ਅਧਿਆਇ 3

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ Matrices)

❖ *The essence of mathematics lies in its freedom — CANTOR* ❖

3.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਵੱਖ ਵੱਖ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix) ਦੇ ਗਿਆਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਸਾਧਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਹੋਰ ਸਿੱਧੀਆਂ ਸਾਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗਣਿਤਕ ਸਾਧਨ ਸਾਡੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕਾਫੀ ਹੱਦ ਤੱਕ ਸਰਲ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਸੰਖੇਪ ਅਤੇ ਸਰਲ ਵਿਧੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਉਪਰਾਲੇ ਸਦਕਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੋਇਆ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਲਈ ਹੀ ਨਹੀਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਂਦਾ ਬਲਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਕਿਤੇ ਵੱਧ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਕੇਤਨ ਅਤੇ (operations) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿਅਕਤੀਗਤ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਲਈ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨਿਕ ਸਪਰੈਡਸ਼ੀਟ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਜ਼ (Electronic Spreadsheet Programmes) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿਜ਼ਨਸ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਬਜਟ (Budgeting), ਵਿਕਰੀ ਖਾਕਾ (Sales Projection) ਲਾਗਤ ਅਨੁਮਾਨ (Cost Estimation) ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਆਦਿ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅਨੇਕ ਭੌਤਿਕ ਕਾਰਵਾਈਆਂ (operations) ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵਧਾਉਣਾ (Magnification), ਗੇੜਾ (Rotation) ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (Reflection) ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਗਣਿਤਿਕ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸੰਕੇਤ ਪੱਧਤੀ ਲਿਖਣ (Cryptography) ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾ ਕੇਵਲ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀਆਂ ਹੀ ਕੁਝ ਸ਼ਾਖਾਵਾਂ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਬਲਕਿ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਤਪੱਤੀ ਸੰਬੰਧੀ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ; ਆਧੁਨਿਕ ਮਨੋਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਉਦਯੋਗਿਕ ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Matrix algebra) ਦੇ ਆਧਾਰਭੂਤ ਸਿਧਾਤਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣੂ ਹੋਣਾ ਸਾਨੂੰ ਰੋਚਕ ਲੱਗੇਗਾ।

3.2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Matrix)

ਮੰਨ ਲਓ ਅਸੀਂ ਇਹਸੂਚਨਾ ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਾਧਾ ਕੋਲ 15 ਕਿਤਾਬਾਂ/ ਪੁਸਤਕਾਂ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ [15] ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਸਮਝ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ [ ] ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਿਖਿਤ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣਾ ਹੈ ਕਿ ਰਾਧਾ ਕੋਲ 15 ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ 6 ਕਲਮਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ [15 6] ਰੂਪ ਨਾਲ ਇਸ ਸਮਝ ਦੇ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ [ ] ਦੇ ਅੰਦਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਜਦਕਿ ਦੂਜੀ ਸੰਖਿਆ ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਰਾਧਾ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਦੋ ਮਿੱਤਰਾਂ ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ :

ਰਾਧਾ ਦੇ ਕੋਲ	15	ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ	6 ਕਲਮਾਂ ਹਨ,
ਜੋਤਿਕਾ ਦੇ ਕੋਲ	10	ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ	2 ਕਲਮਾਂ ਹਨ,
ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ	13	ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ	5 ਕਲਮਾਂ ਹਨ,

ਹੁਣ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵਿਵਸਥਿਤ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

	ਪੁਸਤਕਾਂ	ਕਲਮਾਂ
ਰਾਧਾ	15	6
ਜੋਤਿਕਾ	10	2
ਸਿਮਰਨ	13	5

ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ} & \text{ਦੂਸਰਾ ਥੰਮ} \end{array} & \end{array}$$

ਜਾਂ

	ਰਾਧਾ	ਜੋਤਿਕਾ	ਸਿਮਰਨ
ਪੁਸਤਕਾਂ	15	10	13
ਕਲਮਾਂ	6	2	5

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 15 & 10 & 13 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ} \\ \leftarrow \text{ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ} \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ} & \text{ਦੂਸਰਾ ਥੰਮ} & \text{ਤੀਸਰਾ ਥੰਮ} \end{array} & \end{array}$$

ਪਹਿਲੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ

ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦੂਸਰੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ; ਰਾਧਾ, ਜੋਤਿਕਾ ਅਤੇ ਸਿਮਰਨ ਦੇ ਕੋਲ ਕਲਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਕਿਸਮ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਜਾਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਤੱਤ ਜਾਂ ਇੰਦਰਾਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਵੱਡੇ (Capital) ਅੱਖਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} \text{ï}\,2 & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ \mathrm{B}=\begin{bmatrix} 2+i & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3.5 & \text{ï}\,1 & 2 \\ \sqrt{3} & 5 & \frac{5}{7} \end{bmatrix},\ \mathrm{C}=\begin{bmatrix} 1+x & x^3 & 3 \\ \cos x & \sin x+2 & \tan x \end{bmatrix}$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿਤਿਜੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ (Rows) ਅਤੇ ਖੜੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਥੰਮ (Columns) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 2 ਥੰਮ ਹਨ ਅਤੇ B ਵਿੱਚ 3 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ C ਵਿੱਚ 2 ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ 3 ਥੰਮ ਹਨ।

3.2.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of a matrix)*

m ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਤਰਤੀਬ (order) ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਾਂ ਕੇਵਲ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A, ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, B ਇੱਕ 3×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ C, ਇੱਕ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ $3 \times 2 = 6$ ਅੰਗ ਹਨ ਅਤੇ B ਅਤੇ C ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 9 ਅਤੇ 6 ਅੰਗ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਕਿਸੇ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਆਇਤਕਾਰ ਵਿਵਸਥਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

ਜਾਂ $\mathrm{A} = [a_{ij}]_{m \times n},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$ ਜਿੱਥੇ $i,\ j \in \mathbf{N}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤ $a_{i1}, a_{i2}, a_{i3},..., a_{in}$ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ jਵੇਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j},..., a_{mj}$ ਹਨ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ a_{ij}, iਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ jਵੇਂ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਤੱਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ A ਦਾ (i, j)ਵਾਂ ਤੱਤ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੇ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ mn ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ :

1. ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸੰਕੇਤ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।
2. ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਹਿਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਫਲਨ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਥੰਮ) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (ਜਾਂ $[x, y]$)ਨਾਲ, ਉਦਾਹਰਣ ਸਰੂਪ ਬਿੰਦੂ P(0, 1), ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ $P = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ਜਾਂ [0 1] ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਬੰਦ ਸਰਲਰੇਖੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A(1, 0), B (3, 2), C (1, 3), ਅਤੇ D (ï 1, 2) ਹਨ।

ਹੁਣ, ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$X = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 4} \end{array} \quad \text{ਜਾਂ} \quad Y = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_{4 \times 2}$$

ਇਸ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਆਕ੍ਰਿਤੀ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਹਾਰਣ 1. ਤਿੰਨ ਫੈਕਟਰੀਆਂ I, II ਅਤੇ III ਵਿੱਚ ਪੁਰਸ਼ ਅਤੇ ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਚਨਾ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

	ਪੁਰਸ਼ ਕਰਮਚਾਰੀ	ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀ
I	30	25
II	25	31
III	27	26

