ਅਧਿਆਇ 1

ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ
(Relations and Functions)

❖ *There is no permanent place in the world for ugly mathematics ... . It may be very hard to define mathematical beauty but that is just as true of beauty of any kind, we may not know quite what we mean by a beautiful poem, but that does not prevent us from recognising one when we read it. — G. H. Hardy* ❖

1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

Lejeune Dirichlet (1805-1859)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ, ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਫਲਨ, ਪ੍ਰਾਂਤ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਆਦਿ ਦੀ ਧਾਰਣਾਵਾਂ ਦਾ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਸਹਿਤ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਸੰਬੰਧ (Relation)* ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸ਼ਬਦ ਦੇ ਅਰਥ ਤੋਂ ਲਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਮੰਨ ਸਕਣ ਯੋਗ (Recognisable) ਕੜੀ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A, ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XII ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ B ਉਸ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਸਮੂਹ B ਤੱਕ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਹਨ :

(i) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b ਦਾ ਭਰਾ ਹੈ$\}$,

(ii) $\{(a, b) \in A \times B$: a, b ਦੀ ਭੈਣ ਹੈ$\}$,

(iii) $\{(a, b) \in A \times B$: a ਦੀ ਉਮਰ b ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ$\}$,

(iv) $\{(a, b) \in A \times B$: ਪਿਛਲੀ ਅੰਤਿਮ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ a ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ।$\}$,

(v) $\{(a, b) \in A \times B$: a ਉਸ ਥਾਂ ਤੇ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ b ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।$\}$.

ਜਦੋਂ ਕਿ A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ R ਨੂੰ ਅਮੂਰਤ ਰੂਪ (Abstracting) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ A × B ਦੇ ਇੱਕ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਉਪਸਮੂਹ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਬੰਧ R ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ a, b ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $a \, R \, b$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਫ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਮੰਨਣਯੋਗ ਕੜੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਫਲਨ ਇੱਕ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਅਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (composition)] ਉਲਾਣਯੋਗ (Invertible) ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

1.2 ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of Relations)

ਇਸ ਹਿੱਸੇ ਵਿੱਚ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ $A \times A$ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪ-ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ $\phi \subset A \times A$ ਹੈ ਅਤੇ $A \times A$ ਖੁਦ ਦੋ ਚਰਮ ਸੰਬੰਧ ਹਨ।ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਲਈ, $R = \{(a, b): a ï \; b = 10\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।ਇਹ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਵੀ ਜੋੜਾ (pair) ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $a ï \; b = 10$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $R' = \{(a, b) : |a ï \; b| \geq 0\}$] ਸੰਪੂਰਨ ਸਮੂਹ $A \times A$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $A \times A$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜੇ (a, b), $|a ï \; b| \geq 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਰਮ ਉਦਾਹਰਨ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਸਮੂਹ A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ A ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹਿੱਸਾ A ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਹਿੱਸੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਭਾਵ $R = \phi \subset A \times A$.ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਸਮੂਹ A ਤੋਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R, ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ **(universal)** ਸੰਬੰਧ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ, ਭਾਵ $R = A \times A$.ਹੈ।

ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਅਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਕਦੇ ਕਦੇ ਤੁੱਛ (trivial) ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A ਕਿਸੇ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।ਦਰਸਾਉ ਕਿ $R = \{(a, b) : a, b$ ਦੀ ਭੈਣ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਅਤੇ $R' = \{(a, b) :$ a ਅਤੇ b ਦੀ ਉਚਾਈਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਮੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਕੂਲ ਮੁੰਡਿਆਂ ਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਕੂਲ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਕੂਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਭੈਣ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ $R = \phi$] ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਮੀਟਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਣਾ ਹੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $R' = A \times A$ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਰੋਸਟਰ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿਧੀ। ਇਸ ਲਈ ਲੇਖਕਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4\}$ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ਨੂੰ $a \, R \, b$ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $b = a + 1$ ਹੋਵੇ।ਜਦੋਂ ਅਸਾਨ ਹੋਵੇ, ਅਸੀਂ ਵੀ ਇਸ ਸੰਕੇਤ (notation) ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਾਂਗੇ।

ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ "a,b ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ" ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ a R b ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਬੰਧ, ਜਿਸ ਦੀ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਖਾਸ ਭੂਮਿਕਾ ਹੈ, ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ (Equivalence Relation) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਨਾਮਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਨਿੱਜਵਾਚਕ (Reflexive)] ਸਮਮਿਤਈ (Symmetric) ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ (Transitive) ਸੰਬੰਧਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਸਮੂਹ A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R;

(i) ਨਿੱਜਵਾਚਕ **(reflexive)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $a \in A$ ਲਈ $(a, a) \in R$, ਹੋਵੇ।

(ii) ਸਮਮਿਤਈ **(symmetric)** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $a_1, a_2 \in A$ ਦੇ ਲਈ $(a_1, a_2) \in R$ ਅਤੇ $(a_2, a_1) \in R$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

(iii) ਸਕਰਮਕ **(transitive)** ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $a_1, a_2, a_3 \in A$ ਦੇ ਲਈ $(a_1, a_2) \in R$ ਅਤੇ $(a_2, a_3) \in R$ ਤੋਂ $(a_1, a_3) \in R$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. A ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ R ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ T ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਸਮੂਹ T ਵਿੱਚ R = $\{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ$\}$ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸੰਬੰਧ R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਪਣੇ ਆਪ ਤੋਂ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੋਬਾਰਾ $(T_1, T_2) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow T_2, T_1$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow (T_2, T_1) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਸਮਮਿਤਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $(T_1, T_2), (T_2, T_3) \in R \Rightarrow T_1, T_2$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ ਅਤੇ T_2, T_3 ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ। $\Rightarrow T_1, T_3$ ਦੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੈ $\Rightarrow (T_1, T_3) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਸਕਰਮਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ R = $\{(L_1, L_2) : L_1, L_2$ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।$\}$ ਸਮੂਹ L ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

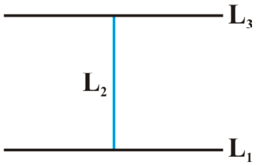
ਹੱਲ : R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਰੇਖਾ L_1 ਆਪਣੇ ਆਪ 'ਤੇ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ $(L_1, L_1) \notin R$- R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(L_1, L_2) \in R$

$\Rightarrow$ L_1, L_2 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ

$\Rightarrow$ L_2 , L_1 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ

$\Rightarrow$ $(L_2, L_1) \in R$

R ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ L_1, L_2 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ L_2, L_3 'ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ L_1, L_3 'ਤੇ ਕਦੇ ਵੀ ਲੰਬ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ L_1, L_3 ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ, $(L_1, L_2) \in R$, $(L_2, L_3) \in R$ ਪਰੰਤੂ $(L_1, L_3) \notin R$



ਚਿੱਤਰ 1.1

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ {1, 2, 3} ਵਿੱਚ R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ (1, 1), (2, 2) ਅਤੇ (3, 3), R ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ। R ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(1, 2) \in R$ ਪਰ $(2, 1) \notin R$.ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $(1, 2) \in R$ ਅਤੇ $(2, 3) \in R$ ਪਰੰਤੂ $(1, 3) \notin R$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ R = {(*a*, *b*) : ਸੰਖਿਆ 2, (*a* ï *b*) ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : R ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਰੇ $a \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਲਈ 2] (*a* ï *a*) ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(a, a) \in R$. ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$, ਤਾਂ 2] *a* ï *b* ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ *b* ï *a* ਨੂੰ ਵੀ 2 ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(b, a) \in R$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R$, ਹਨ ਤਾਂ *a* ï *b* ਅਤੇ *b* ï *c* ਸੰਖਿਆ 2 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ। ਹੁਣ *a* ï *c* = (*a* ï *b*) + (*b* ï *c*) ਜਿਸਤ (even) ਹੈ (ਕਿਉਂ\)A ਇਸ ਲਈ (*a* ï *c*) ਵੀ 2 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 ਵਿੱਚ, ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $(0, \pm 2)$, $(0, \pm 4)$, ---ਆਦਿ R ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $(0, \pm 1)$,$(0, \pm 3)$, ---ਆਦਿ R ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕੋਈ ਵੀ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ E ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ O ਸਮੂਹ Z ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) E ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ O ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

(ii) E ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ O ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟੇ ਤੌਰ ਤੇ O ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ E ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) E ਅਤੇ O ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $\mathbf{Z} = E \cup O$ ਹੈ।

ਉਪ ਸਮੂਹ E, ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸਮਤੁਲਨਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ (Equivalence Class) ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ [0] ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ O, 1 ਨੂੰ ਸਮਿਲਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਸਮਤੁਲਤਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ [1] ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $[0] \neq [1]$, $[0] = [2r]$ ਅਤੇ $[1] = [2r + 1]$,

$r \in \mathbf{Z}$ । ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜਿਹੜਾ ਕੁਝ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ, ਉਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ R ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੇ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ (arbitrary) R, X ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A_i ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ X ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ (Partition) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਹੜਾ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) ਸਾਰੇ i ਲਈ A_i ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(ii) A_i ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ A_j ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $i \neq j$।

(iii) $\cup A_j = X$ ਅਤੇ $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$

ਉਪ ਸਮੂਹ A_i ਸਮਤੁਲਤਾ-ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਰੋਚਕ ਪੱਖ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ $\mathbf{Z}$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਉਪਖੰਡਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ $\mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤਿੰਨ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A_1, A_2 ਅਤੇ A_3 ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਸੰਮਿਲਣ (Union) $\mathbf{Z}$ ਹੈ।

$A_1 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ$\} = \{$..., ï 6, ï 3, 0, 3, 6, ...$\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ ï 1 ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ$\} = \{$..., ï 5, ï 2, 1, 4, 7, ...$\}$

$A_3 = \{x \in \mathbf{Z} : x$ ï 2 ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ $\} = \{$..., ï 4, ï 1, 2, 5, 8, ...$\}$

$\mathbf{Z}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ $R = \{(a, b) : 3, a$ ï b ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।$\}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਉਦਾਹਰਣ 5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤਰਕ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ A_1, $\mathbf{Z}$ A_2 $\mathbf{Z}$ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਿਹੜਾ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ, A_3, $\mathbf{Z}$ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜਿਹੜੀਆਂ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ A_3, $\mathbf{Z}$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ 2 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A_1 = [0], A_2 = [1]$ ਅਤੇ $A_3 = [2]$ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $A_1 = [3r], A_2 = [3r + 1]$ ਅਤੇ $A_3 = [3r + 2]$, ਜਿੱਥੇ $r \in \mathbf{Z}$.

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a$ ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : A ਦਾ ਦਿੱਤਾ ਕੋਈ ਤੱਤ a ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹੈ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, a) \in R$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $(a, b) \in R \Rightarrow a$ ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\Rightarrow (b, a) \in R$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow$ ਤੱਤ a, b, c, ਸਾਰੇ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹਨ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹਨ $\Rightarrow (a, c) \in R$. ਇਸ ਲਈ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਉਪਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਟਾਂਕ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\{2, 4, 6,\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਜਿਸਤ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ ਉਪ ਸਮੂਹ$\{1, 3, 5, 7\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $\{2, 4, 6\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\{1, 3, 5, 7\}$ ਦੇ ਤੱਤ ਟਾਂਕ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $\{2, 4, 6\}$, ਦੇ ਤੱਤ ਜਿਸਤ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹਨ :

(i) ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, ..., 13, 14\}$ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ R, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਕਿ

$R = \{(x, y) : 3x$ ï $y = 0\}$

(ii) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : y = x + 5$ ਅਤੇ $x < 4\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R.

(iii) ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : y$ ਭਾਜ ਹੈ x ਨਾਲ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ।

(iv) ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Z** ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : x$ ï y ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R-

(v) ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸਮਾਂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਨਗਰ ਦੇ ਨਿਵਾਸੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧ R

(a) $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ y ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਕਾਰਜ ਕਰਦੇ ਹਨ।$\}$

(b) $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ y ਇੱਕ ਹੀ ਮੁਹੱਲੇ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ।$\}$

(c) $R = \{(x, y) : x, y$ ਤੋਂ ਠੀਕ ਠੀਕ 7 ਸੈ: ਮੀ: ਲੰਬਾ ਹੈ।$\}$

(d) $R = \{(x, y) : x , y$ ਦੀ ਪਤਨੀ ਹੈ।$\}$

(e) $R = \{(x, y) : x, y$ ਦਾ ਪਿਤਾ ਹੈ।$\}$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ R ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b^2\}$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R] ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ, ਨਾ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

3. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : b = a + 1\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b\}$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ $R = \{(a, b) : a \leq b^3\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ?

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3\}$ ਵਿੱਚ $R = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ ਹੈ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕਾਲਜ ਦੇ ਲਾਇਬਰੇਰੀ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹA ਵਿੱਚ $R = \{(x, y) : x$ ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਪੰਨਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸਮਾਨ ਹੈ।$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ] $R = \{(a, b) : |a$ ï $b|$ ਜਿਸਤ ਹੈ} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $\{1, 3, 5\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{2, 4\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ਪਰੰਤੂ $\{1, 3, 5\}$ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ $\{2, 4\}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ $A = \{x \in \mathbf{Z} : 0 \le x \le 12\}$, ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਬੰਧਾਂ R ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ :

   (i) $R = \{(a, b) : |a$ ï $b|$, 4 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ।},

   (ii) $R = \{(a, b) : a = b\}$,

   ਹਰੇਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ 1 ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ, ਜਿਹੜੇ :

    (i) ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੋਣ ਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ।

    (ii) ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਹੋਣ ਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ।

    (iii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹੋਣ ਪਰ ਸਕਰਮਕ ਨਾ ਹੋਣ।

    (iv) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਾ ਹੋਣ।

    (v) ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੋਣ ਪਰ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਾ ਹੋਣ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ, R = {(P, Q) : ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ, ਬਿੰਦੂ Q ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $P \ne (0, 0)$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ P ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ’ਤੇ ਹੈ।

12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ] $R = \{(T_1, T_2) : T_1, T_2$ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ।} ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਭੁਜਾਵਾਂ 3, 4,5, ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ T_1] ਭੁਜਾਵਾਂ 5, 12, 13 ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ T_2 ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ 6, 8, 10 ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ T_3 ’ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। T_1, T_2 ਅਤੇ T_3 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ ?

13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ, $R = \{(P_1, P_2) : P_1$ ਅਤੇ P_2 ਦੀ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।} ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। 3, 4, ਅਤੇ 5 ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ XY- ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ L ਹੈ ਅਤੇ L ਵਿੱਚ $R = \{(L_1, L_2) : L_1$ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ L_2 ਨਾਲ} ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ R ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਰੇਖਾ $y = 2x + 4$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ {1, 2, 3, 4} ਵਿੱਚ] R = {(1, 2), (2, 2), (1, 1), (4,4), (1, 3), (3, 3), (3, 2)} ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(B) R ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(C) R ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਿਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(D) R ਇੱਕ ਸਮਤੁੱਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

16. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ] R = {(a, b) : $a = b$ ï 2, $b > 6$} ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

(A) (2, 4) ∈ R (B) (3, 8) ∈ R (C) (6, 8) ∈ R (D) (8, 7) ∈ R

1.3 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ (Types of Functions)

ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ, ਕੁਝ ਖਾਸ ਫਲਨ ਜਿਵੇਂ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ, ਅਚਲ ਫਲਨ, ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ, ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ, ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ, ਚਿੰਨ੍ਹ, ਫਲਨ ਆਦਿ ਦਾ ਵਰਣਨ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨਾਲ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ।ਕਿਉਂਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਅਧਿਐਨ ਦੀਆਂ ਹੋਰ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ (Disciplines) ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਬਾਰੇ ਆਪਣਾ ਅਧਿਐਨ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ ਇਸਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਖਤਮ ਕੀਤਾ ਸੀ।ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

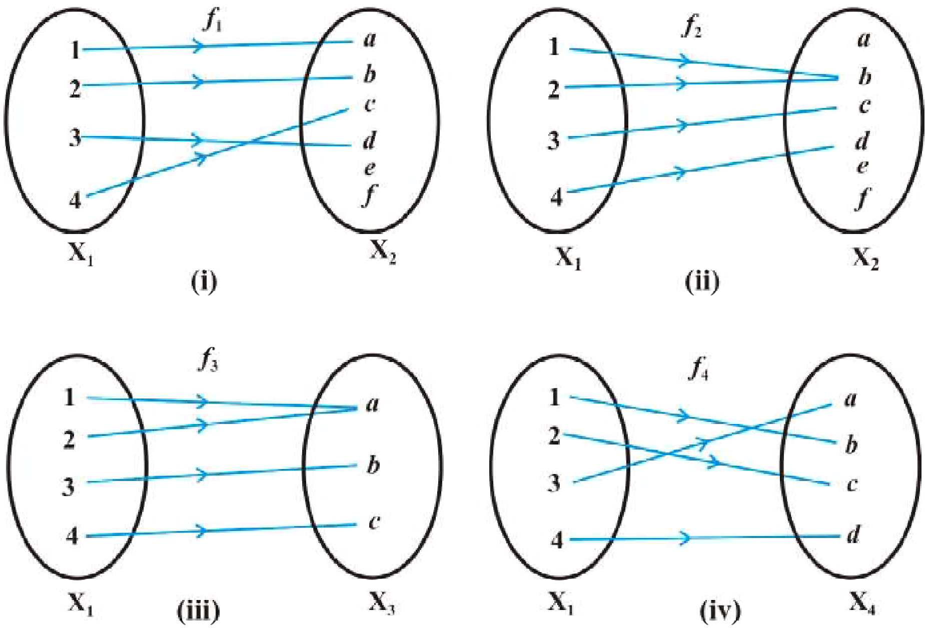
ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਏ ਫਲਨ f_1, f_2, f_3 ਅਤੇ f_4 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ X_1 ਦੇ ਵੱਖ (distinct) ਤੱਤਾਂ ਦੇ, ਫਲਨ f_1 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਵੀ ਵੱਖ ਹਨ, ਪਰੰਤੂ f_2 ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋ ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ b ਹੈ।ਦੁਬਾਰਾ X_2 ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤੱਤ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ e ਅਤੇ f ਜਿਹੜੇ f_1 ਦੇ ਬਾਬਤ X_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ f_3 ਦੇ ਬਾਬਤ X_3 ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ X_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 : ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (one-one) ਜਾਂ ਇਨਜੈਕਟਿਵ (injective) ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ X ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਵੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ $x_1, x_2 \in X$, ਲਈ $f(x_1) = f(x_2)$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $x_1 = x_2$, ਨਹੀਂ ਤਾਂ f ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ (many-one) ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 (i) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f_1 ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 1.2 (ii) ਵਿੱਚ f_2 ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.2

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6. ਫਲਨ $f: X \to Y$ (ਔਨਟੂ) (onto) ਜਾਂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ (surjective) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ Y ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ, X ਦੇ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਹਰੇਕ $y \in Y$, ਲਈ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$.

ਚਿੱਤਰ 1.2 (iii) ਵਿੱਚ, ਫਲਨ f_3 ਉੱਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ 1-2 (i) ਵਿੱਚ, ਫਲਨ f_1 ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ X_2 ਦੇ ਤੱਤ e, ਅਤੇ f, f_1 ਦੇ ਬਾਬਤ X_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : $f: X \to Y$ ਇੱਕ (ਔਨਟੂ) ਫਲਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ f ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ (range) = Y.

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7. ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ (one-one and onto) ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ **(bijective)** ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਦੋਵੇਂ ਹੋਵੇ।

ਚਿੱਤਰ 1.2 (iv) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f_4 ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਮਾਤ X ਦੇ ਸਾਰੇ 50 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ A ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $f: A \to \mathbf{N}$] $f(x)$ = ਵਿਦਿਆਰਥੀ x ਦਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜਮਾਤ ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਵਿਆਪਕਤਾ ਦਾ ਬਿਨਾਂ ਨੁਕਸਾਨ ਕੀਤੇ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ 1 ਤੋਂ 50

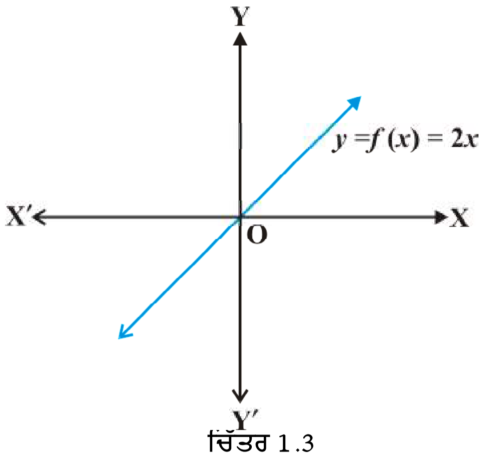
ਤੱਕ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ **N** ਦਾ ਤੱਤ 51] ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 51] A ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਹਨ। ਦੁਬਾਰਾ, f ਉੱਤੇ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $1 \in \mathbf{N}$, ਦੇ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਕਿਸੇ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ $f(x) = 2x = 1$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$- ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ **R** ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ y ਲਈ **R** ਵਿੱਚ $\frac{y}{2}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $f(\frac{y}{2}) = 2\ (\frac{y}{2}) = y$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਉੱਤੇ ਵੀ ਹੈ।



