

ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦਾ ਮਾਨ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$I_x = I_y$$

$$\therefore \quad I_z = 2I_x$$

ਪਰ $\quad I_z = MR^2/2$

$$I_x = I_z/2 = MR^2/4$$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਚਕਲੀ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $MR^2/4$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸੇ ਰਿੰਗ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਵੀ ਇਸਦੇ ਕਿਸੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਕੀ ਇਹ ਸਿਧਾਂਤ ਕਿਸੇ ਠੋਸ ਵੇਲਨਾਕਾਰ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ? ◀

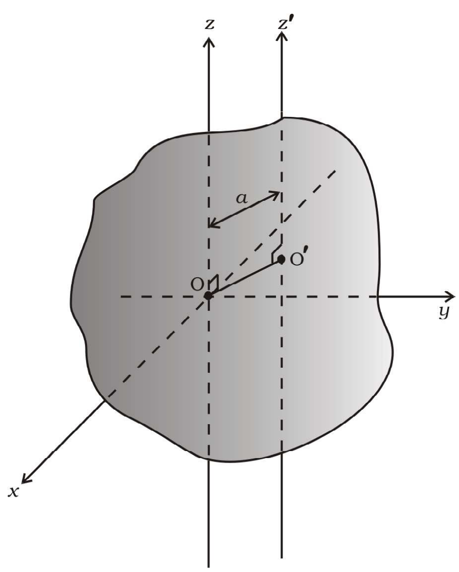
7.10.1 ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (Theorem of parallel axes)

ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ, ਹਰੇਕ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਚਾਹੇ ਉਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਕਿਉਂ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਜੇ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਉਸਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਨਤਰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਥੇ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਕਥਨ ਹੀ ਦੇਵਾਂਗੇ, ਇਸਦੀ ਉਤਪਤੀ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਫਿਰ ਵੀ, ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਕੁਝ ਸਰਲ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਲਾਗੂ ਕਰਕੇ ਦੇਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਹੀ ਇਸਦੀ ਉਪਯੋਗਿਤਾ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਕਥਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ-

ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦਾ, ਕਿਸੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ, ਉਸ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਜੋ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ, ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ, ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਲਏ ਗਏ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਅਤੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.31 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। Z′ ਅਤੇ Z ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ a ਹੈ। z- ਧੁਰਾ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ O ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਤੱਦ ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$I_{z'} = I_z + Ma^2 \qquad (7.37)$$

ਜਿੱਥੇ I_z ਅਤੇ $I_{z'}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ z ਅਤੇ z′ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਹਨ, M ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਹੈ ਅਤੇ a ਦੋਂਵੇ ਧੁਰਿਆਂ ਵਿੱਚ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਚਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.31 ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ। z ਅਤੇ z′ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ a ਹੈ, O ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਹੈ, OO′ = a

▶ ਉਦਾਹਰਨ 7.11 ਪੁੰਜ M, ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ l ਵਾਲੀ ਛੜ ਦਾ, ਉਸ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਇਸਦੇ ਲੰਬ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : M ਪੁੰਜ ਅਤੇ l ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਛੜ ਦਾ, ਇਸਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ, $I = Ml^2/12$ ਹੈ।

ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਲਗਾ ਕੇ,

$$I' = I + Ma^2$$

$a = l/2$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$I' = M\frac{l^2}{12} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

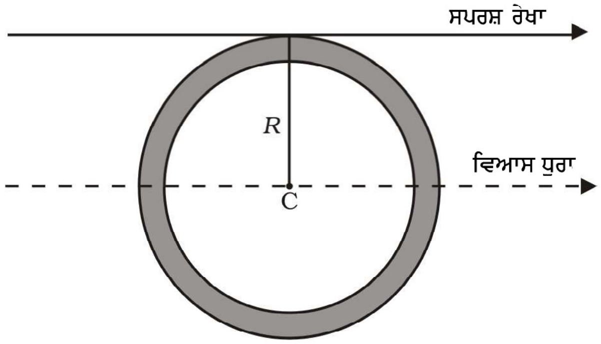
ਅਸੀਂ ਸੁਤੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਜਾਂਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇ ਅਸੀਂ I′ ਨੂੰ ਉਸ ਛੜ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦਾ ਅੱਧਾ ਲਈਏ ਜਿਸਦਾ ਪੁੰਜ 2M ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 2 l ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$I' = 2M.\frac{4l^2}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{Ml^2}{3}$$ ◀

▶ ਉਦਾਹਰਨ 7.12 ਕਿਸੇ ਪਤਲੇ ਰਿੰਗ ਦੇ ਘੇਰੇ (circumference) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ (tangent) ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੀ ਸਥਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਸਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਰਿੰਗ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਇਸਦੇ ਉੱਪਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਇਸਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ R ਮਤਲਬ ਰਿੰਗ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਲਗਾਉਣ ਤੇ

$$I_{\text{ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ}} = I_{\text{ਵਿਆਸ ਧੁਰਾ}} + MR^2 = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$



ਚਿੱਤਰ **7.32**

7.11 ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਸ਼ੁੱਧ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀਕੀ (KINEMATICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਮਤੁਲਤਾ ਦੇ ਸੰਕੇਤ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਕਿ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ω ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਉਹੀ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ ਜੋ ਰੇਖੀ ਵੇਗ $\boldsymbol{v}$ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਵਿੱਚ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮਤੁਲਤਾ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਜਿਹਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਵਿਚਾਰ ਚਰਚਾ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਤ ਰਖਾਂਗੇ। ਅਜਿਹੀ ਗਤੀ ਦੇ ਲਈ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਡਿਗਰੀ (degree of freedom) ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ ਅਰਥਾਤ ਇਸਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਲਈ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਡਿਗਰੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ। ਇਹ ਸੈਕਸ਼ਨ ਸਿਰਫ਼ ਸ਼ੁੱਧ ਗਤੀਕੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਗਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਵਲ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਮੁਖਾਤਿਬ ਹੋਵਾਂਗੇ।

ਯਾਦ ਕਰੋ, ਕਿ ਕਿਸੇ ਘੁੰਮਦੇ ਹੋਏ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ (angular displacement) ਦੱਸਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਿੰਡ ਤੇ ਕੋਈ ਕਣ P ਲੈ ਲਿਆ ਸੀ (ਚਿੱਤਰ 7.33)। ਜਿਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਣ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਣ θ ਹੈ ਜੋ ਸੰਪੂਰਨ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਹੈ, θ ਇੱਕ ਨਿਯਤ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ x'-ਧੁਰਾ ਲੈ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਗਤੀ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ z-ਧੁਰਾ, ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਧੁਰਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਣ P ਦੀ ਗਤੀ ਤਲ x-y ਤਲ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 7.33 ਵਿੱਚ θ_0 ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜੋ $t = 0$ ਤੇ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਕੋਣੀ ਵੇਗ, ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਹੈ। ਮਤਲਬ $\omega = d\theta/dt$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿਉਂਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਧੁਰਾ ਸਥਿਰ ਹੈ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਦੇ ਨਾਲ ਸਦਿਸ਼ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਵਹਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ, $\alpha = d\omega/dt$ ਹੈ।

ਸ਼ੁਧ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀਕੀ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (kinematical quantities in rotational motion), ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ (θ), ਕੋਣੀ ਵੇਗ (ω) ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ (α) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸ਼ੁੱਧ ਗਤੀਕੀ ਦੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਰੇਖੀ ਵਿਸਥਾਪਨ (x), ਰੇਖੀ ਵੇਗ (v) ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਵੇਗ (a) ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਅਰਥਾਤ ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਵੇਗ (uniform i.e. constant) ਦੇ ਤਹਿਤ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸ਼ੁੱਧ ਗਤੀਕੀ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨਾਂ (Kinematical equations of linear motion) ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਉਹ ਹਨ –

$$v = v_0 + at \quad \text{(a)}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{(b)}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2ax \quad \text{(c)}$$

ਜਿੱਥੇ x_0 = ਅਰੰਭਿਕ ਵਿਸਥਾਪਨ ਅਤੇ v_0= ਅਰੰਭਿਕ ਵੇਗ ਹੈ। ਸ਼ਬਦ 'ਅਰੰਭਿਕ' ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ $t = 0$ ਤੇ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਮਾਨ।

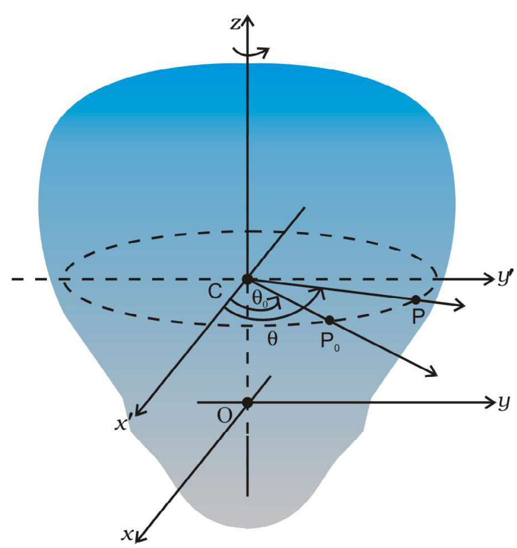
ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ, ਸਥਿਰ ਪ੍ਰਵੇਗ ਨਾਲ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਕਰਦੀ ਹੋਈ ਵਸਤੂ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ੁੱਧ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀਕੀ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਹੋਣਗੇ–

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad (7.38)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (7.39)$$

ਅਤੇ $\omega^2 = \omega_0^{\ 2} + 2\alpha(\theta - \theta_0)$ (7.40)

ਜਿੱਥੇ θ_0= ਘੁੰਮਦੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਅਰੰਭਿਕ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਹੈ ਅਤੇ ω_0 = ਇਸ ਪਿੰਡ ਦਾ ਅਰੰਭਿਕ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.33** ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਕੋਣੀ ਸਥਿਤੀ ਦਸਣਾ

ਉਦਾਹਰਨ 7.13 ਮੂਲ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਸਮੀਕਰਨ (7.38) ਵਿਉਤਪੰਨ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਇੱਕ-ਸਮਾਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha = \text{ਸਥਿਰ} \quad \text{(i)}$$

ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਸਮਕਲਨ (integration) ਕਰਨ ਤੇ

$$\omega = \int \alpha \, dt + c$$

$$= \alpha t + c \quad (\alpha \text{ ਸਥਿਰ ਹੈ})$$

ਜਦੋਂ, $t = 0, \ \omega = \omega_0$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਸਮੀਕਰਨ (i) ਤੋਂ, $t = 0$ ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\omega = c = \omega_0$

ਇਸ ਲਈ $\omega = \alpha t + \omega_0$, ਜੋ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ $\omega = d\theta/dt$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨ (7.38) ਦਾ ਸਮਕਲਨ ਕਰਕੇ ਸਮੀਕਰਨ 7.39 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਵਿਉਤਪਤੀ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਨ (7.40) ਦੀ ਵਿਉਤਪਤੀ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਡੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡਦੇ ਹਾਂ। ◀

ਉਦਾਹਰਨ 7.14 ਆਟੋਮੋਬਾਈਲ ਇੰਜਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਵੇਗ 16 ਸੈਕੰਡ ਵਿੱਚ 1200 rpm ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 3120 rpm ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (i) ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਇੱਕ-ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਇਸਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ii) ਇਸ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੰਜਣ ਕਿੰਨੇ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : (i) $\omega = \omega_0 + \alpha t$ ਜਿੱਥੇ ω_0 = rad/s ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਅਰੰਭਿਕ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਹੈ।

$\omega_0 = 2\pi \times$ rev/s ਵਿੱਚ ਅਰੰਭਿਕ ਕੋਣੀ ਵੇਗ

$$= \frac{2\pi \times \text{rev/min ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਵੇਗ}}{60 \text{ s/min}}$$

$$= \frac{2\pi \times 1200}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 40\pi \text{ rad/s}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ω = rad/s ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਕੋਣੀ ਵੇਗ

$$= \frac{2\pi \times 3120}{60} \text{ rad/s}$$

$$= 2\pi \times 52 \text{ rad/s}$$

$$= 104\,\pi \text{ rad/s}$$

ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ, $\alpha = \dfrac{\omega - \omega_0}{t} \quad = 4\,\pi \text{ rad/s}^2$

ਇੰਜਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ 4π rad/s^2 ਹੈ

(ii) t ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$= (40\pi \times 16 + \frac{1}{2} \times 4\pi \times 16^2) \text{ rad}$$

$$= (640\pi + 512\pi) \text{ rad}$$

$$= 1152\pi \text{ rad}$$

ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= \dfrac{1152\pi}{2\pi} = 576$ ◀

7.12 ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀਕੀ (DYNAMICS OF ROTATIONAL MOTION ABOUT A FIXED AXIS)

ਸਾਰਨੀ 7.2 ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੀਆਂ ਸਮਤੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਪਿਛਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗਤੀਆਂ ਦੀ ਸ਼ੁੱਧ ਗਤੀਕੀ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਅਤੇ ਟਾਰਕ, ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਬਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹਨ। ਇਹ ਸਭ ਜਾਣਨ ਤੋਂ ਬਾਦ ਸਾਰਨੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਲੈਣਾ ਮੁਸ਼ਕਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਾਰਜ $= F\,dx$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਾਰਜ $\tau d\theta$ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ dx ਦੇ ਸੰਗਤ ਰਾਸ਼ੀ $d\theta$ ਹੈ ਅਤੇ F ਦੇ ਸੰਗਤ ਰਾਸ਼ੀ τ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਇਹ ਸੰਗਤਤਾ, ਗਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਮਜ਼ਬੂਤ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਇਹੀ ਕਰਨ ਜਾ ਰਹੇ ਹਾਂ।

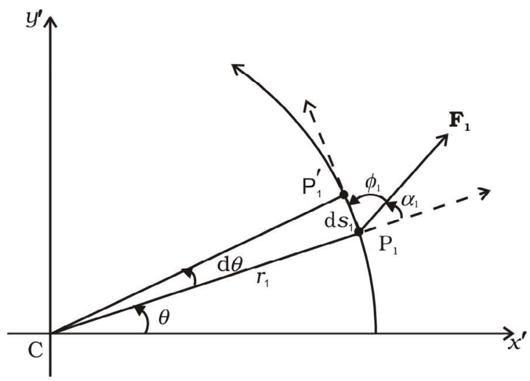
ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਗੱਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ, ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਰਲੀਕਰਨ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਧੁਰਾ ਸਥਿਰ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਵਿਵੇਚਨ ਵਿੱਚ ਟਾਰਕਾਂ ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗਾਂ (angular momentum) ਦੇ ਘਟਕਾਂ (components) ਨੂੰ ਇਸ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ ਹੀ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਸਿਰਫ ਇਹੀ ਘਟਕ ਪਿੰਡ ਨੂੰ ਘੁੰਮਾਉਣ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਟਾਰਕ ਦਾ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਘੁਮਾਉਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ੱਕ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਾਂਗੇ ਕਿ ਟਾਰਕ ਦੇ ਇਸ ਘਟਕ ਨੂੰ ਸੰਤੁਲਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਟਾਰਕ ਪੈਦਾ ਹੋਣਗੇ ਜੋ ਧੁਰੇ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬਣਾਈ ਰੱਖਣ ਲਈ ਜਿੰਮੇਵਾਰ ਹੋਣਗੇ। ਇਸਲਈ ਇਹਨਾਂ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਟਾਰਕਾਂ ਦੇ ਘਟਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗ ਰਹੇ ਟਾਰਕਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ

(1) ਪਿੰਡ ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰਦੇ ਉਹ ਬਲ ਜੋ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ ਨੂੰ ਹੀ ਲੈਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਬਲ ਧੁਰੇ ਦੇ

ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਟਾਰਕ ਪੈਦਾ ਕਰਦੇ ਹਨ ਨੂੰ ਲੈਣ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(2) ਪਿੰਡ ਦੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਸਿਰਫ਼ ਓਹੀ ਘਟਕ ਜੋ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ। ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ਾਂ ਦੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਲਏ ਗਏ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਸਾਨੂੰ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲੈਣ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਾਰਕ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ (Work done by a torque)



ਚਿੱਤਰ **7.34** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਕਿਸੇ ਕਣ ਤੇ ਦ੍ਰਿੜ ਤੇ ਲੱਗੇ ਬਲ F_1 ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ। ਕਣ, ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੇਂਦਰ C ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਚਾਪ P_1P_1' (ds_1) ਕਣ ਦਾ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦੱਸਦੀ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.34 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (rigid body) ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਘੁੰਮਣ ਧੁਰਾ, z-ਧੁਰਾ ਹੈ, ਜੋ ਸਤਹਿ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਉੱਪਰ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਉਹਨਾਂ ਬਲਾਂ ਤੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜੋ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਪਿੰਡ ਦੇ ਕਿਸੇ ਕਣ ਤੇ, ਜਿਸਦੀ ਸਥਿਤੀ P_1, ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ, ਇੱਕ ਬਲ $\mathbf{F}_1$ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਕਿਰਿਆ ਰੇਖਾ, ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਸਹੂਲਤ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ x′-y′ ਤਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ (ਇਹ ਸਾਡੇ ਸਫ਼ੇ (Page) ਦਾ ਤਲ ਹੈ)। P_1 ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਣ r_1 ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਚਲਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ, $CP_1 = r_1$ ।

Δt ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ, ਕਣ, P_1' ਤੇ ਪੁੱਜ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕਣ ਦਾ ਵਿਸਥਾਪਨ $d\mathbf{s}_1$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $ds_1 = r_1 d\theta$ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਚੱਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਹੈ। ਕਣ ਤੇ ਬਲ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ

$$dW_1 = \mathbf{F}_1 . d\mathbf{s}_1 = F_1 ds_1 \cos\phi_1 = F_1(r_1\, d\theta) \sin\alpha_1$$

ਜਿੱਥੇ ϕ_1, $\mathbf{F}_1$ ਅਤੇ P_1 ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਣਿਆ ਕੋਣ ਹੈ, ਅਤੇ α_1, $\mathbf{F}_1$ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ $\mathbf{CP}_1$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ। $\phi_1 + \alpha_1 = 90°$

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ $\mathbf{F}_1$ ਦੇ ਕਾਰਨ ਟਾਰਕ $\mathbf{OP}_1 \times \mathbf{F}_1$ ਹੈ। $\mathbf{OP}_1 = \mathbf{OC} + \mathbf{CP}_1$ (ਚਿੱਤਰ 7.17 (b) ਦੇਖੋ)। ਕਿਉਂਕਿ **OC** ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸਦੇ ਕਰਕੇ ਟਾਰਕ ਤੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ। $\mathbf{F}_1$ ਦੇ ਕਾਰਨ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਟਾਰਕ ਹੈ। $\tau_1 = \mathbf{CP_1} \times \mathbf{F}_1$ ਇਹ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $\tau_1 = r_1 F_1 \sin\alpha$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$dW_1 = \tau_1 d\theta$$

ਜੇ ਪਿੰਡ ਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਲ ਕਾਰਜ ਕਰ ਰਹੇ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਸਭ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕਾਰਜਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪਿੰਡ ਤੇ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕੁੱਲ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਵੱਖ-ਵੱਖ ਬਲਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਲੱਗੇ ਟਾਰਕਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਨੂੰ τ_1, τ_2, ... ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ

$$dW = (\tau_1 + \tau_2 + ...)d\theta$$

ਸਾਰਣੀ 7.2 ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ

ਰੇਖੀ ਗਤੀ	ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ
1. ਵਿਸਥਾਪਨ x	ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ θ
2. ਵੇਗ $v = dx/dt$	ਕੋਣੀ ਵੇਗ $\omega = d\theta/dt$
3. ਪ੍ਰਵੇਗ $a = dv/dt$	ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ, $\alpha = d\omega/dt$
4. ਪੁੰਜ M	ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ I
5. ਬਲ $F = Ma$	ਟਾਰਕ $\tau = I\,\alpha$
6. ਕਾਰਜ $dW = F\,ds$	ਕਾਰਜ $W = \tau\, d\theta$
7. ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ $K = Mv^2/2$	ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ $K = I\omega^2/2$
8. ਸ਼ਕਤੀ $P = F\,v$	ਸ਼ਕਤੀ $P = \tau\omega$
9. ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ $p = Mv$	ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ $L = I\omega$

ਯਾਦ ਰਹੇ ਕਿ ਟਾਰਕਾਂ ਨੂੰ ਜਨਮ ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਬਲ ਤਾਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਣਾਂ ਤੇ ਲੱਗ ਰਹੇ ਹਨ, ਪਰ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ $d\theta$ ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਹੁਣ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ÇÕÔÂ Ç Á Å ÃÆÃÅâ ¶ñ ÂÆÃÅõ¶àÅõÕ z-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸੇ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸਰਕਾਰਕ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕਾਂ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ τ, ਹਰੇਕ ਟਾਰਕ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣਾਂ τ_1, τ_2, ... ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਮਤਲਬ $\tau = \tau_1 + \tau_2 + ...$ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$dW = \tau d\theta \tag{7.41}$$

ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੇ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗੇ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ τ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਨ

$$dW = F ds$$

ਤੋਂ ਇਸਦੀ ਤੁੱਲਤਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੀ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.41) ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ dt ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega \tag{7.42}$$

ਇਹ ਤਤਕਾਲੀ ਸ਼ਕਤੀ (instantaneous power) ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ। ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਸ਼ਕਤੀ ਦੇ ਇਸ ਸਮੀਕਰਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਸ਼ਕਤੀ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ $P = Fv$ ਨਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਣਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਆਂਤਰਿਕ ਗਤੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਇਸ ਲਈ, ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਹਾਣੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪਿੰਡ ਤੇ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕਾਰਜ ਦੀ ਦਰ, ਸਮੀਕਰਨ (7.42) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਰ ਨਾਲ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵੱਧਦੀ ਹੈ। ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦੀ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\frac{(2\omega)}{2}\frac{d\omega}{dt}$$

ਅਸੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ। ਮਤਲਬ ਕਿ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪਿੰਡ ਦ੍ਰਿੜ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਾਪੇਖ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ।

ਤਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ $\alpha = d\omega/dt$, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\,\omega\,\alpha$$

ਕਾਰਜ ਕਰਨ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵਿੱਚ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$\tau\omega = I\,\omega\,\alpha$$

$$\tau = I\alpha \tag{7.43}$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.43) ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦੇ ਲਈ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਿਯਮ $F = ma$ ਨਾਲ ਮਿਲਦੀ ਜੁਲਦੀ ਹੈ।

ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਬਲ ਪਿੰਡ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਟਾਰਕ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਪੈਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ, ਲਗਾਏ ਟਾਰਕ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਅਤੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦੇ ਉਲਟ ਅਨਪੁਾਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.43) ਨੂੰ, ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਨਿਊਟਨ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਨਿਯਮ, ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

▶ **ਉਦਾਹਰਨ *7.15* ਨਕਾਰਨਯੋਗ ਪੁੰਜ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਰੱਸੀ 20 kg ਪੁੰਜ ਅਤੇ 20 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਗਤੀਪਾਲਕ ਪਹੀਏ (flywheel) ਦੇ ਰਿਮ ਨਾਲ ਲਪੇਟੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਰੱਸੀ ਤੇ 25 N ਦਾ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਖਿੱਚ ਬਲ ਲਗਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.35 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਗਤੀਪਾਲਕ ਪਹੀਆ ਇੱਕ ਖਿਤਜੀ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਬਿਅਰਿੰਗ (Bearings) ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਰਗੜ ਨਹੀਂ ਹੈ।**

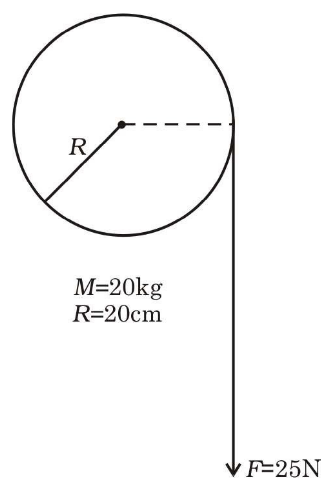
(a) ਪਹੀਏ ਦੇ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

(b) 2m ਰੱਸੀ ਖੁਲ੍ਹਣ ਤੱਕ ਖਿੱਚ ਬਲ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(c) ਇਸ ਛਿਣ ਤੇ ਪਹੀਏ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੰਨੋ ਕਿ ਪਹੀਆ ਜ਼ੀਰੋ ਤੋਂ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(d) ਭਾਗ (b) ਅਤੇ (c) ਦੇ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :



ਚਿੱਤਰ **7.35**

(a) ਇਸਦੇ ਲਈ $I\alpha = \tau$

ਟਾਰਕ, $\tau = FR$

$= 25 \times 0.20$ Nm ($\because R = 0.20$m)

$= 5.0$ Nm

ਅਤੇ I = ਆਪਣੀ ਧੁਰੀ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਹੀਏ ਦਾ

ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $= \dfrac{MR^2}{2}$

$$= \frac{20.0 \times (0.2)^2}{2} = 0.4 \text{ kg m}^2$$

ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ α = 5.0 Nm/0.4 kg m^2 = 12.35 s^{-2}

(b) 2m ਰੱਸੀ ਖੋਲਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ

= 25 N × 2m = 50 J

(c) ਮੰਨਿਆ ਕਿ ω ਅੰਤਿਮ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਹੈ ਤਾਂ ਪਹੀਏ ਦੀ

ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਵਾਧਾ = $\dfrac{1}{2} I\omega^2$

ਕਿਉਂਕਿ ਪਹੀਆ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚੋਂ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta, \quad \omega_0 = 0$$

ਅਤੇ ਕੋਣੀ ਵਿਸਥਾਪਨ θ = ਰੱਸੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ/ਪਹੀਏ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ

= 2m/0.2 m = 10 rad

$$\omega^2 = 2 \times 12.5 \times 10.0 = 250 (\text{rad/s})^2$$

ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ

$$= \frac{1}{2} \times 0.4 \times 250 = 50 \text{ J}$$

(d) ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਭਾਵ ਪਹੀਏ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ = ਬਲ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕਾਰਜ। ਇੱਥੇ ਰਗੜ ਦੇ ਕਾਰਨ ਊਰਜਾ ਦੀ ਬਿਲਕੁਲ ਹਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੋਈ ਹੈ। ◀

7.13 ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ (ANGULAR MOMENTUM IN CASE OF ROTATION ABOUT A FIXED AXIS)

ਸੈਕਸ਼ਨ 7.7 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਉਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਵਿੱਚ ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ, ਉਸ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਉਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਲਏ ਗਏ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \tag{7.25b}$$

ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ, ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕਿਸੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਤੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਸਰਲ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲੈ ਕੇ ਫਿਰ ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਜੋੜ ਕਢਾਂਗੇ ਅਤੇ ਪੂਰੇ ਪਿੰਡ ਲਈ **L** ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਕ ਕਣ ਲਈ, $\boldsymbol{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

ਚਿੱਤਰ (7.17 b) ਦੇਖੋ। ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਣ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ **OP** = **r** ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ **r** = **OC** + **CP** (ਕਿਉਂਕਿ **p** = m**v**)

$$\mathbf{l} = (\mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}) + (\mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v})$$

P ਤੇ ਕਣ ਦੇ ਰੇਖੀ ਵੇਗ **v** ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $\upsilon = \omega r_\perp$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $r_\perp$, CP ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਜਾਂ P ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਹੈ। **v** ਕਣ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ **CP** × **v** ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਘੁੰਮਣ ਧੁਰਾ (ਜੋ ਇੱਥੇ z-ਧੁਰਾ ਹੈ) ਨੂੰ ਇਕਾਈ ਸਦਿਸ਼ $\hat{\mathbf{k}}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ

$$\mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = r_\perp (m\upsilon)\hat{\mathbf{k}}$$

$$= m r_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}} \qquad (\upsilon = \omega r_\perp)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਜਾਂਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ **OC** × **v** ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ (ਮਤਲਬ z-ਧੁਰਾ) ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\boldsymbol{l}$ ਦੇ ਘਟਕ ਨੂੰ $\boldsymbol{l}_z$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ

$$\boldsymbol{l}_z = \mathbf{CP} \times m\,\mathbf{v} = m r_\perp^2 \omega \hat{\mathbf{k}}$$

ਅਤੇ $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_z + \mathbf{OC} \times m\,\mathbf{v}$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\boldsymbol{l}_z$ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਪਰ $\boldsymbol{l}$ ਨਹੀਂ। ਆਮ ਕਰਕੇ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ $\boldsymbol{l}$ ਅਤੇ ω ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ। ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀ ਸੰਗਤ ਤੱਥ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ। ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੇ **p** ਅਤੇ **v** ਸਦਾ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਪੂਰੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ $\boldsymbol{l}_i$ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਾਂਗੇ ਮਤਲਬ i ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ **n** ਤੱਕ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ

$$\mathbf{L} = \sum \boldsymbol{l}_i = \sum \boldsymbol{l}_{iz} + \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i$$

z-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ **L** ਦੇ ਘਟਕਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $\mathbf{L}_z$ ਅਤੇ $\mathbf{L}_\perp$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\mathbf{L}_\perp = \sum \mathbf{OC}_i \times m_i \mathbf{v}_i \tag{7.44a}$$

ਜਿੱਥੇ m_i ਅਤੇ $\mathbf{v}_i$, i ਵੇਂ ਕਣ ਦੇ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਵੇਗ ਹਨ ਅਤੇ C_i ਕਣ ਦੁਆਰਾ ਬਣਾਏ ਗਏ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਹੈ।

$$\mathbf{L}_z = \sum \boldsymbol{l}_{iz} = \left(\sum_i m_i r_i^2\right) \omega \hat{\mathbf{k}}$$

ਜਾਂ $\mathbf{L}_z = I\omega \hat{\mathbf{k}}$ (7.44b)

ਸਮੀਕਰਨ (7.44b) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ i ਵੇਂ ਕਣ ਦੀ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ r_i ਹੈ, ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ

$I = \sum m_i r_i^2$ ਹੈ

ਧਿਆਨ ਦਿਓ $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ (7.44c)

ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ, ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਤੌਰ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਸਮਮਿਤ (Symmetric) ਹੈ ਅਰਥਾਤ, ਘੁੰਮਣ ਧੁਰਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਧੁਰਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ $\mathbf{OC}_i$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹਰੇਕ $\mathbf{v}_i$ ਵੇਗ ਵਾਲੇ ਕਣ ਦੇ ਲਈ C_i ਕੇਂਦਰ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦੇ, ਵਿਆਸ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਸਿਰੇ ਤੇ, $-\mathbf{v}_i$ ਵੇਗ ਵਾਲਾ ਦੂਸਰਾ ਕਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਣ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ $\mathbf{L}_\perp$ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਯੋਗਦਾਨ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇਗਾ। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਸਮਮਿਤ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ $\mathbf{L}_\perp$ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_z = I\omega \hat{\mathbf{k}}$ (7.44d)

ਉਹਨਾਂ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜੋ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਸਮਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ, $\mathbf{L}$ ਤੇ $\mathbf{L}_Z$ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\mathbf{L}$ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਸਾਰਨੀ 7.1 ਵਿੱਚ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਮਾਮਲਿਆਂ ਵਿੱਚ $\mathbf{L} = \mathbf{L}_Z$ ਲਾਗੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ?

ਆਓ, ਸਮੀਕਰਨ (7.44(b) ਨੂੰ ਸਮੇਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਅਵਕਲਤ (differentiate) ਕਰੀਏ ਕਿਉਂਕਿ $\hat{\mathbf{k}}$ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ –

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{L}_z) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\,\omega)\right)\hat{\mathbf{k}}$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.28 b) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}$$

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਦੇ ਸਿਰਫ਼ ਉਹੀ ਘਟਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਜੋ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\boldsymbol{\tau} = \tau\hat{\mathbf{k}}$ ਕਿਉਂਕਿ $\mathbf{L} = \mathbf{L}_z + \mathbf{L}_\perp$ ਅਤੇ $\mathbf{L}_Z$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ (ਸਦਿਸ਼ $\hat{\mathbf{k}}$) ਸਥਿਰ ਹੈ, ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_z}{\mathrm{d}t} = \tau\hat{\mathbf{k}} \tag{7.45a}$$

ਅਤੇ $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{L}_\perp}{\mathrm{d}t} = 0$ (7.45b)

ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਘਟਕ ਸਥਿਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\mathbf{L}_z = I\omega\hat{\mathbf{k}}$ ਸਮੀਕਰਨ (7.45a) ਤੋਂ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = \tau \tag{7.45c}$$

ਜੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ I ਸਮੇਂ ਦੇ ਨਾਲ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) = I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = I\alpha$$

ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਨ (7.45c) ਤੋਂ

$$\tau = I\alpha \tag{7.43}$$

ਕਾਰਜ-ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਸੰਬੰਧ ਤੋਂ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਵਿਉਤਪੰਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

7.13.1 ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਸੁਰੱਖਿਅਣ (Conservation of angular momentum)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਮੁੜ ਪੜਚੋਲ ਕਰ ਸਕੀਏ। ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਵਿਚਾਰ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਤੱਕ ਸੀਮਤ ਰਖਾਂਗੇ। ਸਮੀਕਰਨ (7.45 c) ਤੋਂ, ਜੇ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹਨ ਤਾਂ

