अध्याय 6

अवकलज के अनुप्रयोग (Application of Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature — WHITEHEAD* ❖

6.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 5 में हमने संयुक्त फलनों, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों, अस्पष्ट फलनों, चरघातांकीय फलनों और लघुघातांकीय फलनों का अवकलज ज्ञात करना सीखा है। प्रस्तुत अध्याय में, हम गणित की विभिन्न शाखाओं में अवकलज के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे यथा इंजिनियरिंग, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान और कई दूसरे क्षेत्र। उदाहरण के लिए हम सीखेंगे कि किस प्रकार अवकलज का उपयोग (i) राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में, (ii) किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब की समीकरण ज्ञात करने में, (iii) एक फलन के आलेख पर वर्तन बिंदु ज्ञात करने में, जो हमें उन बिंदुओं को ज्ञात करने में सहायक होता है जिन पर फलन का अधिकतम या न्यूनतम मान होता है। हम उन अंतरालों को ज्ञात करने में भी अवकलज का उपयोग करेंगे, जिनमें एक फलन वर्धमान या ह्रासमान होता है। अंततः हम कुछ राशियों के सन्निकट मान प्राप्त करने में अवकलज प्रयुक्त करेंगे।

6.2 राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of Change of Quantities)

पुनः स्मरण कीजिए कि अवकलज $\frac{ds}{dt}$ से हमारा तात्पर्य समय अंतराल t के सापेक्ष दूरी s के परिवर्तन की दर से है। इसी प्रकार, यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$ को संतुष्ट करते हुए परिवर्तित होती है तो $\frac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$), x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है और $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर) x के सापेक्ष y की परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इसके अतिरिक्त, यदि दो राशियाँ x और y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $x = f(t)$ और $y = g(t)$ है तब शृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ यदि } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ प्राप्त होता है।}$$

इस प्रकार, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर का परिकलन t के सापेक्ष y और x के परिवर्तन की दर का प्रयोग करके किया जा सकता है ।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जब $r = 5$ cm है।

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए, r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ से प्राप्त है। जब $r = 5$ cm तो $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ है। अतः वृत्त का क्षेत्रफल 10π cm²/cm की दर से बदल रहा है।

उदाहरण 2 एक घन का आयतन 9 cm³/s की दर से बढ़ रहा है। यदि इसके कोर की लंबायीं 10 cm है तो इसके पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है।

हल मान लीजिए कि घन की एक कोर की लंबायीं x cm है। घन का आयतन V तथा घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल S है। तब, $V = x^3$ और $S = 6x^2$, जहाँ x समय t का फलन है।

अब $$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{(दिया है)}$$

इसलिए $$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

या $$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \quad \ldots (1)$$

अब $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) के प्रयोग से)}$$

अतः, जब $$x = 10 \text{ cm}, \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

उदाहरण 3 एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है और तरंगें वृत्तों में 4 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 10 cm है, तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है?

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए समय t के सापेक्ष क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर है

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{(शृंखला नियम से)}$$

यह दिया गया है कि $\frac{dr}{dt} = 4$ cm

इसलिए जब $r = 10$ cm

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$$

अतः जब $r = 10$ cm तब वृत्त से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 80π cm²/s की दर से बढ़ रहा है।

टिप्पणी x का मान बढ़ने से यदि y का मान बढ़ता है तो $\frac{dy}{dx}$ धनात्मक होता है और x का मान बढ़ने से यदि y का मान घटता है, तो $\frac{dy}{dx}$ ऋणात्मक होता है।

उदाहरण 4 किसी आयत की लंबायीं x, 3 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x = 10$ cm और $y = 6$ cm है तब आयत के (a) परिमाप और (b) क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

हल क्योंकि समय के सापेक्ष लंबायीं x घट रही है और चौड़ाई y बढ़ रही है तो हम पाते हैं कि

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ cm/min} \quad \text{और} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ cm/min}$$

(a) आयत का परिमाप P से प्रदत्त है, अर्थात्

$$P = 2(x + y)$$

इसलिए
$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2 \text{ cm/min}$$

(b) आयत का क्षेत्रफल A से प्रदत्त है यथा

$$A = x \,.\, y$$

इसलिए $$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= -3(6) + 10(2) \text{ (क्योंकि } x = 10 \text{ cm और } y = 6 \text{ cm)}$$
$$= 2 \text{ cm}^2/\text{min}$$

उदाहरण 5 किसी वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन में कुल लागत $C(x)$ रुपये में

$$C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जब 3 इकाई उत्पादित की जाती है। जहाँ सीमांत लागत (marginal cost या MC) से हमारा अभिप्राय किसी स्तर पर उत्पादन के संपूर्ण लागत में तात्कालिक परिवर्तन की दर से है।

हल क्योंकि सीमांत लागत उत्पादन के किसी स्तर पर x इकाई के सापेक्ष संपूर्ण लागत के परिवर्तन की दर है। हम पाते हैं कि

सीमांत लागत $$MC = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

जब $x = 3$ है तब $$MC = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$$
$$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$$

अतः अभीष्ट सीमांत लागत अर्थात लागत प्रति इकाई Rs 30.02 (लगभग) है।

उदाहरण 6 किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपये में $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 5$ हो तो सीमांत आय ज्ञात कीजिए। जहाँ सीमांत आय (marginal revenue or MR) से हमारा अभिप्राय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष संपूर्ण आय के परिवर्तन की दर से है।

हल क्योंकि सीमांत आय किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष आय परिवर्तन की दर होती है। हम जानते हैं कि

सीमांत आय $$MR = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

जब $x = 5$ है तब $$MR = 6(5) + 36 = 66$$

अतः अभीष्ट सीमांत आय अर्थात आय प्रति इकाई Rs 66 है।

प्रश्नावली 6.1

1. वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि

(a) $r = 3$ cm है। (b) $r = 4$ cm है।

2. एक घन का आयतन 8 cm^3/s की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जबकि इसके किनारे की लंबायीं 12 cm है।

3. एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 3 cm/s की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 cm है।

4. एक परिवर्तनशील घन का किनारा 3 cm/s की दर से बढ़ रहा है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि किनारा 10 cm लंबा है?

5. एक स्थिर झील में एक पत्थर डाला जाता है ओर तरंगें वृत्तों में 5 cm/s की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंग की त्रिज्या 8 cm है तो उस क्षण, घिरा हुआ क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

6. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 cm/s की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि की दर क्या है जब $r = 4.9$ cm है?

7. एक आयत की लंबायीं x, 5 cm/min की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 cm/min की दर से बढ़ रही है। जब $x = 8$ cm और $y = 6$ cm हैं तब आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

8. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप द्वारा 900 cm^3 गैस प्रति सेकंड भर कर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 15 cm है।

9. एक गुब्बारा जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जब त्रिज्या 10 cm है।

10. एक 5 m लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के अनुदिश, दीवार से दूर 2 cm/s की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 m दूर है?

11. एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा हैं। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 8 गुना तीव्रता से बदल रहा है।

12. हवा के एक बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ cm/s की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 cm है?

13. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

14. एक पाइप से रेत 12 cm^3/s की दर से गिर रही है। गिरती रेत जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। रेत से बने के शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 cm है?

15. एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन से संबंध कुल लागत $C(x)$ (रुपये में)

$$C(x) = 0.007x^3 - 0.003x^2 + 15x + 4000$$

से प्रदत्त है। सीमांत लागत ज्ञात कीजिए जबकि 17 इकाइयों का उत्पादन किया गया है।

16. किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय $R(x)$ रुपयों में

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

से प्रदत्त है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जब $x = 7$ है।

प्रश्न 17 तथा 18 में सही उत्तर का चयन कीजिए:

17. एक वृत्त की त्रिज्या $r = 6$ cm पर r के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर है:

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय रुपयों में

$R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ से प्रदत्त है। जब $x = 15$ है तो सीमांत आय है:

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 वर्धमान (Increasing) और ह्रासमान (Decreasing) फलन

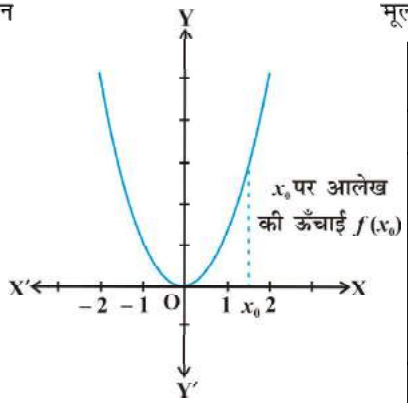
इस अनुच्छेद में हम अवकलन का प्रयोग करके यह ज्ञात करेंगे कि फलन वर्धमान है या ह्रासमान या इनमें से कोई नहीं है।

$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन f पर विचार कीजिए। इस फलन का आलेख आकृति 6.1 में दिया गया है।

मूल बिंदु के बायीं ओर का मान

x	$f(x) = x^2$
-2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
-1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

जैसे जैसे हम बाँए से दाँए ओर बढ़ते जाते हैं तो आलेख की ऊँचाई घटती जाती है।



आकृति 6.1

मूल बिंदु के दायीं ओर का मान

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

जैसे जैसे हम बाँए से दाँए ओर बढ़ते जाते है तो आलेख की ऊँचाई बढ़ती जाती है।

सर्वप्रथम मूल बिंदु के दायीं ओर के आलेख (आकृति 6.1) पर विचार करते हैं। यह देखिए कि आलेख के अनुदिश जैसे जैसे बाएँ से दाएँ ओर जाते हैं, आलेख की ऊँचाई लगातार बढ़ती जाती है। इसी कारण वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए फलन वर्धमान कहलाता है।

अब मूल बिंदु के बायीं ओर के आलेख पर विचार करते हैं। यहाँ हम देखते हैं कि जैसे जैसे आलेख के अनुदिश बाएँ से दाएँ की ओर जाते हैं, आलेख की ऊँचाई लगातार घटती जाती है। फलस्वरूप वास्तविक संख्याओं $x < 0$ के लिए फलन ह्रासमान कहलाता है।

हम अब एक अंतराल में वर्धमान या ह्रासमान फलनों की निम्नलिखित विश्लेषणात्मक परिभाषा देंगे।

परिभाषा 1 मान लीजिए वास्तविक मान फलन f के प्रांत में I एक अंतराल है। तब f

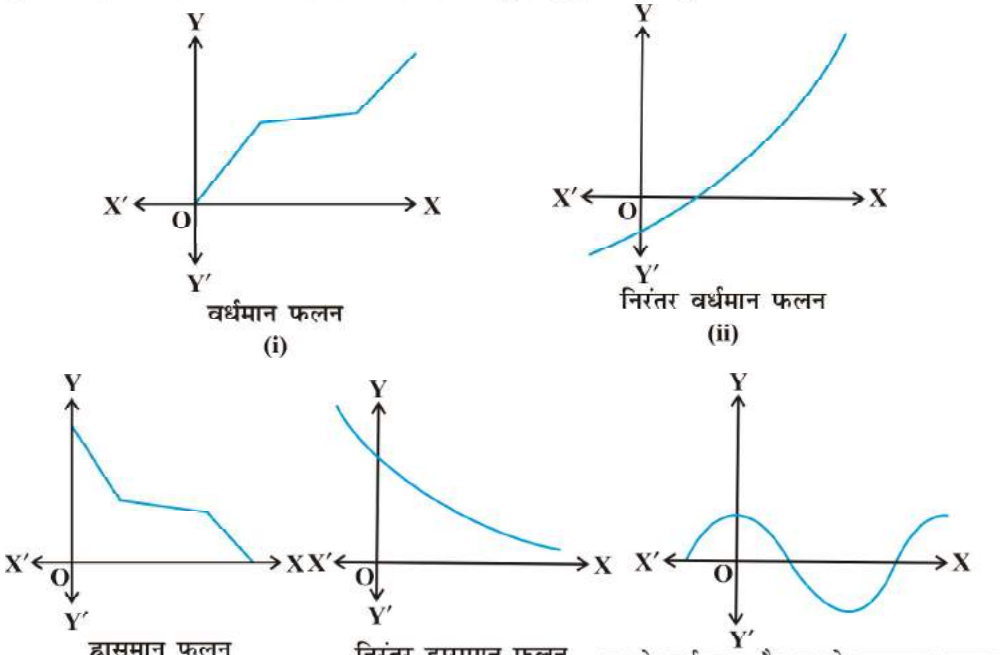
(i) अंतराल I में वर्धमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

(ii) अंतराल I में निरंतर वर्धमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

(iii) अंतराल I में ह्रासमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

(iv) अंतराल I में निरंतर ह्रासमान है, यदि I में $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ सभी $x_1, x_2 \in$ I के लिए

इस प्रकार के फलनों का आलेखीय निरूपण आकृति 6.2 में देखिए।



आकृति 6.2

अब हम एक बिंदु पर वर्धमान या ह्रासमान फलन को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 2 मान लीजिए कि वास्तविक मानों के परिभाषित फलन f के प्रांत में एक बिंदु x_0 है तब x_0 पर f वर्धमान, निरंतर वर्धमान, ह्रासमान और निरंतर ह्रासमान कहलाता है यदि x_0 को अंतर्विष्ट करने वाले एक ऐसे विवृत्त अंतराल I का अस्तित्व इस प्रकार है कि I में, f क्रमशः वर्धमान, निरंतर वर्धमान, ह्रासमान और निरंतर ह्रासमान है

आइए इस परिभाषा को वर्धमान फलन के लिए स्पष्ट करते हैं।

x_0 पर f वर्धमान कहलाता है यदि एक अंतराल $I = (x_0 - h, x_0 + h), h > 0$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि $x_1, x_2 \in I$ के लिए

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

अन्य दशाओं का इसी प्रकार से स्पष्टीकरण दिया जा सकता है।

उदाहरण 7 दिखाइए कि प्रदत्त फलन $f(x) = 7x - 3$, **R** पर एक निरंतर वर्धमान फलन है।

हल मान लीजिए **R** में x_1 और x_2 कोई दो संख्याएँ हैं, तब

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \\ &\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

इस प्रकार, परिभाषा 1 से परिणाम निकलता है कि **R** पर f एक निरंतर वर्धमान फलन है।

अब हम वर्धमान और ह्रासमान फलनों के लिए प्रथम अवकलज परीक्षण प्रस्तुत करेंगे। इस परीक्षण की उपपत्ति में अध्याय 5 में अध्ययन की गई मध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

प्रमेय 1 मान लीजिए कि f अंतराल $[a,b]$ पर संतत और विवृत्त अंतराल (a,b) पर अवकलनीय है। तब

(a) $[a,b]$ में f निरंतर वर्धमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$ है।

(b) $[a,b]$ में f निरंतर ह्रासमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) < 0$ है।

(c) $[a,b]$ में f एक अचर फलन है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) = 0$ है।

उपपत्ति (a) मान लीजिए $x_1, x_2 \in [a, b]$ इस प्रकार हैं कि $x_1 < x_2$ तब मध्य मान प्रमेय से x_1 और x_2 के मध्य एक बिंदु c का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

अर्थात् $\quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad$ (क्योंकि $f'(c) > 0$)

अर्थात् $\quad f(x_2) > f(x_1)$

इस प्रकार, हम देखते हैं, कि

$$[a,b] \text{ के सभी } x_1, x_2 \text{ के लिए } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

अतः $[a,b]$ में f एक वर्धमान फलन है।

भाग (b) और (c) की उपपत्ति इसी प्रकार है। पाठकों के लिए इसे अभ्यास हेतु छोड़ा जाता है।

टिप्पणी

(i) इस सदंर्भ में एक अन्य सामान्य प्रमेय के अनुसार यदि किसी अंतराल के अंत्य बिंदुओं के अतिरिक्त $f'(x) > 0$ जहाँ x, अंतराल में कोई अवयव है और f उस अंतराल में संतत है तब f को निरंतर वर्धमान कहते हैं। इसी प्रकार यदि किसी अंतराल के अंत्य बिंदुओं के सिवाय $f^1(x) < 0$ जहाँ x अंतराल का कोई अवयव है और f उस अंतराल में संतत है तब f को निरंतर ह्रासमान कहते हैं।

(ii) यदि कोई फलन किसी अंतराल I में निरंतर वर्धमान या निरंतर ह्रासमान है तो निश्चित रूप से f उस अंतराल I में वर्धमान या ह्रासमान है। परन्तु, इसका विपरीत कथन का सत्य होना आवश्यक नहीं है।

उदाहरण 8 दिखाइए कि प्रदत्त फलन f,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x, x \in \mathbf{R}$$

R पर निरंतर वर्धमान फलन है।

हल ध्यान दीजिए कि

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x + 4 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x-1)^2 + 1 > 0, \quad \text{सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए} \end{aligned}$$

इसलिए फलन f, **R** पर निरंतर वर्धमान है।

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि प्रदत्त फलन $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ में निरंतर ह्रासमान है

(b) $(\pi, 2\pi)$, में निरंतर वर्धमान है

(c) $(0, 2\pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

हल ध्यान दीजिए कि $f'(x) = -\sin x$

(a) चूँकि प्रत्येक $x \in (0, \pi)$ के लिए $\sin x > 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) < 0$ और इसलिए $(0, \pi)$ में f निरंतर ह्रासमान है।

(b) चूँकि प्रत्येक $x \in (\pi, 2\pi)$ के लिए $\sin x < 0$, हम पाते हैं कि $f'(x) > 0$ और इसलिए $(\pi, 2\pi)$ में f निरंतर वर्धमान है।

(c) उपरोक्त (a) और (b) से स्पष्ट है कि $(0, 2\pi)$ में f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

उदाहरण 10 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = x^2 - 4x + 6$ से प्रदत्त फलन f

(a) निरंतर वर्धमान है (b) निरंतर ह्रासमान है

अंतराल का चिह्न

```
ERROR: stackunderflow
OFFENDING COMMAND: ~

STACK:
```

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(ii) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(iii) स्वतुल्य और संक्रामक परंतु सममित नहीं

(iv) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(v) (a) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(b) स्वतुल्य, सममित और संक्रामक

(c) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

(d) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और लेकिन संक्रामक

(e) स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

3. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

5. स्वतुल्य नहीं, सममित नहीं और न तो संक्रामक

9. (i) $\{1, 5, 9\}$, (ii) $\{1\}$

12. T_1 और T_3 परस्पर संबधित हैं।

13. सभी त्रिभुजों का समुच्चय

14. सभी रेखाओं $y = 2x + c, c \in \mathbf{R}$ का समुच्चय

15. B

16. C

प्रश्नावली 1.2

1. नहीं

2. (i) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

(ii) न तो एकैकी और न ही आच्छादी

(iii) न तो एकैकी और न ही आच्छादी

(iv) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

(v) एकैकी परंतु आच्छादी नहीं

7. (i) एकैकी और आच्छादक

(ii) न तो एकैकी और न ही आच्छादक

9. नहीं

10. हाँ

11. D

12. A

प्रश्नावली 1.3

1. $gof = \{(1, 3), (3,1), (4,3)\}$

3. (i) $(gof)(x) = |5|x| - 2|$, $(fog)(x) = |5x - 2|$

(ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$

4. f का प्रतिलोम स्वयं f ही है।

5. (i) नहीं, क्योंकि f एक बहुएक फलन है। (ii) नहीं, क्योंकि g एक बहुएक फलन है।

(iii) हाँ, क्योंकि h एक एकैकी तथा आच्छादक फलन है।

6. f^{-1}, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$, $y \neq 1$ द्वारा प्रदत्त है। **7.** f^{-1}, $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ द्वारा प्रदत्त है।

11. f^{-1} दिया है। $f^{-1}(a) = 1, f^{-1}(b) = 2$ और $f^{-1}(c) = 3$ द्वारा प्रदत्त है।

13. (C) **14.** (B)

प्रश्नावली 1.4

1. (i) नहीं (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) हाँ (v) हाँ

2. (i) * द्विआधारी है परंतु न तो क्रमविनिमेय और न ही साहचर्य

(ii) * द्विआधारी और क्रमविनिमेय है परंतु साहचर्य नहीं

(iii) * द्विआधारी क्रमविनिमेय और साहचर्य हैं।

(iv) * द्विआधारी और क्रमविनिमेय है परंतु साहचर्य नहीं

(v) * द्विआधारी है परंतु न तो क्रमविनिमेय और न ही साहचर्य

(vi) * न तो द्विआधारी क्रमविनिमेय और न ही साहचर्य

3.

Λ	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

4. (i) $(2 * 3) * 4 = 1$ और $2 * (3 * 4) = 1$ (ii) हाँ (iii) 1

5. हाँ

6. (i) $5 * 7 = 35$, $20 * 16 = 80$ (ii) हाँ (iii) हाँ (iv) 1 (v) 1

7. नहीं **8.** $*$ क्रमविनिमेय और साहचर्य दोनों हैं; $*$ के सापेक्ष **N** में कोई तत्समक अवयव नहीं है।

9. (ii) , (iv), (v) क्रमविनिमेय हैं; (v) साहचर्य है। **10.** (V)

11. तत्समक अवयव का अस्तित्व नहीं है।

12. (i) असत्य (ii) सत्य **13.** B

अध्याय 1 पर विविध प्रश्नावली

1. $g(y) = \frac{y-7}{10}$ **2.** f का प्रतिलोम स्वयं f है।

3. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **8.** No **10.** $n!$

11. (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$, (ii) F^{-1} का अस्तित्व नहीं है। **12.** No

15. हाँ **16.** A **17.** B **18.** No

19. B

प्रश्नावली 2.1

1. $\frac{-\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **3.** $\frac{\pi}{6}$ **4.** $\frac{-\pi}{3}$

5. $\frac{2\pi}{3}$ **6.** $-\frac{\pi}{4}$ **7.** $\frac{\pi}{6}$ **8.** $\frac{\pi}{6}$

9. $\frac{3\pi}{4}$ **10.** $\frac{-\pi}{4}$ **11.** $\frac{3\pi}{4}$ **12.** $\frac{2\pi}{3}$

13. B **14.** B

प्रश्नावली 2.2

5. $\frac{1}{2}\tan^{-1} x$ **6.** $\frac{\pi}{2} - \sec^{-1} x$ **7.** $\frac{x}{2}$ **8.** $\frac{\pi}{4} - x$

9. $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ **10.** $3\tan^{-1}\frac{x}{a}$ **11.** $\frac{\pi}{4}$ **12.** 0

13. $\frac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **16.** $\frac{\pi}{3}$

17. $\frac{-\pi}{4}$ **18.** $\frac{17}{6}$ **19.** B **20.** D

21. B

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

1. $\frac{\pi}{6}$ **2.** $\frac{\pi}{6}$ **13.** $x = \frac{\pi}{4}$ **14.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

15. D **16.** C **17.** C

प्रश्नावली 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) $19, 35, -5, 12, \frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ or $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A+B=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B-C=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x=3, y=3$ **10.** $x=3, y=6, z=9, t=6$

11. $x=3, y=-4$ **12.** $x=2, y=4, w=3, z=1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k=1$

19. (a) Rs 15000, Rs 15000 (b) Rs 5000, Rs 25000

20. Rs 20160 **21.** A **22.** B

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

प्रश्नावली 3.4

1. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** व्युत्क्रम का अस्तित्व नहीं है।

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** व्युत्क्रम का अस्तित्व नहीं है।

15. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. D

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

6. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. $x = -1$ **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

10. (a) बाजार-I में कुल आय = Rs 46000

बाजार-II में कुल आय = Rs 53000

(b) Rs 15000, Rs 17000

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** C **14.** B **15.** C

प्रश्नावली 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1, (ii) $x^3 - x^2 + 2$

5. (i) – 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$, (ii) $x = 2$ **8.** (B)

प्रश्नावली 4.2

15. C **16.** C

प्रश्नावली 4.3

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$, (ii) $x - 3y = 0$ **5.** (D)

प्रश्नावली 4.4

1. (i) $M_{11} = 3, M_{12} = 0, \quad M_{21} = -4, M_{22} = 2, A_{11} = 3, A_{12} = 0, A_{21} = 4, A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d, M_{12} = b, \quad M_{21} = c, \quad M_{22} = a$

$A_{11} = d, \quad A_{12} = -b, A_{21} = -c, \quad A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1, M_{12} = 0, M_{13} = 0, \quad M_{21} = 0, M_{22} = 1, M_{23} = 0, M_{31} = 0, M_{32} = 0, M_{33} = 1,$

$A_{11} = 1, A_{12} = 0, \quad A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = 0, \quad A_{31} = 0, \quad A_{32} = 0, \quad A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11, M_{12} = 6, \quad M_{13} = 3, M_{21} = -4, M_{22} = 2, M_{23} = 1, \quad M_{31} = -20, M_{32} = -13, M_{33} = 5$

$A_{11} = 11, \quad A_{12} = -6, A_{13} = 3, \quad A_{21} = 4, \quad A_{22} = 2, \quad A_{23} = -1, A_{31} = -20, A_{32} = 13, A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x - y)(y - z)(z - x)$ **5.** (D)

प्रश्नावली 4.5

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = -4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

प्रश्नावली 4.6

1. संगत **2.** संगत **3.** असंगत
4. संगत **5.** असंगत **6.** संगत

7. $x = 2, y = -3$ **8.** $x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$ **9.** $x = \frac{-6}{11}, y = \frac{-19}{11}$

10. $x = -1, y = 4$ **11.** $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{-3}{2}$

12. $x = 2, y = -1, z = 1$ **13.** $x = 1, y = 2, z = -1$

14. $x = 2, y = 1, z = 3$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$

16. प्याज का मूल्य प्रति kg = Rs 5
गेहूँ का मूल्य प्रति kg = Rs 8
चावल का मूल्य प्रति kg = Rs 8

अध्याय 4 पर विविध प्रश्नावली

3. 1 **5.** $x = \frac{-a}{3}$ **7.** $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. $-2(x^3 + y^3)$ **10.** xy **16.** $x = 2, y = 3, z = 5$

17. A **18.** A **19.** D

प्रश्नावली 5.1

2. f, $x = 3$ पर संतत है।

3. (a), (b), (c) और (d) सभी संतत फलन हैं।

5. f, $x = 0$ और $x = 2$ पर संतत है; परंतु $x = 1$ पर संतत नहीं है।

6. $x = 2$ पर असंतत

7. $x = 3$ पर असंतत

8. $x = 0$ पर असंतत

9. असांतत्यत का कोई बिंदु नहीं

10. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं

11. असांतत्यत का कोई बिंदु नहीं

12. $x = 1$ पर f असंतत है।

13. $x = 1$ पर f संतत नहीं है।

14. $x = 1$ और $x = 3$ पर f संतत नहीं है।

15. केवल $x = 1$ असांतत्यता का बिंदु है।

16. संतत

17. $a = b + \frac{2}{3}$

18. λ के किसी भी मान के लिए f, $x = 0$ पर संतत है परंतु f, λ के प्रत्येक मान के लिए $x = 1$ पर संतत है।

20. $x = \pi$ पर f संतत है।

21. (a), (b) और (c) सभी संतत फलन हैं।

22. प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए cosine फलन संतत है। cosecant फलन $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है। secant फलन $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत है। cotangent फलन, $x = n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ के अतिरिक्त सभी बिंदुओं पर संतत हैं।

23. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं है।

24. हाँ, प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए f संतत है।

25. प्रत्येक $x \in \mathbf{R}$ के लिए f संतत है।

26. $k = 6$

27. $k = \frac{3}{4}$

28. $k = \frac{-2}{\pi}$

29. $k = \frac{9}{5}$

30. $a = 2, b = 1$

34. असांतत्यता का कोई बिंदु नहीं है।

प्रश्नावली 5.2

1. $2x \cos(x^2 + 5)$

2. $-\cos x \sin(\sin x)$

3. $a \cos(ax + b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a\cos(ax+b)\sec(cx+d)+c\sin(ax+b)\tan(cx+d)\sec(cx+d)$

6. $10x^4\sin x^5\cos x^5\cos x^3-3x^2\sin x^3\sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$ 8. $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

प्रश्नावली 5.3

1. $\dfrac{\cos x-2}{3}$ 2. $\dfrac{2}{\cos y-3}$ 3. $-\dfrac{a}{2by+\sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x-y}{x+2y-1}$ 5. $-\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}$ 6. $-\dfrac{(3x^2+2xy+y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)}$

7. $\dfrac{y\sin xy}{\sin 2y-x\sin xy}$ 8. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$ 9. $\dfrac{2}{1+x^2}$ 10. $\dfrac{3}{1+x^2}$

11. $\dfrac{2}{1+x^2}$ 12. $\dfrac{-2}{1+x^2}$ 13. $\dfrac{-2}{1+x^2}$ 14. $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

प्रश्नावली 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{\sin^2 x}$, $x\neq n\pi$, $n\in\mathbf{Z}$ 2. $\dfrac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}, x\in(-1,1)$

3. $3x^2e^{x^3}$ 4. $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1}e^{-x})}{1+e^{-2x}}$

5. $-e^x\tan e^x$, $e^x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in\mathbf{N}$ 6. $e^x+2x^{e^{x^2}}+3x^2e^{x^3}+4x^3e^{x^4}+5x^4e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{xe^{\sqrt{x}}}}, x>0$ 8. $\dfrac{1}{x\log x}, x>1$

9. $-\dfrac{(x\sin x\cdot\log x+\cos x)}{x(\log x)^2}, x>0$ 10. $-\left(\dfrac{1}{x}+e^x\right)\sin(\log x+e^x), x>0$

प्रश्नावली 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\,[\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x]$

2. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x\log x}-\sin x\log(\log x)\right]$

4. $x^x(1+\log x) - 2^{\sin x}\cos x\log 2$

5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2+70x+133)$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+x^{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}[1+\log x\,.\,\log(\log x)] + 2x^{\log x-1}\,.\,\log x$

8. $(\sin x)^x(x\cot x+\log\sin x)+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}[\cos x\cot x-\sin x\log\sin x]$

10. $x^{x\cos x}[\cos x\,.\,(1+\log x)-x\sin x\log x]-\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x\cos x)^x[1-x\tan x+\log(x\cos x)]+(x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x\cot x+1-\log(x\sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\frac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$

13. $\frac{y}{x}\left(\frac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

14. $\frac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

15. $\frac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1) = 120$

17. $5x^4-20x^3+45x^2-52x+11$

प्रश्नावली 5.6

1. t^2

2. $\frac{b}{a}$

3. $-4\sin t$

4. $-\frac{1}{t^2}$

5. $\dfrac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta - \sin\theta}$ **6.** $-\cot\dfrac{\theta}{2}$ **7.** $-\cot 3t$ **8.** $\tan t$

9. $\dfrac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ **10.** $\tan\theta$

प्रश्नावली 5.7

1. 2 **2.** $380\, x^{18}$ **3.** $-x\cos x - 2\sin x$

4. $-\dfrac{1}{x^2}$ **5.** $x(5 + 6\log x)$ **6.** $2e^x(5\cos 5x - 12\sin 5x)$

7. $9\, e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$ **8.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$ **10.** $-\dfrac{\sin(\log x) + \cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\operatorname{cosec}^2 y$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

1. $27(3x^2 - 9x + 5)^8(2x - 3)$ **2.** $3\sin x\cos x(\sin x - 2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$ **5.** $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\sqrt{2x+7}} + \dfrac{\cos^{-1}\frac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\dfrac{1}{2}$ **7.** $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{\log(\log x)}{x}\right], x > 1$

8. $(a\sin x - b\cos x)\sin(a\cos x + b\sin x)$

9. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x}(\cos x + \sin x)(1 + \log(\sin x - \cos x)), \sin x > \cos x$

10. $x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\dfrac{x^2-3}{x} + 2x\log x\right] + (x-3)^{x^2}\left[\dfrac{x^2}{x-3} + 2x\log(x-3)\right]$

12. $\dfrac{6}{5}\cot\dfrac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\dfrac{\sec^3 t}{at}, 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$

प्रश्नावली 6.1

1. (a) 6π cm²/cm (b) 8π cm²/cm

2. $\frac{8}{3}$ cm²/s **3.** 60π cm²/s **4.** 900 cm³/s

5. 80π cm²/s **6.** 1.4π cm/s

7. (a) –2 cm/min (b) 2 cm²/min

8. $\frac{1}{\pi}$ cm/s **9.** 400π cm³/cm **10.** $\frac{8}{3}$ cm/s

11. (4, 11) and $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π cm³/s

13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ cm/s **15.** Rs 20.967

16. Rs 208 **17.** B **18.** D

प्रश्नावली 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

5. (a) $(-\infty, -2)$ and $(3, \infty)$ (b) $(-2, 3)$

6. (a) $x < -1$ के लिए निरंतर ह्रासमान और $x > -1$ के लिए निरंतर वर्धमान

(b) $x > -\frac{3}{2}$ के लिए निरंतर ह्रासमान और $x < -\frac{3}{2}$ के लिए निरंतर वर्धमान

(c) $-2 < x < -1$ के लिए निरंतर वर्धमान और $x < -2$ और $x > -1$ के लिए निरंतर ह्रासमान

(d) $x < -\frac{9}{2}$ के लिए निरंतर वर्धमान और $x > -\frac{9}{2}$ के लिए निरंतर ह्रासमान

(e) $(1, 3)$ और $(3, \infty)$, में निरंतर वर्धमान तथा $(-\infty, -1)$ और $(-1, 1)$ में निरंतर ह्रासमान

8. $0 < x < 1$ और $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** $a = -2$ **19.** D

प्रश्नावली 6.3

1. 764 **2.** $\frac{-1}{64}$ **3.** 11 **4.** 24

5. 1 **6.** $\frac{-a}{2b}$ **7.** (3, – 20) और (–1, 12)

8. (3, 1) **9.** (2, – 9)

10. (i) $y + x + 1 = 0$ और $y + x - 3 = 0$

11. वक्र पर कोई ऐसी स्पर्श रेखा नही है जिसकी प्रवणता 2 हो।

12. $y = \frac{1}{2}$ **13.** (i) $(0, \pm 4)$ (ii) $(\pm 3, 0)$

14. (i) स्पर्श रेखा : $10x + y = 5$; अभिलंब : $x - 10y + 50 = 0$

(ii) स्पर्श रेखा : $y = 2x + 1$; अभिलंब : $x + 2y - 7 = 0$

(iii) स्पर्श रेखा : $y = 3x - 2$; अभिलंब : $x + 3y - 4 = 0$

(iv) स्पर्श रेखा : $y = 0$; अभिलंब : $x = 0$

(v) स्पर्श रेखा : $x + y - \sqrt{2} = 0$; अभिलंब $x = y$

15. (a) $y - 2x - 3 = 0$ (b) $36y + 12x - 227 = 0$

17. (0, 0), (3, 27) **18.** (0, 0), (1, 2), (–1, –2)

19. $(1, \pm 2)$ **20.** $2x + 3my - am^2(2 + 3m^2) = 0$

21. $x + 14y - 254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$

22. $ty = x + at^2$, $y = -tx + 2at + at^3$

24. $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$, $\frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

25. $48x - 24y = 23$ **26.** D **27.** A

प्रश्नावली 6.4

1. (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.8

(iv) 0.208 (v) 0.9999 (vi) 1.96875

(vii) 2.9629 (viii) 3.9961 (ix) 3.009

(x) 20.025 (xi) 0.06083 (xii) 2.984

(xiii) 3.0046 (xiv) 7.904 (xv) 2.00187

2. 28.21 **3.** – 34.995 **4.** $0.03\, x^3\ m^3$

5. $0.12\, x^2\ m^2$ **6.** $3.92\, \pi\ m^3$ **7.** $2.16\, \pi\ m^2$

8. D **9.** C

प्रश्नावली 6.5

1. (i) निम्नतम मान $= 3$ (ii) निम्नतम मान $= -2$

(iii) उच्चतम मान $= 10$ (iv) न तो निम्नतम और न तो उच्चतम मान

2. (i) निम्नतम मान $= -1$; उच्चतम मान का अस्तित्व नहीं

(ii) उच्चतम मान $= 3$; निम्नतम मान का अस्तित्व नहीं

(iii) निम्नतम मान $= 4$; उच्चतम मान $= 6$

(iv) निम्नतम मान $= 2$; उच्चतम मान $= 4$

(v) न तो निम्नतम मान और न तो उच्चतम मान

3. (i) $x = 0$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 0$

(ii) $x = 1$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= -2$

$x = -1$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= 2$

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

(iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

$x = \frac{7\pi}{4}$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= -\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= 19$

$x = 3$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 15$

(vi) $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम, स्थानीय निम्नतम मान $= 2$

(vii) $x = 0$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \frac{1}{2}$

(viii) $x = \frac{2}{3}$ पर स्थानीय उच्चतम, स्थानीय उच्चतम मान $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -8$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$

(ii) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -1$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

(iii) निरपेक्ष निम्नतम मान $= -10$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 8$

(iv) निरपेक्ष निम्नतम मान $= 3$, निरपेक्ष उच्चतम मान $= 19$

6. अधिकतम लाभ $= 113$ इकाई

7. $x = 2$ पर निम्नतम, निम्नतम मान $= -39$, $x = 0$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 25$.

8. $x = \frac{\pi}{4}$ और $\frac{5\pi}{4}$ पर **9.** उच्चतम मान $= \sqrt{2}$

10. $x = 3$ पर उच्चतम, उच्चतम मान 89; $x = -2$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 139$

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ पर उच्चतम, उच्चतम मान $= 2\pi$; $x = 0$ पर निम्नतम, निम्नतम मान $= 0$

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 cm **18.** $x = 5$ cm

21. त्रिज्या $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm और ऊँचाई $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm

22. $\frac{112}{\pi+4}$ cm, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ cm **27.** A **28.** D **29.** C

अध्याय 6 पर विविध प्रश्नावली

1. (a) 0.677 (b) 0.497

3. $b\sqrt{3}$ cm²/s **4.** $x + y - 3 = 0$

6. (i) $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

7. (i) $x < -1$ और $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **9.** Rs 1000

11. लंबाई $= \frac{20}{\pi+4}$ m, चौड़ाई $= \frac{10}{\pi+4}$ m

13. (i) $x = \frac{2}{7}$ पर स्थानीय उच्चतम (ii) $x = 2$ पर स्थानीय निम्नतम

(iii) $x = -1$ पर नत परिवर्तन बिंदु

14. निरपेक्ष उच्चतम मान $= \frac{5}{4}$, निरपेक्ष निम्नतम मान $= 1$

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **19.** A **20.** B **21.** A

22. B **23.** A **24.** A

पूरक पाठ्य सामग्री

अध्याय 5

प्रमेय 5 (पृष्ठ 190 पर शीर्षक 'प्रमेय 5' के अंतर्गत है।)

(i) चरघातांकीय फलन $f(x) = e^x$ का अवकलज

यदि $f(x) = e^x$ है, तो

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x \cdot 1 \quad [\text{क्योंकि } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1]$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ है।

(ii) लघुगणकीय फलन $f(x) = \log_e x$ का अवकलज

यदि $f(x) = \log_e x$ है, तो

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e(x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \quad [\text{क्योंकि } \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1]$$

इस प्रकार, $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$ है।

परिशिष्ट 1

गणित में उपपत्तियाँ (Proofs in Mathematics)

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry.*
Mathematical works do consist of proofs just as
poems do consist of characters
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा IX, X तथा XI में हम कथन, संयुक्त कथन, कथन के निषेधन, विलोम तथा प्रतिधनात्मक स्वरूप और अभिगृहीत, अनुमानित कथन, साध्य तथा निगमनात्मक विवेचन की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं।

यहाँ हम गणितीय साध्यों को सिद्ध (प्रमाणित) करने की विभिन्न विधियों पर विचार करेंगे।

A.1.2 उपपत्ति क्या है? (What is a Proof?)

किसी गणितीय कथन की उपपत्ति में कथनों का एक अनुक्रम अंतर्विष्ट होता है, जिसके प्रत्येक कथन के औचित्य को किसी परिभाषित पद या किसी अभिगृहीत या किसी ऐसी साध्य द्वारा प्रमाणित करते हैं, जिसे निगमनिक विधि तथा कुछ अपरिभाषित पदों द्वारा केवल स्वीकार्य तार्किक नियमों का प्रयोग करके पूर्व प्रतिपादित किया जा चुका हो।

इस प्रकार प्रत्येक उपपत्ति निगमनिक तर्कों की एक शृंखला होती है, जिनमें से प्रत्येक की अपनी परिकल्पनाएँ तथा निष्कर्ष होते हैं। अधिकतर हम किसी साध्य को उसमें दिए हुए तथ्यों से प्रत्यक्ष रीति द्वारा सिद्ध करते हैं। परंतु कभी-कभी साध्य को सीधे सिद्ध करने की अपेक्षा उसके समतुल्य साध्य को सिद्ध करना आसान होता है। इस प्रकार किसी साध्य को सिद्ध करने की दो विधियाँ प्रदर्शित होती हैं, नामतः प्रत्यक्ष उपपत्ति अथवा अप्रत्यक्ष उपपत्ति तथा इसके अतिरिक्त प्रत्येक विधि में तीन भिन्न-भिन्न तरीके होते हैं, जिनकी चर्चा नीचे की गई है।

प्रत्यक्ष उपपत्ति यह साध्य की वह उपपत्ति है, जिसे हम सीधे रुप में प्रदत्त तथ्यों से प्रारंभ कर साध्य की उपपत्ति स्थापित करते हैं।

(i) सीधा-सीधा उपगमन (Approach) यह तर्कों की एक शृंखला है, जो प्रदत्त अथवा कल्पित तथ्यों से सीधे प्रारंभ करके, अभिगृहीतों, परिभाषित पदों तथा पूर्व प्रमाणित साध्यों की सहायता से तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा, सिद्ध किए जाने वाले निष्कर्ष को प्रमाणित करती है।

निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए:

उदाहरण 1 यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$ तो $x = 3$ या $x = 2$ है।

हल $x^2 - 5x + 6 = 0$ (दिया है)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (एक व्यंजक को तुल्य व्यंजक से बदलने पर)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$ (पूर्वप्रमाणित साध्य $ab = 0$ तब $a = 0$ या $b = 0$, $a, b \in \mathbf{R}$ द्वारा)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ या $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से उसकी प्रकृति परिवर्तित नहीं होती है।)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ या $x + 0 = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक(Identity) गुण के प्रयोग द्वारा)

$\Rightarrow$ $x = 3$ या $x = 2$ (योग के अंतर्गत पूर्णांक के तत्समक गुण के प्रयोग द्वारा।)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ या $x = 2$

यहाँ p प्रदत्त कथन "$x^2 - 5x + 6 = 0$" है और q निष्कर्ष कथन "$x = 3$ या $x = 2$" है।

कथन p के व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ को, इसके तुल्य एक अन्य व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ से प्रतिस्थापित कर के हम एक व्यंजक r: "$(x - 3)(x - 2) = 0$" प्राप्त करते हैं

यहाँ दो प्रश्न उठते हैं:

(i) व्यंजक $(x - 3)(x - 2)$ किस प्रकार व्यंजक $x^2 - 5x + 6$ के समान (तुल्य) है ?

(ii) किसी व्यंजक को उसके समान एक अन्य व्यंजक से हम कैसे प्रतिस्थापित कर सकते हैं ? इनमें से प्रथम को हम पिछली कक्षाओं में गुणनखंड द्वारा सिद्ध कर चुके हैं अर्थात्

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$$

द्वितीय प्रश्न तर्क के वैध रूप (तर्क के नियमों) द्वारा संभव होता है।

इसके उपरांत r पूर्वकथन (Premise) या प्रदत्त कथन हो जाता है, जिससे कथन s: "$x - 3 = 0$ या $x - 2 = 0$" प्राप्त होता है। प्रत्येक चरण (steps) का औचित्य कोष्ठक (brackets) में दिया है।

यह प्रक्रिया निरंतर तब तक चलती रहती है जब तक हम अंतिम निष्कर्ष पर नहीं पहुँच जाते हैं।

तर्क की प्रतीकात्मक समतुल्यता निगमन द्वारा यह प्रमाणित करने में है कि $p \Rightarrow q$ सत्य है।

p से प्रारंभ करके निगमन द्वारा $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ को प्रमाणित कीजिए। अतः "$p \Rightarrow q$" सत्य है।

उदाहरण 2 सिद्ध कीजिए की फलन $f: R \rightarrow R$ जो $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित है, एक एकैकी (one-one) फलन है

उपपत्ति ध्यान दीजिए कि फलन f एकैकी होगा यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(एकैकी फलन की परिभाषा)

अब मान लीजिए कि $f(x_1) = f(x_2)$ अर्थात् $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow$ $2x_1 + 5 - 5 = 2x_2 + 5 - 5$ (दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने से)

$\Rightarrow$ $2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 2x_2$ (वास्तविक संख्याओं में योज्य तत्समक का गुण)

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2} x_1 = \frac{2}{2} x_2$ (दोनों पक्षों को समान शून्येतर संख्या से विभाजित करने से)

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

अत: फलन एकैकी है।

(ii) गणितीय आगमन

गणितीय आगमन, साध्यों को सिद्ध करने की एक ऐसी विधि है, जिसका स्वरूप निगमनिक होता है। इस विधि में उपपत्ति पूर्णरूपेण निम्नलिखित अभिगृहीत पर आधारित होती हैं।

N के एक प्रदत्त उपसमुच्चय S में, यदि

(i) प्राकृत संख्या $1 \in S$ तथा

(ii) प्राकृत संख्या $k + 1 \in S$ जब कभी $k \in S$, तो $S = \mathbf{N}$

गणितीय आगमन का सिद्धांत यह है कि यदि एक कथन "$S(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है" (अथवा किसी अन्य प्रारंभिक संख्या j के लिए सत्य है) और यदि कथन $n = k$ के लिए सत्य होने में यह अंतर्निहित है कि वह $n = k + 1$ के लिए अनिवार्यत: सत्य है (जब कभी धन पूर्णांक $k \geq j$), तो प्रदत्त कथन किसी भी धन पूर्णांक n, जहाँ $n \geq j$ के लिए सत्य होता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, तो दिखाइए कि $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हल मान लिया कि $P(n) : A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

हम देखते हैं कि $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

अत: P(1) सत्य है।

अब मान लिया कि P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix}$$

तो हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है, अर्थात्

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ सत्य है}$$

पुन: $$A^{k+1} = A^k \,.\, A$$

चूँकि P(k) सत्य है, इसलिए

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\,\theta & \sin k\,\theta \\ -\sin k\,\theta & \cos k\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\,\theta\cos\theta - \sin k\,\theta\sin\theta & \cos k\,\theta\sin\theta + \sin k\,\theta\cos\theta \\ -\sin k\,\theta\cos\theta - \cos k\,\theta\sin\theta & -\sin k\,\theta\sin\theta + \cos k\,\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(आव्यूह गुणन द्वारा)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

अत: P(k + 1) सत्य है, जब कभी P(k) सत्य है।

अतएव P(n), n के सभी मानों (धन पूर्णांक) के लिए सत्य है।

(iii) विभिन्न स्थितियों में विखंडन द्वारा अथवा नि:शेषण द्वारा उपपत्ति

कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने की यह विधि केवल तभी संभव है, जब p को अनेक कथनों r, s, t (मान लिया) में विखंडित किया जा सकता हो जैसा कि $p = r \vee s \vee t$ (जहाँ "$\vee$" प्रतीक है "या" के लिए)

यदि सप्रतिबंध कथनों $r \Rightarrow q$;

$s \Rightarrow q$;

तथा $t \Rightarrow q$

को प्रमाणित किया जाए, तो $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, सिद्ध हो जाता है और इस प्रकार $p \Rightarrow q$ प्रमाणित होता है।

इस विधि में परिकल्पना की प्रत्येक संभव दशा को जाँचा जाता है। यह विधि व्यावहारिक रूप से केवल तभी सुविधाजनक है जब विखण्डन द्वारा प्राप्त कथनों की संख्या कम हो।

उदाहरण 4 किसी त्रिभुज ABC, में सिद्ध कीजिए कि

$$a = b \cos C + c \cos B$$

हल मान लीजिए कि p कथन "ABC एक त्रिभुज है" तथा q कथन

"$a = b \cos C + c \cos B$" है

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है। शीर्ष A से BC (आवश्यकतानुसार बढ़ाई गई) पर लंब AD खींचिए।

हमें ज्ञात है कि एक त्रिभुज या तो न्यूनकोण त्रिभुज या अधिककोण त्रिभुज या समकोण त्रिभुज होता है, इसलिए हम p को r, s तथा t में विखण्डित कर सकते हैं, जहाँ

r : ABC एक न्यूनकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ न्यूनकोण हैं।

s : ABC एक अधिककोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ अधिककोण है।

t : ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसमें $\angle C$ समकोण है।

अत: हम साध्य को उपर्युक्त तीनों संभावनाओं के लिए अलग-अलग सिद्ध करते हैं।

दशा (i) जब $\angle A, \angle B$, तथा $\angle C$ तीनों ही न्यूनकोण हैं (आकृति A1.1)

समकोण त्रिभुज ADB, द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

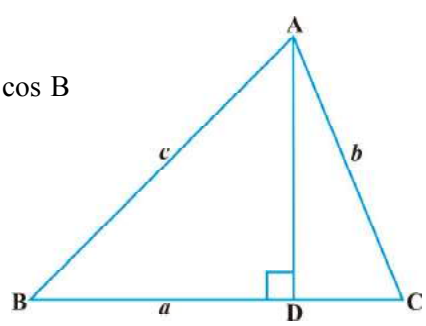
अर्थात् $BD = AB \cos B = c \cos B$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

अर्थात् $CD = AC \cos C$

$= b \cos C$



आकृति A1.1

अब $a = BD + CD$

$= c \cos B + b \cos C$ ... (1)

दशा (ii) जब $\angle C$ अधिककोण है (आकृति A1.2)

समकोण त्रिभुज ADB द्वारा

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

अर्थात् $BD = AB \cos B$

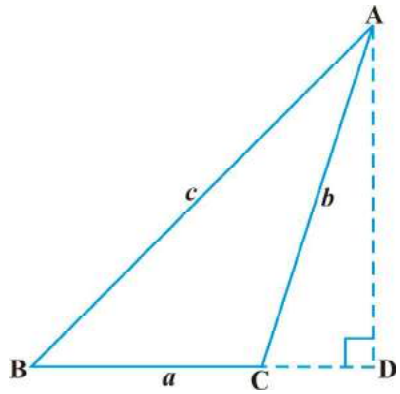
$= c \cos B$

समकोण त्रिभुज ADC द्वारा

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$= \cos (180 - C)$

$= - \cos C$



आकृति A1.2

अर्थात् $CD = - AC \cos C$

$= - b \cos C$

अब $a = BC = BD - CD$

अर्थात् $a = c \cos B - (- b \cos C)$

$a = c \cos B + b \cos C$ ... (2)

दशा (iii) जब $\angle C$ समकोण है (आकृति A1.3)

त्रिभुज ACB, द्वारा

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

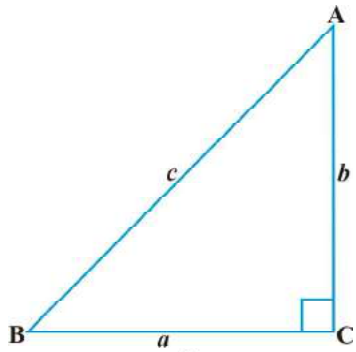
अर्थात् $BC = AB \cos B$

तथा $a = c \cos B,$

$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$

अतः हम लिख सकते हैं $a = 0 + c \cos B$

$= b \cos C + c \cos B$ ... (3)



आकृति A1.3

समीकरण (1), (2) तथा (3) से हम पाते हैं, कि किसी त्रिभुज ABC में

$$a = b \cos C + c \cos B$$

दशा (i) से $r \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

दशा (ii) से $s \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

तथा **दशा (iii)** से $t \Rightarrow q$ प्रमाणित है।

अतः $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ प्रमाणित है अर्थात् $p \Rightarrow q$ प्रमाणित है,

अप्रत्यक्ष उपपत्ति: दिए गए साध्य को सीधे प्रमाणित करने के एवज में, हम उसके समतुल्य किसी साध्य को सिद्ध करके, प्रदत्त साध्य को प्रमाणित करते हैं

(i) विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (*Reductio Ad Absurdum*):
यहाँ हम इस मान्यता से प्रारंभ करते हैं कि परिकल्पना सत्य है तथा निष्कर्ष असत्य है। तर्क के नियमों के प्रयोग द्वारा हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि एक ज्ञात सत्य कथन, असत्य है, जो एक विरोधोक्ति है। अत: प्रदत्त कथन सत्य है इस विधि को एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 5 सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित (Infinite) होता है।

हल मान लीजिए कि समस्त अभाज्य संख्याओं (Prime Numbers) का समुच्चय P है जो अपरिमित है। हम इस कथन के निषेध (Negation) को, अर्थात समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित नहीं है, सत्य मान लेते हैं, अर्थात् समस्त अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है। इसलिए हम समस्त अभाज्य संख्याओं को सूचीबद्ध कर सकते हैं। मान लीजिए कि $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ समस्त अभाज्य संख्याओं की सूची है। अब मान लीजिए

$$N = (P_1 P_2 P_3 \ldots P_k) + 1 \qquad \ldots (1)$$

स्पष्ट है कि N अभाज्य संख्याओं की सूची में नहीं है, क्योंकि यह सूची की किसी भी संख्या से अधिक है।

N या तो अभाज्य संख्या है या संयुक्त संख्या है।

यदि N अभाज्य संख्या है तो (1) से स्पष्ट होता है कि एक ऐसी अभाज्य संख्या का अस्तित्व है, जो सूची में नहीं है।

दूसरी ओर, यदि N एक संयुक्त संख्या है, तो इसका कम से कम एक अभाज्य भाजक (Divisor) होना चाहिए। परंतु सूची की कोई भी संख्या N को विभाजित (पूर्णरूप से) नहीं कर सकती है, क्योंकि उनमें से किसी के द्वारा N को विभाजित करने पर शेषफल सदैव 1 बचता है। अत: N का अभाज्य भाजक सूची के अतिरिक्त कोई अन्य संख्या है।

किंतु यह, इस कथन का कि हमने सभी अभाज्य संख्याओं की सूची बना ली है, विरोधोक्ति है।

इस प्रकार हमारी पूर्वधारणा कि सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय परिमित है, असत्य है।

अत: सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय अपरिमित होता है।

टिप्पणी (ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त उपपत्ति में विभिन्न दशाओं में विखण्डन द्वारा उपपत्ति की विधि का उपयोग भी है)

(ii) प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक (contrapositive) कथन के प्रयोग द्वारा उपपत्ति:
यहाँ सप्रतिबंध कथन $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के स्थान पर हम उसके समतुल्य कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध करते हैं। (विद्यार्थी समतुल्यता को सत्यापित कर सकते हैं)।

किसी दिए हुए सप्रतिबंध कथन के निष्कर्ष तथा परिकल्पना का विनिमय करके उनमें से प्रत्येक का निषेधन करने से प्रदत्त कथन का प्रतिधनात्मक कथन बनता है।

उदाहरण 6 सिद्ध कीजिए कि $f(x) = 2x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ एकैकी फलन है।

हल फलन एकैकी होता है, यदि $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

इसका प्रयोग करके हमें प्रमाणित करना है कि "$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$" $\Rightarrow$ "$x_1 = x_2$" यह $p \Rightarrow q$, के रूप का है, जहाँ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ कथन p है तथा $x_1 = x_2$ कथन q है। इस बात को हम उदाहरण 2 में "प्रत्यक्ष विधि" द्वारा सिद्ध कर चुके हैं।

हम इसे प्रदत्त कथन के प्रतिधनात्मक कथन के प्रयोग द्वारा भी प्रमाणित कर सकते हैं। दिए गए कथन का प्रतिधनात्मक कथन $\sim q \Rightarrow \sim p$ है, अर्थात् "यदि $f(x_1) = f(x_2)$ तो $x_1 = x_2$" का प्रतिधनात्मक है "यदि $x_1 \neq x_2$ तो $f(x_1) \neq f(x_2)$"

अब $$x_1 \neq x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 \neq 2x_2$$

$\Rightarrow$ $$2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$$

$\Rightarrow$ $$f(x_1) \neq f(x_2).$$

क्योंकि "$\sim q \Rightarrow \sim p$", और "$p \Rightarrow q$" समतुल्य है, इस प्रकार उपपत्ति पूर्ण है।

उदाहरण 7 प्रमाणित कीजिए कि "यदि आव्यूह A, Invertible है, तो A, Non-singular है"

हल उपर्युक्त कथन को प्रतीकात्मक रूप में लिखने पर $p \Rightarrow q$ जहाँ p कथन "आव्यूह A, invertible है" तथा q कथन "A, non-singular है।"

प्रदत्त कथन को प्रमाणित करने के एवज में हम इसके प्रतिधनात्मक कथन को प्रमाणित करते हैं, अर्थात् यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है, तो आव्यूह A invertible नहीं है।

यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो इसका अर्थ हुआ $|A| = 0$ है।

अब $$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$ का अस्तित्व नहीं है, क्योंकि $|A| = 0$

अत: A, Invertible नहीं है।

इस प्रकार हमने यह प्रमाणित कर दिया कि यदि A एक non-singular आव्यूह नहीं है तो A, invertible नहीं है। अर्थात् $\sim q \Rightarrow \sim p$.

अत: यदि एक आव्यूह A invertible है, तो A non-singular है।

(iii) प्रत्युदाहरण (counter example) द्वारा उपपत्ति:

गणित के इतिहास में ऐसे अवसर भी आते हैं, जब किसी परिकल्पित व्यापकीकरण की वैध उपपत्ति ज्ञात करने के सभी प्रयास असफल हो जाते हैं और व्यापकीकरण के सत्यमान की अनिश्चितता अनिर्णीत बनी रहती है।

ऐसी स्थिति में यह लाभप्रद है कि, कथन को असत्य सिद्ध करने के लिए, हम एक उदाहरण ढूँढ़ सकें। किसी कथन को अमान्य करने वाला उदाहरण प्रत्युदाहरण कहलाता है।

क्योंकि साध्य $p \Rightarrow q$ का खंडन, साध्य $\sim (p \Rightarrow q)$ की केवल मात्र एक उपपत्ति होता है। अतः यह भी उपपत्ति की एक विधि है।

उदाहरण 8 कथनः प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $(2^{2^n} + 1)$ एक अभाज्य संख्या है।

यह कथन निम्नलिखित प्रेक्षणों के आधार पर एक समय सत्य समझा गया थाः

$2^{2^1} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ जो कि एक अभाज्य संख्या है।

$2^{2^2} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ जो कि अभाज्य संख्या है।

$2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$ जो कि एक अभाज्य है।

यद्यपि, प्रथम दृष्टि में यह व्यापकीकरण सही प्रतीत होता है। अंततोगत्वा यह प्रतिपादित किया गया कि $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ एक अभाज्य संख्या नहीं है क्योंकि $4294967297 = 641 \times 6700417$ है। जो दो संख्याओं का गुणनफल है (1 तथा स्वंय के अतिरिक्त) इस प्रकार यह व्यापकीकरण कि "प्रत्येक n के लिए $2^{2^n} + 1$ एक अभाज्य संख्या है $\forall\, n \in \mathrm{N}^+$" असत्य है।

मात्र केवल यह एक उदाहरण कि $2^{2^5} + 1$ अभाज्य नहीं है, का उदाहरण व्यापकीकरण को खंडित करने के लिए पर्याप्त है।

अतः हमने सिद्ध कर दिया कि कथन "प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए, $2^{2^n} + 1$ एक अभाज्य संख्या है" सत्य नहीं है।

उदाहरण 9 कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है।" पर विचार कीजिए।

उपपत्तिः हम निम्नलिखित फलनों पर विचार करते हैंः

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ये सभी फलन x के सभी मानों के लिए संतत हैं। यदि हम अवकलनीयता पर विचार करें तो ये x के सभी मानों के लिए अवकलनीय हैं। यह हमें इस विश्वास के लिए प्रेरित करता है कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" सत्य है। किंतु यदि हम फलन "$\phi(x) = |x|$" की अवकलनीयता की जाँच करें, जो कि संतत है, तो हम देखते हैं कि यह $x = 0$ पर अवकलनीय नहीं है। इसका तात्पर्य यह हुआ कि कथन "प्रत्येक संतत फलन अवकलनीय होता है" असत्य है। फलन "$\phi(x) = |x|$" का केवल यह एक उदाहरण, व्यापकीकरण का खंडन करने के लिए पर्याप्त है। अतः फलन "$\phi(x) = |x|$" को दिए गए कथन अर्थात्, "प्रत्येक सतत फलन अवकलनीय होता है।" के खंडन का प्रत्युदाहरण कहते हैं।

परिशिष्ट 2

गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)

A.2.1 भूमिका (Introduction)

कक्षा XI में हम गणितीय निदर्शन को वास्तविक जीवन की समस्याओं के कुछ अंश का गणितीय भाषा में अध्ययन के एक प्रयास के रूप में जान चुके हैं, अर्थात्, उपयुक्त प्रतिबंधों का प्रयोग करके किसी भौतिक स्थिति का गणितीय रूपांतरण ही गणितीय निदर्शन है। मोटे तौर पर गणितीय निदर्शन एक प्रक्रिया है, जिसमें हम अपनी रुचि के साधनों या वस्तुओं के व्यवहार का वर्णन करने हेतु निदर्शों (Models) की रचना, विविध प्रकार से शब्दों, आरेखों या रेखाचित्रों, कंप्यूटर प्रोग्रामों, गणितीय सूत्रों आदि के प्रयोग द्वारा करते हैं।

पिछली कक्षाओं में हमने देखा है कि, विविध गणितीय संकल्पनाओं के प्रयोग से संबंधित अधिकांश प्रश्नों के हल के लिए एक प्रकार से गणितीय निदर्शन की आवश्यकता पड़ती है। अत: यह महत्वपूर्ण है कि गणितीय निदर्शन का अध्ययन एक पृथक् विषय के रूप में किया जाना चाहिए।

इस अध्याय (परिशिष्ट) में हम पुन: गणितीय निदर्शन का अध्ययन वास्तविक जीवन की कुछ ऐसी समस्याओं के लिए करेंगे, जिनमें आव्यूह, कलन तथा रैखिक प्रोग्रामन की प्राविधिओं का प्रयोग किया जाता है।

A.2.2 गणितीय निदर्शन क्यों? (Why Mathematical Modelling?)

विद्यार्थियों को अंकगणित, बीजगणित, त्रिकोणमिति तथा रैखिक प्रोग्रामन आदि के शाब्दिक प्रश्नों को हल करने का ज्ञान है। कभी-कभी हम परिस्थितिजन्य प्रश्नों को भौतिक रूप से उनकी गहराई में गए बिना ही सरल करते हैं। परिस्थितिजन्य प्रश्नों को हल करने के लिए भौतिक रूप से उनकी गहराई में जाने की आवश्यकता पड़ती है, अर्थात् भौतिक नियमों तथा कुछ प्रतीकों के प्रयोग की आवश्यकता जिससे प्राप्त गणितीय परिणामों का संगत प्रायोगिक मानों से तुलना की जा सके। अनेक प्रस्तुत प्रश्नों को सरल करने के लिए हमें एक कौशल की आवश्यकता पड़ती है जिसे **गणितीय निदर्शन** कहते हैं। आइए हम निम्नलिखित समस्याओं पर विचार करें:

(i) किसी नदी की चौड़ाई ज्ञात करना (विशेष रूप से जब नदी को पार करना कठिन हो)।

(ii) किसी गोले के फेंकने हेतु महत्तम कोण ज्ञात करना (गोला फेंकने वाले की ऊँचाई, माध्यम का प्रतिरोध, गुरूत्वाकर्षण g आदि प्राचलों पर विचार करते हुए)।

(iii) किसी मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना (विशेषरूप से जब मीनार का शीर्ष अगम्य हो)।

(iv) सूर्य की सतह का तापमान ज्ञात करना।

(v) ज्ञात करना कि हृदय रोगियों को लिफ्ट के प्रयोग का निषेध क्यों है (बिना मानव शरीर क्रिया विज्ञान जाने)।

(vi) पृथ्वी का द्रव्यमान ज्ञात करना।

(vii) खड़ी फसल से भारत में दालों की पैदावार का अनुमान लगाना (जब किसी को फसल के काटने की अनुमति नहीं है)।

(viii) किसी व्यक्ति के शरीर में रक्त का आयतन ज्ञात करना (व्यक्ति का रक्त निकालने की अनुमति नहीं है)।

(ix) सन् 2009 ई. में भारत की जनसंख्या का अनुमान लगाना (जब कि सन् 2009 ई. तक प्रतीक्षा करने की अनुमति नहीं है)।

उपर्युक्त सभी समस्याओं को गणितीय निदर्शन के प्रयोग द्वारा सरल किया जा सकता है और वास्तव में सरल किया जा चुका है। वस्तुत: इनमें से कुछ समस्याओं को सरल करने की विधियों का अध्ययन आप इसी पाठ्यपुस्तक में करेंगे। तथापि यह शिक्षाप्रद होगा यदि आप इनको स्वयं सरल करने का प्रयास करें वह भी बिना गणित के प्रयोग किए। तब आप गणित की क्षमता तथा गणितीय निदर्शन की आवश्यकता के महत्त्व को समझ सकेंगे।

A.2.3 गणितीय निदर्शन के सिद्धांत (Principles of Mathematical Modelling)

गणितीय निदर्शन एक सिद्धांतयुक्त क्रिया है अत: इससे संबंधित कुछ सिद्धांत हैं। इन सिद्धांतों का स्वरूप लगभग दार्शनिक हैं। गणितीय निदर्शन के कुछ मूल सिद्धांतों को अनुदेशात्मक रूप में नीचे सूचीबद्ध किया गया है:

(i) निदर्श की आवश्यकता को पहचानिए (हम मॉडल क्यों खोज रहे हैं)।

(ii) मॉडल के लिए प्राचलों/चरों को सूचीबद्ध कीजिए (हम क्या ज्ञात करना चाहते हैं)।

(iii) उपलब्ध प्रासंगिक आँकड़ों को पहचानिए (क्या दिया हुआ है)।

(iv) प्रयोग योग्य परिस्थितियों को पहचानिए (पूर्वधारणा, कल्पना)।

(v) नियंत्रक भौतिक नियमों को पहचानिए।

(vi) पहचानिए:

(a) प्रयुक्त होने वाले समीकरण।

(b) की जाने वाली गणना।

(c) परिणामस्वरूप प्राप्त होने वाला हल।

(vii) उन परीक्षणों को पहचानिए जिनसे निम्नलिखित जाँच की जा सके:

(a) मॉडल तथा उससे संबंधित नियमों एवं कल्पनाओं का संगत होना।

(b) मॉडल की उपयोगिता।

(viii) उन प्राचलों को पहचानिए जो मॉडल को सुधार सकें।

निदर्शन के उपर्युक्त सिद्धांतों के आधार पर हमें गणितीय निदर्शन के निम्नलिखित चरण प्राप्त होते हैं:

चरण 1: भौतिक स्थिति को पहचानिए।

चरण 2: प्राचलों / चरों के चयन और ज्ञात भौतिक नियमों तथा प्रतीकों के प्रयोग द्वारा भौतिक स्थिति को गणितीय मॉडल में परिवर्तित कीजिए।

चरण 3: गणितीय प्रश्नों के हल ज्ञात कीजिए।

चरण 4: प्राप्त परिणाम की मूल प्रश्न (समस्या) के संदर्भ में व्याख्या कीजिए और उसकी (परिणाम) प्रेक्षणों अथवा प्रयोगों से तुलना कीजिए।

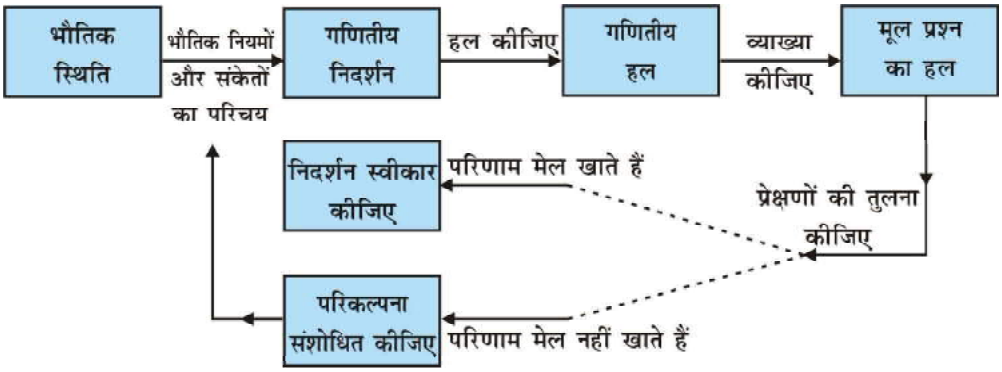
चरण 5: यदि परिणाम लगभग मेल खाते हैं, तो मॉडल को स्वीकार कीजिए अन्यथा भौतिक स्थिति की परिकल्पना / कल्पना को संशोधित कीजिए और चरण 2 पर जाइए।

उपर्युक्त चरणों को नीचे दर्शाए आरेख में देखा जा सकता है:

उदाहरण 1 गणितीय निर्दशन के प्रयोग द्वारा एक दी गई मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल चरण 1 "एक दी गई मीनार की ऊँचाई ज्ञात करना" प्रदत्त भौतिक स्थिति है।

चरण 2 मान लीजिए कि AB दी गई मीनार है (आकृति A.2.2)। मान लीजिए PQ मीनार की ऊँचाई नापने वाला एक प्रेक्षक है, जिसकी आँख बिंदु P पर है। मान लीजिए कि $PQ = h$ तथा मीनार की ऊँचाई H है। पुन: मान लीजिए कि प्रेक्षक की आँख से मीनार के शिखर (शीर्ष) का उन्नयन-कोण α है तथा $l = QB = PC$



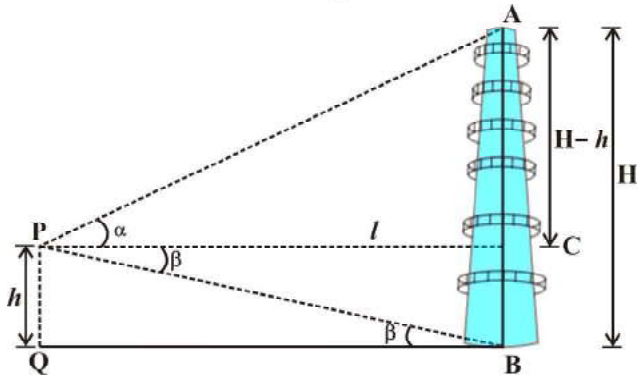
आकृति A.2.1

अब $$\tan \alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

या $$H = h + l \tan \alpha \qquad \ldots (1)$$

चरण 3 ध्यान दीजिए कि प्राचल h, l तथा α के मान प्रेक्षक को ज्ञात हैं अत: परिणाम (1) से समस्या का हल प्राप्त होता है।

चरण 4 उस दशा में जब मीनार का आधार अगम्य हो, अर्थात् जब प्रेक्षक को l का मान ज्ञात नहीं हो, तब मान लीजिए कि मीनार के आधार B का बिंदु P से अवनमन-कोण β है। अत: Δ PQB से हमें



आकृति A.2.2

प्राप्त होता है कि

$$\tan \beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ या } l = h \cot \beta$$

चरण 5 इस स्थिति में इस चरण की आवश्यकता नहीं है क्योंकि h, l, α तथा β प्राचलों के सही मान ज्ञात हैं।

उदाहरण 2 मान लीजिए कि एक व्यावसायिक फर्म तीन प्रकार के उत्पाद P_1, P_2 और P_3 का उत्पादन करती है, जिनमें तीन प्रकार के कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3 का प्रयोग होता है। मान लीजिए कि फर्म से दो ग्राहक F_1 और F_2 खरीद की माँग करते हैं। यह मानते हुए कि फर्म के पास R_1, R_2 तथा R_3 की सीमित मात्रा है, एक मॉडल बनाइए, जो माँग को पूरा करने के लिए कच्चे माल R_1, R_2 और R_3 की मात्राओं को सुनिश्चित करे।

हल चरण 1 इस समस्या में भौतिक स्थिति की पहचान भलीभाँति है।

चरण 2 मान लीजिए कि A एक आव्यूह है, जो ग्राहकों F_1 तथा F_2 की आवश्यकता को निरूपित करता है। तब A का रूप ऐसा होगा,

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

मान लीजिए कि B एक आव्यूह है, जो उत्पाद P_1, P_2 तथा P_3 की प्रत्येक इकाई के उत्पादन हेतु कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3, की आवश्यक मात्राओं को निरूपित करता है। तब B नीचे दिए गए प्रकार का होगा,

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

चरण 3 ध्यान दीजिए कि A तथा B आव्यूहों का गुणनफल (जो इस स्थिति में सुपरिभाषित है) निम्नलिखित आव्यूह द्वारा प्राप्त होता है।

$$AB = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \end{array}$$

जिससे वास्तव में ग्राहकों F_1 तथा F_2 के फरमाइशों को पूरा करने हेतु कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3 की वांछित मात्राएँ ज्ञात होती हैं।

उदाहरण 3 उदाहरण 2 के मॉडल की व्याख्या कीजिए, जब कि

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

तथा कच्चे माल की उपलब्ध मात्राएँ R_1 की 330 इकाईयाँ, R_2 की 455 इकाईयाँ और R_3 की 140 इकाईयाँ हैं।

हल नोट कीजिए कि

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

यह स्पष्टतया दर्शाता है कि F_1 और F_2 की माँग को पूरा करने के लिए कच्चे माल R_1 की 335 इकाई,

R_2 की 467 इकाई तथा R_3 की 147 इकाई की आवश्यकता है जो कि कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं से अधिक है। क्योंकि तीनों उत्पादों की प्रत्येक इकाई के निर्माण हेतु कच्चे माल के अपेक्षित मात्राएँ निश्चित हैं, इसलिए हम या तो कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं के बढ़ाने की माँग कर सकते हैं अथवा हम ग्राहकों से उनकी माँगों को कम करने का निवेदन कर सकते हैं।

टिप्पणी यदि हम उदाहरण 3 में A को A_1 से बदल दें, जहाँ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

अर्थात्, यदि ग्राहक लोग अपनी माँगों को कम करने के लिए मान जाते हैं, तो

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

यहाँ R_1 की 311, R_2 की 436 तथा R_3 की 138 इकाइयाँ आपेक्षित हैं जो कि कच्चे माल की उपलब्ध मात्राओं अर्थात् R_1 की 330, R_2 की 455 तथा R_3 की 140 इकाइयों से कम हैं।

टिप्पणी हम A को पुनः इस प्रकार संशोधित कर सकते हैं जिससे उपलब्ध कच्चे माल का पूर्णतया उपयोग हो जाए।

इस प्रकार यदि ग्राहकों की माँग को पूरा करने के लिए A_1 के द्वारा क्रय-आदेश दिए जाते हैं, तो फर्म दोनों ग्राहकों के क्रय-आदेशों को सरलता से पूरा कर सकता है।

पूछताछ प्रदत्त B तथा उपलब्ध कच्चे माल की निर्धारित मात्राओं के लिए क्या हम, फर्म के मालिक की सहायतार्थ, एक ऐसा गणितीय मॉडल बना सकते है, जिससे वह ग्राहकों से अनुरोध कर सके कि वे अपनी माँगों को इस प्रकार संशोधित करें कि उपलब्ध कच्चा माल पूर्णतया उपयोग में आ जाए।

इस पूछताछ का उत्तर निम्नलिखित उदाहरण में दिया गया है:

उदाहरण 4 मान लिजिए कि P_1, P_2, P_3 तथा R_1, R_2, R_3 उसी प्रकार है जैसा उदाहरण 2 में दिया है। मान लीजिए कि फर्म के पास R_1 की 330, R_2 की 455 और R_3 की 140 इकाइयाँ उपलब्ध हैं और मान लीजिए कि तीनों उत्पाद की प्रत्येक इकाई के निर्माण के लिए कच्चे माल R_1, R_2 तथा R_3, की मात्राएँ निम्नलिखित आव्यूह से प्राप्त होतीं हैं

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

प्रत्येक उत्पाद की कितनी इकाइयाँ बनाइ जाएँ कि उपलब्ध कच्चे माल का उपयोग पूर्णतया हो जाए?

हल चरण 1 स्थिति सरलता से पहचान योग्य है।

चरण 2 मान लीजिए कि फर्म P_1 की x इकाइयों , P_2 की y तथा P_3 की z इकाइयों का उत्पादन करती है। क्योंकि उत्पाद P_1 के लिए R_1 की 3, P_2 के लिए R_1 की 7 तथा P_3 के लिए R_1 की 5 इकाइयों की आवश्यकता पड़ती है (आव्यूह B देखिए) और R_1 की कुल 330 इकाइयाँ उपलब्ध हैं, अत:

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ (कच्चे माल } R_1 \text{ के लिए)}$$

इसी प्रकार $$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (कच्चे माल } R_2 \text{ के लिए)}$$

और $$3y + 7z = 140 \text{ (कच्चे माल } R_3 \text{ के लिए)}$$

इस (उपर्युक्त) समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं,

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

चरण 3 प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया द्वारा, हमें प्राप्त होता है;

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

इससे $x = 20$, $y = 35$ तथा $z = 5$ मिलता है। अतएव फर्म P_1 की 20, P_2 की 35 तथा P_3 की 5 इकाइयाँ उत्पन्न कर सकती है।

टिप्पणी कोई भी देख सकता है कि यदि निर्माता ग्राहकों F_1 और F_2 की माँगों (जैसा उदाहरण 3 में है) पर विचार किए बिना ही केवल उपलब्ध कच्चे माल के अनुसार उत्पादन करने का निर्णय लेता है, तो वह उनकी माँगों को पूरा नहीं कर सकता है, क्योंकि F_1 ने P_3 की 6 इकाइयाँ माँगी है जब कि निर्माता उसकी केवल 5 इकाइयाँ ही बना सकता है।

उदाहरण 5 एक दवा-निर्माता M_1 और M_2 दवाइयों की उत्पादन-योजना बनाता है। M_1 की 20,000 तथा M_2 की 40,000 बोतलों के लिए दवा बनाने हेतु यथेष्ट कच्चा-माल उपलब्ध है, किंतु उसके पास केवल 45,000 बोतलें हैं, जिनमें वह दोनों में से कोई भी दवा भर सकता है। M_1 की 1,000 बोतलें भरने के लिए पर्याप्त माल तैयार करनें में 3 घंटे और M_2 की 1000 बोतलें भरने के लिए पर्याप्त माल तैयार करनें में 1 घंटा लगते हैं तथा इस प्रक्रिया के लिए केवल 66 घंटे उपलब्ध हैं। M_1 की प्रत्येक बोतल पर Rs 8 तथा M_2 की प्रत्येक बोतल पर Rs 7 लाभ होता है। दवा-निर्माता, महत्तम लाभ अर्जित करने हेतु, अपनी उत्पादन-योजना किस प्रकार बनाए?

हल चरण 1 प्रदत्त परिकल्पना के अंतर्गत, महत्तम लाभ अर्जित करने हेतु, दवाओं M_1 तथा M_2 की बोतलों की संख्या ज्ञात करना।

चरण 2 मान लीजिए कि दवा M_1 की x और दवा M_2 की y बोतलें हैं। क्योंकि M_1 की प्रत्येक बोतल पर लाभ Rs 8 तथा M_2 की प्रत्येक बोतल पर लाभ Rs 7 होता है, अत: उद्देश्य-फलन (objective

function), जिसे अधिकतम करना है नीचे लिखे समीकरण से दिया गया है।

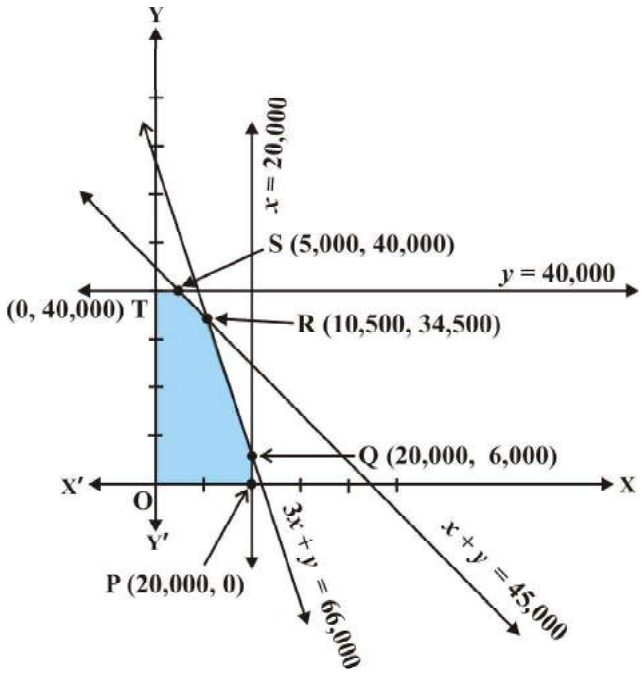
$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

इस उद्देश्य-फलन का निम्नलिखित प्रतिबंधों (व्यवरोधों) के अंतर्गत अधिकतम करना है (रैखिक प्रोग्रामन के अध्याय 12 पर ध्यान दीजिए)।

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

चरण 3 प्रदत्त व्यवरोधों (constraints) (1) के अंतर्गत छायांकित क्षेत्र OPQRST सुसंगत-क्षेत्र है (आकृति A.2.3) बिंदुओं O, P, Q, R, S तथा T कोंनीय के निर्देशांक क्रमशः (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) तथा (0, 40000) हैं।

नोट कीजिए कि



आकृति A.2.3

P (0, 0) पर $Z = 0$

P (20000, 0) पर $Z = 8 \times 20000 = 160000$

Q (20000, 6000) पर $Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$

R (10500, 34500) पर $Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$

S = (5000, 40000) पर $Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$

T = (0, 40000) पर $Z = 7 \times 40000 = 280000$

ध्यान दीजिए कि $x = 10500$ और $y = 34500$ पर महत्तम लाभ अर्जित होता है, जो कि Rs 325500 है। अत: निर्माता (उत्पादक) को Rs 325500 का महत्तम लाभ अर्जित करने के लिए M_1 की 10500 तथा M_2 की 34500 बोतलें उत्पन्न करनी चाहिए।

उदाहरण 6 मान लीजिए कि एक कंपनी कोई नया उत्पाद बनाना चाहती है, जिस पर कुछ लागत (स्थिर और चर लागत) आती है और मान लीजिए कि कंपनी उस उत्पाद को एक स्थिर मूल्य पर विक्रय करने की योजना बनाती है। इस स्थिति में लाभ-हानि के परीक्षण हेतु एक गणितीय मॉडल बनाइए।

हल चरण 1 यहाँ स्थिति स्पष्टतया पहचान योग्य है।

चरण 2 **सूत्रण** से हमें ज्ञात है की लागत दो प्रकार की होती है, स्थिर तथा चर। स्थिर लागत उत्पाद की संख्या से स्वतंत्र होती है (जैसे किराया, शुल्क आदि), जब कि चर लागत उत्पाद की संख्या बढ़ने से बढ़ती है (जैसे सामग्री, पैकिंग इत्यादि)। प्रारंभ में हम मान लेते हैं कि चर लागत उत्पाद की संख्या की अनुक्रमानुपाती है – इससे हमारा मॉडल सरल हो जाता है। कंपनी को कुछ धन राशि विक्रय द्वारा प्राप्त होती है, और वह (कंपनी) यह सुनिश्चित करना चाहती है कि यह प्राप्त धन महत्तम है। सुविधा के लिए, हम यह मान लेते हैं कि प्रत्येक उत्पादित इकाई तत्काल बेच दी जाती है।

गणितीय मॉडल

मान लीजिए कि उत्पादित तथा विक्रय की गई इकाइयों की संख्या x है,

C = उत्पादन की कुल लागत है (रुपयों में)

I = विक्रय से होने वाली कुल आय है (रुपयों में)

P = कुल लाभ है (रुपयों में)

हमारी I उपर्युक्त मान्यता (assumption) के अनुसार C दो भागों से मिल कर बनता है:

स्थिर लागत = a (रुपयों में),

चर लागत = b (रुपए प्रति इकाई).

अतएव $$C = a + bx \qquad \ldots (1)$$

साथ ही आय I विक्रय मूल्य s (रुपए प्रति इकाई) पर निर्भर है,

अत: $$I = sx \qquad \ldots (2)$$

लाभ P आय और लागत के अंतर के बराबर होता है, इस प्रकार

$$\begin{aligned} P &= I - C \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\, x - a \qquad \ldots (3) \end{aligned}$$

इस प्रकार अब हमें चर राशिओं x, C, I, P, a, b, तथा s के बीच (1), (2) तथा (3) में दर्शाए पारस्परिक संबंधों का एक गणितीय मॉडल प्राप्त होता है। इन चर राशिओं का वर्गीकरण इस प्रकार है,

स्वतंत्र	x
आश्रित (परतंत्र)	C, I, P
प्राचल	a, b, s

उत्पादक को x, a, b, s, की जानकारी है और वह P ज्ञात कर सकता है।

चरण 3 संबंध (3) द्वारा हम देखते हैं कि सम विच्छेदन बिंदु (न कोई लाभ और न कोई हानि) के लिए $P = 0$, अर्थात्, $x = \dfrac{a}{s-b}$ इकाइयाँ।

चरण 4 तथा 5 सम विच्छेदन बिंदु के विचार से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि यदि कंपनी कुछ इकाइयाँ ही उत्पादित करती है, अर्थात् $x = \dfrac{a}{s-b}$ इकाइयों से कम हो तो उसे हानि होगी और यदि वह अधिक इकाइयाँ उत्पादित करती है, अर्थात् $\dfrac{a}{s-b}$ इकाइयों से अधिक तो उसे लाभ होगा। इसके अतिरिक्त, यदि सम विच्छेदन बिंदु अवास्तविक सिद्ध होता है, तब कोई अन्य मॉडल प्रयुक्त किया जा सकता है अथवा धन प्रवाह से संबंधित अभिधारणाओं में संशोधन किया जा सकता है।

टिप्पणी संबंध (3) से, हमें यह भी मिलता है कि,

$$\frac{dP}{dx} = s - b$$

अर्थात्, x के सापेक्ष P के परिवर्तन की दर, राशि $s - b$ पर निर्भर करती है जो कि उत्पाद के विक्रय मूल्य तथा उसके चर लागत के अंतर के बराबर है। अत: लाभ अर्जित करने के लिए इस राशि को धनात्मक होना चाहिए और प्रचुर मात्रा में लाभ अर्जित करने के लिए हमें बहुत अधिक मात्रा उत्पादित करनी चाहिए साथ ही साथ चर लागत को कम करने का प्रयास भी करना चाहिए।

उदाहरण 7 मान लीजिए कि एक टैंक में 1000 लिटर लवण-जल है जिसमें प्रति लिटर 250 g लवण है। 200 g/L लवण वाला लवण-जल, 25 L/min की दर से टैंक में आ रहा है तथा इस प्रकार प्राप्त मिश्रण समान दर से टैंक से बाहर निकल रहा है। किसी क्षण t पर टैंक में लवण की मात्रा क्या है?

हल चरण 1 यहाँ स्थिति सरलता से पहचान करने के योग्य है।

चरण 2 मान लीजिए कि $y = y(t)$ द्वारा अंतर्वाह-बहिर्वाह प्रारंभ होने के बाद, किसी समय t (मिनट में) पर, टैंक में उपस्थित लवण की मात्रा (किलो ग्राम में) सूचित (प्रकट) होती है। जब $t = 0$, अर्थात् अंतर्वाह-बहिर्वाह प्रारंभ होने से पूर्व $y = 250 \text{ g} \times 1000 = 250 \text{ kg}$

ध्यान दीजिए कि y में परिवर्तन, मिश्रण में अंतर्वाह-बहिर्वाह के कारण होता है

अब टैंक में लवण-जल का अंतर्वाह, 5 kg/min (क्योंकि $25 \times 200 \text{ g} = 5 \text{ kg}$) की दर से लवण लाता है तथा लवण-जल का बहिर्वाह $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ kg/min (क्योंकि t समय पर टैंक में लवण की मात्रा $\frac{y}{1000}$ kg है)

अत: t के सापेक्ष टैंक में लवण की मात्रा में परिवर्तन की दर निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होती है,

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(क्यों?)}$$

या
$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad \ldots (1)$$

यह परिणाम प्रदत्त समस्या का एक गणितीय मॉडल देता है।

चरण 3 परिणाम (1) एक रैखिक समीकरण है, जिसे आसानी से सरल किया जा सकता है। समीकरण (1) का हल नीचे दिया है

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \quad \text{या} \quad y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (2)$$

जहाँ C समाकलन का अचर है।

ध्यान दीजिए कि ज्ञात है कि जब $t = 0$, $y = 250$. अतएव, $250 = 200 + C$

अथवा
$$C = 50$$

तब समीकरण (2) नीचे लिखित रूप में परिवर्तित हो जाता है,

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (3)$$

या
$$\frac{y - 200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

या $$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

अतः $$t = 40\log\left(\frac{50}{y-200}\right) \quad \ldots (4)$$

इस प्रकार समीकरण (4) वह समय t देता है, जब टैंक में लवण की मात्रा y kg है।

चरण 4 समीकरण (3) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि सदैव $y > 200$ क्योंकि $e^{-\frac{t}{40}}$ का मान सर्वदा धनात्मक रहता है

अतः टैंक में लवण की न्यूनतम मात्रा लगभग 200 kg (किंतु ठीक-ठीक 200 kg नहीं) हो सकती है। इसके अतिरिक्त समीकरण (4) से हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $t > 0$ यदि और केवल यदि $0 < y - 200 < 50$ अर्थात् यदि और केवल यदि $200 < y < 250$ अंतर्गत टैंक के लवण-जल के अंतर्वाह और बहिर्वाह के प्रारंभ होने के बाद लवण की मात्रा 200 kg और 250 kg के मध्य है।

गणितीय निदर्शन की परिसीमाएँ (Limitations)

अभी तक अनेक गणितीय मॉडल विकसित किए गए हैं और उनका अनुप्रयोग (application) अनेकानेक परिस्थितियों को गहनता से समझने में सफलतापूर्वक किया जा चुका है। कुछ विषय जैसे गणितीय भौतिकी, गणितीय अर्थशास्त्र, संक्रिया विज्ञान (operations research), जीव-गणित (Bio-mathematics) आदि, गणितीय निदर्शन के (लगभग) पर्यायवाची/समानार्थी हैं।

परंतु, आज भी कई परिस्थितियाँ ऐसी है, जिनके मॉडल अभी बनने हैं। जिसके पीछे कारण यह है कि या तो वे परिस्थितियाँ बहुत जटिल हैं अथवा विकसित मॉडल गणितानुसार असाध्य हैं।

शक्तिशाली कंप्यूटरों तथा अति-कंप्यूटरों (Super Computers) के विकास ने, परिस्थितियों की एक बहुत बड़ी संख्या के लिए, गणितानुसार मॉडल बनाने में, हमें सक्षम बना दिया है।

त्वरित (fast) तथा उन्नत कंप्यूटर के कारण यह संभव हो सका है कि हम अधिक यथार्थ मॉडलों की रचना कर सकते हैं जिनके द्वारा प्रेक्षण के साथ बेहतर सहमति प्राप्त की जा सकती है।

तथापि हमारे पास, किसी गणितीय मॉडल में प्रयुक्त विभिन्न चरों के चयन तथा इन चरों के मूल्यांकन हेतु अच्छे मार्गदर्शक सिद्धांत नहीं है। वास्तव में हम पाँच या छः चरों का चयन करके किंही भी आँकड़ों के लिए बहुत हद तक यथार्थ (accurate) मॉडलों का निर्माण कर सकते हैं। इनके ठीक-ठीक मूल्यांकन हेतु हमें चरों की संख्या कम से कम रखनी चाहिए।

बृहत् अथवा जटिल परिस्थितियों के गणितीय निदर्शन की अपनी विशेष (विशिष्ट) समस्याएँ होती है। इस प्रकार की परिस्थितियाँ प्रायः पर्यावरण (environment), समुद्र विज्ञान (oceanography), जनसंख्या नियंत्रण (population control) आदि के लोक निदर्शों (world models) के अध्ययन में आती हैं। शिक्षा की सभी शाखाओं-गणित, कंप्यूटर विज्ञान, भौतिकी, अभियंत्रिकी, समाजशास्त्र आदि के गणितीय निदर्शक, इस चुनौती का सामना साहसपूर्वक कर रहे हैं।