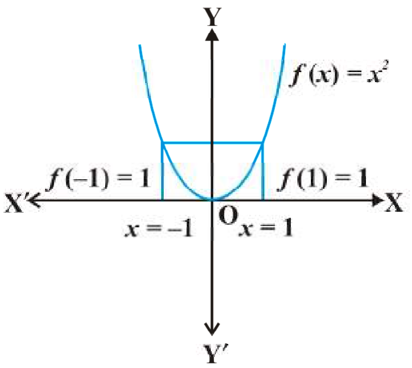
ਚਿੱਤਰ 1.3

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(1) = f(2) = 1$ ਅਤੇ $x > 2$ ਲਈ $f(x) = x$ ï 1 ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, ਉੱਤੇ ਤਾਂ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $f(1) = f(2) = 1$, ਪਰੰਤੂ f ਔਨਟੂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $y \in \mathbf{N}, y \neq 1$, ਲਈ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $y + 1$ ਚੁਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਜੋ $f\ (y + 1) = y + 1$ ï $1 = y$ ਨਾਲ ਵੀ $1 \in \mathbf{N}$ ਲਈ $f\ (1) = 1$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ f(ï 1) = 1 = $f(1)$, ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਦਾ ਤੱਤ&2] ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ x ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਨਹੀਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)A ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।



f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 1 ਅਤੇ –1 ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ।
ਚਿੱਤਰ 1.4

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f: $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ :

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ਜੇਕਰ } x \text{ ਟਾਂਕ ਹੈ} \\ x-1, \text{ਜੇਕਰ } x \text{ ਜਿਸਤ ਹੈ} \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $f(x_1) = f(x_2)$ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ x_1 ਟਾਂਕ ਹੈ ਅਤੇ x_2 ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ $x_1 + 1 = x_2$ ï 1, ਭਾਵ x_2 ï $x_1 = 2$ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਅਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x_1 ਦੇ ਜਿਸਤ ਅਤੇ x_2 ਦੇ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਦੀ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਟਾਂਕ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਜਿਸਤ ਹੋਣਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੋਵੇਂ ਟਾਂਕ ਹਨ, ਤਾਂ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$. ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਲਈ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੋਵੇਂ ਜਿਸਤ ਹਨ, ਤਾਂ ਵੀ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1$ ï 1 = x_2 ï 1 $\Rightarrow x_1 = x_2$- ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ $2r + 1$, ਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਸੰਖਿਆ $2r + 2$ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ $2r$, **N** ਦੀ ਸੰਖਿਆ $2r$ ï 1 ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਤੱਤ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 1 ਅਤੇ 2 ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 3 ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ, ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੀ ਤੱਤ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪ੍ਰਗਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰ ਵਿਰੋਧੀ ਗੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿ ਇੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਨੂੰ $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਤਿੰਨ ਤੱਤ f ਅੰਤਰਗਤ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ $\{1, 2, 3\}$ ਦੇ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ f ਔਨਟੂ ਵੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 13 ਅਤੇ 14 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸੀਮਿਤ (finite) ਸਮੂਹ X, ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਉਦਾਹਰਣ 8 ਅਤੇ

10 ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਲਈ ਇਹ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹਾਂ (Infinite) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਖਾਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (characteristic) ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \frac{1}{x}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\mathbf{R}_*$ ਸਾਰੇ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}_*$ ਨੂੰ $\mathbf{N}$ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ $\mathbf{R}_*$ ਹੀ ਰਹੇ, ਤਾਂ ਵੀ ਕੀ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਸੱਚ ਹੋਵੇਗਾ ?

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇਨਜੈਕਟਿਵ (Injective) ਅਤੇ ਸਰਜੈਕਟਿਵ (Surjective) ਗੁਣਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ:

(i) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(iii) $f(x) = x^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(iv) $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਫਲਨ ਹੈ।

(v) $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਫਲਨ ਹੈ।

3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = [x]$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਮਹੱਤਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ- ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $[x]$, x ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = |x|$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $|x|$ ਬਰਾਬਰ x, ਜੇਕਰ x ਧਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਤੇ $|x|$ ਬਰਾਬਰ ï x, ਜੇਕਰ x ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \\ \text{ï } 1, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0, \end{cases}$$

ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਫਲਨ ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਨਾ ਔਨਟੂ ਹੈ।

6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6, 7} ਅਤੇ f = {(1, 4), (2, 5), (3, 6)} A ਤੋਂ B ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਹਨ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) $f(x) = 3$ ï $4x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ।

(ii) $f(x) = 1 + x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ।

8. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f: A \times B \to B \times A$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $f(a, b) = (b, a)$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਫਲਨ ਹੈ।

9. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ, $f(n) = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & \text{ਜੇਕਰ } n \text{ ਟਾਂਕ ਹੈ} \\ \dfrac{n}{2}, & \text{ਜੇਕਰ } n \text{ ਜਿਸਤ ਹੈ} \end{cases}$

ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਫਲਨ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ (bijective) ਹੈ। ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

10. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = **R** ï {3} ਅਤੇ B = **R** ï {1} ਹਨ। $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x-3}\right)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: A \to B$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕੀ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਦੱਸੋ।

11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^4$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) f ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ ਹੈ। (B) f ਬਹੁ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ।

(C) f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। (D) f ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

12. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = 3x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਹੈ। ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

(A) f ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ ਹੈ। (B) f ਬਹੁ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ।

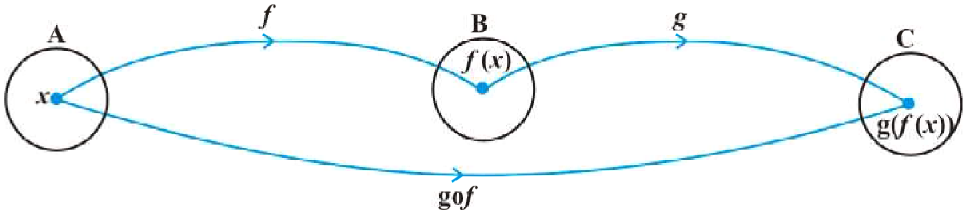
(C) f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ (D) f ਨਾ ਤਾਂ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

1.4 ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਹੋਣ ਯੋਗ ਫਲਨ (Composition of Functions and Invertible Function)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਬਾਈਜੈਕਟਿਵ (bijective) ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ (Inverse) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੰਨ 2006 ਦੀ ਕਿਸੇ ਬੋਰਡ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠ ਚੁੱਕੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ A 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਬੋਰਡ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੋਰਡ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਸਮੇਂ ਆਪਣੀ ਉੱਤਰ ਪੱਤਰੀ ਤੇ ਲਿਖਦਾ ਹੈ। ਰੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਨੂੰ ਗੁਪਤ (deface) ਰੱਖਣ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਇੱਕ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ (Fake Code Number) ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $B \subset N$ ਸਾਰੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ $C \subset N$ ਸਾਰੇ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰਾਂ ਦਾ

ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਫਲਨਾਂ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਬਣਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ $f(a)$ = ਵਿਦਿਆਰਥੀ a ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਅਤੇ $g(b)$ = ਰੋਲ ਨੰਬਰ b ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਰਾਹੀਂ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲਈ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ g ਰਾਹੀਂ ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਲਈ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ f ਅਤੇ g ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ, gof ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ $gof: A \to C$, $gof(x) = g(f(x))$, $\forall\ x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.5

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \{2, 3, 4, 5\} \to \{3, 4, 5, 9\}$ ਅਤੇ $g: \{3, 4, 5, 9\} \to \{7, 11, 15\}$ ਦੋ ਫਲਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = f(5) = 5$ ਅਤੇ $g(3) = g(4) = 7$ ਅਤੇ $g(5) = g(9) = 11$, ਤਾਂ gof ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $gof(2) = g(f(2)) = g(3) = 7, gof(3) = g(f(3)) = g(4) = 7, gof(4) = g(f(4)) = g(5) = 11$ ਅਤੇ $gof(5) = g(5) = 11$.

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਫਲਨ $f(x) = \cos x$ ਅਤੇ $g(x) = 3x^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ gof ਅਤੇ fog ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ $gof \neq fog$. ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $gof(x) = g(f(x)) = g(\cos x) = 3(\cos x)^2 = 3\cos^2 x$. ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $fog(x) = f(g(x)) = f(3x^2) = \cos(3x^2)$ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $x = 0$ ਲਈ $3\cos^2 x \neq \cos 3x^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $gof \neq fog$.

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਜੇਕਰ $f(x) = \dfrac{3x+4}{5x-7}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: \mathbf{R} - \left\{\dfrac{7}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$ ਅਤੇ $g(x) = \dfrac{7x+4}{5x-3}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $g: \mathbf{R} - \left\{\dfrac{3}{5}\right\} \to \mathbf{R} - \left\{\dfrac{7}{5}\right\}$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $fog = I_A$ ਅਤੇ $gof = I_B$ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $I_A(x) = x,\ \forall\, x \in A$ ਅਤੇ $I_B(x) = x,\ \forall\, x \in B$, ਜਿੱਥੇ

$A = \mathbf{R}$ ï $\left\{\frac{3}{5}\right\}$, $B = \mathbf{R}$ ï $\left\{\frac{7}{5}\right\}$ ਹਨ। I_A ਅਤੇ I_B ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਤਤਸਮਕ (Identity) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$gof(x) = g\left(\frac{3x+4}{5x-7}\right) = \frac{7\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)+4}{5\left(\frac{(3x+4)}{(5x-7)}\right)-3} = \frac{21x+28+20x-28}{15x+20-15x+21} = \frac{41x}{41} = x$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $fog(x) = f\left(\frac{7x+4}{5x-3}\right) = \frac{3\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)+4}{5\left(\frac{(7x+4)}{(5x-3)}\right)-7} = \frac{21x+12+20x-12}{35x+20-35x+21} = \frac{41x}{41} = x$

ਇਸ ਲਈ $gof(x) = x, \forall x \in B$ ਅਤੇ $fog(x) = x, \forall x \in A$, ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $gof = I_B$ ਅਤੇ $fog = I_A$.

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ ਤਾਂ $gof: A \to C$ ਵੀ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : $gof(x_1) = gof(x_2)$

$\Rightarrow$ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

$\Rightarrow$ $f(x_1) = f(x_2)$, ਕਿਉਂਕਿ g ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ,

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$, ਕਿਉਂਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ gof ਵੀ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਔਨਟੂ ਹਨ, ਤਾਂ $gof: A \to C$ ਵੀ ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ $z \in C$ ਹੈ। g ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ z ਦੇ ਇੱਕ ਪੂਰਵ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (Pre-image) $y \in B$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $g(y) = z$, ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ g ਔਨਟੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y \in B$ ਲਈ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$, ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ f ਔਨਟੂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $gof(x) = g(f(x)) = g(y) = z$, ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ gof ਔਨਟੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. f ਅਤੇ g ਅਜਿਹੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ gof ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੈ। ਕੀ f ਅਤੇ g ਦੋਵੇਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $f(x) = x$, $\forall\, x$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ $g(x) = x$, $x = 1, 2, 3, 4$ ਅਤੇ $g(5) = g(6) = 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $g: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ $gof: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ਇੱਥੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $gof(x) = x$, $\forall\, x$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ gof ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ g ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਜੇਕਰ gof ਔਨਟੂ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ f ਅਤੇ g ਦੋਵੇਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਔਨਟੂ ਹਨ ?

ਹੱਲ : $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ ਅਤੇ $g: \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3\}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = f(4) = 3, g(1) = 1, g(2) = 2$ ਅਤੇ $g(3) = g(4) = 3.$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ gof ਔਨਟੂ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ f ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ ਤੇ gof ਦੇ ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ gof ਔਨਟੂ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ g ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਭਾਗ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਬੋਰਡ ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੇ ਪਰਿਪੇਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ f ਅਤੇ g ਤੇ ਹੋਰ ਬਰੀਕੀ ਨਾਲ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਬੋਰਡ ਦੀ ਜਮਾਤ X ਦੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬੈਠਣ ਵਾਲੇ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਫਲਨ f ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਇੱਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨੂੰ g ਅੰਤਰਗਤ ਇੱਕ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉੱਤਰ ਪੱਤਰੀਆਂ ਦੇ ਮੁਲਾਂਕਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਪਰੀਖਿਅਕ ਹਰੇਕ ਮੁਲਾਂਕਣ ਹੋਈ ਪੱਤਰੀ ਤੇ ਨਕਲੀ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਦੇ ਅੱਗੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਲਿਖ ਕੇ ਬੋਰਡ ਦੇ ਦਫ਼ਤਰ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਬੋਰਡ ਦੇ ਅਧਿਆਕੀ, g ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ, ਹਰੇਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ ਦੁਬਾਰਾ ਸੰਗਤ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਲਗਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਸੰਕੇਤਿਕ ਨੰਬਰ ਦੀ ਬਜਾਏ ਸਿੱਧੇ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ, f ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ, ਹਰੇਕ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਨੂੰ ਉਸ ਰੋਲ ਨੰਬਰ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨਾਲ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਸਿੱਧੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਨਾਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ f ਅਤੇ g, ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਰਾਹੀਂ, gof, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਪਹਿਲਾਂ f ਅਤੇ ਫੇਰ g ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਸੰਯੁਕਤ gof, ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲਾਂ g ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਅਤੇ ਫ਼ਿਰ f ਦੀ ਉਲਟ ਕ੍ਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $f(1) = a, f(2) = b$ ਅਤੇ $f(3) = c$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $g: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ ਦਾ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਜੋ $gof = I_X$ ਅਤੇ $fog = I_Y$, ਜਿੱਥੇ $X = \{1, 2, 3\}$ ਅਤੇ $Y = \{a, b, c\}$ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $g: \{a, b, c\} \to \{1, 2, 3\}$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $g(a) = 1, g(b) = 2$ ਤੇ $g(c) = 3$, 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ $gof = I_X$, X ਤੇ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ $fog = I_Y$, Y ਤੇ ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਹ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਤੱਥ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਪਰਿਣਾਮ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੇਵਲ ਏਨਾ ਹੀ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ (converse) ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ, ਜੇਕਰ $f: X \to Y$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਫਲਨ $g: Y \to X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $gof = I_X$ ਅਤੇ $fog = I_Y$ ਤਾਂ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀ ਚਰਚਾ, ਉਦਾਹਰਣ 22 ਅਤੇ ਟਿੱਪਣੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 9. ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ **(Invertible)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਫਲਨ $g: Y \to X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $gof = I_X$ ਅਤੇ $fog = I_Y$ ਹੈ। ਫਲਨ g ਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ ਉਲਟ (Inverse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ f^{-1} ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਤਾਂ f ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ਤਾਂ f ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੱਥ f ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੋਂ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ f ਦਾ ਉਲਟ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਨਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \mathbf{N} \to Y$, $f(x) = 4x + 3$, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $Y = \{y \in \mathbf{N}: y = 4x + 3$ ਕਿਸੇ $x \in \mathbf{N}$ ਲਈ$\}$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। ਉਲਟ ਫਲਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : Y ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ y 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। Y, ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{N}$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਤੱਤ x ਲਈ $y = 4x + 3$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = \frac{(y-3)}{4}$ ਹੈ। ਹੁਣ $g(y) = \frac{(y-3)}{4}$ ਰਾਹੀਂ $g: Y \to \mathbf{N}$ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $gof(x) = g(f(x)) = g(4x + 3) = \frac{(4x+3-3)}{4} = x$ ਅਤੇ $fog(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{(y-3)}{4}\right) = \frac{4(y-3)}{4} + 3 = y$ ï $3 + 3 = y$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof = I_N$ ਅਤੇ $fog = I_Y$, ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ ਫਲਨ g ਫਲਨ f ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Y = \{n^2 : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{N}$ ਹੈ। ਫਲਨ $f: \mathbf{N} \to Y$ ਜਿੱਥੇ $f(n) = n^2$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। f ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਲੱਭੋ।

ਹੱਲ : Y ਦਾ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ, y, n^2 ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $n \in \mathbf{N}$. ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $n = \sqrt{y}$ ਇਸ ਤੋਂ $g(y) = \sqrt{y}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $g : Y \to \mathbf{N}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $gof(n) = g(n^2) = \sqrt{n^2} = n$ ਅਤੇ $fog(y) = f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $gof = I_N$ ਅਤੇ $fog = I_Y$ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $f^{-1} = g$.ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 4x^2 + 12x + 15$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f : \mathbf{N} \to S$, ਜਿੱਥੇ S, f ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੈ, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ। f ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ y ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $y = 4x^2 + 12x + 15$, ਜਿੱਥੇ $x \in \mathbf{N}$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $y = (2x + 3)^2 + 6. \Rightarrow x = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$.

ਹੁਣ, ਇੱਕ ਫਲਨ $g : S \to \mathbf{N}$, $g(y) = \frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\quad gof(x) = g(f(x)) = g(4x^2 + 12x + 15) = g((2x + 3)^2 + 6))$

$$= \frac{\left(\left(\sqrt{(2x+3)^2+6-6}\right)-3\right)}{2} = \frac{(2x+3-3)}{2} = x$$

ਅਤੇ $\quad fog(y) = f\left(\frac{\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}\right) = \left(\frac{2\left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3\right)}{2}+3\right)^2 + 6$

$$= \left(\left(\sqrt{y-6}\right)-3+3\right)^2 + 6 = \left(\sqrt{y-6}\right)^2 + 6 = y - 6 + 6 = y.$$

ਇਸ ਲਈ : $gof = I_N$ ਅਤੇ $fog = I_S$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ f ਇੱਕ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $f^{-1} = g$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਤਿੰਨ ਫਲਨ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਅਤੇ $h : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ ’ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $f(x) = 2x$, $g(y) = 3y + 4$ ਅਤੇ $h(z) = \sin z$, $\forall x, y$ ਅਤੇ $z \in \mathbf{N}$- ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $ho(gof) = (hog)\, of$.

ਹੱਲ : ਜਿੱਥੇ $\quad ho(gof)(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))) = h(g(2x))$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4), \ \forall x \in \mathbf{N}$$

ਨਾਲ ਹੀ $\quad ((hog)\,o f)(x) = (hog)(f(x)) = (hog)(2x) = h(g(2x))$

$$= h(3(2x) + 4) = h(6x + 4) = \sin(6x + 4), \ \forall x \in \mathbf{N}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $ho(gof) = (hog)\,o\,f$

ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿਆਪਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1: ਜੇਕਰ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ ਅਤੇ $h: Z \to S$ ਤਿੰਨ ਫਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ

$$ho(gof) = (hog)\,o\,f$$

ਉਪਪੱਤੀ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$ho(gof)\,(x) = h(gof(x)) = h(g(f(x))),\ \forall\, x \text{ in } X$$

ਅਤੇ $$(hog)\ of\,(x) = hog(f(x)) = h(g(f(x))),\ \forall\, x \text{ in } X$$

ਇਸ ਲਈ $$ho(gof) = (hog)\,o\,f$$

ਉਦਾਹਰਣ 27. $f: \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\}$ ਅਤੇ $g: \{a, b, c\} \to$ {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $g(a) =$ ਸੇਬ, $g(b) =$ ਗੇਂਦ ਅਤੇ $g(c) =$ ਬਿੱਲੀ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f, g ਅਤੇ gof ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹਨ। f^{-1}, g^{-1} ਅਤੇ $(gof)^{-1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ f ਅਤੇ g ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f^{-1}: \{a, b, c\} \to (1, 2, 3\}$ ਅਤੇ g^{-1}: {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $\to \{a, b, c\}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਕਿ $f^{-1}\{a\} = 1$, $f^{-1}\{b\} = 2$, $f^{-1}\{c\} = 3$, g^{-1}\{ਸੇਬ\} $= a$, g^{-1}\{ਗੇਂਦ\} $= b$, g^{-1}\{ਬਿੱਲੀ\} $= c$ ਹੈ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f^{-1}of = I_{\{1, 2, 3\}}$, $f\,o\,f^{-1} = I_{\{a, b, c\}}$, $g^{-1}og = I_{\{a, b, c\}}$ ਅਤੇ $g\,o\,g^{-1} = I_D$, ਜਿੱਥੇ D = {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} ਹੈ। ਹੁਣ $gof: \{1, 2, 3\} \to$ {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $gof(1) =$ ਸੇਬ, $gof(2) =$ ਗੇਂਦ, $gof(3) =$ ਬਿੱਲੀ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ $(gof)^{-1}$: {ਸੇਬ, ਗੇਂਦ, ਬਿੱਲੀ} $\to \{1, 2, 3\}$ ਨੂੰ $(gof)^{-1}$ (ਸੇਬ) $= 1$, $(gof)^{-1}$ (ਗੇਂਦ) $= 2$ ਅਤੇ $(gof)^{-1}$ (ਬਿੱਲੀ) $= 3$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $(g\,o\,f)^{-1}\ o\ (g\,o\,f) = I_{\{1, 2, 3\}}$ ਅਤੇ $(g\,o\,f)\ o\ (g\,o\,f)^{-1} = I_D$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ f, g ਅਤੇ gof ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹਨ।

ਹੁਣ $f^{-1}og^{-1}$ (ਸੇਬ) $= f^{-1}(g^{-1}$ (ਸੇਬ)) $= f^{-1}(a) = 1 = (gof)^{-1}$ (ਸੇਬ)

$f^{-1}og^{-1}$ (ਗੇਂਦ) $= f^{-1}(g^{-1}$(ਗੇਂਦ)) $= f^{-1}(b) = 2 = (gof)^{-1}$ (ਗੇਂਦ)

ਅਤੇ $f^{-1}og^{-1}$ (ਬਿੱਲੀ) $= f^{-1}(g^{-1}$(ਬਿੱਲੀ)) $= f^{-1}(c) = 3 = (gof)^{-1}$ (ਬਿੱਲੀ)

ਇਸ ਲਈ $$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿਆਪਕ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: X \to Y$ ਅਤੇ $g: Y \to Z$ ਦੋ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ gof ਵੀ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ਹੈ।

ਉਪਪੱਤੀ : gof ਨੂੰ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਅਤੇ $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਇਹ

ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ ਕਿ $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = I_X$ ਅਤੇ $(gof)o(f^{-1}og^{-1}) = I_Z$ ਹੈ।

ਹੁਣ $(f^{-1}og^{-1})o(gof) = ((f^{-1}og^{-1})\ og)\ of$, ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਰਾਹੀਂ

$= (f^{-1}o(g^{-1}og))\ of$, ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਰਾਹੀਂ

$= (f^{-1}oI_Y)\ of$, g^{-1} ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ

$= I_X$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ] $(gof)\ (f^{-1}\ og^{-1}) = I_Z$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ S = {1, 2, 3} ਹੈ। ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f: S \to S$ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਹਨ। f^{-1}, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

(a) $f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1)\}$

(c) $f = \{(1, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

ਹੱਲ :

(a) ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਉਲਟ $f^{-1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} = f$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(b) ਕਿਉਂਕਿ $f(2) = f(3) = 1$, ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(c) ਇਹ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਵੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ ਇਸ ਕਰਕੇ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ $f^{-1} = \{(3, 1), (2, 3), (1, 2)\}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: \{1, 3, 4\} \to \{1, 2, 5\}$ ਅਤੇ $g: \{1, 2, 5\} \to \{1, 3\}$,
$f = \{(1, 2), (3, 5), (4, 1)\}$ ਅਤੇ $g = \{(1, 3), (2, 3), (5, 1)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ। gof ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, g ਅਤੇ h, **R** ਤੋਂ **R** ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$(f + g)oh = foh + goh$$

$$(f \,.\, g)oh = (foh) \,.\, (goh)$$

3. gof ਅਤੇ fog ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ

(i) $f(x) = |x|$ ਅਤੇ $g(x) = |5x - 2|$

(ii) $f(x) = 8x^3$ ਅਤੇ $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$

4. ਜੇਕਰ $f(x) = \frac{(4x+3)}{(6x-4)}$, $x \neq \frac{2}{3}$, ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $x \neq \frac{2}{3}$ ਲਈ $fof(x) = x$ ਹੈ। f ਦਾ ਉਲਟ ਫਲਨ ਕੀ ਹੈ ?

5. ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ :

(i) $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{10\}$ ਜਿੱਥੇ
$f = \{(1, 10), (2, 10), (3, 10), (4, 10)\}$ ਹੈ।

(ii) $g : \{5, 6, 7, 8\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ ਜਿੱਥੇ
$g = \{(5, 4), (6, 3), (7, 4), (8, 2)\}$ ਹੈ।

(iii) $h : \{2, 3, 4, 5\} \to \{7, 9, 11, 13\}$ ਜਿੱਥੇ
$h = \{(2, 7), (3, 9), (4, 11), (5, 13)\}$ ਹੈ।

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f : [ï 1, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x+2)}$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ। ਫਲਨ $f : [ï 1, 1] \to (f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ)] ਦਾ ਉਲਟ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਸੰਕੇਤ : $y \in$ ਵਿਸਥਾਰ ਲਈ f, ਦੇ ਕਿਸੇ] $[ï 1, 1]$ ਲਈ x ਦੇ ਬਾਬਤ $y = f(x) = \frac{x}{x+2}$, ਭਾਵ $x = \frac{2y}{(1-y)}$)

7. $f(x) = 4x + 3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ। f ਦਾ ਉਲਟ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. $f(x) = x^2 + 4$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f : \mathbf{R}_+ \to [4, \infty)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਉਲਟ $f^{ï1}$, $f^{ï1}(y) = \sqrt{y-4}$, ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\mathbf{R}_+$ ਸਾਰੇ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

9. $f(x) = 9x^2 + 6x ï 5$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ $f : \mathbf{R}_+ \to [ï 5, \infty)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ ਅਤੇ $f^{ï1}(y) = \left(\frac{(\sqrt{y+6})-1}{3}\right)$ ਹੈ।

10. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : X \to Y$ ਇੱਕ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਦਾ ਉਲਟ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੈ। (ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨੋ ਕਿ f ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ g_1 ਅਤੇ g_2 ਹਨ। ਤਾਂ ਸਾਰੇ $y \in Y$ ਲਈ $fog_1(y) = 1_Y(y) = fog_2(y)$ ਹੈ। ਹੁਣ f ਦੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਣ ਦੇ ਗੁਣ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰੋ।)

11. $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}, f(1) = a, f(2) = b$ ਅਤੇ $f(3) = c$. ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। $f^{ï1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(f^{ï1})^{ï1} = f$ ਹੈ।

12. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: X \rightarrow Y$ ਇੱਕ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f^{ï1}$ ਦਾ ਉਲਟ f, ਹੈ ਭਾਵ $(f^{ï1})^{ï1} = f$ ਹੈ।

13. ਜੇਕਰ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (3 - x^3)^{\frac{1}{3}}$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $fof(x)$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $x^{\frac{1}{3}}$ (B) x^3 (C) x (D) $(3 ï x^3)$

14. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ $f: \mathbf{R}\ ï \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \rightarrow \mathbf{R}$ ਹੈ। f ਦਾ ਉਲਟ ਭਾਵ ਪ੍ਰਤਿਚਿੱਤਰ (Map) g : ਵਿਸਥਾਰ $f \rightarrow \mathbf{R}\ ï \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ :

(A) $g(y) = \dfrac{3y}{3-4y}$ (B) $g(y) = \dfrac{4y}{4-3y}$

(C) $g(y) = \dfrac{4y}{3-4y}$ (D) $g(y) = \dfrac{3y}{4-3y}$

1.5 ਦੋ-ਆਧਾਰਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (Binary Operations)

ਆਪਣੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਦਿਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਚਾਰ ਮੂਲ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ, ਨਾਮ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ $a + b$ ਜਾਂ $a ï b$ ਜਾਂ ab ਜਾਂ $\dfrac{a}{b}, b \neq 0$ ਨੂੰ ਸੰਬੰਧਿਤ (Associate) ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੱਲ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ, ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ, ਕੇਵਲ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੀ ਜੋੜ ਜਾਂ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਾਨੂੰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਚਾਹੀਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜਫਲ ਨੂੰ ਫੇਰ ਤੀਜੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਜੋੜ, ਗੁਣਾ, ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ 'ਦੋ-ਅਧਾਰੀ' ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ 'ਦੋ ਅਧਾਰ ਵਾਲੀ'। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਆਪਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਚਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵੀ ਆ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਇੱਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਸਮੂਹ X ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਾਂ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ, ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ, X ਦੇ ਦੋ ਤੱਤਾਂ a ਅਤੇ b ਨੂੰ X ਦੇ ਹੀ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਵਿਆਪਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 10. ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, ਇੱਕ ਫਲਨ $* : A \times A \to A$ ਹੈ। ਅਸੀਂ $*\,(a, b)$ ਨੂੰ $a * b$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਜੋੜ, ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਪਰ ਭਾਗ **R** ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਭਾਗ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **R** ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a + b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ,

ï $: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a$ ï b ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ,

$\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to ab$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ,

ਕਿਉਂਕਿ ó+ô, óï ôਅਤੇ ó×ôਫਲਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ **R** ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਪਰੰਤੂ $\div : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$, ਇੱਕ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $b = 0$ ਲਈ $\frac{a}{b}$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $\div$ $: \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ $\mathbf{R}_*$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ **N** ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ï $: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $(a, b) \to a$ ï b, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੀ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ óï ôਦੇ ਤਹਿਤ (3, 5) ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ 3 ï 5 = ï 2 $\notin$ **N**. ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $\div\, \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $(a, b) \to \frac{a}{b}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ^÷* ਦੇ ਤਹਿਤ (3 ¸ 5) ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ $3 \div 5 = \frac{3}{5} \notin \mathbf{N}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $(a, b) \to a + 4b^2$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੀ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $*$ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ (a, b) ਨੂੰ **R** ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ $a + 4b^2$ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $*$ **R** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 32. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ P, ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ, ਸਮੂਹ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\cup : P \times P \to P$, $(A, B) \to A \cup B$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ $\cap : P \times P \to P$, $(A, B) \to A \cap B$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, P ਵਿੱਚ ਦੋ ਆਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੰਘ ਸੰਕਿਰਿਆ (Union Operation) $\cup$, $P \times P$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜ (A, B) ਨੂੰ P ਦੇ ਇੱਕ

ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ $A \cup B$ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\cup$, ਸਮੂਹ P ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਾਟ (Intersection) ਸੰਕਿਰਿਆ $\cap$, $P \times P$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ (A, B) ਨੂੰ P ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ $A \cap B$ ਤੱਕ ਲੈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\cap$, ਸਮੂਹ P ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a, b) \to$ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $\{a, b\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\vee : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $(a, b) \to$ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $\{a, b\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $\wedge : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vee$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਜੋੜੇ (a, b) ਨੂੰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R}$ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤੱਤ, ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ, 'ਤੇ ਲੈ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\vee$ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਤਰਕ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $\wedge$ ਵੀ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : $\vee(4, 7) = 7$, $\vee(4, ï\ 7) = 4$, $\wedge(4, 7) = 4$ ਅਤੇ $\wedge(4, ï\ 7) = ï\ 7$ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ * ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਾਰਣੀ ਰਾਹੀਂ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਸੰਕਿਰਿਆ * ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, $A = \{1, 2, 3\}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਣ 33 ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ A ਵਿੱਚ ਸੰਕਿਰਿਆ $\vee$ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ (ਸਾਰਣੀ 1.1) ਰਾਹੀਂ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ $\vee(1,3) = 3$, $\vee(2, 3) = 3$, $\vee(1, 2) = 2$.ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 1.1

$\vee$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	3

ਇੱਥੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ (i, j)ਵੀਂ ਇੰਦਰਾਜ ਸਮੂਹ A ਦੇ iਵੇਂ ਅਤੇ jਵੇਂ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਵਿਆਪੀਕਰਣ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅਸਾਨ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \to A$ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ n ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਥੰਮ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ (i, j)ਵੀਂ ਇੰਦਰਾਜ $a_i * a_j$ ਹੋਵੇਗੀ। ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ n ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੀ ਕਿਸੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ, ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \to A$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $a_i * a_j$ = ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਦੀ iਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ jਵੇਂ ਸਤੰਬਾਂ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 3 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ (order) ਵਿੱਚ ਜੋੜੀਏ, ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $3 + 4 = 4 + 3$, ਪਰੰਤੂ 3 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜੇ ਦਿੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ $3\ ï\ 4 \neq 4\ ï\ 3$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 3 ਅਤੇ 4 ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮਹੱਤਵ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ 3 ਅਤੇ 4 ਦੀ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਭਿੰਨ ਨਤੀਜੇ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ 3 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਅਰਥ ਪੂਰਣ ਹੈ ਪਰ 3

ਅਤੇ 4 ਦਾ ਅੰਤਰ ਅਤੇ ਭਾਗ ਅਰਥਹੀਨ ਹੈ। ਅੰਤਰ ਅਤੇ ਭਾਗ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਲਿਖਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਕਿ '3 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਨੂੰ ਘਟਾਉ' ਜਾਂ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਘਟਾਉ' ਜਾਂ '3 ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ' ਜਾਂ '4 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।' ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 11. ਸਮੂਹ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ$*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commutative) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $a, b \in X$ ਲਈ $a * b = b * a$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\times : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commutative) ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਪਰ ï $: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commutative) ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $a + b = b + a$ ਅਤੇ $a \times b = b \times a$, $\forall\, a, b \in \mathbf{R}$, ਹਨ, ਇਸ ਕਰਕੇ ó+ôਅਤੇ ó×ôਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ óï ôਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 3 ï $4 \neq 4$ ï 3. ਹੁੰਦਾ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ $3 \div 4 \neq 4 \div 3$, ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ó÷ôਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a * b = a + 2b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $3 * 4 = 3 + 8 = 11$ ਅਤੇ $4 * 3 = 4 + 6 = 10$, ਇਸ ਲਈ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ X ਦੇ ਤਿੰਨ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ X ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਿਸੇ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਿਕ ਸਮੱਸਿਆ ਉੱਠਦੀ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $a * b * c$ ਦਾ ਅਰਥ $(a * b) * c$ ਜਾਂ $a * (b * c)$ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਵਿਅੰਜਕ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ (8 ï 5) ï $2 \neq 8$ ï (5 ï 2). ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 8, 5 ਅਤੇ 3 ਦਾ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ 'ਘਟਾਓ' ਦੇ ਰਾਹੀਂ ਸੰਬੰਧ ਅਰਥਹੀਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਬਰੈਕਟ(Bracket) ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ। ਪਰ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ $8 + 5 + 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਚਾਹੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $(8 + 5) + 2$ ਜਾਂ $8 + (5 + 2)$ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਲਈ ਤਿੰਨ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਸੰਬੰਧ ਬਗੈਰ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਵੀ, ਅਰਥਪੂਰਨ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 12. ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ$* : A \times A \to A$ ਸਹਿਚਰ (Associative) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ

$$(a * b) * c = a * (b * c),\ \forall\, a, b, c, \in A.$$

ਉਦਾਹਰਣ 36. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\mathbf{R}$ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਸਹਿਚਰ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ $\mathbf{R}$ ਵਿੱਚ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਸਹਿਚਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ $(a + b) + c = a + (b + c)$ ਅਤੇ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, $\forall\ a, b, c \in R$ ਹੈ ਬਲਕਿ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਭਾਗ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ (8 ï 5) ï $3 \neq 8$ ï (5 ï 3) ਅਤੇ $(8 \div 5) \div 3 \neq 8 \div (5 \div 3)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 37. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a * b \to a + 2b$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ

$$(8 * 5) * 3 = (8 + 10) * 3 = (8 + 10) + 6 = 24,$$

ਜਦੋਂ ਕਿ $$8 * (5 * 3) = 8 * (5 + 6) = 8 * 11 = 8 + 22 = 30.$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਹਿਚਰ ਗੁਣ ਇਸ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਿਅੰਜਕ $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਗੁਣ ਦੇ ਕਾਰਨ ਇਹ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਇਸ ਗੁਣ ਦ ਬਿਨਾਂ ਵਿਅੰਜਕ $a_1 * a_2 * \ldots * a_n$ ਵਿੱਚ ਸ਼ੱਕ (Ambiguous) ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਬਰੈਕਟ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਨਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਘਟਾਓ ਜਾਂ ਭਾਗ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਪੂਰੀਆਂ ਕੀਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸੀ, ਤਾਂ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

R ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ^$* ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆ ਸਿਫ਼ਰ (zero) ਦੀ ਇੱਕ ਰੋਚਕ ਖਾਸੀਅਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $a + 0 = a = 0 + a, \ \forall \ a \in \mathbf{R}$, ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਉਹ ਸੰਖਿਆ ਬਦਲਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਭੂਮਿਕਾ ਸੰਖਿਆ 1 ਰਾਹੀਂ ਨਿਭਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $a \times 1 = a = 1 \times a, \ \forall \ a \in \mathbf{R}$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 13. ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \to A$, ਦੇ ਲਈ, ਇੱਕ ਤੱਤ $e \in A$, ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਤਸਮਕ (Identity) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a * e = a = e * a, \ \forall \ a \in A$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਜੋੜ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ 1 ਗੁਣਾ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ। ਪਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ï $: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $\div : \mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_*$ ਲਈ ਕੋਈ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : $a + 0 = 0 + a = a$ ਅਤੇ $a \times 1 = a = 1 \times a, \ \forall a \in \mathbf{R}$ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ ਕਿ 0 ਅਤੇ 1 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ó+ô ਅਤੇ ó×ô, ਦੇ ਤੱਤਸਮਕ ਤੱਤ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ **R** ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਕੋਈ ਤੱਤ e ਨਹੀਂ ਕਿ a ï e = e ï $a, \ \forall a \in \mathbf{R}$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ $\mathbf{R}_*$ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਤੱਤ e ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $a \div e = e \div a, \ \forall a \in \mathbf{R}_*$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ óï ô ਅਤੇ ó÷ô ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : **R** ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ **N** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \notin \mathbf{N}$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ **N** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਕੋਈ ਤਤਸਮਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ $+ : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਲਈ, ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $a \in \mathbf{R}$ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਸੀਂ **R** ਵਿੱਚ ï a ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ a + (ï a) = 0 (ó+ô ਤਤਸਮਕ) = (ï a) + a. ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਲਈ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $a \in \mathbf{R}, a \neq 0$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਸੀਂ **R** ਵਿੱਚ $\frac{1}{a}$ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚੁਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a \times \frac{1}{a} = 1$(ó×ô ਦਾ ਤਤਸਮਕ) $= \frac{1}{a} \times a$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 14. A ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ e ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : A \times A \rightarrow A$ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸੇ ਤੱਤ $a \in A$ ਨੂੰ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਬਾਬਤ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਤੱਤ b ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ ਕਿ $a * b = e = b * a$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ b ਨੂੰ a ਦਾ ਉਲਟ (Inverse) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ a^{-1} ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 39. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ó+ô ਲਈ $-a$ ਦਾ ਉਲਟ a ਹੈ ਅਤੇ **R** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ó×ô ਲਈ $a \neq 0$ ਦਾ ਉਲਟ $\frac{1}{a}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $a + (-a) = a - a = 0$ ਅਤੇ $(-a) + a = 0$, ਇਸ ਲਈ $-a$ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ a ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $a \neq 0$, ਲਈ $a \times \frac{1}{a} = 1 = \frac{1}{a} \times a$, ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $\frac{1}{a}$ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ a ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 40. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **N** ਵਿੱਚ ਧਨ ਸੰਕਿਰਿਆ '+' ਦੇ ਲਈ $a \in \mathbf{N}$ ਦਾ ਉਲਟ $-a$ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ **N** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ó×ô ਲਈ $a \in \mathbf{N},\ a \neq 1$ ਦਾ ਉਲਟ $\frac{1}{a}$ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $-a \notin \mathbf{N}$, ਇਸ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ a ਦਾ ਉਲਟ $-a$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਜਦੋਂ ਕਿ $-a$ ਸ਼ਰਤਾਂ $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **N** ਵਿੱਚ $a \neq 1$ ਲਈ $\frac{1}{a} \notin \mathbf{N}$, ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ 1 ਦੇ ਇਲਾਵਾ **N** ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਦਾ ਉਲਟ **N** ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 34, 36, 38 ਅਤੇ 39 ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ **R** ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0 ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਅਤੇ $a \in \mathbf{R},\ \forall\, a$ ਦਾ ਉਲਟ ਤੱਤ $-a$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਤੋਂ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $*$ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਕਾਰਨ ਵੀ ਦੱਸੋ।
   (i) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = a - b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$
   (ii) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = ab$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$
   (iii) **R** ਵਿੱਚ] ਸੰਕਿਰਿਆ $*$] $a * b = ab^2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ
   (iv) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, ਸੰਕਿਰਿਆ $*$] $a * b = |a - b|$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ
   (v) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, $a * b = a$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

2. ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ, ਕੀ$*$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਕੀ$*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

(i) **Z** ਵਿੱਚ, $a * b = a$ ï b ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(ii) **Q** ਵਿੱਚ, $a * b = ab + 1$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(iii) **Q** ਵਿੱਚ, $a * b = \frac{ab}{2}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(iv) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = 2^{ab}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(v) $\mathbf{Z}^+$ ਵਿੱਚ, $a * b = a^b$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

(vi) **R** ï {ï 1} ਵਿੱਚ, $a * b = \frac{a}{b+1}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ

3. ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ $a \wedge b =$ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $\{a, b\}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸੰਕਿਰਿਆ $\wedge$ ਲਈ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ ਲਿਖੋ।

4. ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਸਾਰਣੀ (ਸਾਰਣੀ 1.2) ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ :

(i) $(2 * 3) * 4$ ਅਤੇ $2 * (3 * 4)$ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ।

(ii) ਕੀ $*$ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ?

(iii) $(2 * 3) * (4 * 5)$ ਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਕਰੋ।

(ਸੰਕੇਤ : ਹੇਠਲੀ ਸਾਰਣੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰੋ।)

ਸਾਰਣੀ 1.2

*	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1
4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5

5. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*'$, $a *' b = a$ ਅਤੇ b ਦਾ HCF, HCF ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*'$ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਉੱਚਿਤਤਾ ਵੀ ਦੱਸੋ।

6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ **N** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$] $a * b = a$ ਅਤੇ b ਦਾ LCM ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $5 * 7, \quad 20 * 16$

(ii) ਕੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ?

(iii) ਕੀ $*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ?

(iv) **N** ਵਿੱਚ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(v) **N** ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਤੱਤ $*$ ਸੰਕਿਰਿਆ ਲਈ ਉਲਟਾਏ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹਨ ?

7. ਕੀ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ $a * b = a$ ਅਤੇ b ਦਾ (LCM) ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $*$ ਇੱਕ ਦੋ -ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ।

8. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ **N** ਵਿੱਚ $a * b = a$ ਅਤੇ b ਦਾ HCF ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਕੀ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ? ਕੀ $*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ? ਕੀ **N** ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਤੱਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ?

9. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ **Q** ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $*$ ਤਰਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ:

(i) $a * b = a$ ï b

(ii) $a * b = a^2 + b^2$

(iii) $a * b = a + ab$

(iv) $a * b = (a$ ï $b)^2$

(v) $a * b = \dfrac{a^b}{4}$

(vi) $a * b = ab^2$

ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਹਿਚਰ ਹਨ।

10. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਦਾ ਤੱਤਸਮਕ ਹੈ, ਉਹ ਦੱਸੋ।

11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $A = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ਹੈ ਅਤੇ A ਵਿੱਚ $(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਹੈ। A ਵਿੱਚ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤਤ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਦੱਸੋ ਕਿ ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ ਹਨ। ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਵੀ ਕਰੋ।

(i) ਸਮੂਹ **N** ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਵੈ-ਇੱਛਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਲਈ $a * a = a, \ \forall a \in \mathbf{N}$

(ii) ਜੇਕਰ **N** ਵਿੱਚ $*$ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ $a * (b * c) = (c * b) * a$

13. $a * b = a^3 + b^3$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ **N** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

(A) $*$ ਸਹਿਚਰ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।

(B) $*$ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(C) $*$ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਪਰ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(D) $*$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਨਾ ਹੀ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਜੇਕਰ R_1 ਅਤੇ R_2 ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $R_1 \cap R_2$ ਵੀ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ R_1 ਅਤੇ R_2 ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $(a, a) \in R_1$, ਅਤੇ $(a, a) \in R_2$, $\forall a \in$ A ਭਾਵ, $(a, a) \in R_1 \cap R_2 \forall a$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_1 \cap R_2$, ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ $(a, b) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, b) \in R_1$ ਅਤੇ $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1$ ਅਤੇ $(b, a) \in R_2 \Rightarrow (b, a) \in R_1 \cap R_2$, ਇਸ ਲਈ $R_1 \cap R_2$ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R_1 \cap R_2$ ਅਤੇ $(b, c) \in R_1 \cap R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1$ ਅਤੇ $(a, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_1 \cap R_2$- ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_1 \cap R_2$ ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $R_1 \cap R_2$ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੋੜੇ (ordered pairs) ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R, (x, y) R (u, v), ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $xv = yu$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ (x, y) R (x, y), $\forall (x, y) \in$ A, ਕਿਉਂਕਿ $xy = yx$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ (x, y) R $(u, v) \Rightarrow xv = yu \Rightarrow uy = vx$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ (u, v) R (x, y) ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (x, y) R (u, v) ਅਤੇ (u, v) R $(a, b) \Rightarrow xv = yu$ ਅਤੇ $ub = va \Rightarrow xv\frac{a}{u} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xv\frac{b}{v} = yu\frac{a}{u} \Rightarrow xb = ya$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ (x, y) R (a, b) ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 43. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਵਿੱਚ $R_1 = \{(x, y) : x$ ï y ਸੰਖਿਆ 3 ਨਾਲ ਭਾਜ ਹੈ$\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R_1 ਹੈ ਅਤੇ $R_2 = \{(x, y): \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{(x, y\} \subset \{3, 6, 9\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ X ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧ R_2 ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $R_1 = R_2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ {1, 4, 7}, {2, 5, 8} ਅਤੇ {3, 6, 9} ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ (characterstic) ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਜ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(x, y) \in R_1 \Rightarrow x$ ï y ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ $\Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow (x, y) \in R_2$] ਇਸ ਲਈ $R_1 \subset R_2$- ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\{x, y\} \in R_2 \Rightarrow \{x, y\} \subset \{1, 4, 7\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{2, 5, 8\}$ ਜਾਂ $\{x, y\} \subset \{3, 6, 9\} \Rightarrow x$ ï y ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਭਾਜ ਹੈ $\Rightarrow \{x, y\} \in R_1$- ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $R_2 \subset R_1$- ਇਸ ਲਈ $R_1 = R_2$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 44. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f: X \to Y$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। X ਵਿੱਚ $R = \{(a, b): f(a) = f(b)\}$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਜਾਂਚੋ ਕਿ ਕੀ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਹਰੇਕ $a \in X$ ਲਈ $(a, a) \in R$, ਕਿਉਂਕਿ $f(a) = f(a)$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ R ਨਿਜਵਾਚਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(a, b) \in R \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow f(b) = f(a) \Rightarrow (b, a) \in R$-ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow f(a) = f(b)$ ਅਤੇ $f(b) = f(c) \Rightarrow f(a) = f(c) \Rightarrow (a, c) \in R$, ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ R ਸਕਰਮਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ R ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 45. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ **R** ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਹਿਚਰ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੀ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ।

(a) $a * b = 1, \ \forall \ a, b \in \mathbf{R}$ (b) $a * b = \dfrac{(a+b)}{2} \ \forall \ a, b \in \mathbf{R}$

ਹੱਲ :

(a) ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ $a * b = b * a = 1, \forall a, b \in \mathbf{R}$- ਨਾਲ ਹੀ $(a * b) * c = (1 * c) = 1$ ਅਤੇ $a * (b * c) = a * (1) = 1, \ \forall \ a, b, c \in \mathbf{R}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਸਹਿਚਰ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।

(b) $a * b = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{b+a}{2} = b * a, \ \forall \ a, b \in R$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ* ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c.$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right) + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}.$$

ਪ੍ਰੰਤੂ

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right)$$

$$= \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4} \neq \frac{a+b+2c}{4} \text{ (ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ * ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 46. ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3\}$ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਸਾਰੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\{1, 2, 3\}$ ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਇੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ 1,2,3 ਦਾ ਕ੍ਰਮ-ਸੰਚਣ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

{1, 2, 3} ਤੋਂ ਆਪਣੇ ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਚਿੱਤਰਾਂ (Maps) ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਹੜੀ ਕਿ 3! = 6 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 47. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = {1, 2, 3} ਹੈ। ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਚਾਰ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ (1] 2) ਅਤੇ (2] 3) ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3), (1, 3)}, (1, 2) ਅਤੇ (2, 3) ਤੱਤਾਂ ਵਾਲਾ ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਸੰਬੰਧ R_1 ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ R_1 ਵਿੱਚ ਜੋੜਾ (2] 1) ਵਧਾ ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਬੰਧ R_2 ਹੁਣ ਵੀ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ ਪਰ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ R_1 ਵਿੱਚ (3, 2) ਪਾ ਕੇ R_3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੁਣ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ R_1 ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਜੋੜਿਆਂ (2, 1), (3, 2) ਜਾਂ ਇੱਕ ਜੋੜੇ (3, 1) ਤੱਕ ਨਹੀਂ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ, ਸਕਰਮਕਤਾ ਬਨਾਉਣ ਲਈ, ਬਾਕੀ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਲੈਣ ਲਈ ਥੱਲੇ ਜਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਬੰਧ ਸਮਮਿਤਈ ਵੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ, ਜਿਹੜਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਗਿਣਤੀ ਤਿੰਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 48. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੂਹ {1, 2, 3} ਵਿੱਚ (1, 2) ਅਤੇ (2, 1) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : (1, 2) ਅਤੇ (2, 1) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਸੰਬੰਧ (ਸਮਤੁਲਤਾ) R_1, {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)} ਹਨ। ਹੁਣ ਸਿਰਫ਼ 4 ਜੋੜੇ (2, 3), (3, 2), (1, 3) ਅਤੇ (3, 1) ਬਾਕੀ ਬਚਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਜਿਵੇਂ (2] 3) ਨੂੰ R_1 ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਮਮਿਤਈ ਲਈ ਅਸੀਂ (3] 2) ਨੂੰ ਵੀ ਲੈਣਾ ਹੋਵੇਗਾ, ਨਾਲ ਵੀ ਸਕਰਮਕਤਾ ਲਈ ਅਸੀਂ (1] 3) ਅਤੇ (3] 1) ਨੂੰ ਲੈਣ ਲਈ ਥੱਲੇ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ R_1 ਵੱਡਾ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਕੇਵਲ ਸਰਵ ਵਿਆਪਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ (1] 2) ਅਤੇ (2] 1) ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 49. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ {1, 2} ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਤਤਸਮਕ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਅੰਤਰਗਤ 2 ਦਾ ਉਲਟ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : {1, 2} ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, {1, 2} × {1, 2} ਤੋਂ {1, 2} ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਭਾਵ, {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)} ਤੋਂ {1, 2} ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦੇ ਲਈ ਤਤਸਮਕ ਤਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, $*(1, 1) = 1$, $*(1, 2) = 2$, $*(2, 1) = 2$ ਅਤੇ ਜੋੜਾ (2, 2) ਲਈ ਹੀ ਬਾਕੀ ਰਹਿ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ 2 ਦਾ ਉਲਟ 2 ਹੈ ਇਸ ਲਈ $*(2, 2)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 50. ਤਤਸਮਕ ਫਲਨ $I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜਾ $I_N(x) = x, \forall x \in \mathbf{N}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ, ਭਾਵੇਂ I_N ਉੱਤੇ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $I_N + I_N : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ :

$$(I_N + I_N)(x) = I_N(x) + I_N(x) = x + x = 2x$$

ਹੱਲ : ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ I_N ਔਨਟੂ ਹੈ ਪਰ $I_N + I_N$ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਸਹਿ-ਪ੍ਰਾਂਤ **N** ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ 3 ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ **N** ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ x ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ $(I_N + I_N)(x) = 2x = 3$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 51. $f(x) = \sin x$ ਰਾਹੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $g(x) = \cos x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਅਤੇ g ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ, ਪਰ $f + g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ਦੇ ਦੋ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤੱਤਾਂ x_1 ਅਤੇ x_2 ਲਈ $\sin x_1 \neq \sin x_2$ ਅਤੇ $\cos x_1 \neq \cos x_2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਅਤੇ g ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹਨ। ਪਰ $(f + g)(0) = \sin 0 + \cos 0 = 1$ ਅਤੇ $(f+g)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f + g$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 10x + 7$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ $g \text{ o } f = f \text{ o } g = 1_{\mathbf{R}}$ ਹੋਵੇ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{W} \to \mathbf{W}$, $f(n) = n$ ï 1, ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਅਤੇ $f(n) = n + 1$, ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ f ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ। f ਦਾ ਉਲਟ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ **W** ਸਾਰੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਜਿੱਥੇ $f(x) = x^2$ ï $3x + 2$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ $f(f(x))$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f : \mathbf{R} \to \{x \in \mathbf{R} :$ ï $1 < x < 1\}$ ਜਿੱਥੇ $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$, $x \in \mathbf{R}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।
5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = x^3$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (Injective) ਹੈ।
6. ਦੋ ਫਲਨਾਂ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ ਅਤੇ $g : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣ ਕਿ $g \text{ o} f$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ ਪਰ g ਇੱਕ-ਇੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   (ਸੰਕੇਤ : $f(x) = x$ ਅਤੇ $g(x) = |x|$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।)
7. ਦੋ ਫਲਨਾਂ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਅਤੇ $g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ ਜਿਹੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਣ ਕਿ $g \text{ o} f$ ਔਨਟੂ ਹੋਵੇ ਪਰ f ਔਨਟੂ ਨਾ ਹੋਵੇ।

   (ਸੰਕੇਤ : $f(x) = x + 1$ ਅਤੇ $g(x) = \begin{cases} x - 1, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ X ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ। P(X) ਜੋ ਕਿ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੋਂ P(X) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ R ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ :

P(X) ਵਿੱਚ ਉਪ-ਸਮੂਹਾਂ A, B ਲਈ ARB, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਹੈ। ਕੀ R, P(X) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਕਰੋ।

9. ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗੈਰ-ਖਾਲੀ X ਲਈ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿਹੜੇ $A * B = A \cap B$, $\forall A, B \in P(X)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ P(X) ਸਮੂਹ X ਦਾ ਘਾਤ-ਸਮੂਹ (Power set) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ X ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆ * ਲਈ P(X) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ X ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਤਤ ਹੈ।

10. ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ਤੋਂ ਖੁਦ ਤੱਕ ਦੇ ਸਾਰੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S = \{a, b, c\}$ ਅਤੇ $T = \{1, 2, 3\}$ ਹੈ। S ਤੋਂ T ਤੱਕ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਲਾਂ F ਲਈ Fï1 ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

(i) $F = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1)\}$ (ii) $F = \{(a, 2), (b, 1), (c, 1)\}$

12. *a* ∗ *b* = |*a* ï *b*| ਅਤੇ *a* o *b* = *a*, $\forall a, b \in \mathbf{R}$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ $* : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਅਤੇ $o : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ∗ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, o ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ (Commuative) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $a, b, c \in \mathbf{R}$ ਲਈ $a * (b \text{ o } c) = (a * b) \text{ o } (a * c)$ ਹੈ। [ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸੰਕਿਰਿਆ ∗ ਸੰਕਿਰਿਆ o ਤੇ ਵੰਡੀ (Distributes) ਹੁੰਦੀ ਹੈ।] ਕੀ o ਸੰਕਿਰਿਆ ∗ ਤੇ ਵੰਡੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਵੀ ਕਰੋ।

13. ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$, ਜਿੱਥੇ A ∗ B = (A ï B) ∪ (B ï A), $\forall A, B \in P(X)$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ] ਸੰਕਿਰਿਆ ∗ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ P(X) ਦੇ ਸਾਰੇ ਤਤ A ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ Aï1 = A. (ਸੰਕੇਤ : (A ï ϕ) ∪ (ϕ ï A) = A. ਅਤੇ (A ï A) ∪ (A ï A) = A ∗ A = ϕ) ਹੈ।

14. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਸਮੂਹ $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ∗ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ:

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{ਜੇਕਰ } a + b < 6 \\ a + b - 6, & \text{ਜੇਕਰ } a + b \geq 6 \end{cases}$$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਇਸ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ $a \neq 0$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੈ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਿ 6 ï *a*, *a* ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ।

15. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A = {ï 1, 0, 1, 2}, B = {ï 4, ï 2, 0, 2} ਅਤੇ $f, g : A \rightarrow B$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ

$f(x) = x^2$ ï x, $x \in A$ ਅਤੇ $g(x) = 2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 1$, $x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹਨ, ਕੀ f ਅਤੇ g ਬਰਾਬਰ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ। (ਸੰਕੇਤ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਫਲਨ $f : A \rightarrow B$ ਅਤੇ $g : A \rightarrow B$ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ $f(a) = g(a)$ $\forall a \in A$ ਹੋਵੇ।

16. ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3} ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੱਤ (1] 2) ਅਤੇ (1] 3) ਹੋਣ ਅਤੇ ਜਿਹੜੇ ਨਿਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਮਮਿਤਈ ਹਨ ਪਰ ਸਕਰਮਕ ਨਹੀਂ, ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

17. ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3} ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੱਤ (1, 2) ਵਾਲੇ ਨਿਜਵਾਚਕ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

18. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਚਿੰਨ੍ਹ ਫਲਨ (Signum Function) ਹੈ।

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

ਅਤੇ $g : R \rightarrow R$] $g(x) = [x]$, ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $[x]$] x ਤੋਂ ਘੱਟ ਜਾਂ x ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ fog ਅਤੇ gof, ਅੰਤਰਾਲ $[0, 1]$ ਵਿੱਚ ਸੰਪਾਤੀ (coincide) ਹਨ ?

19. ਸਮੂਹ $\{a, b\}$ ਵਿੱਚ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 10 (B) 16 (C) 20 (D) 8

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਬੰਧਾਂ, ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੀ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

- X ਵਿੱਚ, $R = \phi \subset X \times X$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R] ਖਾਲੀ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, $R = X \times X$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸੰਬੰਧ R] ਸਰਵ ਵਿਆਪੀ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਕਿ $\forall a \in X$] $(a, a) \in R$, ਹੋਵੇ, ਨਿਜਵਾਚਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ R, ਕਿ ਸ਼ਰਤ $(a, b) \in R$ ਦਾ ਭਾਵ ਕਿ $(b, a) \in R$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਸਮਮਿਤਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਸ਼ਰਤ R, $(a, b) \in R$ ਅਤੇ $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ $\forall a, b, c \in X$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸੰਬੰਧ R ਸਕਰਮਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

- X ਵਿੱਚ, ਸੰਬੰਧ R, ਜਿਹੜਾ ਨਿਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਹੈ, ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।
- X ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਸਮਤੁਲਤਾ ਸੰਬੰਧ R ਲਈ $a \in$ X ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਮਤੁਲਤਾ ਵਰਗ **[*a*]**, X ਦਾ ਉਹ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ a ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ
  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \ \forall \ x_1, x_2 \in X$
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ $y \in Y, \exists\, x \in X$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਦੋਵੇਂ ਹੈ।
- ਫਲਨ $f: A \to B$ ਅਤੇ $g: B \to C$ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨ $gof: A \to C$ ਹੈ ਜਿਹੜਾ $gof(x) = g(f(x)), \ \forall\, x \in A$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਜੇਕਰ $\exists\, g: Y \to X$, ਤਾਂ ਜੋ $gof = 1_X$ ਅਤੇ $fog = 1_Y$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਫਲਨ $f: X \to Y$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣਯੋਗ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਉਹ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ X ਲਈ ਫਲਨ $f: X \to X$ ਇੱਕ-ਇੱਕ (ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਵੀ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ f ਔਨਟੂ (ਅਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਵੀ) ਹੈ। ਇਹ ਕਿਸੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਦਾ ਗੁਣ ਧਰਮ ਹੈ। ਇਹ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ (Characterstic Property) ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- A ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, $A \times A$ ਤੋਂ A ਤੱਕ ਇੱਕ ਫਲਨ $*$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਤੱਤ $e \in X$, ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*: X \times X \to X$, ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਹੈ ਜੇਕਰ $a * e = a = e * a, \ \forall\, a \in X$
- ਕੋਈ ਤੱਤ $e \in X$ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*: X \times X \to X$, ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ $b \in X$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ $a * b = e = b * a$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ e ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ। ਤਤ b, a ਦਾ ਉਲਟ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ a^{-1} ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- X ਇੱਕ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, ਹੈ ਜੇਕਰ $a * b = b * a, \ \forall\, a, b \in X$
- X ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਸੰਕਿਰਿਆ $*$, ਸਹਿਚਰ ਹੈ ਜੇਕਰ $(a * b) * c = a * (b * c), \forall\, a, b, c \in X$

ਇਤਿਹਾਸਕ ਨੋਟ

ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ R. Descartes (ਸੰਨ 1596-1650 ਈ.) ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਲੰਬੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਹੋਈ ਹੈ। Descartes ਨੇ ਸੰਨ 1637 ਈ: ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñGeometrieò ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ (Function) ਫਲਨ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ, ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਕਰਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ, (Hyperbola)] ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola) ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ (Ellipse), ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ x^n ਦੇ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ। James Gregory (ਸੰਨ 1636-1675 ਈ.) ਨੇ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñVera Circuliet Hyperbolae Quadraturaò (ਸੰਨ 1667 ਈ.) ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਮੰਨਿਆ ਸੀ, ਜਿਹੜੀ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਬੀਜਗਣਿਤੀ ਜਾਂ ਹੋਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ G. W. Leibnitz (1646-1716 ਈ.) ਨੇ 1673 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñMethodus tangentium inversa, seu de functionibusò ਵਿੱਚ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਫਲਨ (Function) ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਅਰਥ ਵਿੱਚ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ, ਜਿਹੜਾ ਕਿਸੇ ਵਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਜੇ ਬਿੰਦੂ ਤੱਕ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਦਲਦਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਵਕਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ, ਵਕਰ ਦੀ ਫਲ, ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲੰਬਰੂਪ ਰੇਖਾ ਬਦਲਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñHistoriaò (1714 ਈ.) ਵਿੱਚ Leibnitz ਨੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਵਾਕ ਅੰਸ਼ óx ਦਾ ਫਲਨ' ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਉਹ ਪਹਿਲੇ ਇਨਸਾਨ ਸੀ। John Bernoulli (1667-1748 ਈ:) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 1718 ਵਿੱਚ ਸੰਕੇਤ (Notation) ϕx ਨੂੰ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ óx ਦਾ ਫਲਨ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਪਰ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ f, F, ϕ, ψ ... ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਯੋਗ Leonhard Euler (1707-1783 ਈ.) ਰਾਹੀਂ 1734 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñAnalysis Infinitoriumò ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਖੰਡ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ Joeph Louis Lagrange (1736-1813 ਈ.) ਨੇ 1793 ਵਿੱਚ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ñTheorie des functions analytiquesò ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਿਕ (Analytic) ਫਲਨ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ $f(x)$, $F(x)$, $\phi(x)$ ਆਦਿ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ x ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ Lejeunne Dirichlet (1805-1859 ਈ.) ਨੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੱਤੀ। ਜਿਸ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਉਸ ਸਮੇਂ ਤੱਕ ਹੁੰਦਾ ਰਿਹਾ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਚਲਨ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ, ਜਿਹੜਾ Georg Cantor (1845-1918 ਈ.) ਰਾਹੀਂ ਵਿਕਸਿਤ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੋਇਆ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਪ੍ਰਚਲਿਤ ਫਲਨ ਦੀ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ Dirichlet ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਮਾਤਰ ਅਮੂਰਤ ਰੂਪ (Abstraction) ਹੈ।