$L_Z = I\omega =$ ਸਥਿਰ ਅੰਕ (7.46)

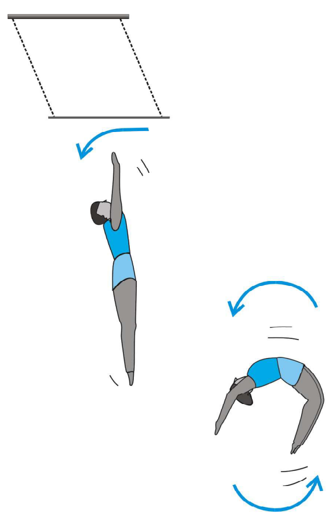
ਸਮਮਿਤ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਨ (7.44 d) ਤੋਂ, L_Z ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ L ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। (L ਅਤੇ L_Z ਕ੍ਰਮਵਾਰ L ਅਤੇ L_Z ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ ਹਨ।

ਇਹ ਧੁਰੇ ਸਥਿਰ ਹੋਣ ਤੇ ਘੁੰਮਣ ਲਈ ਸਮੀਕਰਨ (7.29 a) ਦਾ ਹੋਰ ਰੂਪ ਹੈ ਜੋ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਸੁਰੱਖਿਅਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਨਿਯਮ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.46) ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲਈ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇੱਕ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੀ ਕੁਰਸੀ ਤੇ ਬੈਠੋ, ਆਪਣੀਆਂ, ਬਾਹਾਂ ਮੋੜ ਕੇ ਰੱਖੋ ਅਤੇ ਪੈਰਾਂ ਨੂੰ ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਚੁੱਕ ਕੇ ਰੱਖੋ। ਆਪਣੇ ਮਿੱਤਰ ਨੂੰ ਕਹੋ ਕਿ ਉਹ ਕੁਰਸੀ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਘੁਮਾਵੇ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਕੁਰਸੀ ਤੇਜ਼ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਹੋਵੇ। ਆਪਣੀਆਂ ਬਾਹਾਂ ਨੂੰ ਖਿਤਜੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਫੈਲਾਓ। ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਹੋਵੇਗਾ ? ਤੁਹਾਡੀ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਘੱਟ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਬਾਹਾਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਸਰੀਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਲੈ ਜਾਉ ਤਾਂ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਸੁਰੱਖਿਅਨ ਸਪੱਸ਼ਟ

ਹੈ। ਜੇ ਘੁੰਮਣ ਯੰਤਰ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਰਗੜ ਨਕਾਰਨਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੁਰਸੀ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਈ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਨਹੀਂ ਰਹੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $I\omega$ ਦਾ ਮਾਨ ਨਿਯਤ ਹੈ। ਬਾਹਾਂ ਨੂੰ ਫੈਲਾਉਣ ਨਾਲ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ I ਵੱਧ ਜਾਵੇਗਾ, ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ω ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਬਾਹਾਂ ਨੂੰ ਸਰੀਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਲਿਆਉਣ ਨਾਲ ਉਲਟ ਹਾਲਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਚਿੱਤਰ **7.36** (a) ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਸੁਰੱਖਿਅਣ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ। ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੀ ਕੁਰਸੀ ਤੇ ਬੈਠੀ ਲੜਕੀ ਆਪਣੀਆਂ ਬਾਹਾਂ ਨੂੰ ਸਰੀਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਲਿਆਂਦੀ ਹੈ/ ਦੂਰ ਲੈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇੱਕ ਸਰਕਸ ਦਾ ਕਲਾਬਾਜ਼ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੋਤਾਖੋਰ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਧੀਆ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਾਭ ਚੁੱਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਕੇਟਰਸ ਅਤੇ ਭਾਰਤੀ ਜਾਂ ਪੱਛਮੀ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਨਾਚ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਪੈਰ ਦੇ ਪੰਜੇ ਤੇ ਘੁੰਮਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਸੰਬੰਧੀ ਆਪਣੀ ਅਸਾਧਾਰਨ ਕੁਸ਼ਲਤਾ ਦਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।

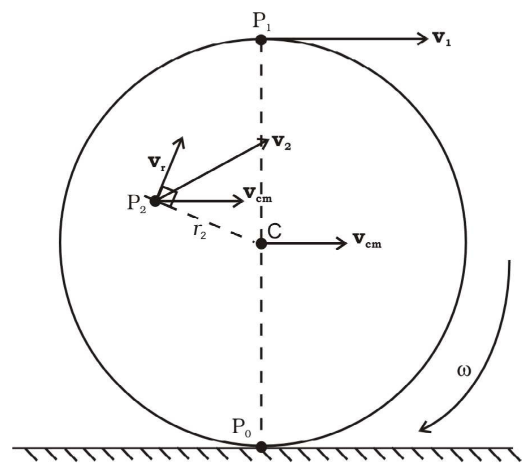


ਚਿੱਤਰ **7.36** (b) ਕਲਾਬਾਜ਼ ਆਪਣੀ ਕਲਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦਾ ਲਾਭ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ।

7.14 ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ (ROLLING MOTION)

ਸਾਡੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣ ਵਾਲੀਆਂ ਵਧੇਰੇ ਕਰਕੇ ਆਮ ਗਤੀਆਂ ਲੋਟਨਿਕ (Rolling) ਗਤੀਆਂ ਹਨ। ਆਵਾਜਾਈ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਪਹੀਆਂ ਦੀ ਗਤੀ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਆਪਣਾ ਅਧਿਐਨ ਸਮਤਲ ਸਤਹਿ ਤੇ ਲੁੜਕਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਚਕਲੀ (disc) (ਜਾਂ ਵੇਲਣ cylinder) ਨਾਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਾਂਗੇ ਕਿ ਚਕਲੀ (disc) ਬਿਨਾਂ ਫਿਸਲੇ ਲੁੜਕਦੀ (rolling) ਹੈ। ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ, ਕੀ ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਤੇ, ਚਕਲੀ ਦੀ ਤਲੀ ਦਾ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਸਤਹਿ ਨਾਲ ਸੰਪਰਕ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਸਤਹਿ ਤੇ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਟਿੱਪਣੀ ਕੀਤੀ ਸੀ ਕਿ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਅਤੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਇਸਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **7.37** ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਇੱਕ ਚਕਲੀ ਦੀ (ਬਿਨਾਂ ਫਿਸਲੇ) ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਛਿਣ ਤੇ ਚਕਲੀ ਦਾ ਸਤਹਿ ਨਾਲ ਸੰਪਰਕ ਬਿੰਦੂ P_0 ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਚਕਲੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ V_{cm}ਵੇਗ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਚਕਲੀ C ਤੋਂ ਲੰਘਦੀ ਧੁਰੀ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ω ਨਾਲ ਘੁੰਮਦੀ ਹੈ, $v_{cm} = R\omega$ ਜਿੱਥੇ R ਚਕਲੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ, $\mathbf{v}_{cm}$ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਵੇਗ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਲਈ ਚਕਲੀ (disc) ਦਾ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਵੇਗ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੀ ਚਕਲੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇਸਦਾ ਜਿਆਮਤੀ ਕੇਂਦਰ (geometric centre) ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 7.37), $\mathbf{v}_{cm}$ ਬਿੰਦੂ C ਦਾ ਵੇਗ ਹੈ। ਇਹ ਸਮਤਲ ਸਤਹਿ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਚਕਲੀ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ, C ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਚਕਲੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P_0, P_1 ਜਾਂ P_2 ਦੇ ਵੇਗ ਦੇ ਦੋ ਘਟਕ ਹਨ — ਇੱਕ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਵੇਗ $\mathbf{v}_{cm}$ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਦੇ ਕਾਰਨ ਰੇਖੀ ਵੇਗ $\mathbf{v}_r$ ਹੈ। $\mathbf{v}_r$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੈ $v_r = r\omega$ ਜਿੱਥੇ ω ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਚਕਲੀ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦਾ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਹੈ ਅਤੇ r ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ (ਭਾਵ C ਤੋਂ) ਦੂਰੀ ਹੈ।

ਵੇਗ $\mathbf{v}_r$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ C ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਸਦਿਸ਼ (radius vector) ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ (7.37) ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P_2 ਦਾ ਵੇਗ ($\mathbf{v}_2$) ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਘਟਕਾਂ $\mathbf{v}_r$ ਅਤੇ $\mathbf{v}_{cm}$ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। $\mathbf{v}_r$, CP_2 ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਸੌਖਾ ਹੈ ਕਿ $\mathbf{v}_z$ ਰੇਖਾ P_0P_2 ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P_0P_2 ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ω ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਤਕਾਲਿਕ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰਾ (instantaneous axis) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

P_o ਤੇ, ਘੁੰਮਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਰੇਖੀ ਵੇਗ $\mathbf{v}_r$ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਵੇਗ $\mathbf{v}_{cm}$ ਦੇ ਬਿਲਕੁਲ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $V_r = R\omega$ ਜਿੱਥੇ R ਚਕਲੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ। ਇਹ ਸ਼ਰਤ ਕਿ P_o ਤਤਕਾਲਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਮੰਗ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ $\upsilon_{cm} = R\omega$। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਚਕਲੀ (disc) ਜਾਂ ਵੇਲਣ ਦੀ ਬਿਨਾਂ ਫਿਸਲੇ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਹੈ,

$$\upsilon_{cm} = R\omega \tag{7.47}$$

ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਚਕਲੀ ਦੇ ਸ਼ੀਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ P_1 ਦੇ ਵੇਗ ($\mathbf{v}_1$) ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਹੈ $\upsilon_{cm}+ R\omega$ ਜਾਂ 2 υ_{cm} ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਤਲ ਸਤਹਿ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਸ਼ਰਤ (7.47) ਰਿੰਗ ਜਾਂ ਗੋਲੇ ਵਰਗੀ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੀਆਂ ਦੂਸਰੀਆਂ ਸਮਮਿਤ ਵਸਤੂਆਂ ਤੇ ਵੀ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

7.14.1 ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ (Kinetic energy of rolling motion)

ਸਾਡਾ ਅਗਲਾ ਕਾਰਜ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦੇ ਲਈ ਵਿਅੰਜਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਨੂੰ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਤੋਂ ਵੱਖਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਇਸ ਵਿਆਪਕ ਸਿੱਟੇ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ (K) ਨੂੰ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ($MV^2/2$) ਅਤੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਗਤੀ ਦੀ ਗਤੀਜ ਊਰਜਾ (K') ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ

$$K = K' + MV^2/2 \tag{7.48}$$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਵਿਆਪਕ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ ਚਲਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਅਭਿਆਸ 7.31), ਅਤੇ ਚਕਲੀ (disc) ਵਰਗੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮਾਮਲੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਲਾਗੂ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ (centre of mass) ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ, ਪਿੰਡ ਦੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਹੈ। ਜੋ ਸਾਡੀ ਸੰਕੇਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $m\upsilon^2_{cm}/2$ ਹੈ ਜਿਥੇ m ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਹੈ ਅਤੇ υ_{cm} ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਪਿੰਡ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ K' ਘੁੰਮਣ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ, $K' = I\omega^2/2$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ I ਇੱਕ ਢੁੱਕਵੇਂ ਧੁਰੇ (appropriate axis) ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਹੈ, ਜੋ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੀ ਚਕਲੀ ਦੇ ਲਈ ਪਿੰਡ ਦਾ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 \tag{7.49a}$$