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਨਿਰਪ੍ਰਤ ਕਰੋ। ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਵਾਲੇ ਇੰਦਰਾਜ ਕੀ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 30 & 25 \\ 25 & 31 \\ 27 & 26 \end{bmatrix}$$

ਤੀਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ ਦਾ ਇੰਦਰਾਜ ਫੈਕਟਰੀ &III ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਮਹਿਲਾ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ 8 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) (orders) ਕੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ mn ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 8 ਤੱਤਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਕ੍ਰਮਿਤ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ।

ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਜੋੜੇ (1, 8), (8, 1), (4, 2), (2, 4) ਹਨ।

ਅਤੇ ਸੰਭਵ ਕ੍ਰਮਿਤ (ਤਰਤੀਬ) $1 \times 8, 8 \times 1, 4 \times 2, 2 \times 4$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ $a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

ਹੁਣ $\qquad a_{ij} = \frac{1}{2}|i - 3j|,\ i = 1, 2, 3$ ਅਤੇ $j = 1, 2$

ਇਸ ਲਈ

$$a_{11} = \frac{1}{2}|1 - 3.1| = 1 \qquad a_{12} = \frac{1}{2}|1 - 3.2| = \frac{5}{2}$$

$$a_{21} = \frac{1}{2}|2 - 3.1| = \frac{1}{2} \qquad a_{22} = \frac{1}{2}|2 - 3.2| = 2$$

$$a_{31} = \frac{1}{2}|3-3.1| = 0 \qquad a_{32} = \frac{1}{2}|3-3.2| = \frac{3}{2}$$

ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

3.3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Matrices)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) **ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Column matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਥੰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, 4×1 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਇੱਕ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $A = [a_{ij}]_{m \times 1}$ ਇੱਕ $m \times 1$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) **ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Row matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{5} & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1\times 4}$, 1×4 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੀ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $B = [b_{ij}]_{1 \times n}$ ਇੱਕ $1 \times n$ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੀ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(iii) **ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Square matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $m = n$ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ónôਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 3\sqrt{2} & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

ਇੱਕ 3 ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ਇੱਕ m ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇੰਦਰਾਜ $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਤੱਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਅੰਗ, 1, 4, 6 ਹਨ।

(iv) **ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Diagonal matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਵਿਕਰਣ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਸ ਦੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਰਥਾਤ, ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{m \times m}$ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $b_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ $i \neq j$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A = [4]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

(v) **ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Scalar matrix)**

ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਭਾਵ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $b_{ij} = 0$, ਜੇਕਰ $i \neq j$

$b_{ij} = k$, ਜੇਕਰ $i = j$, ਜਦੋਂ ਕਿ k ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ

$A = [3]$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ 1, 2 ਅਤੇ ਦੇ 3 ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

(vi) **ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Identity matrix)**

ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ 1 ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਗ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ਜੇਕਰ } & i = j \\ 0 \text{ ਜੇਕਰ } & i \neq j \end{cases}$

ਅਸੀਂ, n ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ I_n ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜਦੋਂ ਸੰਦਰਭ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮ (ਤਰਤੀਬ) ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਕੇਵਲ I ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $[1], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਤਰਤੀਬ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ $k = 1$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਹਰੇਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(vii) **ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero matrix)**

ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $[0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [0, 0]$ ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ O ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਸੰਦਰਭ ਦੁਆਰਾ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

3.3.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ (Equality of matrices)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\mathrm{A} = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $\mathrm{B} = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ

(i) ਉਹ ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ

(ii) A ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ, B ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਲਈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਮਾਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਪਰੰਤੂ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਸਮਾਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ A = B ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x & y \\ z & a \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 & 0 \\ 2 & \sqrt{6} \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $x =$ ï $1.5, y = 0, z = 2, a = \sqrt{6}, b = 3, c = 2$

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x+3 & z+4 & 2y-7 \\ -6 & a-1 & 0 \\ b-3 & -21 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3y-2 \\ -6 & -3 & 2c+2 \\ 2b+4 & -21 & 0 \end{bmatrix}$

ਹੈ ਤਾਂ a, b, c, x, y ਅਤੇ z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਾਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਵੀ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੇ। ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਣਾਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$x + 3 = 0$, $z + 4 = 6$, $2y$ ï $7 = 3y$ ï 2

a ï $1 =$ ï 3, $0 = 2c + 2$, b ï $3 = 2b + 4$,

ਇਸ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a =$ ï 2, $b =$ ï 7, $c =$ ï 1, $x =$ ï 3, $y =$ ï5, $z = 2$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} 2a+b & a-2b \\ 5c-d & 4c+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 11 & 24 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $a, b, c,$ ਅਤੇ d ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ, ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$2a + b = 4$ $5c$ ï $d = 11$

a ï $2b =$ ï 3 $4c + 3d = 24$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $a = 1, b = 2, c = 3$ ਅਤੇ $d = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & \frac{5}{2} & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$, ਦੇ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ %

(i) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (order) (ii) ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

(iii) ਤੱਤ $a_{13}, a_{21}, a_{33}, a_{24}, a_{23}$

2. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ 24 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬ ਕੀ ਹਨ ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ 13 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਤਰਤੀਬ ਕੀ ਹੋਣਗੀਆਂ।

3. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ 18 ਤੱਤ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀਆਂ ਸੰਭਵ ਤਰਤੀਬ ਪਤਾ ਕਰੋ ? ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ 5 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

4. ਇੱਕ 2×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਹਨ :

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ (ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$ (iii) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$

5. ਇੱਕ 3×4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i + j|$ (ii) $a_{ij} = 2i - j$

6. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ x, y ਅਤੇ z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

7. ਸਮੀਕਰਣ $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$ ਤੋਂ a, b, c ਅਤੇ d ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ

(A) $m < n$ (B) $m > n$ (C) $m = n$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

9. x ਅਤੇ y ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜੋੜੇ ਸਮਾਨ ਹਨ :

$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

(A) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = 7$ (B) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ

(C) $y = 7, \quad x = \frac{-2}{3}$ (D) $x = \frac{-1}{3}, \quad y = \frac{-2}{3}$.

10. 3×3 ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ 0 ਜਾਂ 1 ਹੈ।

(A) 27 (B) 18 (C) 81 (D) 512

3.4 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (Operations on Matrices)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਤੇ ਕੁੱਝ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਘਟਾਓ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ :

3.4.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Addition of matrices)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫਾਤੀਮਾ ਦੀਆਂ ਸਥਾਨ A ਅਤੇ ਸਥਾਨ B 'ਤੇ ਦੋ ਫੈਕਟਰੀਆਂ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੜੀਆਂ ਅਤੇ ਮੁੰਡਿਆਂ ਲਈ ਵੱਖ ਵੱਖ ਮੁੱਲ ਵਰਗਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 2, 3 ਲਈ ਖੇਡ ਦੇ ਜੁੱਤੇ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ :

$$\begin{array}{cc} & \text{A ਸਥਾਨ ਤੇ ਫੈਕਟਰੀ} \\ & \begin{array}{cc} \text{ਮੁੰਡੇ} & \text{ਕੁੜੀਆਂ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \text{B ਸਥਾਨ ਤੇ ਫੈਕਟਰੀ} \\ & \begin{array}{cc} \text{ਮੁੰਡੇ} & \text{ਕੁੜੀਆਂ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 90 & 50 \\ 70 & 55 \\ 75 & 75 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਾਤਿਮਾ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਵਰਗ ਵਿੱਚ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਖੇਡ ਦੇ ਜੁੱਤਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 1 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (80 + 90), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (60 + 50)

