अध्याय 2

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन (Inverse Trigonometric Functions)

❖*Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things— FELIX KLEIN* ❖

2.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 1 में, हम पढ़ चुके हैं कि किसी फलन f का प्रतीक f^{-1} द्वारा निरूपित प्रतिलोम (Inverse) फलन का अस्तित्व केवल तभी है यदि f एकैकी तथा आच्छादक हो। बहुत से फलन ऐसे हैं जो एकैकी, आच्छादक या दोनों ही नहीं हैं, इसलिए हम उनके प्रतिलोमों की बात नहीं कर सकते हैं। कक्षा XI में, हम पढ़ चुके हैं कि त्रिकोणमितीय फलन अपने स्वाभाविक (सामान्य) प्रांत और परिसर में एकैकी तथा आच्छादक नहीं होते हैं और इसलिए उनके प्रतिलोमों का अस्तित्व नहीं होता है। इस अध्याय में हम त्रिकोणमितीय फलनों के प्रांतों तथा परिसरों पर लगने वाले उन प्रतिबंधों (Restrictions) का अध्ययन करेंगे, जिनसे उनके प्रतिलोमों का अस्तित्व सुनिश्चित होता है और आलेखों द्वारा प्रतिलोमों का अवलोकन करेंगे। इसके अतिरिक्त इन प्रतिलोमों के कुछ प्रारंभिक गुणधर्म (Properties) पर भी विचार करेंगे।

Arya Bhatta
(476-550 A. D.)

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन, कलन (Calculus) में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं, क्योंकि उनकी सहायता से अनेक समाकल (Integrals) परिभाषित होते हैं। प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों की संकल्पना का प्रयोग विज्ञान तथा अभियांत्रिकी (Engineering) में भी होता है।

2.2 आधारभूत संकल्पनाएँ (Basic Concepts)

कक्षा XI, में, हम त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन कर चुके हैं, जो निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित हैं

sine फलन, अर्थात्, $\sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

cosine फलन, अर्थात्, $\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1]$

tangent फलन, अर्थात्, $\tan : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

cotangent फलन, अर्थात्, $\cot : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

secant फलन, अर्थात्, $\sec : \mathbf{R} - \{ x : x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

cosecant फलन, अर्थात्, $\operatorname{cosec} : \mathbf{R} - \{ x : x = n\pi, \ n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R} - (-1, 1)$

हम अध्याय 1 में यह भी सीख चुके हैं कि यदि $f : X \to Y$ इस प्रकार है कि $f(x) = y$ एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो तो हम एक अद्वितीय फलन $g : Y \to X$ इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं कि $g(y) = x$, जहाँ $x \in X$ तथा $y = f(x), y \in Y$ है। यहाँ g का प्रांत $= f$ का परिसर और g का परिसर $= f$ का प्रांत। फलन g को फलन f का प्रतिलोम कहते हैं और इसे f^{-1} द्वारा निरूपित करते हैं। साथ ही g भी एकैकी तथा आच्छादक होता है और g का प्रतिलोम फलन f होता हैं अतः $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$ इसके साथ ही

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$$

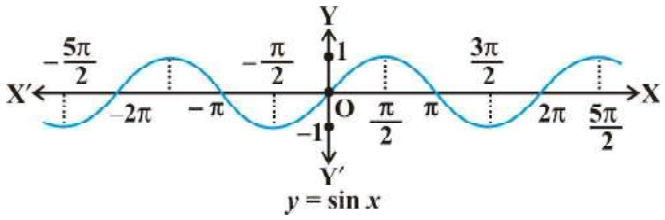
और $$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$$

क्योंकि sine फलन का प्रांत वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा इसका परिसर संवृत अंतराल $[-1, 1]$ है। यदि हम इसके प्रांत को $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ में सीमित (प्रतिबंधित) कर दें, तो यह परिसर $[-1, 1]$ वाला, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। वास्तव में, sine फलन, अंतरालों $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ इत्यादि में, से किसी में भी सीमित होने से, परिसर $[-1, 1]$ वाला, एक एकैकी तथा आच्छादक फलन हो जाता है। अतः हम इनमें से प्रत्येक अंतराल में, sine फलन के प्रतिलोम फलन को $\sin^{-1}$ (arc sine function) द्वारा निरूपित करते हैं। अतः $\sin^{-1}$ एक फलन है, जिसका प्रांत $[-1, 1]$ है, और जिसका परिसर $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ या $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ इत्यादि में से कोई भी अंतराल हो सकता है। इस प्रकार के प्रत्येक अंतराल के संगत हमें फलन $\sin^{-1}$ की एक शाखा (Branch) प्राप्त होती है। वह शाखा, जिसका परिसर $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ है, **मुख्य शाखा** (**मुख्य मान शाखा**) कहलाती है, जब कि परिसर के रूप में अन्य अंतरालों से $\sin^{-1}$ की भिन्न-भिन्न शाखाएँ मिलती हैं। जब हम फलन $\sin^{-1}$ का उल्लेख करते हैं, तब हम इसे प्रांत $[-1, 1]$ तथा परिसर $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ वाला फलन समझते हैं। इसे हम $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ लिखते हैं।

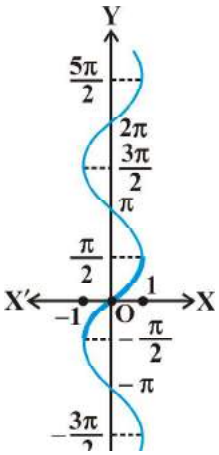
प्रतिलोम फलन की परिभाषा द्वारा, यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sin(\sin^{-1} x) = x$, यदि $-1 \le x \le 1$ तथा $\sin^{-1}(\sin x) = x$ यदि $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ है। दूसरे शब्दों में, यदि $y = \sin^{-1} x$ हो तो $\sin y = x$ होता है।

टिप्पणी

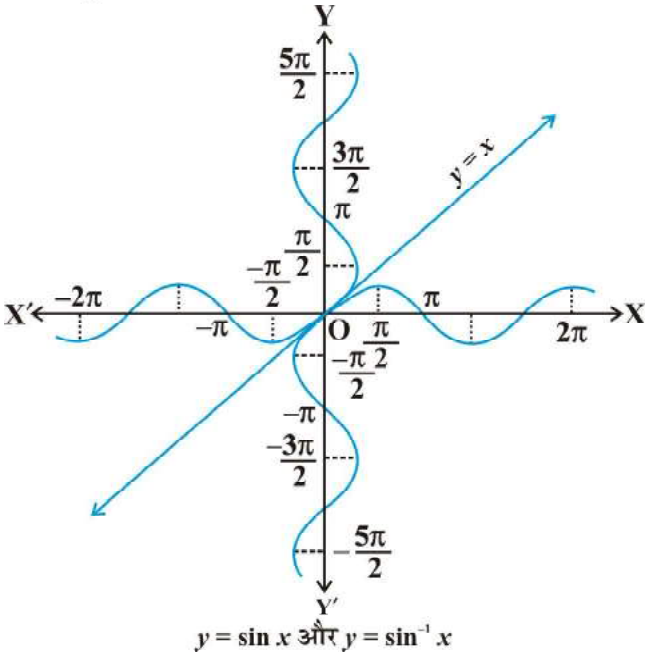
(i) हमें अध्याय 1 से ज्ञात है कि, यदि $y = f(x)$ एक व्युत्क्रमणीय फलन है, तो $x = f^{-1}(y)$ होता है। अतः मूल फलन sin के आलेख में x तथा y अक्षों का परस्पर विनिमय करके फलन $\sin^{-1}$ का आलेख प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात्, यदि (a, b), sin फलन के आलेख का एक बिंदु है, तो (b, a), sin फलन के प्रतिलोम फलन का संगत बिंदु होता है। अतः फलन



आकृति 2.1(i)



आकृति 2.1(ii)



आकृति 2.1(iii)

ERROR: undefined
OFFENDING COMMAND: ‘~

STACK: