ਅਧਿਆਇ 2

ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ
(Inverse Trigonometric Functions)

❖ *Mathematics, in general, is fundamentally the science of self-evident things— FELIX KLEIN* ❖

2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

Arya Bhatta
(476-550 A. D.)

ਅਧਿਆਇ1 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ f^{-1} ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਉਲਟ ਫਲਨ (Inverse) ਦੀ ਹੋਂਦ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੋਵੇ। ਕਈ ਫਲਨ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਜਾਂ ਦੋਵੇਂ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਗੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਆਮ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰਾਂ ਤੇ ਲੱਗਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ (Restrictions) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਤੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਲੇਖਾਂ ਰਾਹੀਂ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਹਨਾਂ ਉਲਟ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਗੁਣ (Properties) 'ਤੇ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ, ਕਲਨ (Calculus) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਭੂਮਿਕਾ ਨਿਭਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਕਈ ਇਟੇਗਰਲਜ਼ (Integrals) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ (Engineering) ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

2.2 ਅਧਾਰਭੂਤ ਸੰਕਲਪ (Basic Concepts)

ਜਮਾਤ XI, ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਜਿਹੜੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ :

sine ਫਲਨ ਭਾਵ, $\sin : \mathbf{R} \to [ï\ 1, 1]$

cosine ਫਲਨ ਭਾਵ, $\cos : \mathbf{R} \to [ï\ 1, 1]$

tangent ਫਲਨ ਭਾਵ, $\tan : \mathbf{R}\ ï\ \{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

cotangent ਫਲਨ ਭਾਵ, cot : $\mathbf{R}$ ï $\{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$

secant ਫਲਨ ਭਾਵ, sec : $\mathbf{R}$ ï $\{x : x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ ï (ï 1, 1)

cosecant ਫਲਨ ਭਾਵ, cosec : $\mathbf{R}$ ï $\{x : x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$ ï (ï 1, 1)

ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ f: X→Y ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(x) = y$ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੇਜੋੜ ਫਲਨ g : Y→X ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $g(y) = x$, ਜਿੱਥੇ $x \in$ X ਅਤੇ $y = f(x), y \in$ Y ਹੈ। ਇੱਥੇ g ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $= f$ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਅਤੇ g ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $= f$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਹੈ। ਫਲਨ g ਨੂੰ ਫਲਨ f ਦਾ ਉਲਟ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $f^{ï 1}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਾਲ ਹੀ g ਵੀ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ g ਦਾ ਉਲਟ f ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $g^{ï 1} = (f^{ï 1})^{ï 1} = f$ ਨਾਲ ਹੀ :

$$(f^{ï 1} \circ f)(x) = f^{ï 1}(f(x)) = f^{ï 1}(y) = x$$

ਅਤੇ $$(f \circ f^{ï 1})(y) = f(f^{ï 1}(y)) = f(x) = y$$

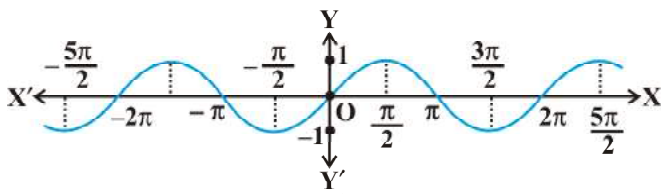
ਕਿਉਂਕਿ sine ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ [ï 1, 1]ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ (ਬੰਨ) ਦੇਈਏ, ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ [ï 1, 1] ਵਾਲਾ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ sine ਫਲਨ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{ï\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ, ਵਿਸਥਾਰ [ï 1, 1] ਵਾਲਾ, ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ, sine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਨੂੰ $\sin^{ï 1}$ (arc sine function) ਰਾਹੀਂ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{ï 1}$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ [ï 1, 1] ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right], \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਜਾਂ $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\sin^{ï 1}$ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ (Branch) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਹੈ, ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਵਿਸਥਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੋਂ $\sin^{ï 1}$ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨ $\sin^{ï 1}$ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਂਤ [ï 1, 1] ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $\sin^{ï 1} : [ï 1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin(\sin^{ï 1} x) = x$, ਜੇਕਰ ï $1 \le x \le 1$ ਅਤੇ $\sin^{ï 1}(\sin x) = x$ ਜੇਕਰ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ; ਜੇਕਰ $y = \sin^{ï 1} x$ ਹੋਵੇ

ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sin(\sin^{-1} x) = x$, ਜੇਕਰ $-1 \le x \le 1$ ਅਤੇ $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ਜੇਕਰ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ; ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\sin y = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

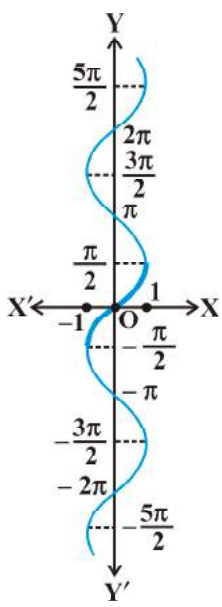
ਟਿੱਪਣੀ:

(i) ਅਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਉਲਟਾਇਆ ਜਾ ਸਕਣ ਯੋਗ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ $x = f^{-1}(y)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ ਫਲਨ sin ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਕਰਕੇ ਫਲਨ $\sin^{-1}$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ, ਜੇਕਰ (a, b), sin ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ (b, a), sin ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



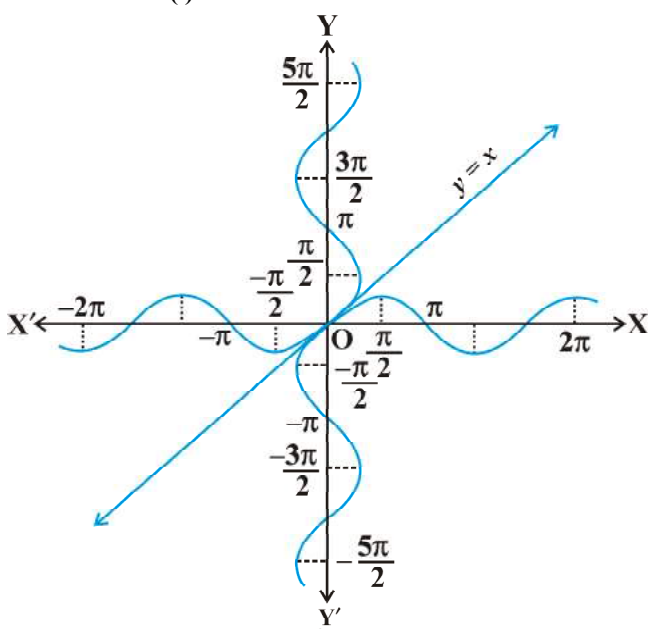
$y = \sin x$

ਚਿੱਤਰ 2-1 **(i)**



$y = \sin^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2-1 **(ii)**



$y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \sin^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ 2-1 **(iii)**

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦਾ ਆਲੇਖ, ਫਲਨ $y = \sin x$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਦਲਾ-ਬਦਲੀ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਲਨ $y = \sin x$ ਅਤੇ ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.1 (i), (ii), ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਲਨ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਗੂੜ੍ਹਾ ਭਾਗ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

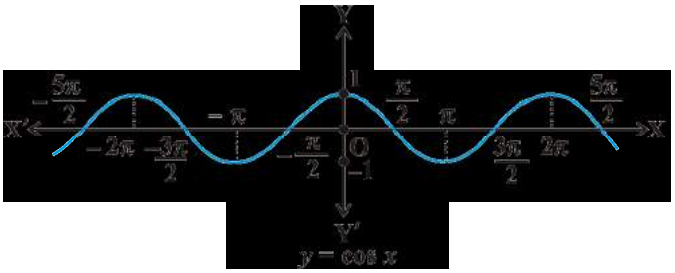
(ii) ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਆਲੇਖ, ਰੇਖਾ $y = x$ ਦੇ ਵੱਲ ਸੰਗਤ ਮੂਲ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਸ਼ੀਸ਼ੇ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ (Mirror Image)] ਭਾਵ ਪਰਾਵਰਤਨ (Reflection) (Along)] ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕਲਪਨਾ $y = \sin x$ ਅਤੇ $y = \sin^{-1} x$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ, ਦਿੱਤੇ ਅਲੇਖਾਂ ਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 2.1 (iii))A

sine ਫਲਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ cosine ਫਲਨ ਵੀ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ [ï 1, 1] ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[0, \pi]$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ [ï 1, 1] ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਇੱਕ ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ cosine ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ [ï π, 0], $[0,\pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਵਿਸਥਾਰ [ï 1, 1] ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ cosine ਫਲਨ ਦੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਨੂੰ $\cos^{-1}$(arc cosine function) ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1}$ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ [ï 1, 1] ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ [ï π, 0], $[0, \pi]$, $[\pi, 2\pi]$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਅੰਤਰਾ
ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\cos^{-1}$ ਦੀ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਸ਼ਾ
ਹੈ, ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

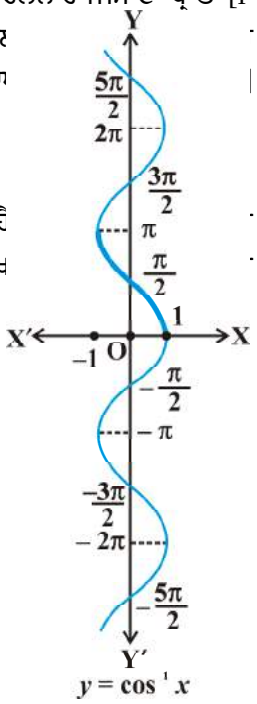
$$\cos^{-1} : [ï\ 1, 1] \to [0, \pi]$$

$y = \cos^{-1} x$ ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ
ਅਲੇਖ ਦੇ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ। $y = \cos x$ ਅਤੇ $y = \cos^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖ
(ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\operatorname{cosec}^{-1} x$ ਅਤੇ $\sec^{-1} x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

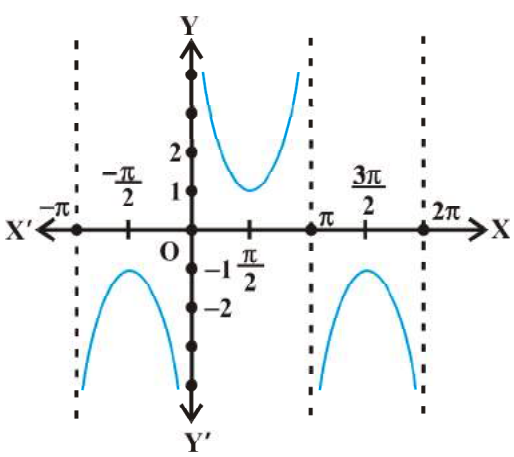


ਚਿੱਤਰ 2-2 **(i)**



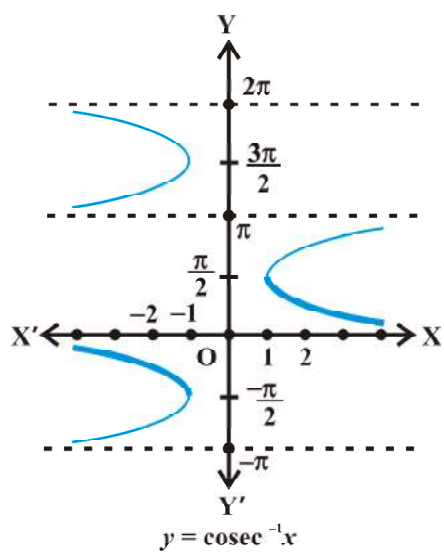
ਚਿੱਤਰ 2-2 **(ii)**

ਕਿਉਂਕਿ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$, ਇਸ ਲਈ cosec ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq n\pi,$ $n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\{y : y \in \mathbf{R},\ y \geq 1$ ਜਾਂ $y \leq$ ï 1$\}$, ਭਾਵ, ਸਮੂਹ **R** ï (ï 1, 1) ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ $y = \operatorname{cosec} x$, ï 1 $< y <$ 1 ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ π ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ (Integral) ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cosec ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ï $\{0\}$, ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ï (ï 1, 1). ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਰਅਸਲ cosec ਫਲਨ, ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ï $\{0\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ï (ï 1, 1) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\operatorname{cosec}^{ï\,1}$ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ï (ï 1, 1) ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$, $\left[\dfrac{-3\pi}{2}, \dfrac{-\pi}{2}\right] - \{-\pi\}$, $\left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right] - \{\pi\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿਸਥਾਰ $\left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਫਲਨ ਨੂੰ $\operatorname{cosec}^{ï\,1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :



$y = \operatorname{cosec} x$

ਚਿੱਤਰ : 2-3 **(i)**



$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

ਚਿੱਤਰ : 2-3 **(ii)**

$$\text{cosec}^{-1} : \mathbf{R} - (-1, 1) \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

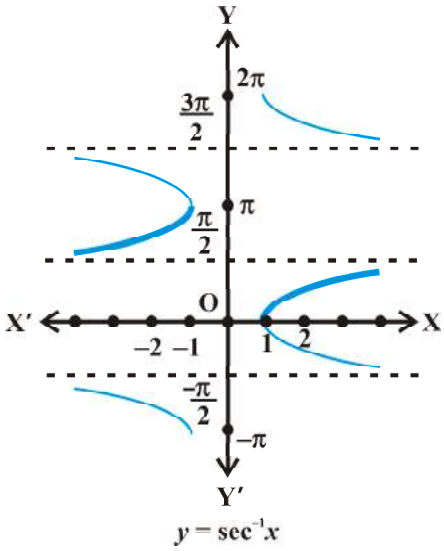
$y = \text{cosec}\, x$ ਅਤੇ $y = \text{cosec}^{-1} x$ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2-3 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = \sec x$ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - \{x : x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ sec (secant) ਫਲਨ $-1 < y < 1$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਹੋਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲੈਂਦਾ (Assumes) ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $\dfrac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ secant ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਰਾਲ $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$, ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ secant ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0] - \{\dfrac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R} - (-1, 1)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sec^{-1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $(-1, 1)$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $[-\pi, 0] - \{\dfrac{-\pi}{2}\}$, $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$, $[\pi, 2\pi] - \{\dfrac{3\pi}{2}\}$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ $\sec^{-1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $[0, \pi] - \{\dfrac{\pi}{2}\}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\sec^{-1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

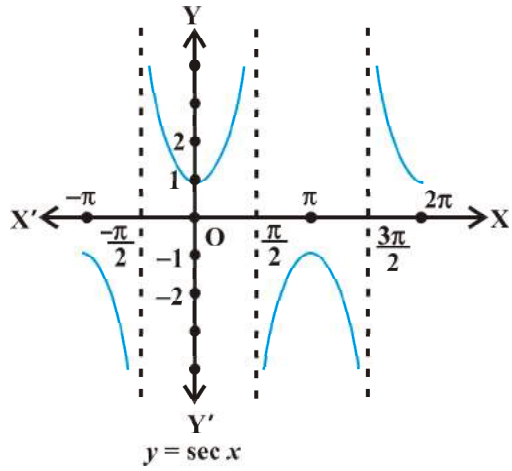
$$\sec^{-1} : \mathbf{R} - (-1,1) \to [0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$$

$y = \sec x$ ਅਤੇ $y = \sec^{-1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ 2.4 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\tan^{-1}$ ਅਤੇ $\cot^{-1}$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, (tangent ਫਲਨ) ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ $\mathbf{R}$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ tangent ਫਲਨ $\dfrac{\pi}{2}$ ਦੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



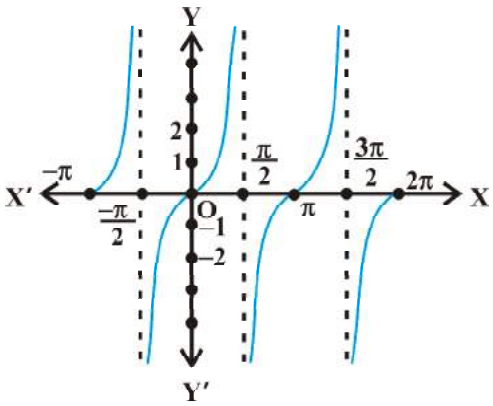
ਚਿੱਤਰ 2-4 **(i)**



ਚਿੱਤਰ 2-4 **(ii)**

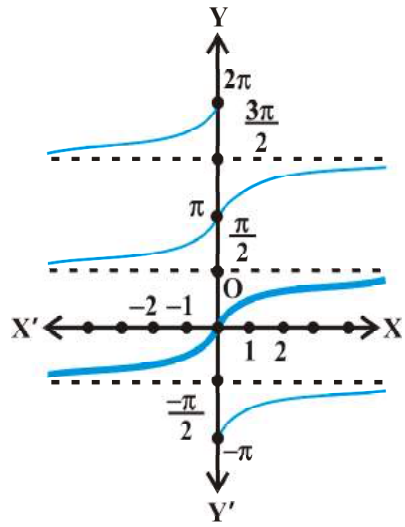
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ tangent ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, tangent ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right), \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ $\tan^{ï\,1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right), \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਰਾਹੀਂ ਫਲਨ $\tan^{ï\,1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\tan^{ï\,1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ :

$$\tan^{ï\,1} : \mathbf{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$y = \tan x$

ਚਿੱਤਰ 2-5 **(i)**

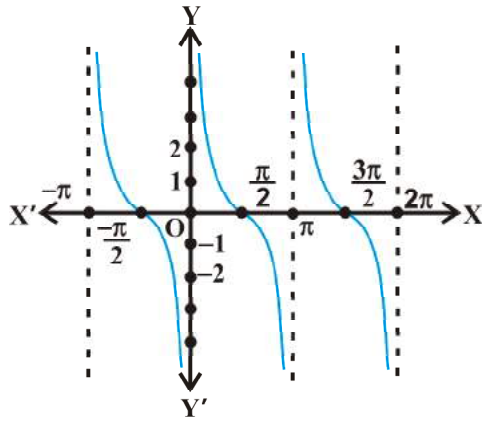


$y = \tan^{-1}x$

ਚਿੱਤਰ 2-5 **(ii)**

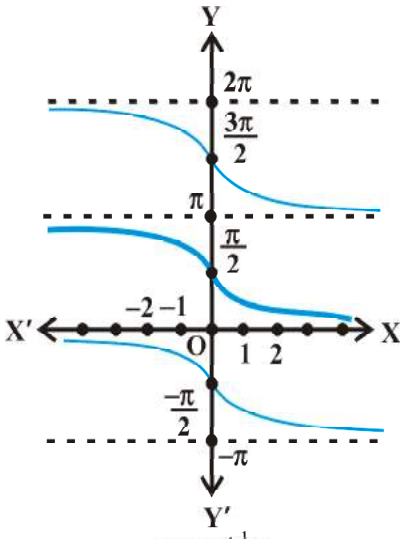
$y = \tan x$ ਅਤੇ $y = \tan^{-1}x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.5 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ (cotangent ਫਲਨ) ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \neq n\pi$, $n \in \mathbf{Z}\}$ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਸਮੂਹ $\mathbf{R}$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ cotangent ਫਲਨ, π ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਗੁਣਜਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



$y = \cot x$

ਚਿੱਤਰ 2-6 **(i)**



$y = \cot^{-1}x$

ਚਿੱਤਰ 2-6 **(ii)**

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ cotangent ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਵਾਲਾ ਇੱਕ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ cotangent ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(ï\ \pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ, ਔਨਟੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $\cot^{ï\,1}$ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ **R** ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(ï\ \pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ ਆਦਿ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੋਵੇ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਤੋਂ ਫਲਨ $\cot^{ï\,1}$ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਸ਼ਾਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $(0, \pi)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਫਲਨ $\cot^{ï\,1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਕਹਿਲਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\cot^{ï\,1} : \mathbf{R} \to (0, \pi)$$

$y = \cot x$ ਅਤੇ $y = \cot^{ï\,1} x$ ਦੇ ਅਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 2.6 (i), (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

$\sin^{ï\,1}$	:	$[ï\ 1, 1]$	$\to$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{ï\,1}$	:	$[ï\ 1, 1]$	$\to$	$[0, \pi]$
$\text{cosec}^{ï\,1}$	:	$\mathbf{R}\ ï\ (ï\ 1,1)$	$\to$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ ï\ \{0\}$
$\sec^{ï\,1}$	:	$\mathbf{R}\ ï\ (ï\ 1, 1)$	$\to$	$[0, \pi]\ ï\ \{\frac{\pi}{2}\}$
$\tan^{ï\,1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to$	$\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{ï\,1}$	:	$\mathbf{R}$	$\to$	$(0, \pi)$

ਟਿੱਪਣੀ

1. $\sin^{ï\,1} x$ ਤੋਂ $(\sin x)^{ï\,1}$ ਦਾ ਭਰਮ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $(\sin x)^{ï\,1} = \dfrac{1}{\sin x}$ ਅਤੇ ਇਹ ਤੱਥ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।
2. ਜਦੋਂ ਵੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਕਿਸੇ ਸ਼ਾਖਾ (ਖਾਸ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਨਾ ਦੱਸਿਆ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਉਸ ਫਲਨ ਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਤੋਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਹੜਾ ਉਸਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ (Principal value) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

ਉਦਾਹਰਣ 1 $\sin^{ï\,1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{ï\,1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y$. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sin^{ï\,1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{ï\,1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ $\frac{\pi}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 $\cot^{ï\,1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\cot^{ï\,1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\cot y = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ ਹੈ।}$$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\cot^{ï\,1}$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ $(0, \pi)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\cot^{ï\,1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ $\frac{2\pi}{3}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 2.1

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\sin^{ï\,1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.** $\cos^{ï\,1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3.** $\operatorname{cosec}^{ï\,1}(2)$

4. $\tan^{ï\,1}(-\sqrt{3})$ **5.** $\cos^{ï\,1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **6.** $\tan^{ï\,1}(ï\,1)$

7. $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **8.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **9.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

10. $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

11. $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ **12.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

13. ਜੇਕਰ $\sin^{-1} x = y$, ਹੈ, ਤਾਂ

(A) $0 \le y \le \pi$ (B) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < y < \pi$ (D) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

14. $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) π (B) $-\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

2.3 ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦੇ ਗੁਣ (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਦੱਸ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ, ਸੰਗਤ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੀ ਸਹੀ (Valid) ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਵੀ ਉਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਕੁਝ ਨਤੀਜੇ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਉਨ੍ਹਾਂ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸਹੀ ਹੋਣਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵੇਰਵੇ (Details) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਚਰਚਾ (Discussion) ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ, ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1}x$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $x = \sin y$ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = \sin y$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $y = \sin^{-1}x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ (Equivalent) ਹੈ ਕਿ

$$\sin(\sin^{-1} x) = x,\ x \in [-1, 1] \text{ ਅਤੇ } \sin^{-1}(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

ਹੋਰ ਪੰਜ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

1. (i) $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x,\ x \geq 1$ ਜਾਂ $x \leq -1$

(ii) $\cos^{-1}\dfrac{1}{x} = \sec^{-1} x,\ x \geq 1$ ਜਾਂ $x \leq -1$

(iii) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \cot^{-1} x,\ x > 0$

ਪਹਿਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $\operatorname{cosec}^{-1} x = y$ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ

$$x = \operatorname{cosec} y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\dfrac{1}{x} = \sin y$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = y$

ਜਾਂ $\sin^{-1}\dfrac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

2. (i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x,\ x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x,\ x \in \mathbf{R}$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x,\ |x| \geq 1$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}(-x) = y$, ਭਾਵ $-x = \sin y$ ਇਸ ਲਈ $x = -\sin y$, ਭਾਵ $x = \sin(-y)$.

ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1} x = -y = -\sin^{-1}(-x)$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

3. (i) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x,\ x \in [-1, 1]$

(ii) $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x,\ |x| \geq 1$

(iii) $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x,\ x \in \mathbf{R}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\cos^{-1}(-x) = y$ ਭਾਵ $-x = \cos y$ ਇਸ ਲਈ $x = -\cos y = \cos(\pi - y)$

ਇਸ ਕਰਕੇ $\cos^{-1} x = \pi - y = \pi - \cos^{-1}(-x)$

ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

4. (i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1, 1]$

(ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, x \in R$

(iii) $\text{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, |x| \geq 1$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1} x = y$, ਤਾਂ $x = \sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

ਇਸ ਲਈ $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਭਾਗਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

5. (i) $\tan^{-1}x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}, xy < 1$

(ii) $\tan^{-1}x - \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}, xy > -1$

(iii) $2\tan^{-1}x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}, |x| < 1$

ਹੁਣ $\tan^{-1} x = \theta$ ਹੈ ਅਤੇ $\tan^{-1} y = \phi$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \tan\theta$ ਅਤੇ $y = \tan\phi$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\tan(\theta + \phi) = \frac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi} = \frac{x+y}{1-xy}$

ਇਸ ਲਈ $\theta + \phi = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}$

ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ y ਨੂੰ $\frac{1}{y}$ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ (Replace) ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਦੂਜਾ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ y ਨੂੰ x ਰਾਹੀਂ ਬਦਲੀ ਕਰਨ ਤੇ ਤੀਜਾ ਨਤੀਜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

6. (i) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \dfrac{2x}{1+x^2}, |x| \le 1$

(ii) $2\tan^{-1} x = \cos^{-1} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}, x \ge 0$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\tan^{-1} x = y$, ਤਾਂ $x = \tan y$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \sin^{-1} \frac{2\tan y}{1+\tan^2 y}$$
$$= \sin^{-1} (\sin 2y) = 2y = 2\tan^{-1} x$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $$\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-\tan^2 y}{1+\tan^2 y} = \cos^{-1} (\cos 2y) = 2y = 2\tan^{-1} x$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਦਰਸਾਉ ਕਿ :

(i) $\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x, \ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x, \ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \sin\theta$ ਤਾਂ $\sin^{-1} x = \theta$ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ,

$$\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \sin^{-1} \left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$
$$= \sin^{-1} (2\sin\theta \cos\theta) = \sin^{-1} (\sin 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\sin^{-1} x$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \cos\theta$ ਹੈ ਤਾਂ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਵਰਤੋਂ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ

$\sin^{-1} \left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ : $\tan^{-1} \dfrac{1}{2} + \tan^{-1} \dfrac{2}{11} = \tan^{-1} \dfrac{3}{4}$

ਹੱਲ : ਗੁਣ 5 (i), ਰਾਹੀਂ,

$$\text{ਖੱਬਾ ਪੱਖ} = \tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{11}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{11}} = \tan^{-1}\frac{15}{20} = \tan^{-1}\frac{3}{4} = \text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$, $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ਦੂਜੇ ਤੌਰ ਤੇ,

$$\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi-2x}{2}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\cot\left(\frac{\pi-2x}{4}\right)\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi-2x}{4}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right), x > 1$ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \sec\theta$, ਤਾਂ $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta-1} = \tan\theta$

ਇਸ ਲਈ $\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cot^{-1}(\cot\theta) = \theta = \sec^{-1}x$ ਜਿਹੜਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਰਲ ਰੂਪ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2} = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = \tan\theta$. ਤਾਂ $\theta = \tan^{-1}x$ ਹੈ। ਹੁਣ :

ਸੱਜਾ ਪੱਖ $= \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}\right)$

$= \tan^{-1}(\tan 3\theta) = 3\theta = 3\tan^{-1}x = \tan^{-1}x + 2\tan^{-1}x$

$= \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ = ਖੱਬਾ ਪੱਖ (ਕਿਉਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 8. $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x), |x| \geq 1$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\cos(\sec^{-1}x + \operatorname{cosec}^{-1}x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

ਅਭਿਆਸ 2.2

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

1. $3\sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3), \; x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

2. $3\cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x), \; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3. $\tan^{-1}\frac{2}{11} + \tan^{-1}\frac{7}{24} = \tan^{-1}\frac{1}{2}$

4. $2\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{31}{17}$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਭ ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

5. $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, x \neq 0$

6. $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$

7. $\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\right), 0 < x < \pi$

8. $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right), \frac{-\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

9. $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, |x| < a$

10. $\tan^{-1}\left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2}\right), a > 0; \frac{-a}{\sqrt{3}} < x < \frac{a}{\sqrt{3}}$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

11. $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

12. $\cot (\tan^{-1} a + \cot^{-1} a)$

13. $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right], |x| < 1, y > 0$ ਅਤੇ $xy < 1$

14. ਜੇਕਰ $\sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5}+\cos^{-1}x\right) = 1$, ਤਾਂ x ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ $\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 16 ਤੋਂ 18 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

16. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

17. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

18. $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

19. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{7\pi}{6}\right)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{7\pi}{6}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

20. $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}$ ਹੈ (B) $\frac{1}{3}$ ਹੈ (C) $\frac{1}{4}$ ਹੈ (D) 1

21. $\tan^{-1}\sqrt{3}-\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) π ਹੈ (B) $-\frac{\pi}{2}$ ਹੈ (C) 0 ਹੈ (D) $2\sqrt{3}$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 9 $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5})$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sin^{-1}(\sin x) = x$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}(\sin\frac{3\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}$

ਪਰ, $\frac{3\pi}{5} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, ਜਿਹੜਾ $\sin^{-1}x$ ਦੀ ਮੁੱਖ ਸ਼ਾਖਾ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = \sin\frac{2\pi}{5}$ ਅਤੇ $\frac{2\pi}{5} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

ਇਸ ਲਈ $\sin^{-1}\left(\sin\frac{3\pi}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{3}{5} = x$ ਅਤੇ $\sin^{-1}\frac{8}{17} = y$