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 2 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (75 + 70), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (65 + 55)

ਮੁੱਲ ਵਰਗ 3 : ਲੜਕਿਆਂ ਲਈ (90 + 75), ਲੜਕੀਆਂ ਲਈ (85 + 75)

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 80+90 & 60+50 \\ 75+70 & 65+55 \\ 90+75 & 85+75 \end{bmatrix}$

ਇਹ ਨਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਯੋਗਫਲ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ, ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਜੋੜ ਦੇ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ਇੱਕ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਹੋਰ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਦੋ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ; ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, i ਅਤੇ j ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{5} & 1 \\ -2 & 3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $A + B$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ 2×3 ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਦਾ ਯੋਗ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 1-1 \\ 2-2 & 3+3 & 0+\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 6 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹਨ ਤਾਂ $A + B$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A + B$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।
2. ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਦੋ ਅਧਾਰੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

3.4.2 *ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ* (*Multiplication of a matrix by a scalar*)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਫਾਤੀਮਾ ਨੇ A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਵਰਗ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਦੋ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ (ਸੰਦਰਭ 3-4-1)

A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{ਮੁੰਡੇ} & \text{ਕੁੜੀਆਂ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 80 & 60 \\ 75 & 65 \\ 90 & 85 \end{bmatrix} \end{array}.$$

A 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਨਵੀਂ (ਬਦਲੀ ਹੋਈ) ਸੰਖਿਆ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ਮੁੰਡੇ} & \text{ਕੁੜੀਆਂ} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 2\times 80 & 2\times 60 \\ 2\times 75 & 2\times 65 \\ 2\times 90 & 2\times 85 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਸ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\begin{bmatrix} 160 & 120 \\ 150 & 130 \\ 180 & 170 \end{bmatrix}$ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਨਵਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ k ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ kA ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ k ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$, ਭਾਵ kA ਦਾ (i, j)ਵਾਂ ਅੰਸ਼, i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ka_{ij} ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$3A = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1.5 \\ \sqrt{5} & 7 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 4.5 \\ 3\sqrt{5} & 21 & -9 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Negative of a matrix) ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸï A ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂï A ਨੂੰ ï A = (ï 1) A ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ï A ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

ï A = (ï 1) A $= (-1)\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & -x \end{bmatrix}$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of matrices) ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ Aï B] ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $D = [d_{ij}]$ ਜਿੱਥੇ i ਅਤੇ j ਦੇ

ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $d_{ij} = a_{ij}$ ï b_{ij} ਹੈ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ D = A ï B = A + (ï 1) B, ਭਾਵ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ï B ਦਾ ਜੋੜਫਲ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ 2A ï B ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-3 & 4+1 & 6-3 \\ 4+1 & 6+0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4.3 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of matrix addition)*

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਗੁਣਾਂ (ਨਿਯਮਾਂ) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ :

(i) ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ **(Commutative Law)** ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$, ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ A + B = B + A ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੁਣ $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$

$= [b_{ij} + a_{ij}]$ (ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ)

$= ([b_{ij}] + [a_{ij}]) = B + A$

(ii) ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ **(Associative Law)** ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ ਦੇ ਲਈ (A + B) + C = A + (B + C)

ਹੁਣ $(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [c_{ij}]$

$= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]$

$= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]$ (ਕਿਉਂ ?)

$= [a_{ij}] + [(b_{ij} + c_{ij})] = [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [c_{ij}]) = A + (B + C)$

(iii) ਜੋੜਾਤਮਕ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ **(Existence of additive identity)** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ O ਇੱਕ $m \times n$ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ A+O = O+A= A ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਜੋੜ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ O ਹੈ।

(iv) ਜੋੜਾਤਮਕ ਉਲਟ ਦੀ ਹੋਂਦ **(The existence of additive inverse)** ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ï A = [ï $a_{ij}]_{m \times n}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਕਿ A + (ï

A) = (ï A) + A= O] ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ï A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਉਲਟ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜਾਂ ਰਿਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

3.4.4 *ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of scalar multiplication of a matrix)*

ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਅਤੇ $B = [b_{ij}]$ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ $m \times n$, ਵਾਲੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ k ਅਤੇ l ਸਕੇਲਰ ਹਨ ਤਾਂ

(i) $k(A + B) = kA + kB$, (ii) $(k + l)A = kA + lA$

ਹੁਣ] $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, ਅਤੇ k ਅਤੇ l ਸਕੇਲਰ ਹਨ, ਤਾਂ

(i) $k(A + B) = k([a_{ij}] + [b_{ij}])$

$$= k[a_{ij} + b_{ij}] = [k(a_{ij} + b_{ij})] = [(k\,a_{ij}) + (k\,b_{ij})]$$

$$= [k\,a_{ij}] + [k\,b_{ij}] = k[a_{ij}] + k[b_{ij}] = kA + kB$$

(ii) $(k + l)A = (k + l)[a_{ij}]$

$$= [(k + l)\,a_{ij}] = [k\,a_{ij}] + [l\,a_{ij}] = k[a_{ij}] + l[a_{ij}] = kA + lA.$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $2A + 3X = 5B$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ X ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ 2A + 3X = 5B

ਜਾਂ 2A + 3X ï 2A = 5B ï 2A

ਜਾਂ 2A ï 2A + 3X = 5B ï 2A (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮï ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ)

ਜਾਂ O + 3X = 5B ï 2A (ï 2A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 2A ਦਾ ਜੋੜ ਉਲਟ ਹੈ)

ਜਾਂ 3X = 5B ï 2A (O, ਜੋੜ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਹੈ)

ਜਾਂ X = $\frac{1}{3}$ (5B ï 2A)

ਜਾਂ $$X = \frac{1}{3}\left(5\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 10 \\ -25 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -16 & 0 \\ -8 & 4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 10-16 & -10+0 \\ 20-8 & 10+4 \\ -25-6 & 5-12 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & -10 \\ 12 & 14 \\ -31 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{-10}{3} \\ 4 & \frac{14}{3} \\ \frac{-31}{3} & \frac{-7}{3} \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. X ਅਤੇ Y, ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $$(X + Y) + (X \text{ ï } Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$(X + X) + (Y \text{ ï } Y) = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ਨਾਲ ਹੀ $$(X + Y) \text{ ï } (X \text{ ï } Y) = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$(X \text{ ï } X) + (Y + Y) = \begin{bmatrix} 5-3 & 2-6 \\ 0 & 9+1 \end{bmatrix} \Rightarrow 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$2\begin{bmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x & 10 \\ 14 & 2y-6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 2x+3 & 10-4 \\ 14+1 & 2y-6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+3 & 6 \\ 15 & 2y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $2x + 3 = 7$ ਅਤੇ $2y$ ï $4 = 14$ (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $2x = 7$ ï 3 ਅਤੇ $2y = 18$

ਜਾਂ $x = \frac{4}{2}$ ਅਤੇ $y = \frac{18}{2}$

ਅਰਥਾਤ $x = 2$ ਅਤੇ $y = 9$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਦੋ ਕਿਸਾਨ ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ ਅਤੇ ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਜਿਵੇਂ ਬਾਸਮਤੀ, ਪਰਮਲ ਅਤੇ ਨਉਰਾ ਦੀ ਖੇਤੀ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਕਿਸਾਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਸਤੰਬਰ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਿਆਂ ਵਿੱਚ)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 10{,}000 & 20{,}000 & 30{,}000 \\ 50{,}000 & 30{,}000 & 10{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array} \end{array}$$

ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਦੀ ਵਿਕਰੀ (ਰੁਪਿਆਂ ਵਿੱਚ)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\ A - B = & \begin{bmatrix} 5000 & 10{,}000 & 24{,}000 \\ 30{,}000 & 20{,}000 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array} \end{array}$$

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਦੀ ਇਕੱਠੀ ਵਿਕਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਸਤੰਬਰ ਤੋਂ ਅਕਤੂਬਰ ਤੱਕ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਆਈ ਕਮੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਕਿਸਾਨਾਂ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ 2% ਲਾਭ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲਾ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਸਾਨ ਦੀ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਸਤੰਬਰ ਅਤੇ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

$$
A + B = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 15,000 & 30,000 & 36,000 \\ 70,000 & 40,000 & 20,000 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}
$$

(ii) ਸਤੰਬਰ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਅਕਤੂਬਰ ਵਿੱਚ ਹੋਈ ਵਿਕਰੀ ਵਿੱਚ ਕਮੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

$$
A - B = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 24,000 \\ 30,000 & 20,000 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}
$$

(iii) B ਦਾ 2% $= \dfrac{2}{100} \times B = 0.02 \times B$

$$
= 0.02 \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 5000 & 10,000 & 6000 \\ 20,000 & 10,000 & 10,000 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}
$$

$$
= \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \text{ਬਾਸਮਤੀ} & \text{ਪਰਮਲ} & \text{ਨਉਰਾ} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 100 & 200 & 120 \\ 400 & 200 & 200 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \text{ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ} \\ \text{ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ} \end{array}
$$

ਇਸ ਲਈ ਅਕਤੂਬਰ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ, ਰਾਮ ਕਿਸ਼ਨ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100 ਰੁਪਏ, 200 ਰੁਪਏ ਅਤੇ 120 ਰੁਪਏ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਰਚਰਨ ਸਿੰਘ, ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਵਲ ਦੀ ਵਿਕਰੀ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 400 ਰੁ., 200, ਰੁ: ਅਤੇ 200 ਰੁ: ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

3.4.5 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ (Multiplication of matrices)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਮੀਰਾ ਅਤੇ ਨਦੀਮ ਦੋ ਮਿੱਤਰ ਹਨ। ਮੀਰਾ 2 ਕਲਮਾਂ ਅਤੇ 5 ਕਹਾਣੀ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਦੀਮ ਨੂੰ 8 ਕਲਮਾਂ ਅਤੇ 10 ਕਹਾਣੀ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਦੁਕਾਨ ਤੇ (ਕੀਮਤ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਕਲਮ & ਹਰੇਕ 5 ਰੁ:, ਕਹਾਣੀ ਪੁਸਤਕ&ਹਰੇਕ 50 ਰੁ: ਹੈ।

ਉਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਖਰਚ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ ? ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ; ਮੀਰਾ ਨੂੰ ਰੁ: $(5 \times 2 + 50 \times 5)$ ਰੁ: ਭਾਵ 260 ਰੁ: ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਦੀਮ ਨੂੰ $(8 \times 5 + 50 \times 10)$ ਭਾਵ 540 ਰੁ: ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਜ਼ਰੂਰਤ	ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 50 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times 2+5\times 50 \\ 8\times 5+10\times 50 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 260 \\ 540 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਦੁਕਾਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

ਕਲਮ & ਹਰੇਕ 4 ਰੁਪਏ; ਕਹਾਣੀ ਦੀ ਪੁਸਤਕ &ਹਰੇਕ 40 ਰੁ:

ਹੁਣ ਮੀਰਾ ਅਤੇ ਨਦੀਮ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦਦਾਰੀ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(4 \times 2 + 40 \times 5) =$ ਰੁਪਏ ਅਤੇ $(8 \times 4 + 10 \times 40) = 432$ ਰੁਪਏ ਹੈ।

ਦੁਆਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਢੰਗ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜ਼ਰੂਰਤ	ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4\times 2+40\times 5 \\ 8\times 4+10\times 40 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 208 \\ 432 \end{bmatrix}$

ਹਣ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵਾਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੂਚਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਿਰੂਪਣ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜ਼ਰੂਰਤ	ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)	ਲੋੜੀਂਦੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)
$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 50 & 40 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5\times 2+5\times 50 & 4\times 2+40\times 5 \\ 8\times 5+10\times 50 & 8\times 4+10\times 40 \end{bmatrix}$
		$=\begin{bmatrix} 260 & 208 \\ 540 & 432 \end{bmatrix}$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦਾ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਗੁਣਨ ਲਈ, A ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ B ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਗੁਣਨਫਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Product matrix) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ B ਦੇ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ (Elementï wise) ਗੁਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਫ਼ਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਰਸਮੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ A ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ, B ਵਿੱਚ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ $B = [b_{jk}]$ ਇੱਕ $n \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ $m \times p$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ C ਦਾ (i, k) ਵਾਂ ਤੱਤ c_{ik} ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ A ਦੀ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ B ਦੇ kਵੇਂ ਥੰਮ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਗੁਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਗੁਣਨਫ਼ਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ,

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ $[a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{in}]$ ਅਤੇ B ਦਾ kਵਾਂ ਥੰਮ

$$\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix} \text{ ਹੈ, ਤਾਂ } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \ldots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $C = [c_{ik}]_{m \times p}$ A ਅਤੇ B ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ

ਗੁਣਨਫਲ CD ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $CD = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ 2×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇੰਦਰਾਜ C ਦੀ ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਦੇ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੀ D ਦੇ ਕਿਸੇ ਥੰਮ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਚਾਰੋਂ ਗਣਨਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(2) + (-1)(-1) + (2)(5) & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & (1)(7) + (-1)(1) + 2(-4) \\ ? & ? \end{bmatrix}$

ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 0(2) + 3(-1) + 4(5) & ? \end{bmatrix}$

ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & 0(7) + 3(1) + 4(-4) \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $CD = \begin{bmatrix} 13 & -2 \\ 17 & -13 \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}2 & 6 & 0\\ 7 & 9 & 8\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ 2 ਥੰਮ ਹਨ ਜੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ

$$AB = \begin{bmatrix}6(2)+9(7) & 6(6)+9(9) & 6(0)+9(8)\\ 2(2)+3(7) & 2(6)+3(9) & 2(0)+3(8)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}12+63 & 36+81 & 0+72\\ 4+21 & 12+27 & 0+24\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}75 & 117 & 72\\ 25 & 39 & 24\end{bmatrix}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ BA ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ AB ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਪਰੰਤੂ BA ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ B ਵਿੱਚ 3 ਥੰਮ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਕਤਾਰਾਂ (3 ਕਤਾਰਾਂ ਨਹੀਂ) ਹਨ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m \times n$ ਅਤੇ $k \times l$ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਜੇਕਰ ਕੇਵਲ $n = k$ ਅਤੇ $l = m$ ਹੋਵੇ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੀ ਅਣ-ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ (Non-Commutativity of multiplication of matrices)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ AB = BA ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ $AB \neq BA$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A ਇੱਕ 2×3 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ B ਇੱਕ 3×2 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2×2 ਅਤੇ 3×3, ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

$$AB = \begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-8+6 & 3-10+3\\ -8+8+10 & -12+10+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -4\\ 10 & 3\end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $$BA = \begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-12 & -4+6 & 6+15\\ 4-20 & -8+10 & 12+25\\ 2-4 & -4+2 & 6+5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-10 & 2 & 21\\ -16 & 2 & 37\\ -2 & -2 & 11\end{bmatrix}$$

ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $AB \neq BA$.