$I = mk^2$ ਭਰਨ ਤੇ,

$$K = \frac{1}{2}\frac{mk^2\upsilon_{cm}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2$$

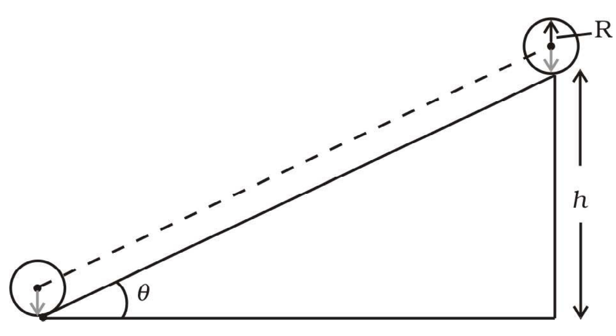
ਜਾਂ $$K = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) \tag{7.49b}$$

ਸਮੀਕਰਨ (7.49 b) ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਚਕਲੀ ਜਾਂ ਵੇਲਣ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਰਿੰਗ ਜਾਂ ਗੋਲੇ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

▶ ਉਦਾਹਰਨ 7.16 ਤਿੰਨ ਪਿੰਡ ਇੱਕ ਰਿੰਗ, ਇੱਕ ਠੋਸ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਗੋਲਾ ਇੱਕ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਬਿਨਾਂ ਫਿਸਲੇ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਤੋਂ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਾਰੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਕਿਹੜਾ ਪਿੰਡ ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੇਗ ਨਾਲ ਪੁੱਜਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਲੋਟਨ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਊਰਜਾ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਹੈ ਅਰਥਾਤ, ਰਗੜ ਆਦਿ ਦੇ ਕਾਰਨ ਊਰਜਾ ਦੀ ਕੋਈ ਹਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਇਸ ਲਈ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਲੁੜਕ ਕੇ ਹੇਠਾਂ ਆਉਣ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤਜ ਊਰਜਾ *(mgh)* ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵਿੱਚ ਵਾਧੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ ਪਿੰਡ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਤੋਂ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਉਪਲਬਧ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਅੰਤਿਮ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਨ (7.49b) ਤੋਂ $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$ ਜਿੱਥੇ υ ਪਿੰਡ (ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ) ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਵੇਗ ਹੈ।

K ਅਤੇ mgh ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ



ਚਿੱਤਰ **7.38**

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)$$

ਜਾਂ $\upsilon^2 = \left(\dfrac{2gh}{1+k^2/R^2}\right)$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਕਿ υ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ।

ਰਿੰਗ ਦੇ ਲਈ $k^2 = R^2$

$$\upsilon_{ring} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1}} = \sqrt{gh}$$

ਵੇਲਣ ਦੇ ਲਈ $k^2 = R^2/2$

$$\upsilon_{cylinder} = \sqrt{\frac{2gh}{1+1/2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4gh}{3}}$$

ਠੋਸ ਗੋਲੇ ਦੇ ਲਈ $k^2 = 2R^2/5$

$$\upsilon_{sphere} = \sqrt{\frac{2gh}{1+2/5}}$$

$$= \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੀ ਤਲੀ ਦੇ ਪੁੱਜਣ 'ਤੇ ਤਿੰਨਾਂ ਪਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਗੋਲੇ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਵੇਗ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜੇ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੀ ਤਲੀ ਤੇ ਪੁੱਜਣ ਤੇ ਕਿਸ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਉਰਜਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ ? ◀

ਸਾਰ (SUMMARY)

1. ਇੱਕ ਆਦਰਸ਼ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ (rigid body) ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਪਿੰਡ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਕਣਾਂ ਤੇ ਬਲ ਲਗਾਉਣ ਤੇ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਵਿਚਲੀ ਦੂਰੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ।
2. ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਜੋ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ, ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਸਥਿਰ ਹੋਵੇ ਸਿਰਫ਼ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਹੀ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਪਿੰਡ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੀ ਸਥਿਰ ਨਾ ਹੋਵੇ ਉਹ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਗਤੀ ਕਰੇਗਾ ਜਾ ਘੁੰਮਣ ਅਤੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੋਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਯੋਜਿਤ ਗਤੀ।
3. ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਵਿੱਚ, ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਕਾਰ ਪੱਥ ਤੇ ਚਲਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਧੁਰੇ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਕਿਸੇ ਛਿਣ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।
4. ਸ਼ੁੱਧ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਵਿੱਚ, ਪਿੰਡ ਦਾ ਹਰੇਕ ਕਣ ਕਿਸੇ ਵੀ ਛਿਣ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ।
5. ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $\omega = d\theta/dt$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਦੇ ਲਈ, ਸਦਿਸ਼ ω ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
6. ਦੋ ਸਦਿਸ਼ਾਂ $\mathbf{a}$ ਅਤੇ $\mathbf{b}$ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ (ਜਾਂ ਕ੍ਰਾਸ) ਗੁਣਨ ਇੱਕ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਸਦਿਸ਼ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ $ab\sin\theta$ ਹੈ ਇਸਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਾ ਪਤਾ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵਾਲੇ ਪੇਚ ਦੇ ਨਿਯਮ ਜਾਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੇ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਕਿਸੇ ਕਣ ਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ਜਿੱਥੇ $\mathbf{r}$ ਧੁਰੇ ਤੇ ਲਏ ਗਏ ਕਿਸੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦੱਸਣ ਵਾਲਾ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਬੰਧ, ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੀ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵਧੇਰੇ ਵਿਆਪਕ ਗਤੀ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\mathbf{r}$, ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਲੈ ਕੇ ਕਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲਾ ਸਦਿਸ਼ ਹੈ।
8. ਕਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ –

$$\mathbf{R} = \frac{\sum m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

9. ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਵੇਗ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $\mathbf{V} = \mathbf{P}/M$ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ $\mathbf{P}$ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਹੈ। ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ ਮੰਨੋ ਜਿਵੇਂ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਪੁੰਜ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਵੀ ਇਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲੱਗਦੇ ਹੋਣ। ਜੇ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦਾ ਕੁੱਲ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਸਥਿਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

10. n ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$$

n ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਟਾਰਕ ਜਾਂ ਬਲ ਦੀ ਮੋਮੰਟ

$$\tau = \sum_{1} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

i ਵੇਂ ਕਣ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲ $\mathbf{F}_i$ ਵਿੱਚ, ਬਾਹਰੀ ਅਤੇ ਆਂਤਰਿਕ ਸਾਰੇ ਬਲ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਕਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਲ, ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲੱਗਦੇ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{ext}$$

11. ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦੇ ਯਾਂਤਰਿਕ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ,

(*i*) ਇਹ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ, ਇਸ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$

(*ii*) ਇਹ ਘੁੰਮਣ ਸੰਤੁਲਨ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ, ਇਸ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ, $\sum \boldsymbol{\tau}_i = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$

12. ਕਿਸੇ ਵਿਸਤਾਰਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਕੁੱਲ ਗੁਰੂਤਾ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

13. ਕਿਸੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇੱਕ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $I = \sum m_i r_i^2$ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜਿਥੇ r_i ਪਿੰਡ ਦੇ i ਵੇਂ ਕਣ ਦੀ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਹੈ। ਘੁੰਮ ਰਹੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ $K = \frac{1}{2} I\omega^2$ ਹੈ।

14. ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ – $I'_z = I_z + Ma^2$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ, ਇਸ ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਅਤੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚਲੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

15. ਸ਼ੁੱਧ ਗਤੀਕੀ (kinematics) ਅਤੇ ਗਤੀਕੀ (dynamics) ਵਿੱਚ ਜਿਵੇਂ ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਹੈ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਹੈ।

16. ÇÅÕÇôÇÚå èô¶Ç¶ÁÄÿ ¶çÁÄÿ ¶Ø‹ ðÔ¶Âî Ç å Çºö Çêâ çÅÕä Æèb ¶ Ãèð $I\alpha = \tau$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕ τ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ $I\omega$ ਸਥਿਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

17. ਬਿਨਾਂ ਫਿਸਲੇ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਲਈ $v_{cm} = R\omega$, ਜਿੱਥੇ v_{cm} (ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ) ਸਥਾਨਾਂਤਰ ਵੇਗ ਹੈ, R ਇਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਅਤੇ m ਪੁੰਜ ਹੈ। ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ, ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਅਤੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ- $K = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$

ਰਾਸ਼ੀ	ਸੰਕੇਤ	ਵਿਮ	ਮਾਤਰਕ	ਟਿੱਪਣੀ
ਕੋਣੀ ਵੇਗ	ω	$[T^{-1}]$	$rads^{-1}$	$V = \omega \times r$
ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ	**L**	$[ML^2T^{-1}]$	Js	$L = r \times p$
ਟਾਰਕ	τ	$[ML^2T^{-2}]$	Nm	$\tau = r \times F$
ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ	**I**	$[ML^2]$	kgm^2	$I = \sum m_i r^2_{i\perp}$

ਵਿਚਾਰਨਯੋਗ ਵਿਸ਼ੇ (Points to ponder)

1. ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਪਿੰਡ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਾਹਰੀ ਬਲਾਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
2. ਕਣਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ, ਇਸਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਸਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕਰਕੇ ਵਿੱਚਾਰ ਕਰਨਾ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਗਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਇੱਕ ਉਪਯੋਗੀ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ, ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ K ਨੂੰ, ਪੁੰਜ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ K' ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ $MV^2/2$ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਕਰਨਾ ਹੈ – $K = K' + MV^2/2$
3. ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਅਕਾਰ ਦੇ ਪਿੰਡਾਂ (ਜਾਂ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮਾਂ) ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਨਿਊਟਨ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਨਿਯਮ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਨਿਯਮ ਉੱਪਰ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।
4. ਇਹ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਕੁੱਲ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ, ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗੇ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ ਹਨ, ਸਾਨੂੰ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਕਣਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ ਬਲਕਿ ਤੀਸਰਾ ਨਿਯਮ ਵੀ ਇਸ ਸ਼ਰਤ ਨਾਲ ਲਾਗੂ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਕੋਈ ਦੋ ਕਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਲ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੀ ਕਾਰਜ ਕਰਦੇ ਹਨ।
5. ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਟਾਰਕਾਂ ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਣਾ ਦੋ ਸੁਤੰਤਰ ਸ਼ਰਤਾ ਹਨ। ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਸ਼ਰਤ ਪੂਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੂਸਰੀ ਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੋਵੇ। ਬਲ ਯੁਗਮ (couple) ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ ਪਰ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੈ।
6. ਜੇ ਕੁੱਲ ਬਾਹਰੀ ਬਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲਾ ਕੁੱਲ ਟਾਰਕ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ।
7. ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਉਸਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਉਦੋਂ ਸੰਪਾਤੀ (coincide) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਗੁਰੂਤਾ ਖੇਤਰ ਪਿੰਡ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਿਸਿਆਂ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
8. ਜੇ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਵੀ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਸਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ **L** ਕੋਣੀ ਵੇਗ ω ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇ। ਪਰੰਤੂ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਵਰਨਣ ਕੀਤੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਪਿੰਡ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਧੁਰੇ ਦੇ ਇਰਦ- ਗਿਰਦ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹ ਧੁਰਾ ਪਿੰਡ ਦਾ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰਾ ਵੀ ਹੋਵੇ, ਸੰਬੰਧ $\mathbf{L} = I\omega$ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ I ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਦੇ ਇਰਦ- ਗਿਰਦ ਪਿੰਡ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ (EXERCISE)

7.1 ਇੱਕ-ਸਮਾਨ ਪੁੰਜ ਘਣਤਾ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਲਿਖੋ – (a) ਗੋਲਾ (b) ਸਿਲੰਡਰ (c) ਰਿੰਗ ਅਤੇ (d) ਘਣ। ਕੀ ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਪਿੰਡ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੀ ਹੋਵੇ ?

7.2 HCl ਅਣੂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਰਮਾਣੂਆਂ ਦੇ ਨਾਭਿਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਲਗਭਗ 1.27 Å (1 Å = 10^{-10} m) ਹੈ। ਇਸ ਅਣੂ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਲਗਭਗ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਲੋਰੀਨ ਦਾ ਪਰਮਾਣੂ ਹਾਈਡਰੋਜਨ ਦੇ ਪਰਮਾਣੂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ 35.5 ਗੁਣਾ ਭਾਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਪਰਮਾਣੂ ਦਾ ਸਾਰਾ ਪੁੰਜ ਉਸਦੇ ਨਾਭਿਕ ਤੇ ਕੇਂਦਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7.3 ਕੋਈ ਬੱਚਾ ਕਿਸੇ ਚੀਕਣੇ ਖਿਤਜੀ ਫਰਸ਼ ਤੇ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ V ਨਾਲ ਗਤੀਮਾਨ ਕਿਸੇ ਲੰਬੀ ਟਰਾਲੀ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ 'ਤੇ ਬੈਠਾ ਹੈ। ਜੇ ਬੱਚਾ ਖੜਾ ਹੋ ਕੇ ਟਰਾਲੀ ਤੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੌੜਨ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਸਿਸਟਮ (ਟਰਾਲੀ + ਬੱਚਾ) ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਚਾਲ ਕੀ ਹੈ ?

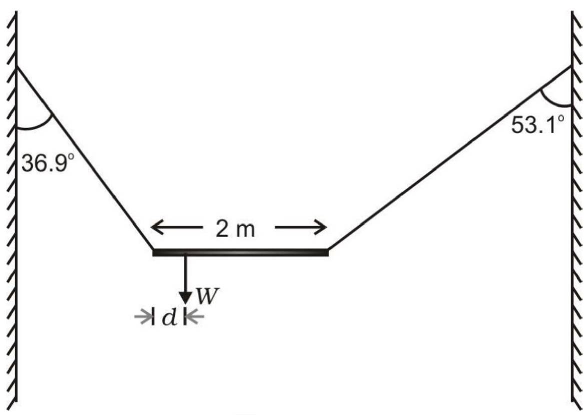
7.4 ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\mathbf{a}$ ਅਤੇ $\mathbf{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ਦੇ ਪਰਿਮਾਣ ਦਾ ਅੱਧ ਹੈ।

7.5 ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਤਿੰਨ ਸਦਿਸ਼ਾ $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ਅਤੇ $\mathbf{c}$ ਨਾਲ ਬਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਮੁੱਖੀ (Parallelopiped) ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

7.6 ਇੱਕ ਕਣ, ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਸਦਿਸ਼ $\mathbf{r}$ ਦੇ x, y, z ਧੁਰਿਆਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y, z ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਸੰਵੇਗ ਸਦਿਸ਼ $\mathbf{p}$ ਦੇ ਘਟਕ p_x, p_y, p_z, ਹਨ, ਦੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ $\boldsymbol{l}$ ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਘਟਕ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਜੇ ਕਣ ਸਿਰਫ਼ $x - y$ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹੀ ਗਤੀਮਾਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ z-ਘਟਕ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7.7 ਦੋ ਕਣ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਪੁੰਜ m ਅਤੇ ਚਾਲ v ਹੈ d ਦੂਰੀ ਵਾਲੀਆਂ, ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ, ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਚਲ ਰਹੇ ਹਨ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਇਸ ਦੋ ਕਣ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਸਦਿਸ਼ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਬੇਸ਼ੱਕ ਅਸੀਂ ਜਿਹੜੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਲਈਏ।

7.8 W ਭਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਅਸਮਅੰਗ ਛੜ (non-uniform rod) ਨੂੰ, ਉਪੇਖਣੀ ਭਾਰ (negligible weight) ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਡੋਰੀਆਂ ਨਾਲ ਚਿੱਤਰ 7.39 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਲਟਕਾ ਕੇ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਡੋਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਦਿਸ਼ਾ (vertical) ਨਾਲ ਬਣੇ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 36.9° ਅਤੇ 53.1° ਹਨ। ਛੜ 2 m ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਹੈ। ਛੜ ਦੇ ਖੱਬੇ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਇਸ ਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਦੂਰੀ d ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ **7.39**

7.9 ਇੱਕ ਕਾਰ ਦਾ ਭਾਰ 1800 kg ਹੈ। ਇਸਦੀਆਂ ਅਗਲੀਆਂ ਅਤੇ ਪਿਛਲੀਆਂ ਧੁਰੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ 1.8 m ਹੈ। ਇਸਦਾ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ, ਅਗਲੀ ਧੁਰੀ ਤੋਂ 1.05m ਪਿੱਛੇ ਹੈ। ਸਮਤਲ ਧਰਤੀ ਦੁਆਰਾ ਹਰੇਕ ਅਗਲੇ ਅਤੇ ਪਿਛਲੇ ਪਹੀਆਂ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਬਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

7.10 (a) ਕਿਸੇ ਗੋਲੇ ਦਾ, ਇਸਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $2MR^2/5$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ M ਗੋਲੇ ਦਾ ਪੁੰਜ ਅਤੇ R ਇਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ। ਗੋਲੇ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਸਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) M ਪੁੰਜ ਅਤੇ R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਡਿਸਕ ਦਾ ਇਸਦੇ ਕਿਸੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $MR^2/4$ ਹੈ। ਡਿਸਕ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸਦੀ ਕੋਰ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਧੁਰੀ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਸ ਚਕਲੀ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.11 ਬਰਾਬਰ ਪੁੰਜ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਖੋਖਲੇ ਵੇਲਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਠੋਸ ਗੋਲੇ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਮਿਕਦਾਰ ਦੇ ਟਾਰਕ ਲਗਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਵੇਲਣ ਆਪਣੀ ਆਮ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰੀ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਗੋਲਾ ਆਪਣੇ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਧੁਰੀ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ। ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੇਂ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਵੱਧ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਵੇਗਾ।

7.12 20 *kg* ਪੁੰਜ ਦਾ ਕੋਈ ਠੋਸ ਸਿਲੰਡਰ ਆਪਣੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ 100 rad s^{-1} ਦੀ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.25 m ਹੈ। ਸਿਲੰਡਰ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਕੀ ਹੈ ? ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਆਪਣੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਦਾ ਪਰਿਮਾਣ ਕੀ ਹੈ ?

7.13 (a) ਕੋਈ ਬੱਚਾ ਕਿਸੇ ਘੁੰਮਣ ਯੋਗ ਮੇਜ਼ ਤੇ ਆਪਣੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਬਾਹਾਂ ਬਾਹਰ ਵੱਲ ਖਿਲਾਰ ਕੇ ਖੜ੍ਹਾ ਹੈ। ਘੁੰਮਣਯੋਗ ਮੇਜ਼ ਨੂੰ 40 rev/min ਦੀ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਘੁੰਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇ ਬੱਚਾ ਆਪਣੇ ਹੱਥਾਂ ਨੂੰ ਵਾਪਸ ਇਕੱਠਾ ਕਰਕੇ ਆਪਣਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਆਪਣੇ ਅਰੰਭਿਕ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦਾ 2/5 ਗੁਣਾ ਕਰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ? ਇਹ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਮੇਜ਼ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਗਤੀ ਰਗੜ ਰਹਿਤ ਹੈ।

(b) ਇਹ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਬੱਚੇ ਦੀ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਨਵੀਂ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਉਸਦੀ ਅਰੰਭਿਕ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਇਸ ਵਾਧੇ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਵੇਂ ਕਰੋਗੇ ?

7.14 3 kg ਪੁੰਜ ਅਤੇ 40 cm ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਖੋਖਲੇ ਸਿਲੰਡਰ ਤੇ ਕੋਈ ਨਿਗੁਣੇ ਪੁੰਜ (negligible mass) ਦੀ ਰੱਸੀ ਲਪੇਟੀ ਗਈ ਹੈ। ਜੇ ਰੱਸੀ ਨੂੰ 30 N ਬਲ ਨਾਲ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਿਲੰਡਰ ਦਾ ਕੋਣੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਰੱਸੀ ਦਾ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਵੇਗ ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਇਸ ਕੇਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਫਿਸਲਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

7.15 ਕਿਸੇ ਰੋਟਰ ਦੀ 200 rad s^{-1} ਦੀ ਇੱਕ-ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਬਣਾਏ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਇੰਜਣ ਦੁਆਰਾ 180 N m ਦਾ ਟਾਰਕ ਲਗਾਉਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੰਜਣ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸ਼ਕਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਨੋਟ : ਰਗੜ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਰਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਹੋਣ ਤੇ ਇਹ ਆਪਣੇ ਆਪ ਹੀ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਟਾਰਕ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ। ਵਿਵਹਾਰ ਵਿੱਚ ਲਗਾਏ ਗਏ ਟਾਰਕ ਦੀ ਲੋੜ ਰਗੜ ਦੁਆਰਾ ਪੈਦਾ ਕੀਤੇ ਟਾਰਕ ਨੂੰ ਖ਼ਤਮ ਕਰਨ ਲਈ ਹੁੰਦੀ ਹੈ)। ਇਹ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੰਜਣ ਦੀ ਸਮੱਰਥਾ 100% ਹੈ।

7.16 R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਸਮਅੰਗੀ ਡਿਸਕ ਵਿੱਚੋਂ $R/2$ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਕਾਰ ਦਾ ਭਾਗ ਕੱਟ ਕੇ ਕੱਢ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਸੁਰਾਖ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਡਿਸਕ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ $R/2$ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਕੱਟੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਬਾਦ ਬਚੀ ਡਿਸਕ ਦੇ ਗੁਰੂਤਾ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.17 ਇੱਕ ਮੀਟਰ ਛੜ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਨਾਈਫ਼ ਐਜ਼ (knife edge) ਰੱਖਣ ਤੇ ਇਹ ਸੰਤੁਲਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਪੁੰਜ 5 g ਹੈ, 12.0 cm ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ ਇੱਕ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਰੱਖੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਛੜ ਚਿੰਨ੍ਹ 45.0 cm ਤੇ ਸੰਤੁਲਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਮੀਟਰ ਛੜ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੀ ਹੈ ?