ਇਸ ਲਈ $\sin x = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ $\sin y = \frac{8}{17}$

ਹੁਣ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਅਤੇ $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{15}{17}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\cos(x \text{ ï } y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{15}{17} + \frac{3}{5}\times\frac{8}{17} = \frac{84}{85}$$

ਇਸ ਲਈ $x \text{ ï } y = \cos^{-1}\left(\frac{84}{85}\right)$

ਇਸ ਕਰਕੇ $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$

ਉਦਾਹਰਨ 11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{12}{13} + \cos^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{63}{16} = \pi$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\sin^{-1}\frac{12}{13} = x$, $\cos^{-1}\frac{4}{5} = y$, $\tan^{-1}\frac{63}{16} = z$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sin x = \frac{12}{13}$, $\cos y = \frac{4}{5}$, $\tan z = \frac{63}{16}$

ਇਸ ਲਈ $\cos x = \frac{5}{13}$, $\sin y = \frac{3}{5}$, $\tan x = \frac{12}{5}$ ਅਤੇ $\tan y = \frac{3}{4}$

ਹੁਣ $$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}=\frac{\frac{12}{5}+\frac{3}{4}}{1-\frac{12}{5}\times\frac{3}{4}}=-\frac{63}{16}$$

ਇਸ ਲਈ $\tan(x+y)=-\tan z$

ਭਾਵ $\tan(x+y)=\tan(\text{ï}\,z)$ ਜਾਂ $\tan(x+y)=\tan(\pi\,\text{ï}\,z)$

ਇਸ ਲਈ $x+y=\text{ï}\,z$ ਜਾਂ $x+y=\pi\,\text{ï}\,z$

ਕਿਉਂਕਿ x, y ਅਤੇ z ਧਨਾਤਮਕ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $x+y\neq\text{ï}\,z$ (ਕਿਉਂ ??)

ਇਸ ਲਈ $x+y+z=\pi$ ਜਾਂ $\sin^{\text{ï}1}\frac{12}{13}+\cos^{\text{ï}1}\frac{4}{5}+\tan^{\text{ï}1}\frac{63}{16}=\pi$

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\tan^{\text{ï}1}\left[\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right]$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\frac{a}{b}\tan x>\text{ï}\,1$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ,

$$\tan^{\text{ï}1}\left[\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x+a\sin x}\right]=\tan^{\text{ï}1}\left[\frac{\frac{a\cos x-b\sin x}{b\cos x}}{\frac{b\cos x+a\sin x}{b\cos x}}\right]=\tan^{\text{ï}1}\left[\frac{\frac{a}{b}-\tan x}{1+\frac{a}{b}\tan x}\right]$$

$$=\tan^{\text{ï}1}\frac{a}{b}-\tan^{\text{ï}1}(\tan x)=\tan^{\text{ï}1}\frac{a}{b}-x$$

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\tan^{\text{ï}1}2x+\tan^{\text{ï}1}3x=\frac{\pi}{4}$ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $\tan^{\text{ï}1}2x+\tan^{\text{ï}1}3x=\frac{\pi}{4}$

ਜਾਂ $$\tan^{\text{ï}1}\left(\frac{2x+3x}{1-2x\times3x}\right)=\frac{\pi}{4}$$

ਜਾਂ $$\tan^{\text{ï}1}\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{5x}{1-6x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

ਜਾਂ $$6x^2 + 5x - 1 = 0 \text{ ਭਾਵ } (6x - 1)(x + 1) = 0$$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ, $$x = \frac{1}{6} \text{ ਜਾਂ } x = -1$$

ਕਿਉਂਕਿ $x = -1$, ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $x = -1$ ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖੱਬਾ ਪੱਖ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਕੇਵਲ $x = \frac{1}{6}$ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{13\pi}{6}\right)$

2. $\tan^{-1}\left(\tan\frac{7\pi}{6}\right)$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

3. $2\sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{24}{7}$

4. $\sin^{-1}\frac{8}{17} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \tan^{-1}\frac{77}{36}$

5. $\cos^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{12}{13} = \cos^{-1}\frac{33}{65}$

6. $\cos^{-1}\frac{12}{13} + \sin^{-1}\frac{3}{5} = \sin^{-1}\frac{56}{65}$

7. $\tan^{-1}\frac{63}{16} = \sin^{-1}\frac{5}{13} + \cos^{-1}\frac{3}{5}$

8. $\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{7} + \tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

9. $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), x \in [0, 1]$

10. $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \frac{x}{2}, \ x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

11. $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, \ -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ [ਸੰਕੇਤ : $x = \cos 2\theta$ ਰੱਖੋ।]

12. $\frac{9\pi}{8} - \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{1}{3} = \frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

13. $2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2 \operatorname{cosec} x)$

14. $\tan^{-1}\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x, (x > 0)$

15. $\sin(\tan^{-1}x), |x| < 1$ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

(A) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (D) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

16. ਜੇਕਰ $\sin^{-1}(1 - x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, ਹੈ, ਤਾਂ x ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $0, \frac{1}{2}$ (B) $1, \frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

17. $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ। (B) $\frac{\pi}{3}$ ਹੈ। (C) $\frac{\pi}{4}$ ਹੈ। (D) $\frac{-3\pi}{4}$ ਹੈ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ (ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ) ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਅਤੇ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ ਹੈ :

ਫਲਨ	ਪ੍ਰਾਂਤ	ਵਿਸਥਾਰ (ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ ਸ਼ਾਖਾ)
$y = \sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$y = \operatorname{cosec}^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1,1)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$
$y = \sec^{-1}x$	$\mathbf{R} - (-1, 1)$	$[0, \pi] - \{\frac{\pi}{2}\}$

$y = \tan^{-1} x$	**R**	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \cot^{-1} x$	**R**	$(0, \pi)$

- $\sin^{-1}x$ ਤੋਂ $(\sin x)^{-1}$ ਦਾ ਭਰਮ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਤੱਥ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ, ਜਿਹੜਾ ਉਸਦੀ ਮੁੱਖ ਮੂਲ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਖ ਮੁੱਲ (Principal Value) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਠੀਕ ਪ੍ਰਾਂਤਾਂ ਲਈ

- $y = \sin^{-1} x \Rightarrow x = \sin y$
- $x = \sin y \Rightarrow y = \sin^{-1} x$
- $\sin (\sin^{-1} x) = x$
- $\sin^{-1} (\sin x) = x$
- $\sin^{-1} \frac{1}{x} = \operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\cos^{-1} (-x) = \pi - \cos^{-1} x$
- $\cos^{-1} \frac{1}{x} = \sec^{-1} x$
- $\cot^{-1} (-x) = \pi - \cot^{-1} x$
- $\tan^{-1} \frac{1}{x} = \cot^{-1} x$
- $\sec^{-1} (-x) = \pi - \sec^{-1} x$
- $\sin^{-1} (-x) = -\sin^{-1} x$
- $\tan^{-1} (-x) = -\tan^{-1} x$
- $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1} (-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$
- $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$
- $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1} \frac{x+y}{1-xy}, xy < 1$
- $2\tan^{-1}x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} \quad |x| < 1$
- $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy}, xy > -1$
- $2\tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}, 0 \le x \le 1$

ਇਤਿਹਾਸਕ ਨੋਟ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਆਰੀਆਭੱਟ (476 ਈ.)] ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਭਾਸਕਰ ਦੂਜਾ (1114 ਈ.) ਨੇ ਮੁੱਖ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸੀ। ਇਸ ਸੰਪੂਰਨ ਗਿਆਨ ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਮੱਧ ਪੂਰਵ ਅਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਉੱਥੋਂ ਯੂਰੋਪ ਗਿਆ। ਯੂਨਾਨੀਆਂ ਨੇ ਵੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਪਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਕਾਰਜ ਵਿਧੀ ਇੰਨੀ ਬੇ-ਢੰਗੀ ਸੀ, ਕਿ ਭਾਰਤੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਣ ਤੇ ਇਹ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ਵ ਵਿੱਚ ਅਪਣਾਈ ਗਈ।

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਆਧੁਨਿਕ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਕੋਣ ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਅਤੇ (sine) ਫਲਨ ਦੀ ਜਾਣ ਪਹਿਚਾਣ ਦਾ ਵੇਰਵਾ ਸਿਧਾਂਤ (ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜੋਤਿਸ਼ ਕਾਰਜ) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਮੁੱਖ ਹੈ।

ਭਾਸਕਰ ਪਹਿਲਾ (600 ਈ.) ਨੇ $90°$ ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੋਣਾਂ ਦੇ sine ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਸੋਲਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦਾ ਮਲਿਆਲਮ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\sin(A + B)$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਇੱਕ ਉਤਪਤੀ ਹੈ। $18°$, $36°$, $54°$, $72°$, ਆਦਿ ਦੇ sine ਅਤੇ cosine ਦੇ ਸ਼ੁੱਧ ਮੁੱਲ ਭਾਸਕਰ ਦੂਜੇ ਨੇ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

$\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, ਆਦਿ ਨੂੰ $\sin x$, ਅਤੇ $\cos x$, ਆਦਿ ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸੁਝਾਵ Sir John F.W. Hersehel (1813 ਈ.) ਨੇ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਨਾਲ Thales (600 ਈ. ਪੂ.) ਦਾ ਨਾਂ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਮਿਸਰ ਦੇ ਮਹਾਨ ਪਿਰਾਮਿਡਾਂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦਾ ਮਾਪ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਉਚਾਈ ਦੀ ਮਦਦ ਛੜ ਅਤੇ ਪਿਰਾਮਿਡ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਨੂੰ ਮਾਪ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ ਹਨ :

$$\frac{H}{S} = \frac{h}{s} = \tan \text{ (ਸੂਰਜ ਦਾ ਅਵਲੰਬ)}$$

Thales ਨੇ ਸਮੁੰਦਰੀ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਪੁਰਾਣੇ ਭਾਰਤੀ ਕਾਰਜਾਂ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦੇ ਹਨ।