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ AB ਅਤੇ BA ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ AB ≠ BA ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਸੋਚ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਦੋਵੇਂ ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਉਹ ਸਮਾਨ ਹੋਣ। ਪਰੰਤੂ ਅਜਿਹਾ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ AB ਅਤੇ BA ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਵੀ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ਅਤੇ $BA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ AB ≠ BA ਹੈ।

ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

> *ਟਿੱਪਣੀ* ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ, ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ AB ਅਤੇ BA ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, AB ≠ BA ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :
>
> ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $AB = BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$
>
> ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨ ਕ੍ਰਮ&ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਦੋ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Zero matrix as the product of two non-zero matrices)

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ $ab = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ $a = 0$ ਜਾਂ $b = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ AB ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫ਼ਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਵੇ।

3.4.6 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of multiplication of matrices)*

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦਰਸਾ ਰਹੇ ਹਾਂ।

1. ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ **(The Associatine law)** : ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਲਈ (AB) C = A (BC), ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

2. ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ **(The distributive law)** : ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਿੰਨ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਲਈ

(i) A (B+C) = AB + AC

(ii) (A+B) C = AC + BC, ਜਦੋਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

3. ਗੁਣਨ ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਦੀ ਹੋਂਦ **(The Existance of multiplcatioutive identify)**: ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ I ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ IA = AI = A

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਜੇਕਰ $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ ਤਾਂ A(BC) ਅਤੇ (AB)C ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਰਸਾਓ ਕਿ (AB)C = A(BC) ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $AB=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+0+1 & 3+2-4\\ 2+0-3 & 6+0+12\\ 3+0-2 & 9-2+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 18\\ 1 & 15\end{bmatrix}$

$$(AB)\,(C)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 18\\ 1 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+2 & 4+0 & 6-2 & -8+1\\ -1+36 & -2+0 & -3-36 & 4+18\\ 1+30 & 2+0 & 3-30 & -4+15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & -7\\ 35 & -2 & -39 & 22\\ 31 & 2 & -27 & 11\end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $BC=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 2+0 & 3-6 & -4+3\\ 0+4 & 0+0 & 0-4 & 0+2\\ -1+8 & -2+0 & -3-8 & 4+4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7 & 2 & -3 & -1\\ 4 & 0 & -4 & 2\\ 7 & -2 & -11 & 8\end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 & 2 \\ 7 & -2 & -11 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+4-7 & 2+0+2 & -3-4+11 & -1+2-8 \\ 14+0+21 & 4+0-6 & -6+0-33 & -2+0+24 \\ 21-4+14 & 6+0-4 & -9+4-22 & -3-2+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & -7 \\ 35 & -2 & -39 & 22 \\ 31 & 2 & -27 & 11 \end{bmatrix}$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ, $(AB)\,C = A\,(BC)$

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ਤਾਂ AC, BC ਅਤੇ (A + B)C ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $(A + B)\,C = AC + BC$

ਹੱਲ : $A+B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਲਈ, $$(A + B)\,C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -5 & 0 & 10 \\ 8 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-14+24 \\ -10+0+30 \\ 16+12+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ $$AC = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 7 \\ -6 & 0 & 8 \\ 7 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-12+21 \\ -12+0+24 \\ 14+16+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $$BC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+3 \\ 2+0+6 \\ 2-4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$AC + BC = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 30 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 28 \end{bmatrix}$$

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ $(A + B)\,C = AC + BC$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ A^3 ï $23A$ ï $40I = O$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$A^3 = A\,A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 & 4 & 8 \\ 1 & 12 & 8 \\ 14 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A^3 \text{ ï } 23A \text{ ï } 40I = \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} \text{ ï } 23 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ï } 40 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63 & 46 & 69 \\ 69 & -6 & 23 \\ 92 & 46 & 63 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -23 & -46 & -69 \\ -69 & 46 & -23 \\ -92 & -46 & -23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 63-23-40 & 46-46+0 & 69-69+0 \\ 69-69+0 & -6+46-40 & 23-23+0 \\ 92-92+0 & 46-46+0 & 63-23-40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਕਿਸੇ ਵਿਧਾਨ ਸਭਾ ਚੋਣਾਂ ਦੇ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਦਲ ਨੇ ਆਪਣੇ ਉਮੀਦਵਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਚਾਰ ਹਿੱਤ ਇੱਕ ਜਨ ਸੰਪਰਕ ਫਰਮ ਨੂੰ ਠੇਕਾ ਦਿੱਤਾ। ਪ੍ਰਚਾਰ ਲਈ ਤਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਸੰਪਰਕ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੋਇਆ। ਇਹ ਹਨ : ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ, ਘਰ ਘਰ ਜਾ ਕੇ ਅਤੇ ਪਰਚਾ ਵਿਤਰਣ ਦੁਆਰਾ। ਹਰੇਕ ਸੰਪਰਕ ਦੀ ਲਾਗਤ (ਪੈਸਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ :

$$A = \begin{array}{c} \text{ਪ੍ਰਤੀ ਸੰਪਰਕ ਲਾਗਤ} \\ \begin{bmatrix} 40 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ} \\ \text{ਘਰੋਂ ਜਾ ਕੇ} \\ \text{ਪਰਚੇ ਦੁਆਰਾ} \end{array}$$

X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੰਪਰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ

$$B = \begin{array}{c} \text{ਟੈਲੀਫੋਨ ਦੁਆਰਾ} \quad \text{ਘਰ ਜਾ ਕੇ} \quad \text{ਪਰਚੇ ਦੁਆਰਾ} \\ \begin{bmatrix} 1000 & 500 & 5000 \\ 3000 & 1000 & 10,000 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \to X \\ \to Y \end{array}$$

ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। X ਅਤੇ Y ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਰਾਜਨੀਤਿਕ ਦਲ ਦੁਆਰਾ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$BA = \begin{bmatrix} 40,000 + 50,000 + 250,000 \\ 120,000 + 100,000 + 500,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} 340,000 \\ 720,000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to X \\ \to Y \end{array}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਲ ਦੁਆਰਾ ਦੋਵਾਂ ਸ਼ਹਿਰਾਂ ਵਿੱਚ ਖਰਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਕੁੱਲ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ 3,40,000 ਪੈਸੇ ਅਤੇ 720,000 ਪੈਸੇ ਭਾਵ 3400 ਰੁ: ਅਤੇ 7200 ਰੁ: ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) A + B (ii) A ï B (iii) 3A ï C

(iv) AB (v) BA

2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ :

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

3. ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗੁਣਨਫ਼ਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

4. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ (A+B) ਅਤੇ (B ï C) ਪਤਾ ਕਰੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ A + (B ï C) = (A + B) ï C.

5. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} & 2 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$, ਤਾਂ 3A ï 5B ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਸਰਲ ਕਰੋ, $\cos\theta\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}+\sin\theta\begin{bmatrix}\sin\theta & -\cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$

7. X ਅਤੇ Y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

(i) $X+Y=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ਅਤੇ X ï Y $=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $2X+3Y=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $3X+2Y=\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

8. X ਅਤੇ Y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $Y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ਅਤੇ $2X+Y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

9. x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $2\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 1 & 8\end{bmatrix}$

10. ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ x, y, z ਅਤੇ t ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

$$2\begin{bmatrix}x & z\\ y & t\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

11. ਜੇਕਰ $x\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 5\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਜੇਕਰ $3\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & 6\\ -1 & 2w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & x+y\\ z+w & 3\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ x, y, z ਅਤੇ w ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਜੇਕਰ $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x & -\sin x & 0\\ \sin x & \cos x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $F(x)\,F(y)=F(x+y)$

14. ਦਰਸਾਓ ਕਿ

(i) $\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

(ii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A^2 ï $5A + 6I$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ A^3 ï $6A^2 + 7A + 2I = 0$

17. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $A^2 = kA$ ï $2I$ ਹੈ ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ I ਕ੍ਰਮ 2 ਦਾ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ

ਕਿ $I + A = (I$ ï $A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

19. ਕਿਸੇ ਵਪਾਰ ਸੰਘ ਦੇ ਕੋਲ 30,000 ਰੁਪਏ ਦਾ ਫੰਡ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਾਂਡਾਂ (Bonds) ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਹੈ।ਪਹਿਲੇ ਬਾਂਡ ਤੇ 5% ਸਲਾਨਾ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਬਾਂਡ ਤੇ 7% ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਗੁਣਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ 30,000 ਰੁ: ਦੇ ਫੰਡ ਨੂੰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਾਂਡ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵੰਡਿਆ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਵਪਾਰ ਸੰਘ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਆਜ

(i) 1800 ਰੁ: ਹੋਵੇ। (ii) 2000 ਰੁ: ਹੋਵੇ।

20. ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਦੁਕਾਨ ਵਿੱਚ 10 ਦਰਜਨ ਰਸਾਇਣ ਵਿਗਿਆਨ, 8 ਦਰਜਨ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ 10 ਦਰਜਨ ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ ਦੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 80 ਰੁ: ਅਤੇ 60 ਰੁ: ਅਤੇ 40 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੁਸਤਕ ਹੈ।ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਦੁਕਾਨ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ X, Y, Z, W ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ $2 \times n$, $3 \times k$, $2 \times p$, $n \times 3$ ਅਤੇ $p \times k$, ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

21. PY + WY ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ n, k ਅਤੇ p 'ਤੇ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਹੋਣਗੇ।

(A) $k = 3, p = n$ (B) k ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਹੈ, , $p = 2$

(C) p ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਹੈ, $k = 3$ (D) $k = 2, p = 3$

22. ਜੇਕਰ $n = p$, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 7X ï 5Z ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

(A) $p \times 2$ (B) $2 \times n$ (C) $n \times 3$ (D) $p \times n$

3.5. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ (Transpose of a Matrix)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਅਤੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਜਿਵੇਂ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Symmetric Matrix) ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Skew Symmetric Matrix) ਦੇ ਬਾਰੇ ਜਾਣਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]$ ਇੱਕ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ A ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਦਾ ਪਰਸਪਰ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ (Interchange) ਕਰਨ ਨਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, A ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ (Transpose) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਨੂੰ A′ (ਜਾਂ A^T) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$, rk ਤਾਂ $A' = [a_{ji}]_{n \times m}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ \sqrt{3} & 1 \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$ ਹੋਵੇ gk rk ਤਾਂ $$A' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 0 \\ 5 & 1 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of transpose of matrices)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ ਢੁੱਕਵੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਢੁੱਕਵੇਂ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਲਈ

(i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (ਜਦੋਂ ਕਿ k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ)

(iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(A B)' = B' A'$

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ rFkk ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

(i) $(A')' = A$ (ii) $(A + B)' = A' + B'$

(iii) $(kB)' = kB'$, ਜਿੱਥੇ k ਕੋਈ ਅਚੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A')' = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = A$$

ਇੱਥੇ : $(A')' = A$

(ii) ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3}-1 & 4 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ
$$(A + B)' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ \sqrt{3} & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$A' + B' = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ \sqrt{3}-1 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $(A + B)' = A' + B'$

(iii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$kB = k\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 2k \\ k & 2k & 4k \end{bmatrix}$$

ਤਦ
$$(kB)' = \begin{bmatrix} 2k & k \\ -k & 2k \\ 2k & 4k \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = kB'$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(kB)' = kB'$

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'A'$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ
$$AB = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -6 & 12 \\ 4 & 12 & -24 \\ 5 & 15 & -30 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$(AB)' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ
$$A' = [\text{ï}2 \;\; 4 \;\; 5], \; B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ
$$B'A' = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -6 & 12 & 15 \\ 12 & -24 & -30 \end{bmatrix} = (AB)'$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $(AB)' = B'A'$

3.6 ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ (Symmetric and Skew Symmetric Matrices)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਸਮਮਿਤਈ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ $A' = A$ ਭਾਵ i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $[a_{ij}] = [a_{ji}]$ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 & 3 \\ 2 & -1.5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $A' = A$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $A' = -A$, ਭਾਵ i ਅਤੇ j ਦੇ ਹਰ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $a_{ji} = -a_{ij}$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $i = j$ ਰੱਖੀਏ ਤਾਂ $a_{ii} = -a_{ii}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $2a_{ii} = 0$ ਜਾਂ $a_{ii} = 0$ ਹਰੇਕ i ਦੇ ਲਈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B = \begin{bmatrix} 0 & e & f \\ -e & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $B' = -B$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਵਾਸਤਵਿਕ ਤੱਤਾਂ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ $A + A'$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $A - A'$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $B = A + A'$ ਤਾਂ

$$
\begin{aligned}
B' &= (A + A')' \\
&= A' + (A')' \quad [(\text{ਕਿਉਂਕਿ } (A + B)' = (A' + B')] \\
&= A' + A \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } (A')' = A) \\
&= A + A' \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } A + B = B + A) \\
&= B
\end{aligned}
$$

ਇਸ ਲਈ $\quad B = A + A'$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\quad C = A - A'$

$$
\begin{aligned}
C' &= (A - A')' = A' - (A')' \quad (\text{ਕਿਉਂ ?}) \\
&= A' - A \quad (\text{ਕਿਉਂ ?}) \\
&= -(A - A') = -C
\end{aligned}
$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $\quad C = A - A'$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(A+A')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ (Aï A′) ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ $(kA)' = kA'$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{1}{2}(A+A')$ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ $\frac{1}{2}(A-A')$ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B=\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $B' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $$P = \frac{1}{2}(B+B') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$P' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} = P$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $P = \frac{1}{2}(B+B')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $$Q = \frac{1}{2}(\text{B ï B}') = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$$ ਹੈ।

ਤਦ
$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{3} \\ \frac{-1}{2} & 0 & -3 \\ \frac{-5}{2} & 3 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ Q = $\frac{1}{2}$(B ï B′) ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$P + Q = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{-3}{2} & 3 & 1 \\ \frac{-3}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{5}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = B$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ।

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) (A + B)′ = A′ + B′ (ii) (A ï B)′ = A′ ï B′

3. ਜੇਕਰ $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) (A + B)′ = A′ + B′ (ii) (A ï B)′ = A′ ï B′

4. ਜੇਕਰ $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ $(A + 2B)'$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)' = B'A'$, ਜਿੱਥੇ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

6. (i) ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A'A = I$

(ii) ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A'A = I$

7. (i) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

8. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $(A + A')$ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(ii) (A ï A′) ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

9. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $\frac{1}{2}(A + A')$ ਅਤੇ $\frac{1}{2}(A - A')$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ :

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 11 ਅਤੇ 12 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

11. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ AB ï BA ਇੱਕ

(A) ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (B) ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

(C) ਸਿਫਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ (D) ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ

12. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ ਤਾਂ $A + A' = I$, ਜੇਕਰ α ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{3}$

(C) π (D) $\frac{3\pi}{2}$

3.7 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪਾਂਤਰਣ) [Elementary Operation (Transformation) of a matrix]

ਕਿਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ 'ਤੇ ਛੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ (ਰੂਪਾਂਤਰਣ) ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਥੰਮਾਂ 'ਤੇ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਜਾਂ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(i) ਕਿਸੇ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ ਜਾਂ ਦੋ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ (Inter change) ਸੰਕੇਤ ਰੂਪ (symbolically) ਰੂਪ ਵਿੱਚ, iਵੀ ਅਤੇ jਵੀਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਨੂੰ $R_i \leftrightarrow R_j$ ਅਤੇ iਵੇਂ ਅਤੇ jਵੇਂ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਅਦਲਾ ਬਦਲੀ ਨੂੰ $C_i \leftrightarrow C_j$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, ਵਿੱਚ $R_1 \leftrightarrow R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ; ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ iਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਨੂੰ k, ਜਦੋਂ $k \neq 0$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਨੂੰ $R_i \to kR_i$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਗਤ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ $C_i \to kC_i$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$

ਵਿੱਚ $C_3 \to \frac{1}{7}C_3$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{7} \\ -1 & \sqrt{3} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਜੋੜਨਾ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, iਵੀਂ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ jਵੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ k ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਜੋੜਨ ਨੂੰ $R_i \to R_i + kR_j$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸੰਗਤ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ $C_i \to C_i + k\,C_j$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

À ‹ ÂÔ ð ä ç ¶ñ Â Æ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ਤੇ $R_2 \to R_2$ ï $2R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

3.8 ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ (Invertible Matrices)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6. ਜੇਕਰ A, ਕ੍ਰਮ m, ਦਾ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ AB = BA = I, ਤਾਂ B ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ Aï 1 ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਨੂੰ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਹੁਣ
$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

ਨਾਲ ਹੀ $BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟ(Inverse) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ B = Aï 1 ਅਤੇ A ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B, ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ ਭਾਵ A = Bï 1

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਕਿਸੇ ਆਇਤਾਕਾਰ (Rectangular) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਨਫਲ AB ਅਤੇ BA ਦੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਣ ਤੇ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ।

2. ਜੇਕਰ B, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਤਾਂ A, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. [ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ (Uniqueness of inverse)] ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜੇਕਰ ਉਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = [a_{ij}]$ ਕ੍ਰਮ m ਦਾ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੰਨ ਲਓ B ਅਤ C ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਦੋ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦਿਖਾਵਾਂਗੇ ਕਿ B = C ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੈ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$AB = BA = I \qquad \ldots (1)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ C ਵੀ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$AC = CA = I \qquad \ldots (2)$$

ਹੁਣ $$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਯੋਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ ਤਾਂ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ਸਬੂਤ : ਇੱਕ ਉਲਟਣਸ਼ੀਲ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ

$$(AB)(AB)^{-1} = 1$$

ਜਾਂ $$A^{-1}(AB)(AB)^{-1} = A^{-1}I$$ (A^{-1} ਦਾ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਨਾਲ ਪੂਰਵ ਗੁਣਨ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਜਾਂ $$(A^{-1}A)B(AB)^{-1} = A^{-1}$$ (ਕਿਉਂਕਿ $A^{-1}I = A^{-1}$])

ਜਾਂ $$IB(AB)^{-1} = A^{-1}$$

ਜਾਂ $$B(AB)^{-1} = A^{-1}$$

ਜਾਂ $$B^{-1}B(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ਜਾਂ $$I(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

3.8.1 *ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (Inverse of a matrix by elementary operations)*

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ X, A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ X = AB ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ X = AB 'ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ X ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A 'ਤੇ, ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ X = AB 'ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ X ਤੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪੱਖ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਫਲ AB ਵਿੱਚ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਤੇ, ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਕਿ A^{-1} ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਰਾਹੀਂ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, A = IA ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ A = IA ਤੇ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੇ ਰਹਿਣਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ

$I = BA$ ਨਹੀਂ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ $A = AI$ ਲਿਖੋ ਅਤੇ $A = AI$ ਤੇ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੇ ਰਹੋ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਨੂੰ $I = AB$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $A = IA$ ($A = AI$) ਤੇ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ (ਥੰਮ) ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਰਨ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੀ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹੋਣ ਤਾਂ A^{-1} ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $A = IA$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A, \text{ ਤਾਂ } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_2 \to R_2 - 2R_1 \text{ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A \qquad (R_2 \to -\frac{1}{5} R_2 \text{ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} A \qquad (R_1 \to R_1 - 2R_2 \text{ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਵਿਕਲਪ : ਆਰੰਭਿਕ ਥੰਮ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹਿੱਤ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = AI$, ਭਾਵ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - 2C_1$, ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $C_2 \rightarrow -\frac{1}{5}C_2$, ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

ਅੰਤ ਵਿੱਚ, $C_1 \rightarrow C_1$ ï $2C_2$, ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਕਰਕੇ $$A^{\text{ï}1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = I A$, ਭਾਵ $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A$$ ($R_1 \leftrightarrow R_2$ ਦੁਆਰਾ)

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A$$ ($R_3 \rightarrow R_3$ ï $3R_1$ ਦੁਆਰਾ)

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_1 \to R_1 \text{ ï } 2R_2 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} A \quad (R_3 \to R_3 + 5R_2 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_3 \to \frac{1}{2} R_3 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_1 \to R_1 + R_3 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} A \quad (R_2 \to R_2 \text{ ï } 2R_3 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A^{\text{ï}1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ਵਿਕਲਪ] $A = AI$ ਲਿਖੋ, ਭਾਵ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (C_1 \leftrightarrow C_2)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 - 2C_1)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (C_3 \to C_3 + C_2)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad \left(C_3 \to \frac{1}{2}C_3\right)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -5 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}-2 & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 - 2C_2)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ -4 & 0 & -1\\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_1 \to C_1 + 5C_3)$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ -4 & 3 & -1\\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (C_2 \to C_2 - 3C_3)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ -4 & 3 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੇਕਰ $P = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ P^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਹੱਲ : $P = IP$ ਲਿਖੋ ਭਾਵ, $\begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_1 \to \frac{1}{10} R_1 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} P \quad (R_2 \to R_2 + 5R_1 \text{ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇੱਥੇ ਖੱਬੇ ਪੱਖ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P^{-1} ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 3.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 17 ਤੱਕ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਆਰੰਭਿਕ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੋਣਗੇ, ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

(A) AB = BA (B) AB = BA = 0

(C) AB = 0, BA = I (D) AB = BA = I

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, \quad n \in \mathbf{N}$$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਥੇ $P(n)$: ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}, n \in \mathbf{N}$

ਹੁਣ $P(1): A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਇਸ ਲਈ $A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

ਇਸ ਕਰਕੇ ਨਤੀਜਾ $n = 1$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਨਤੀਜਾ $n = k$ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(k): A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ $A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$.