7.18 ਇੱਕ ਠੋਸ ਗੋਲਾ, ਵੱਖ-ਵੱਖ ਢਲਾਣ ਵਾਲੇ ਦੋ ਢਾਲੂ ਤਲਾਂ ਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀ ਉੱਚਾਈ ਤੋਂ ਲੁੜਕਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ (a) ਕੀ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਵਾਰ ਬਰਾਬਰ ਚਾਲ ਨਾਲ ਤਲੀ ਤੇ ਪੁੱਜੇਗਾ ? (b) ਕੀ ਉਸਨੂੰ ਇੱਕ ਤਲ ਤੇ ਲੁੜਕਾਉਣ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲਗੇਗਾ ? (c) ਜੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕਿਸ ਤੇ ਅਤੇ ਕਿਉਂ ?

7.19 2m ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਇੱਕ ਛੱਲੇ (ਰਿੰਗ) ਦਾ ਭਾਰ 100 kg ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਖਿਤਜੀ ਫਰਸ਼ ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ (rolling motion) ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਚਾਲ 20 cm/s ਹੋਵੇ। ਇਸਨੂੰ ਰੋਕਣ ਲਈ ਕਿਨ੍ਹਾਂ ਕਾਰਜ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ।

7.20 ਆਕਸੀਜਨ ਅਣੂ ਦਾ ਪੁੰਜ 5.30×10^{-26} kg ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਰਮਾਣੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ 1.94×10^{-46} kg m^2 ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਗੈਸ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਅਣੂਆਂ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ 500 m/s ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਘੁੰਮਣ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ, ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦੀ ਦੋ ਤਿਹਾਈ ਹੈ ਅਣੂ ਦਾ ਔਸਤ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7.21 ਇੱਕ ਵੇਲਣ 30° ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੇ ਢਾਲੂ ਤਲ (inclined plane) ਤੇ ਲੁੜਕਦਾ ਹੋਇਆ ਉੱਪਰ ਚੜ੍ਹਦਾ ਹੈ। ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੀ ਤਲੀ ਵਿੱਚ ਵੇਲਣ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਚਾਲ 5 m/s ਹੈ।

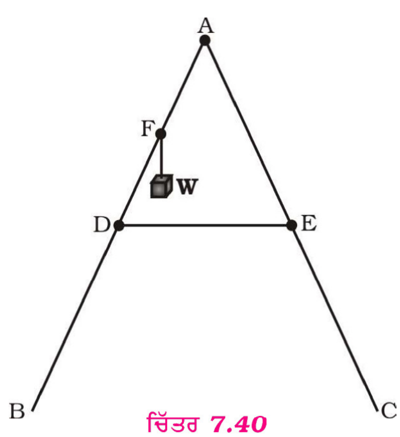
(a) ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੇ ਵੇਲਣ ਕਿੰਨਾ ਉੱਪਰ ਜਾਵੇਗਾ ?

(b) ਵਾਪਸ ਤਲੀ ਤੱਕ ਮੁੜਣ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਸਮਾਂ ਲਗੇਗਾ।

ਵਾਧੂ ਅਭਿਆਸ (ADDITIONAL EXERCISES)

7.22 ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 7.40 ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਖੜ੍ਹੀ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਪੌੜੀ ਦੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ BA ਅਤੇ CA ਦੀ ਲੰਬਾਈ 1.6 m ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ A ਤੇ ਕਬਜ਼ਾ ਲਗਾ ਕੇ ਜੋੜਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਿਲਕੁਲ ਵਿੱਚਕਾਰੋਂ 0.5 m ਇੱਕ ਲੰਬੀ ਰੱਸੀ DE ਨਾਲ ਬੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੌੜੀ BA ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ B ਤੋਂ 1.2 m ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ F ਨਾਲ 40 kg ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਰ ਲਟਕਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਫਰਸ਼ ਰਗੜ ਰਹਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਪੌੜੀ ਦੇ ਭਾਰ ਦੀ ਉਪੇਖਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਰੱਸੀ ਵਿੱਚ ਤਨਾਵ ਅਤੇ ਪੌੜੀ ਤੇ ਫਰਸ਼ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ($g = 9.8$ m/s^2)

(ਸੰਕੇਤ : ਪੌੜੀ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਸੰਤੁਲਨ ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।)



ਚਿੱਤਰ *7.40*

7.23 ਕੋਈ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਘੁੰਮਦੇ ਹੋਏ ਪਲੇਟ ਫਾਰਮ ਤੇ ਖੜ੍ਹਾ ਹੈ ਉਸਨੇ ਆਪਣੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਬਾਹਾਂ ਫੈਲਾ ਰਖੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ 5 kg ਭਾਰ ਫੜ ਕੇ ਰੱਖਿਆ ਹੈ। ਪਲੇਟਫਾਰਮ ਦੀ ਕੋਣੀ ਚਾਲ 30 rev/min ਹੈ। ਫਿਰ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਬਾਹਾਂ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਸਰੀਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਲੈ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਭਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 90 cm ਤੋਂ ਬਦਲ ਕੇ 20 cm ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪਲੇਟ ਫਾਰਮ ਸਹਿਤ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ ਦਾ ਮਾਨ, 7.6 kg m^2 ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(a) ਉਸਦਾ ਨਵਾਂ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਕੀ ਹੈ ? (ਰਗੜ ਦੀ ਉਪੇਖਿਆ ਕਰੋ।)

(b) ਕੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਸੁਰੱਖਿਅਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ? ਜੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਾ ਸ੍ਰੋਤ ਕੀ ਹੈ ?

7.24 10 g ਪੁੰਜ ਅਤੇ 500 m/s ਚਾਲ ਵਾਲੀ ਬੰਦੂਕ ਦੀ ਗੋਲੀ ਇੱਕ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਦੇ ਠੀਕ ਕੇਂਦਰ ਨਾਲ ਟਕਰਾ ਕੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰ ਹੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਦਰਵਾਜ਼ਾ 1.0 m ਚੌੜਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਪੁੰਜ 12 kg ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਕਬਜੇ ਲੱਗੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਦੇ ਇੱਕ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਹ ਲਗਭਗ ਬਿਨਾਂ ਰਗੜ ਦੇ ਘੁੰਮ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਗੋਲੀ ਦੇ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਵਿੱਚ ਹੀ ਰਹਿ ਜਾਣ ਦੇ ਠੀਕ ਬਾਦ ਇਸਦਾ ਕੋਣੀ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਸੰਕੇਤ : ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਖੜ੍ਹੇਦਾਅ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਦਰਵਾਜ਼ੇ ਦਾ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ $ML^2/3$ ਹੈ)

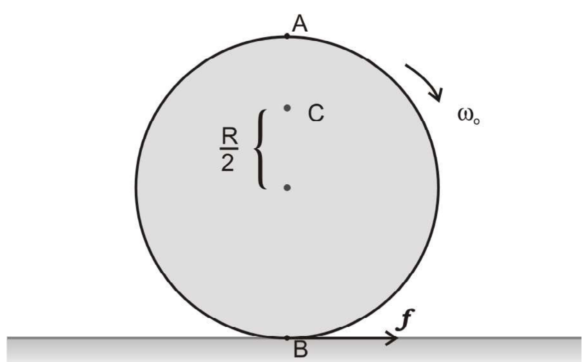
7.25 ਦੋ ਡਿਸਕਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਆਪਣੇ-ਆਪਣੇ ਧੁਰਿਆਂ (ਡਿਸਕ ਦੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਡਿਸਕ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹੋਏ) ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਜੜ੍ਹਤਾ ਮੋਮੰਟ I_1 ਅਤੇ I_2 ਹਨ ਅਤੇ ਜੋ ω_1 ਅਤੇ ω_2 ਕੋਣੀ ਚਾਲਾਂ ਨਾਲ ਘੁੰਮ ਰਹੀਆਂ ਹਨ, ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘੁੰਮਣ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਸੰਪਾਤੀ (coincide) ਕਰਕੇ ਆਹਮਣੇ-ਸਾਹਮਣੇ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (a) ਇਸ ਦੇ ਡਿਸਕਾਂ ਵਾਲੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ਕੀ ਹੈ ? (b) ਇਹ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਇਸ ਸੰਯੋਜਿਤ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਦੋਵੇਂ ਡਿਸਕਾਂ ਦੀ ਅਰੰਭਿਕ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਊਰਜਾ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਇਸ ਹਾਣੀ ਦੀ ਤੁਸੀਂ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਵੇਂ ਕਰੋਗੇ ? $\omega_1 \neq \omega_2$ ਲਓ।

7.26 (a) ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਕਰੋ। (ਸੰਕੇਤ : x–y ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਦੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਵਰਗ (x^2+y^2) ਹੈ

(b) ਸਮਾਂਤਰ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਕਰੋ (ਸੰਕੇਤ : ਜੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਲੈ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$

7.27 ਸੂਤਰ $v^2 = \dfrac{2gh}{\left(1 + k^2/R^2\right)}$ ਨੂੰ ਗਤੀਕੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ (ਬਲਾਂ ਅਤੇ ਟਾਰਕਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਕੇ) ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਜਿੱਥੇ v ਲੁੜਕਦੇ ਪਿੰਡ (ਜਿਵੇਂ- ਰਿੰਗ, ਡਿਸਕ, ਸਿਲੰਡਰ, ਗੋਲਾ) ਦੀ ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੀ ਤਲੀ ਤੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਗਤੀ ਹੈ।) ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੀ ਉਚਾਈ h ਹੈ। k ਪਰਿਚਕਰਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਪਿੰਡ ਆਪਣੀ ਸਮਮਿਤ ਧੁਰੇ ਤੇ ਘੁੰਮਦਾ ਹੈ। ਪਿੰਡ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ R ਹੈ। ਪਿੰਡ ਤਲ ਦੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਵਿਰਾਮ ਅਵਸਥਾ ਵਿੱਚੋਂ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7.28 ਇੱਕ ਚਕਲੀ (disc) ਜੋ ਕਿ ਆਪਣੇ ਧੁਰੇ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਕੋਣੀ ਚਾਲ ω_o ਨਾਲ ਘੁੰਮ ਰਹੀ ਹੈ ਨੂੰ ਬਿਲਕੁਲ ਹੌਲ਼ੇ ਜਿਹੇ (ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰੀ ਧੱਕੇ ਦੇ) ਇੱਕ ਬਿਲਕੁਲ ਰਗੜ ਰਹਿਤ ਮੇਜ਼ ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚਕਲੀ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ R ਹੈ। ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਜੋ ਕਿ ਚਕਲੀ ਤੇ ਹਨ ਦਾ ਰੇਖੀ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ **7.41**

7.29 ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.41 ਵਿੱਚ ਡਿਸਕ ਨੂੰ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਰੁੜਨ ਲਈ ਰਗੜ ਕਿਉਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