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਨਤੀਜਾ $n = k + 1$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$A^{k+1} = A \cdot A^k = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta\cos k\theta - \sin\theta\sin k\theta & \cos\theta\sin k\theta + \sin\theta\cos k\theta \\ -\sin\theta\cos k\theta + \cos\theta\sin k\theta & -\sin\theta\sin k\theta + \cos\theta\cos k\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta + k\theta) & \sin(\theta + k\theta) \\ -\sin(\theta + k\theta) & \cos(\theta + k\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ ਨਤੀਜਾ $n = k + 1$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$, ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਮਿਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹਨ ਭਾਵ AB = BA ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $A' = A$ ਅਤੇ $B' = B$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਤਾਂ $(AB)' = AB$

ਪਰੰਤੂ $(AB)' = B'A' = BA$ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $BA = AB$

ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ AB = BA ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

ਹੁਣ $(AB)' = B'A'$

$= BA$ (ਕਿਉਂਕਿ A ਅਤੇ B ਸਮਮਿਤਈ ਹਨ)

$= AB$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : AB ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ D ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ $CD - AB = O$ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A, B, C ਸਾਰੇ ਕ੍ਰਮ 2, ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ $CD - AB$ ਸੁਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ (Well defined) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ D, 2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ਹੈ। ਤਾਂ CD ï AB = O ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{O}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 2a+5c & 2b+5d \\ 3a+8c & 3b+8d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 43 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} 2a+5c-3 & 2b+5d \\ 3a+8c-43 & 3b+8d-22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$2a + 5c$ ï $3 = 0$ ... (1)

$3a + 8c$ ï $43 = 0$ ... (2)

$2b + 5d = 0$ ... (3)

ਅਤੇ $3b + 8d$ ï $22 = 0$ ... (4)

(1) ਅਤੇ (2), ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ a = ï 191, $c = 77$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(3) ਅਤੇ (4), ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ b = ï 110, $d = 44$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ $$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -191 & -110 \\ 77 & 44 \end{bmatrix}$$

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ

1. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in \mathbf{N}$ ਦੇ ਲਈ

$(a\mathrm{I} + b\mathrm{A})^n = a^n \mathrm{I} + na^{n\,ï\,1} b\mathrm{A}$, ਜਿੱਥੇ I ਕ੍ਰਮ 2 ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

2. ਜੇਕਰ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$

3. ਜੇਕਰ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} 1+2n & -4n \\ n & 1-2n \end{bmatrix}$,ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

4. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AB ï BA ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $B'AB$ ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਸਮਮਿਤਈ ਜਾਂ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਹੈ।

6. x, y, ਅਤੇ z ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 0 & 2y & z \\ x & y & -z \\ x & -y & z \end{bmatrix}$ ਸਮੀਕਰਣ $A'A = I$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7. x ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ x \end{bmatrix} = O$ ਹੈ ?

8. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ A^2 ï $5A + 7I = O$ ਹੈ।

9. ਜੇਕਰ $\begin{bmatrix} x & -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = O$ ਹੈ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ x, y, ਅਤੇ z ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉਹ ਦੋ ਬਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਚਦਾ ਹੈ। ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਵਾਰਸ਼ਿਕ ਵਿਕਰੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੂਚਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਬਾਜ਼ਾਰ	ਉਤਪਾਦਨ		
I	10,000	2,000	18,000
II	6,000	20,000	8,000

(a) ਜੇਕਰ x, y ਅਤੇ z ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.50 ਰੁ:, 1.50 ਰੁ: ਅਤੇ 1.00 ਰੁ: ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਬਾਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ (Revenue), ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨ ਵਸਤੂਆਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ (Cost) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2.00 ਰੁ:, 1.00 ਰੁ: ਅਤੇ 50 ਪੈਸੇ ਹੈ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਲਾਭ (Gross profit) ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ X ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ ਹੈ।

12. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $AB = BA$ ਹੈ ਤਾਂ ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ ਦੁਆਰਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB^n = B^nA$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ $n \in N$ ਦੇ ਲਈ $(AB)^n = A^nB^n$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

13. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $A^2 = I$, ਤਾਂ

(A) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$ (B) 1 ï $\alpha^2 + \beta\gamma = 0$

(C) 1 ï α^2 ï $\beta\gamma = 0$ (D) $1 + \alpha^2$ ï $\beta\gamma = 0$

14. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਹੈ ਤਾਂ :

(A) A ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। (B) A ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(C) A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

15. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $A^2 = A$, ਤਾਂ $(I + A)^3$ ï 7 A ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) A (B) I ï A (C) I (D) 3A

ਸਾਰ–ਅੰਸ਼

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਫਲਨਾਂ ਜਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਆਇਤਕਾਰ ਕ੍ਰਮ ਵਿਵਸਥਾ ਹੈ।
- m ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ n ਥੰਮਾਂ ਵਾਲੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ $m \times n$ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $[a_{ij}]_{m \times 1}$ ਇੱਕ ਥੰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- $[a_{ij}]_{1 \times n}$ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਇੱਕ $m \times n$ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $m = n$ ਹੈ।
- $A = [a_{ij}]_{m \times m}$ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ $i \neq j$
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{ij} = 0$, ਜਦੋਂ $i \neq j$, $a_{ij} = k$, (k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ), ਜਦੋਂ $i = j$ ਹੈ।
- $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜੇਕਰ $a_{ij} = 1$ ਜਦੋਂ $i = j$ ਅਤੇ $a_{ij} = 0$ ਜਦੋਂ $i \neq j$ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੰਸ਼ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- $A = [a_{ij}] = [b_{ij}] = B$ ਜੇਕਰ (i) A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ (ii) i ਅਤੇ j ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $a_{ij} = b_{ij}$ ਹੈ।
- $kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [k(a_{ij})]_{m \times n}$
- ï A = (ï 1)A
- A ï B = A + (ï 1) B
- A + B = B + A

- $(A + B) + C = A + (B + C)$, ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਸਮਾਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।
- $k(A + B) = kA + kB$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ ਅਤੇ k ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਹੈ।
- $(k + l)\,A = kA + lA$, ਜਿੱਥੇ k ਅਤੇ l ਅਚੱਲ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਅਤੇ $B = [b_{jk}]_{n \times p}$ ਤਾਂ $AB = C = [c_{ik}]_{m \times p}$, ਜਿੱਥੇ $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk}$ ਹੈ।
- (i) $A(BC) = (AB)C$, (ii) $A(B + C) = AB + AC$, (iii) $(A + B)C = AC + BC$
- ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ਤਾਂ A' ਜਾਂ $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$
- (i) $(A')' = A$ (ii) $(kA)' = kA'$ (iii) $(A + B)' = A' + B'$ (iv) $(AB)' = B'A'$
- ਜੇਕਰ $A' = A$ ਹੈ ਤਾਂ A ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ A′ = ï A ਹੈ ਤਾਂ A ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿਖਮ ਸਮਮਿਤਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ’ਤੇ ਆਰੰਭਿਕ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

  (i) $R_i \leftrightarrow R_j$ ਜਾਂ $C_i \leftrightarrow C_j$

  (ii) $R_i \to kR_i$ ਜਾਂ $C_i \to kC_i$

  (iii) $R_i \to R_i + kR_j$ ਜਾਂ $C_i \to C_i + kC_j$
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹਨ ਕਿ $AB = BA = I$, ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ Aï1 ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ A ਹੈ।
- ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।