(a) ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਪੂਰਨ ਤੌਰ ’ਤੇ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਵੇ ਬਿੰਦੂ B ਤੇ ਰਗੜ ਬਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੱਸੋ, ਰਗੜ ਕਾਰਨ ਲੱਗੇ ਟਾਰਕ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(b) ਜਦੋਂ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੌਟਨਿਕ ਗਤੀ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰਗੜ ਬਲ ਵੀ ਦੱਸੋ।

7.30 ਇੱਕ ਠੋਸ ਡਿਸਕ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਿੰਗ, ਦੋਵਾਂ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ ਨੂੰ ਇੱਕ ਖਿਤਜੀ ਮੇਜ਼ ਤੇ ਇੱਕੋ ਤੱਤਕਾਲ ਸਮੇਂ ਤੇ ਰਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਦੋਵਾਂ ਦੀ ਅਰੰਭਿਕ ਕੋਣੀ ਚਾਲ 10π rad s^{-1} ਹੈ। ਕਿਹੜਾ ਪਿੰਡ ਪਹਿਲਾਂ ਰੁੜਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੇਗਾ ? ਗਤੀਕੀ ਰਗੜ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $\mu_k = 0.2$ ਹੈ।

7.31 ਇੱਕ ਸਿਲੰਡਰ ਜਿਸਦਾ ਪੁੰਜ 10 kg ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 15 cm ਹੈ, ਇੱਕ ਢਾਲੂ ਤਲ, ਜਿਸ ਦਾ ਕੋਣ 30° ਹੈ, ਤੇ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਸਥਿਤਿਕ ਰਗੜ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $\mu_s = 0.25$ ਹੈ।

(a) ਸਿਲੰਡਰ ਤੇ ਕਿੰਨਾਂ ਰਗੜ ਬਲ ਲਗ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

(b) ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਰਗੜ ਬਲ ਦੇ ਵਿਰੁਧ ਕਿੰਨਾਂ ਕਾਰਜ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ?

(c) ਜੇ ਢਾਲੂ ਤਲ ਦੇ ਕੋਣ θ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ θ ਦੇ ਕਿਸ ਮੂਲ ਤੇ ਸਿਲੰਡਰ ਫਿਸਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰ ਦੇਵੇਗਾ ਅਤੇ ਸ਼ੁੱਧ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ?

7.32 ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਧਿਆਨਪੂਰਵਕ ਪੜ੍ਹੋ ਅਤੇ ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ ਕਿ ਠੀਕ ਜਾਂ ਗਲਤ ਕਿਉਂ ਹਨ ?

(a) ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੌਰਾਨ, ਰਗੜ ਬਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
(b) ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੌਰਾਨ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਤਤਕਾਲ ਚਾਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ।
(c) ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਦੌਰਾਨ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਤਤਕਾਲ ਪ੍ਰਵੇਗ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ।
(d) ਸ਼ੁੱਧ ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਲਈ, ਰਗੜ ਵਿਰੁੱਧ ਕਾਰਜ ਜ਼ੀਰੋ ਹੈ।
(e) ਇੱਕ ਬਿਲਕੁਲ ਰਗੜ ਰਹਿਤ ਢਾਲੂ ਤਲ ਤੋਂ ਇੱਕ ਪਹੀਆ ਕੇਵਲ ਫਿਸਲ ਸਕਦਾ ਹੈ। (ਲੋਟਨਿਕ ਗਤੀ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ)

7.33 ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਗਤੀ ਨੂੰ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਗਤੀ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਕਰਨਾ –

(a) ਦਰਸਾਓ $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_i + m_i\mathbf{V}$ ਜਿੱਥੇ $\mathbf{p}_i$ i ਵੇਂ ਕਣ (ਜਿਸ ਦਾ ਪੁੰਜ m_i ਹੈ) ਦਾ ਸੰਵੇਗ ਹੈ ਅਤੇ $\mathbf{p}'_i = m_i\mathbf{v}'_i$ ਨੋਟ ਕਰੋ $\mathbf{v}'_i$ i ਵੇਂ ਕਣ ਦਾ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵੇਗ ਹੈ। ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\sum \mathbf{p}'_i = 0$

(b) ਦਰਸਾਓ $K = K' + \frac{1}{2}MV^2$

ਜਿੱਥੇ K ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕਣਾਂ ਦਾ ਵੇਗ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਿਸਟਮ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ K' ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸਿਸਟਮ ਅਰਥਾਤ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਗਤੀ ਦੇ ਸਥਾਨਾਂਤਰਨ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਤਿਜ ਊਰਜਾ $MV^2/2$ ਹੈ

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸੈਕਸ਼ਨ 7.14 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

(c) ਦਰਸਾਓ $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{R} \times M\mathbf{V}$ ਜਿਥੇ $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੁਆਲੇ ਸਿਸਟਮ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵੇਗ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਲਏ ਗਏ ਹਨ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{R}$; ਬਾਕੀ ਨੋਟੇਸ਼ਨਾਂ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਵਰਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ $\mathbf{L}'$ ਅਤੇ $M\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਅਤੇ ਕਣਾਂ ਦੇ ਸਿਸਟਮ ਦੇ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦਾ ਕੋਣੀ ਸੰਵੇਗ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(d) ਦਰਸਾਓ $\dfrac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum \mathbf{r}'_i \times \dfrac{d\mathbf{p}'}{dt}$

ਅਤੇ ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਓ

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \boldsymbol{\tau}'_{ext}$$

ਜਿੱਥੇ $\boldsymbol{\tau}'_{ext}$ ਬਾਹਰਲੇ ਟਾਰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੇ ਦੁਆਲ਼ੇ ਸਿਸਟਮ ਤੇ ਲੱਗ ਰਹੇ ਹਨ (ਸੰਕੇਤ : ਪੁੰਜ ਕੇਂਦਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਤੇ ਨਿਊਟਨ ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਓ ਕੋਈ ਦੋ ਕਣਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਗ ਰਹੇ ਆਂਤਰਿਕ ਬਲਾਂ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕਣਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।)

ਪਲੂਟੋ - ਇੱਕ ਬੌਣਾ ਗ੍ਰਹਿ

Pluto - A Dwarf Planet

ਇੰਟਰਨੈਸ਼ਨਲ ਐਸਟਰਾਨਾਮੀਕਲ ਯੂਨੀਅਨ (IAU) ਦਾ IAU 2006 ਆਮ ਇਜਲਾਸ ਚੈਕ ਰਿਪਬਲਿਕ ਦੇ ਪਰੈਗ ਵਿੱਖੇ 24 ਅਗਸਤ 2006 ਨੂੰ ਹੋਇਆ, ਜਿੱਥੇ ਸੌਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਗ੍ਰਹਿਆਂ ਦੀ ਨਵੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਆਪਣਾਇਆ ਗਿਆ। ਇਸ ਅਨੁਸਾਰ ਪਲੂਟੋ ਹੁਣ ਗ੍ਰਹਿ ਨਹੀਂ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਸੌਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਅੱਠ ਗ੍ਰਹਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ : ਬੁੱਧ, ਸ਼ੁੱਕਰ, ਧਰਤੀ, ਮੰਗਲ, ਬ੍ਰਿਹਸਪਤੀ, ਸ਼ਨੀ, ਯੂਰੇਨਸ ਅਤੇ ਨੇਪਚੂਨ। (IAU) ਦੇ ਦਸਤੂਰ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਡੀ ਸੌਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ 'ਗ੍ਰਹਿ' ਅਤੇ ਹੋਰ ਪਿੰਡਾਂ ਨੂੰ, ਉਪਗ੍ਰਹਿਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ, ਖਗੋਲੀ ਪਿੰਡਾਂ ਦੇ ਤਿੰਨ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖਰੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ –

1. 'ਗ੍ਰਹਿ' ਇੱਕ ਖਗੋਲੀ ਪਿੰਡ ਹੈ (a) ਜੋ ਸੂਰਜ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇਕ ਆਰਬਿਟ (orbit) ਵਿੱਚ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੈ। (b) ਜਿਸਦਾ ਇੰਨਾਂ ਪੁੰਜ ਹੋਵੇ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੀ ਗੁਰੂਤਾ ਨੂੰ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਬਲਾਂ ਤੇ ਕਾਬੂ ਪਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਆਕਾਰ ਗੋਲਾਕਾਰ ਹੋ ਜਾਵੇ (hydrostatic equilibrium shape) ਅਤੇ (c) ਆਪਣੇ ਆਰਬਿਟ ਦੇ ਆਸ-ਪਾਸ ਸਫ਼ਾਈ ਰੱਖੇ।
2. ਇੱਕ dwarf planet ਬੌਣਾ ਗ੍ਰਹਿ ਅਜਿਹਾ ਖਗੋਲੀ ਪਿੰਡ ਹੈ –

   (a) ਜੋ ਸੂਰਜ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਇੱਕ ਆਰਬਿਟ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮ ਰਿਹਾ ਹੋਵੇ। (b) ਜਿਸਦਾ ਇੰਨਾਂ ਪੁੰਜ ਹੋਵੇ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੀ ਗੁਰੂਤਾ ਨੂੰ ਦ੍ਰਿੜ ਪਿੰਡ ਬਲਾਂ ਤੇ ਕਾਬੂ ਪਾਉਣ ਲਈ ਵਰਤੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਗੋਲਾਕਾਰ ਹੋ ਜਾਵੇ (hydrostatic equilibrium shape) ਅਤੇ (c) ਆਪਣੇ ਆਰਬਿਟ ਦੇ ਆਸ ਪਾਸ ਸਫ਼ਾਈ ਨਾ ਰੱਖ ਸਕੇ। (d) ਜੋ ਉਪਗ੍ਰਹਿ ਨਾ ਹੋਵੇ।
3. ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ 'ਹੋਰ ਪਿੰਡ' (other objects), ਉਪਗ੍ਰਹਿਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ, ਸੂਰਜ ਦੇ ਆਲ਼ੇ-ਦੁਆਲ਼ੇ ਘੁੰਮਦੇ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹਿਕ ਤੌਰ ਤੇ 'small solar-system bodies' ਕਿਹਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਸੌਰ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਅੱਠ ਗ੍ਰਹਿਆਂ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਲੂਟੋ ਦੇ ਆਰਬਿਟ 'ਹੋਰ ਪਿੰਡਾਂ' ਅਤੇ ਨੈਪਚੂਨ ਦੇ ਆਰਬਿਟਾਂ ਨਾਲ ਓਵਰਲੈਪ ਕਰਦਾ ਹੈ। 'ਹੋਰ ਪਿੰਡਾਂ' ਵਿੱਚ ਹੁਣ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਐਸਟਰਾਇਡ (asteroids) ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਟਰਾਂਸ ਨੇਪਚੂਨੀਅਨ (trans-neptunian) ਪਿੰਡ (TNOS), ਪੂਛੱਲ ਤਾਰੇ (comets) ਅਤੇ ਹੋਰ ਛੋਟੇ ਪਿੰਡ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਪਲੂਟੋ ਇਕ 'ਬੌਣਾ ਗ੍ਰਹਿ' ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਪਛਾਣ ਨਵੇਂ ਵਰਗ ਟਰਾਂਸ ਨੇਪਚੂਨੀਅਨ ਪਿੰਡ ਦੇ ਪ੍ਰੋਟੋਟਾਈਪ (prototype) ਵਜੋਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਪਰਿਮਾਣੀ ਬਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ।