ਅਧਿਆਇ **4**

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinants)

❖ ***All Mathematical truths are relative and conditional — C.P. STEINMETZ*** ❖

4.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

P.S. Laplace
(1749-1827)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ਨੂੰ $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ (Unique) ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਨੂੰ $a_1 b_2$ ï $a_2 b_1$ ਸੰਖਿਆ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਜਾਂ $a_1 b_2$ ï $a_2 b_1 \neq 0$, ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਸੰਖਿਆ $a_1 b_2$ ï $a_2 b_1$ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਉਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਜਾਂ **det A** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ, ਵਿਗਿਆਨ, ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਰਿਤ ਵਰਤੋਂ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਇੰਦਰਾਜਾਂ ਦੇ 3 ਕ੍ਰਮ ਤੱਕ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਤੇ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ, ਲਘੂ (MINORS) ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ (Cofacters) ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਜ ਅਤੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ, ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀਆਂ ਦੀ ਸੰਗਤੀ (Consistency) ਅਤੇ ਅਸੰਗਤੀ

(Inconsistency) ਅਤੇ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

4.2 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ (Determinant)

ਅਸੀਂ n ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਦੁਆਰਾ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ a_{ij}A ij ਵਾਂ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੋਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੋ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ M ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, k ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ) ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ $f: M \to K, f(A) = k$, ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $A \in M$ ਅਤੇ $k \in K$ ਤਾਂ $f(A)$, A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ $|A|$ ਜਾਂ det A ਜਾਂ Δ ਦੁਆਰਾ ਵੀ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = det (A) ਦੁਆਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ, $|A|$ ਨੂੰ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਕੇਵਲ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

4.2.1 *ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ* ***(Determinant of a matrix of order one)***

ਮੰਨਿਆ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a]$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ a ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $|A| = a$

4.2.2 *ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ* ***(Determinant of a matrix of order two)***

ਮੰਨਿਆ 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

ਤਾਂ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ A_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \text{ ï } a_{21}a_{12}$$

ਉਦਾਹਰਣ 1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \text{ï}1 & 2 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \text{ï}1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) \text{ ï } 4(\text{ï}1) = 4 + 4 = 8$

ਉਦਾਹਰਣ 2. $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x ï 1 & x \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ x ï 1 & x \end{vmatrix} = x\,(x)\ ï\ (x + 1)\,(x\ ï\ 1) = x^2\ ï\ (x^2\ ï\ 1) = x^2\ ï\ x^2 + 1 = 1$

4.2.3 *ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ* (Determinant of a matrix of order Three)

ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਇੱਕ ਥੰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਛੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਿੰਨੋ ਕਤਾਰਾਂ (R_1, R_2 ਅਤੇ R_3) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਤੇ ਤਿੰਨੋਂ ਥੰਮਾ (C_1, C_2 ਅਤੇ C_3) ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸੰਗਤ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਸਮਾਨ ਨਤੀਜਾ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਿੱਥੇ $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \boldsymbol{a_{12}} & \boldsymbol{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 1. R_1 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਅੰਸ਼ a_{11} ਨੂੰ $(ï\,1)^{(1\,+\,1)}$ ਭਾਵ $[(ï\,1)^{a_{11}\text{ਵਿੱਚਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਅਤੇ ਪਹਿਲਾ ਥੰਮ (C_1) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰੋ ਕਿਉਂਕਿ a_{11}, R_1 ਅਤੇ C_1 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ :

ਭਾਵ $$(ï\,1)^{1\,+\,1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 2. ਕਿਉਂਕਿ a_{12}, R_1 ਅਤੇ C_2 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ R_1 ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਤੱਤ a_{12} ਨੂੰ $(ï\,1)^{1\,+\,2}$ ਭਾਵ $[(ï\,1)^{a_{12}\text{ਵਿੱਚਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਥੰਮ (C_2) ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਅਰਥਾਤ $$(ï\,1)^{1\,+\,2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 3. ਕਿਉਂਕਿ a_{13}, R_1 ਅਤੇ C_3 ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ R_1 ਦੇ ਤੀਜੇ ਤੱਤ ਨੂੰ $(ï\,1)^{1\,+\,3}$ ਭਾਵ ਭਾਵ$[(ï\,1)^{a_{13}\text{ਵਿੱਚਅਨੁਲਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}]$ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|A|$ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਥੰਮ (C_3) ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਭਾਵ
$$(ï\ 1)^{1+3}\, a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਪਗ 4. ਹੁਣ A ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਭਾਵ | A | ਦੇ ਪਸਾਰ ਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਪਗ 1] 2 ਅਤੇ 3 ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤਿੰਨੋਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਲਿਖੋ ਭਾਵ

$$\det A = |A| = (ï\ 1)^{1+1}\, a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (ï\ 1)^{1+2}\, a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (ï\ 1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ਜਾਂ
$$|A| = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33}\ ï\ a_{32}\,a_{23})\ ï\ a_{12}\,(a_{21}\,a_{33}\ ï\ a_{31}\,a_{23})$$
$$+ a_{13}\,(a_{21}\,a_{32}\ ï\ a_{31}\,a_{22})$$
$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\ ï\ a_{11}\,a_{32}\,a_{23}\ ï\ a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{31}\,a_{23} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$ï\ a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \ldots (1)$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਅਸੀਂ ਚਾਰੋਂ ਪਗਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ (R_2) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

R_2 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$|A| = (ï\ 1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (ï\ 1)^{2+2}\, a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (ï\ 1)^{2+3}\, a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= ï\ a_{21}\,(a_{12}\,a_{33}\ ï\ a_{32}\,a_{13}) + a_{22}\,(a_{11}\,a_{33}\ ï\ a_{31}\,a_{13})$$
$$ï\ a_{23}\,(a_{11}\,a_{32}\ ï\ a_{31}\,a_{12})$$
$$|A| = ï\ a_{21}\,a_{12}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{22}\,a_{11}\,a_{33}\ ï\ a_{22}\,a_{31}\,a_{13}\ ï\ a_{23}\,a_{11}\,a_{32}$$
$$+ a_{23}\,a_{31}\,a_{12}$$
$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\ ï\ a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\ ï\ a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$
$$ï\ a_{13}\,a_{31}\,a_{22} \qquad \ldots (2)$$

ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ (C_1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (Expand)

$$|A| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ \boldsymbol{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \boldsymbol{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

C_1, ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ’ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$|A| = a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$- a_{31}a_{13}a_{22}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{31}a_{22} \qquad \ldots (3)$$

(1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $|A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਹ ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਕਿ $|A|$ ਦਾ R_3, C_2 ਅਤੇ C_3 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਗਣਨਾ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਉਸ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਧਿਕਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

(ii) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਸਾਰਣ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ $(-1)^{i+j}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਸਥਾਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ $(i+j)$ ਦੇ ਜਿਸਤ ਜਾਂ ਟਾਂਕ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $+1$ ਜਾਂ -1 ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(iii) ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ਤਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਕਿ $A = 2B$. ਪਰੰਤੂ $|A| = 0 - 8 = -8$ ਅਤੇ $|B| = 0 - 2 = -2$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $|A| = 4(-2) = 2^2|B|$ ਜਾਂ $|A| = 2^n|B|$, ਜਿੱਥੇ $n = 2$, ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਤੇ B ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $A = kB$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ n ਹੈ, ਤਦ $|A| = k^n|B|$, ਜਿੱਥੇ $n = 1, 2, 3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਦੋ ਇੰਦਰਾਜ ਸਿਫਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਤੀਜੇ ਥੰਮ (C_3) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-1 - 12) - 0 + 0 = -52$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : R_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} 0 & \sin\beta \\ -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} - \sin\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & 0 \end{vmatrix} - \cos\alpha\begin{vmatrix} -\sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \sin\alpha\,(0 - \sin\beta\cos\alpha) - \cos\alpha\,(\sin\alpha\sin\beta - 0)$$

$$= \sin\alpha\sin\beta\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\beta = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

ਭਾਵ $3 - x^2 = 3 - 8$

ਭਾਵ $x^2 = 8$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = \pm 2\sqrt{2}$

ਅਭਿਆਸ 4.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਤੱਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

3. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|2A| = 4|A|$

4. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $|3A| = 27|A|$

5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

6. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$, ਹੈ, ਤਾਂ $|A|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. x ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

8. ਜੇਕਰ $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ x ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) 6 (B) ± 6 (C) − 6 (D) 0

4.3 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of Determinants)

ਪਿਛਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਸਿਫਰ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਖੁਦ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਤੱਕ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 . ਕਿਸੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਸ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਉਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ।

ਪੜਤਾਲ – ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

Δ ਦੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਨੂੰ ਥੰਮਾ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

Δ_1 ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta_1 = a_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $\Delta = \Delta_1$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਆਖਿਆ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ det (A) = det (A′), ਜਿੱਥੇ A′, A ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ R_i = i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ C_i = i ਵਾਂ ਥੰਮ ਹੈ ਤਾਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $C_i \leftrightarrow R_i$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਪੜਤਾਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ,

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(- 42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= - 40 - 138 + 150 = - 28$$

ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{(ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ)}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(0 - 20) + 3\,(- 42 - 4) + 5\,(30 - 0)$$

$$= - 40 - 138 + 150 = - 28$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $\Delta = \Delta_1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1ਸਿੱਧ ਹੋਈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮਾ) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\Delta = a_1\,(b_2\,c_3 - b_3\,c_2) - a_2\,(b_1\,c_3 - b_3\,c_1) + a_3\,(b_1\,c_2 - b_2\,c_1)$$

ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਤੀਜੀ ਕਤਾਰਾਂ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਭਾਵ $R_1 \leftrightarrow R_3$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਵਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ

$$\Delta_1 = a_1 (c_2 b_3 - b_2 c_3) - a_2 (c_1 b_3 - c_3 b_1) + a_3 (b_2 c_1 - b_1 c_2)$$

$$= - [a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)]$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $\Delta_1 = - \Delta$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਥੰਮਾ ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਉਕਤ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨੂੰ $R_i \leftrightarrow R_j$ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨੂੰ $C_i \leftrightarrow C_j$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਜੇਕਰ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} = - 28$ (ਵੇਖੋ ਉਦਾਹਰਣ 6)

R_2 ਅਤੇ R_3 ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਭਾਵ $R_2 \leftrightarrow R_3$ ਤੋਂ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ_1 ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta_1 = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 (20 - 0) + 3 (4 + 42) + 5 (0 - 30)$$

$$= 40 + 138 - 150 = 28$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $\Delta_1 = - \Delta$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਸਿੱਧ ਹੋਈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਸਮਾਨ ਹਨ (ਸਾਰੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਬਰਾਬਰ ਹਨ), ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ ਦੀਆਂ ਸਮਾਨ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮਾਂ) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ Δ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ Δ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\Delta = ï\ \Delta$

ਜਾਂ $\Delta = 0$

ਆਓ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਪੜਤਾਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਹਾਰਣ 8. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ *(expand)* ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = 3\,(6 ï\ 6) ï\ 2\,(6 ï\ 9) + 3\,(4 ï\ 6)$$
$$= 0 ï\ 2\,(ï 3) + 3\,(ï 2) = 6 ï\ 6 = 0$$

ਇੱਥੇ R_1 ਅਤੇ R_3 ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 4. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਅਚੱਲ k, ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੀ k ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਮੰਨ ਲਓ
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਇਸ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ k ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ_1 ਹੈ ਤਾਂ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta_1 = k\ a_1\,(b_2\ c_3 ï\ b_3\ c_2) ï\ k\ b_1\ (a_2\ c_3 ï\ c_2\ a_3) + k\ c_1\ (a_2\ b_3 ï\ b_2\,a_3)$$
$$= k\,[a_1\ (b_2\ c_3 ï\ b_3\ c_2) ï\ b_1\ (a_2\ c_3 ï\ c_2\ a_3) + c_1\ (a_2\ b_3 ï\ b_2\ a_3)] = k\ \Delta$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\begin{vmatrix} k\,a_1 & k\,b_1 & k\,c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਇਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮਾ ਤੋਂ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਕਿਸੇ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ (ਜਾਂ ਥੰਮਾ) ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ (ਉਸੇ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ) ਹੈ ਤਦ ਉਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ k\,a_1 & k\,a_2 & k\,a_3 \end{vmatrix} = 0 \text{ (ਕਤਾਰਾਂ } R_1 \text{ ਅਤੇ } R_3 \text{ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\begin{vmatrix} 102 & 18 & 36 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(17) & 6(3) & 6(6) \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 17 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 17 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 4 ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3 ਦੀ ਵਰਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਦੋ (ਜਾਂ ਵੱਧ) ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ (ਜਾਂ ਵੱਧ) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ’ਤੇ $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪੜਤਾਲ : ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= \begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2+\lambda_2 & a_3+\lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{aligned}\Delta &= (a_1+\lambda_1)(b_2 c_3 \text{ ï } c_2 b_3) \text{ ï } (a_2+\lambda_2)(b_1 c_3 \text{ ï } b_3 c_1) \\ &\quad + (a_3+\lambda_3)(b_1 c_2 \text{ ï } b_2 c_1) \\ &= a_1 (b_2 c_3 \text{ ï } c_2 b_3) \text{ ï } a_2 (b_1 c_3 \text{ ï } b_3 c_1) + a_3 (b_1 c_2 \text{ ï } b_2 c_1)\end{aligned}$$

$$+ \lambda_1 (b_2 c_3 - c_2 b_3) - \lambda_2 (b_1 c_3 - b_3 c_1) + \lambda_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

(ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਵਿਵਸਥਿਤ ਕਰਨ ’ਤੇ)

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix}$

(ਵਿਸ਼ੇਸਤਾ 5 ਦੇ ਦੁਆਰਾ)

$= 0 + 0 = 0$ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5 ਅਤੇ 4 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 6. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $R_i \to R_i + kR_j$ ਜਾਂ $C_i \to C_i + k C_j$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ :

ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ਅਤੇ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 + k c_1 & a_2 + k c_2 & a_3 + k c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$,

ਜਿੱਥੇ Δ_1 ਸੰਕਿਰਿਆ $R_1 \to R_1 + kR_3$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ (R_3) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਅਚੱਲ k ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ (R_1) ਦੇ ਸੰਗਤ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $R_1 \to R_1 + k R_3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5 ਦੇ ਦੁਆਰਾ)}$$

$$= \Delta + 0 \qquad \text{(ਜਦੋਂ ਕਿ } R_1 \text{ ਅਤੇ } R_3 \text{ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\Delta = \Delta_1$

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਜੇਕਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ ਵਿੱਚ $R_i \to kR_i$ ਜਾਂ $C_i \to kC_i$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ_1 ਹੈ ਤਾਂ $\Delta_1 = k\Delta$.

(ii) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਪਗ ਵਿੱਚ $R_i \to R_i + kR_j$ ਵਰਗੀਆਂ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਵਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸੰਕਿਰਿਆ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਕਤਾਰ ਦਾ ਹੋਰ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ। ਠੀਕ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਟਿੱਪਣੀ ਥੰਮਾਂ ਦੀ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a^3$

ਹੱਲ : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ ਵਿੱਚ $R_2 \to R_2 - 2R_1$ ਅਤੇ $R_3 \to R_3 - 3R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $R_3 \to R_3 - 3R_2$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

C_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\Delta = a\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$= a\,(a^2 - 0) = a\,(a^2) = a^3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ਹੱਲ : Δ ਵਿੱਚ $R_1 \to R_1 + R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ਹੁਣ R_1 ਅਤੇ R_3 ਦੇ ਅੰਸ਼ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\Delta = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ : $R_2 \to R_2$ ï R_1 ਅਤੇ $R_3 \to R_3$ ï R_1, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

R_2 ਅਤੇ R_3 ਵਿੱਚੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (b ï a) ਅਤੇ (c ï a) ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਕੱਢਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & 1 & ïc \\ 0 & 1 & ïb \end{vmatrix}$$

= (b ï a) (c ï a) [(ï $b + c$)] (ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ ਤੇ)

= (a ï b) (b ï c) (c ï a)

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ $R_1 \to R_1 - R_2 - R_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$$

R_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (-2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} + (-2b)\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$$= 2\,c\,(a\,b + b^2 - bc) - 2\,b\,(b\,c - c^2 - ac)$$

$$= 2\,a\,b\,c + 2\,cb^2 - 2\,bc^2 - 2\,b^2c + 2\,bc^2 + 2\,abc$$

$$= 4\,abc$$

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਜੇਕਰ x, y, z ਭਿੰਨ ਹੋਣ ਅਤੇ $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix} = 0,$

ਭਾਵ $x \neq y \neq z$

ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $1 + xyz = 0$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1+x^3 \\ y & y^2 & 1+y^3 \\ z & z^2 & 1+z^3 \end{vmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1 \\ y & y^2 & 1 \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ y & y^2 & y^3 \\ z & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 5 ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ)

$$= (-1)^2\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix} + xyz\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}$$ (ਪਹਿਲੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ $C_3 \leftrightarrow C_2$ ਅਤੇ $C_1 \leftrightarrow$ C_2 ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ)

$$= \begin{vmatrix}1 & x & x^2\\1 & y & y^2\\1 & z & z^2\end{vmatrix}(1+xyz)$$ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ R_1,R_2 ਅਤੇ R_3 ਵਿੱਚੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z

$$=(1+xyz)\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\0 & y-x & y^2-x^2\\0 & z-x & z^2-x^2\end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2$ ï R_1 ਅਤੇ $R_3 \to R_3$ ï R_1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

R_2 ਨਾਲ $(y-x)$ ਅਤੇ R_3 ਨਾਲ $(z-x)$ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$\Delta =$ (1+xyz) (y ï x) (z ï x) $\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\0 & 1 & y+x\\0 & 1 & z+x\end{vmatrix}$

= (1 + xyz) (y ï x) (z ï x) (z ï y) (C_1 ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ)

ਕਿਉਂਕਿ $\Delta = 0$ ਅਤੇ x, y ਅਤੇ z ਸਾਰੇ ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ï $y \neq 0$, y ï $z \neq 0$, z ï $x \neq 0$, ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $1 + xyz = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਦਰਸਾਓ ਕਿ $\begin{vmatrix}1+a & 1 & 1\\1 & 1+b & 1\\1 & 1 & 1+c\end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc+bc+ca+ab$

ਹੱਲ : R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਵਿੱਚੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਸਾਝਾਂ ਲੈਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪੱਖ $= abc\begin{vmatrix}\frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a}\\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b}\\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1\end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

ਜਾਂ $$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$

ਹੁਣ $C_2 \to C_2$ ï C_1 ਅਤੇ $C_3 \to C_3$ ï C_1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left[1(1\text{ ï }0)\right]$$

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = abc + bc + ca + ab = \text{ਸੱਜਾ ਪੱਖ}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ $C_1 \to C_1$ ï C_2 ਅਤੇ $C_3 \to C_3$ ï C_2, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਤੇ $C_1 \to C_1$ ï $a\,C_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।

ਅਭਿਆਸ 4.2

ਬਿਨਾਂ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 5 ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।

1. $\begin{vmatrix} x & a & x+a \\ y & b & y+b \\ z & c & z+c \end{vmatrix} = 0$ **2.** $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$ **3.** $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 65 \\ 3 & 8 & 75 \\ 5 & 9 & 86 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} b+c & q+r & y+z \\ c+a & r+p & z+x \\ a+b & p+q & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix}$

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

6. $\begin{vmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

8. (i) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

9. $\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix}$ = (*x* ï *y*) (*y* ï *z*) (*z* ï *x*) (*xy* + *yz* + *zx*)

10. (i) $\begin{vmatrix} x+4 & 2x & 2x \\ 2x & x+4 & 2x \\ 2x & 2x & x+4 \end{vmatrix} = (5x+4)(4-x)^2$

(ii) $\begin{vmatrix} y+k & y & y \\ y & y+k & y \\ y & y & y+k \end{vmatrix} = k^2(3y+k)$

11. (i) $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

(ii) $\begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & y+z+2x & y \\ z & x & z+x+2y \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$

12. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x^2 & 1 & x \\ x & x^2 & 1 \end{vmatrix} = (1-x^3)^2$

13. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ca & cb & c^2+1 \end{vmatrix} = 1+a^2+b^2+c^2$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 15 ਅਤੇ 16 ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

15. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ 3×3 ਦਰਜੇ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $|kA|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ :

(A) $k\,|A|$ (B) $k^2\,|A|$ (C) $k^3\,|A|$ (D) $3k\,|A|$

16. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੈ।

(A) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

(B) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(C) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ।

4.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area of a Triangle)

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3), ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਸਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{2}[x_1(y_2 \text{ï} y_3) + x_2\,(y_3 \text{ï} y_1) + x_3\,(y_1 \text{ï} y_2)]$ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਸ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots (1)$$

ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਕਿਉਂਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਮੇਸ਼ਾ (1) ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ (absolute value) ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਖੇਤਰਫਲ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

(iii) ਤਿੰਨ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ (3, 8), (ï 4, 2) ਅਤੇ (5, 1) ਹਨ।

ਹੱਲ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left[3(2-1)-8(-4-5)+1(-4-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(3+72-14) = \frac{61}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ A(1, 3) ਅਤੇ B (0, 0) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D(k, 0) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ AB ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਹੈ ਤਦ Δ ABP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 0 (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ
$$\frac{1}{2}(y-3x) = 0 \text{ ਜਾਂ } y = 3x$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ AB ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 3 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 3 \text{ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ } \frac{-3k}{2} = \pm 3, \text{ i.e., } k = \mp 2$$

ਅਭਿਆਸ 4.3

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) (1, 0), (6, 0), (4, 3) (ii) (2, 7), (1, 1), (10, 8)

(iii) (ï 2, ï 3), (3, 2), (ï 1, ï 8)

2. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A $(a, b + c)$, B $(b, c + a)$ ਅਤੇ C $(c, a + b)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

3. ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 4 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

(i) $(k, 0), (4, 0), (0, 2)$ (ii) (ï 2, 0), (0, 4), (0, k)

4. (i) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ (1, 2) ਅਤੇ (3, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ (3, 1) ਅਤੇ (9, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ ਸਿਖਰ (2, ï 6), (5, 4) ਅਤੇ (k, 4) ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 35 ਵਰਗ ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 12 (B) ï 2 (C) ï 12, ï 2 (D) 12, ï 2

4.5 ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ (Minor and Co-factor)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਘੂ (Minor) ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨ ਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ ਵਿਸਤਰਿਤ ਰੂਪ ਲਿਖਣਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਲਘੂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੈ ਜੋ i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ j ਵੇਂ ਥੰਮ ਜਿਸ ਦੇ ਵਿੱਚ ਤੱਤ a_{ij} ਸਥਿਤ ਹੈ ਨੂੰ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੱਤ a_{ij} ਦੇ ਲਘੂਆਂ ਨੂੰ M_{ij} ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : $n(n \geq 2)$ ਦਰਜੇ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤ ਦਾ ਲਘੂ n ï 1 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ ਵਿੱਚ ਤੱਤ 6 ਦਾ ਲਘੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ 6 ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਸ ਦਾ ਲਘੂ $= M_{23}$ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 \text{ ï } 14 = \text{ï } 6 \text{ (}\Delta\text{ ਵਿੱਚੋਂ } R_2 \text{ ਅਤੇ } C_3 \text{ ਹਟਾਉਣ 'ਤੇ)}$$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਇੱਕ ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ ਜਿਸ ਨੂੰ A_{ij} ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ

$$A_{ij} = (\text{ï}\ 1)^{i+j}\ M_{ij},$$

ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ M_{ij} ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਲਘੂ M_{ij} ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $a_{11} = 1$, ਇਸ ਲਈ $M_{11} = a_{11}$ ਦਾ ਲਘੂ $= 3$

$M_{12} =$ ਤੱਤ a_{12} ਦਾ ਲਘੂ $= 4$

$M_{21} =$ ਤੱਤ a_{21} ਦਾ ਲਘੂ $= \text{ï}\ 2$

$M_{22} =$ ਤੱਤ a_{22} ਦਾ ਲਘੂ $= 1$

ਹੁਣ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$A_{11} = (\text{ï}\ 1)^{1+1}\ M_{11} = (\text{ï}\ 1)^2\ (3) = 3$$
$$A_{12} = (\text{ï}\ 1)^{1+2}\ M_{12} = (\text{ï}\ 1)^3\ (4) = \text{ï}\ 4$$
$$A_{21} = (\text{ï}\ 1)^{2+1}\ M_{21} = (\text{ï}\ 1)^3\ (\text{ï}\ 2) = 2$$
$$A_{22} = (\text{ï}\ 1)^{2+2}\ M_{22} = (\text{ï}\ 1)^4\ (1) = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 21. $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ a_{11} ਅਤੇ a_{21} ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

a_{11} ਦਾ ਲਘੂ $= M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\, a_{33} \text{ï}\ a_{23}\, a_{32}$

a_{11} ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ $= A_{11} = (\text{ï}\ 1)^{1+1}\ M_{11} = a_{22}\, a_{33}\ \text{ï}\ a_{23}\, a_{32}$

a_{21} ਦਾ ਲਘੂ $= M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}\, a_{33}\ \text{ï}\ a_{13}\, a_{32}$

a_{21} ਦਾ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡ $= A_{21} = (\text{ï}\ 1)^{2+1}\ M_{21} = (\text{ï}\ 1)\ (a_{12}\, a_{33}\ \text{ï}\ a_{13}\, a_{32}) = \text{ï}\ a_{12}\, a_{33} + a_{13}\, a_{32}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 21 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ ਦਾ R_1 ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = (ï\ 1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (ï\ 1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (ï\ 1)^{1+3}\ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$= a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + a_{13} A_{13}$, ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੈ।

$= R_1$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ Δ ਦਾ R_2, R_3, C_1, C_2 ਅਤੇ C_3 ਦੇ ਸਾਪੇਖ 5 ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵਿਸਥਾਰ ਕਰਕੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ, ਕਿਸੇ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਲਓ $\Delta = a_{11} A_{21} + a_{12} A_{22} + a_{13} A_{23}$ ਤਦ

$$\Delta = a_{11}\ (ï\ 1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\ (ï\ 1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\ (ï\ 1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } R_1 \text{ ਅਤੇ } R_2 \text{ ਬਰਾਬਰ ਹਨ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੋਰ ਕਤਾਰਾਂ ਅਤੇ ਥੰਮਾ ਦੇ ਲਈ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33} = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = 0\ ï\ 20 = ï\ 20$; ਇਸ ਲਈ $A_{11} = (ï\ 1)^{1+1} (ï\ 20) = ï\ 20$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = ï\ 42\ ï\ 4 = ï\ 46;\ \text{ਇਸ ਲਈ } A_{12} = (ï\ 1)^{1+2} (ï\ 46) = 46$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 30\ ï\ 0 = 30;\ \text{ਇਸ ਲਈ } A_{13} = (ï\ 1)^{1+3} (30) = 30$$

$M_{21} = \begin{vmatrix}-3 & 5\\ 5 & -7\end{vmatrix}$ = 21 ï 25 = ï 4; ਇਸ ਲਈ A_{21} = (ï 1)$^{2+1}$ (ï 4) = 4

$M_{22} = \begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & -7\end{vmatrix}$ = ï 14 ï 5 = ï 19; ਇਸ ਲਈ A_{22} = (ï 1)$^{2+2}$ (ï 19) = ï 19

$M_{23} = \begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{vmatrix}$ = 10 + 3 = 13; ਇਸ ਲਈ A_{23} = (ï 1)$^{2+3}$ (13) = ï 13

$M_{31} = \begin{vmatrix}-3 & 5\\ 0 & 4\end{vmatrix}$ = ï 12 ï 0 = ï 12; ਇਸ ਲਈ A_{31} = (ï 1)$^{3+1}$ (ï 12) = ï 12

$M_{32} = \begin{vmatrix}2 & 5\\ 6 & 4\end{vmatrix}$ = 8 ï 30 = ï 22; ਇਸ ਲਈ A_{32} = (ï 1)$^{3+2}$ (ï 22) = 22

$M_{33} = \begin{vmatrix}2 & -3\\ 6 & 0\end{vmatrix}$ = 0 + 18 = 18; ਇਸ ਲਈ A_{33} = (ï 1)$^{3+3}$ (18) = 18

ਹੁਣ a_{11} = 2, a_{12} = ï 3, a_{13} = 5; ਅਤੇ A_{31} = ï 12, A_{32} = 22, A_{33} = 18 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $a_{11}\, A_{31} + a_{12}\, A_{32} + a_{13}\, A_{33}$

= 2 (ï 12) + (ï 3) (22) + 5 (18) = ï 24 ï 66 + 90 = 0

ਅਭਿਆਸ 4.4

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਲਘੂ ਅਤੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੋ।

1. (i) $\begin{vmatrix}2 & -4\\ 0 & 3\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}$

2. (i) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}$

3. ਦੂਜੀ ਕਤਾਰ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\Delta = \begin{vmatrix}5 & 3 & 8\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਤੀਜੇ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਕੇ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ਅਤੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੋਵੇ ਤਾਂ Δ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

(A) $a_{11} A_{31} + a_{12} A_{32} + a_{13} A_{33}$ (B) $a_{11} A_{11} + a_{12} A_{21} + a_{13} A_{31}$

(C) $a_{21} A_{11} + a_{22} A_{12} + a_{23} A_{13}$ (D) $a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$

4.6 ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਸਹਿਖੰਡਨ ਅਤੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (Adjoint and Inverse of a Matrix)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਵੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਾਂਗੇ।

A^{-1} ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

4.6.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ (Adjoint of a matrix)*

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{ij}]$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ, ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $[A_{ij}]$ ਦੇ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $A_{ij}]$ ਤੱਤ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਸਹਿਖੰਡ ਨੂੰ *adj* A ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ਹੈ।

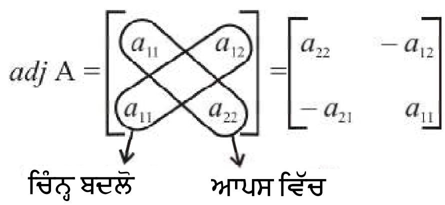
ਤਦ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A_{11} = 4, A_{12} = \text{ï}\,1, A_{21} = \text{ï}\,3, A_{22} = 2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \text{ï}\,3 \\ \text{ï}\,1 & 2 \end{bmatrix}$$

ਟਿੱਪਣੀ: 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ adj A, a_{11} ਅਤੇ a_{22} ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਅਤੇ a_{12} ਅਤੇ a_{21} ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਦੇਣ ਨਾਲ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਅਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਥਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਜੇਕਰ A ਕੋਈ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $A(adj\,A) = (adj\,A)\,A = |A|\,I$, ਜਿੱਥੇ I, n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ ਹੈ ਤਦ } adj\,A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਸਹਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $|A|$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A\,(adj\ A) = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|\ I$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(adj\ A)\,A = |A|\,I$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ। (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਵਿਚਿੱਤਰ (singular) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਵਿੱਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ (non-singular) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ ਦੇ ਕਥਿਤ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋਵੇਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੋਣ ਤਾਂ AB ਅਤੇ BA ਵੀ ਉਸੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਅਣ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $|AB| = |A|\ |B|$, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਸਮਾਨ ਤਰਤੀਬ ਦੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(adj\ A)\, A = |A|\ I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੈਣ 'ਤੇ

$$|(adj\ A)\, A| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix}$$

ਭਾਵ $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $$|(adj\ A)|\ |A| = |A|^3\ (1)$$

ਭਾਵ $$|(adj\ A)| = |A|^2$$ (ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੋਵੇ ਤਾਂ $|adj\ A| = |A|^{n-1}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਮੰਨ ਲਓ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਹੈ ਅਤੇ n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ I ਹੈ। ਤਦ n ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ $AB = BA = I$

ਹੁਣ $AB = I$ ਹੈ ਤਾਂ $|AB| = |I|$ ਜਾਂ $|A|\,|B| = 1$ (ਕਿਉਂਕਿ $|I| = 1$, $|AB| = |A|\,|B|$)

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $|A| \neq 0$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।

ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਓ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ ਤਦ $|A| \neq 0$

ਹੁਣ $$A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I \qquad \text{(ਪ੍ਰਮੇਯ 1)}$$

ਜਾਂ $$A\left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right) = \left(\frac{1}{|A|}adj\ A\right)A = I$$

ਜਾਂ $$AB = BA = I, \text{ ਜਿੱਥੇ } B = \frac{1}{|A|}adj\ A$$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}adj\ A \qquad \text{(ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਯੋਗ)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A.\ adj\ A = |A|\,.\ I$ ਅਤੇ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|A| = 1\,(16 - 9) - 3\,(4 - 3) + 3\,(3 - 4) = 1 \neq 0$

ਹੁਣ $A_{11} = 7$, $A_{12} = -1$, $A_{13} = -1$, $A_{21} = -3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = -3$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = 1$

ਇਸ ਲਈ $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $$A.(adj\ A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3-3 & -3+3+0 & -3+0+3 \\ 7-4-3 & -3+4+0 & -3+0+3 \\ 7-3-4 & -3+3+0 & -3+0+4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| . I$$

ਅਤੇ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\, A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -14 \end{bmatrix}$

ਕਿਉਂਕਿ $|AB| = -11 \neq 0$, $(AB)^{-1}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} . adj\,(AB) = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $|A| = -11 \neq 0$ ਅਤੇ $|B| = 1 \neq 0$. ਇਸ ਲਈ A^{-1} ਅਤੇ B^{-1} ਦੋਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -14 & -5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 14 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ਸਮੀਕਰਣ $A^2 - 4A + I = O$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ I, 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਅਤੇ O, 2×2 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$

ਹੁਣ $\quad A^2 - 4A + I = O$

ਇਸ ਲਈ $\quad A A - 4A = - I$

ਜਾਂ $\quad A\ A\ (A^{-1}) - 4\ A\ A^{-1} = - I\ A^{-1}$ (ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ A^{-1} ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਿਉਂਕਿ $|A| \neq 0$)

ਜਾਂ $\quad A\ (A\ A^{-1}) - 4I = - A^{-1}$

ਜਾਂ $\quad AI - 4I = - A^{-1}$

ਜਾਂ $\quad A^{-1} = 4I - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

ਅਭਿਆਸ 4 .5

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਅਤੇ 2 ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਸਹਿਖੰਡਨ (adjoint) ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 3 ਅਤੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 4 ਵਿੱਚ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,.A = |A|\,.\,I$ ਹੈ।

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 5 ਤੋਂ 11 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਰੇਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ (ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

12. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $(AB)^{\text{ï}1} = B^{\text{ï}1} A^{\text{ï}1}$ ਹੈ।

13. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^2 \text{ ï } 5A + 7I = O$ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ a ਅਤੇ b ਅਜਿਹੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $A^2 + aA + bI = O$ ਹੋਵੇ।

15. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਲਈ ਦਰਸਾਓ ਕਿ $A^3 \text{ ï } 6A^2 + 5A + 11\,I = O$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ $A^3 \text{ ï } 6A^2 + 9A \text{ ï } 4I = O$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $A^{\text{ï}1}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਜੇਕਰ A, 3×3 ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $|adj\, A|$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) $|A|$ (B) $|A|^2$ (C) $|A|^3$ (D) $3|A|$

18. ਜੇਕਰ A, ਦੋ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਾਂ $\det(A^{-1})$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\det(A)$ (B) $\dfrac{1}{\det(A)}$ (C) 1 (D) 0

4.7 ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (Applications of Determinants and Matrices)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਅਗਿਆਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਅਤੇ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਸੰਗਤਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ (ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ) ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੰਗਤ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰਹਾਂਗੇ।

4.7.1 *ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੁਆਰਾ ਰੇਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੱਲ (Solution of a system of linear equations using inverse of a matrix)*

ਆਓ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਉਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ਸਥਿਤੀ 1. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਭਾਵ $|A| \neq 0$ ਤਦ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $AX = B$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \qquad (A^{-1} \text{ ਨਾਲ ਪੂਰਵ ਗੁਣਨ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$(A^{-1}A)\,X = A^{-1}B \qquad (\text{ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਗੁਣਨ ਦੁਆਰਾ})$$

ਜਾਂ $$I\,X = A^{-1}B$$

ਜਾਂ $$X = A^{-1}B$$

ਇਹ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2. ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਦ $|A| = 0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $(adj\, A)\, B$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $(adj\, A)\, B \neq O$, (O ਸਿਫ਼ਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ), ਤਦ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਅਸੰਗਤ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $(adj\, A)\, B = O$, ਤਦ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਨੰਤ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$2x + 5y = 1$$
$$3x + 2y = 7$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ਹੁਣ $|A| = -11 \neq 0$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ਭਾਵ $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -33 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = 3, y = -1$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ

$$3x - 2y + 3z = 8$$
$$2x + y - z = 1$$
$$4x - 3y + 2z = 4$$

ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ AX = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$|A| = 3(2 - 3) + 2(4 + 4) + 3(-6 - 4) = -17 \neq 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

$$A_{11} = -1, \quad A_{12} = -8, \quad A_{13} = -10$$
$$A_{21} = -5, \quad A_{22} = -6, \quad A_{23} = 1$$
$$A_{31} = -1, \quad A_{32} = 9, \quad A_{33} = 7$$

ਇਸ ਲਈ $$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ $$X = A^{-1}B = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $x = 1, y = 2$ ਤੇ $z = 3$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾਂ ਕਰਕੇ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਜੋੜਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ 11 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਦੁੱਗਣਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ ਅਤੇ ਤੀਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y ਅਤੇ z, ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਤਦ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x + y + z = 6$$

$$y + 3z = 11$$

$$x + z = 2y$$

ਜਾਂ $$x - 2y + z = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ A X = B ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ ਅਤੇ } B = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ $|A| = 1(1+6) + 0 + 1(3-1) = 9 \neq 0$ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ *adj* A ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$A_{11} = 1\ (1 + 6) = 7,\qquad A_{12} = -\ (0 - 3) = 3,\qquad A_{13} = -\ 1$

$A_{21} = -\ (1 + 2) = -\ 3,\qquad A_{22} = 0,\qquad A_{23} = -\ (-\ 2 - 1) = 3$

$A_{31} = (3 - 1) = 2,\qquad A_{32} = -\ (3 - 0) = -\ 3,\qquad A_{33} = (1 - 0) = 1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$adj\ A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj.\ (A) = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ਕਿਉਂਕਿ $$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 11 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 42-33+0 \\ 18+\ 0+0 \\ -6+33+0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$x = 1, y = 2, z = 3$$

ਅਭਿਆਸ 4.6

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀਆਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਗੀਕਰਣ ਕਰੋ।

1. $x + 2y = 2$, $2x + 3y = 3$

2. $2x - y = 5$, $x + y = 4$

3. $x + 3y = 5$, $2x + 6y = 8$

4. $x + y + z = 1$, $2x + 3y + 2z = 2$, $ax + ay + 2az = 4$

5. $3x - y - 2z = 2$, $2y - z = -1$, $3x - 5y = 3$

6. $5x - y + 4z = 5$, $2x + 3y + 5z = 2$, $5x - 2y + 6z = -1$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

7. $5x + 2y = 4$, $7x + 3y = 5$

8. $2x - y = -2$, $3x + 4y = 3$

9. $4x - 3y = 3$, $3x - 5y = 7$

10. $5x + 2y = 3$, $3x + 2y = 5$

11. $2x + y + z = 1$, $x - 2y - z = \frac{3}{2}$, $3y - 5z = 9$

12. $x - y + z = 4$, $2x + y - 3z = 0$, $x + y + z = 2$

13. $2x + 3y + 3z = 5$, $x - 2y + z = -4$, $3x - y - 2z = 3$

14. $x - y + 2z = 7$, $3x + 4y - 5z = -5$, $2x - y + 3z = 12$

15. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ A^{-1} ਪਤਾ ਕਰੋ। A^{-1} ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$2x - 3y + 5z = 11$

$3x + 2y - 4z = -5$

$x + y - 2z = -3$

16. 4 kg ਪਿਆਜ, 3 kg ਕਣਕ ਅਤੇ 2 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ Rs 60 ਹੈ। 2 kg ਪਿਆਜ, 4 kg ਕਣਕ ਅਤੇ 6 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ 90 ਰੁ: ਹੈ। 6kg ਪਿਆਜ, 2 kg ਅਤੇ 3 kg ਚਾਵਲ ਦਾ ਮੁੱਲ 70 ਰੁ: ਹੈ। ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤੀ kg ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਫੁੱਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (Miscellancous Examples)

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਜੇਕਰ a, b, c ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਭਿੰਨ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ।

ਹੱਲ : $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & c-b & a-c \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$, ਅਤੇ $R_3 \to R_3 - R_1$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$= (a+b+c)\,[(c-b)(b-c) - (a-c)(a-b)]$ (C_1 ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ)

$= (a+b+c)(-a^2 - b^2 - c^2 + ab + bc + ca)$

$= \dfrac{-1}{2}(a+b+c)\,(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$

$= \dfrac{-1}{2}(a+b+c)\,[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]$

ਜੋ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ $a+b+c > 0$ ਅਤੇ $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 > 0$)

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਜੇਕਰ a, b, c ਅੰਕ ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2y+4 & 5y+7 & 8y+a \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ : $R_1 \to R_1 + R_3 - 2R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3y+5 & 6y+8 & 9y+b \\ 4y+6 & 7y+9 & 10y+c \end{vmatrix} = 0$$ (ਕਿਉਂਕਿ $2b = a + c$)

ਉਦਾਹਰਣ 32. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & xy & zx \\ xy & (x+z)^2 & yz \\ xz & yz & (x+y)^2 \end{vmatrix} = 2xyz\,(x+y+z)^3$$

ਹੱਲ : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ $R_1 \to xR_1,\ R_2 \to yR_2,\ R_3 \to zR_3$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਅਤੇ xyz, ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \frac{1}{xyz}\begin{vmatrix} x(y+z)^2 & x^2 y & x^2 z \\ xy^2 & y(x+z)^2 & y^2 z \\ xz^2 & yz^2 & z(x+y)^2 \end{vmatrix}$$

C_1 , C_2 ਅਤੇ C_3 ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y, z ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਰੱਖਣ ’ਤੇ

$$\Delta = \frac{xyz}{xyz}\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2\text{ï}\ C_1,\ C_3 \to C_3\text{ï}\ C_1$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\Delta = \begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2\ \text{ï}\ (y+z)^2 & x^2-(y+z)^2 \\ y^2 & (x+z)^2-y^2 & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)^2\ \text{ï}\ z^2 \end{vmatrix}$$

ਹੁਣ C_2 ਅਤੇ C_3 ਨਾਲ $(x+y+z)$ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਾਹਰ ਰੱਖਣ ’ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} (\mathrm{y}+z)^2 & x-(y+z) & x-(y+z) \\ y^2 & (x+z)-y & 0 \\ z^2 & 0 & (x+y)-z \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1\ \text{ï}\ (R_2 + R_3)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\Delta = (x+y+z)^2\begin{vmatrix} 2yz & -2z & -2y \\ y^2 & x-y+z & 0 \\ z^2 & 0 & x+y\,\text{ï}\ \mathrm{z} \end{vmatrix}$$

$C_2 \to (C_2 + \frac{1}{y} C_1)$ ਅਤੇ $C_3 \to \left(C_3 + \frac{1}{z} C_1\right)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = (x + y + z)^2 \begin{vmatrix} 2yz & 0 & 0 \\ y^2 & x+z & \frac{y^2}{z} \\ z^2 & \frac{z^2}{y} & x+y \end{vmatrix}$$

R_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ਕਰਨ 'ਤੇ

$\Delta = (x + y + z)^2 (2yz) [(x + z)(x + y) - yz] = (x + y + z)^2 (2yz) (x^2 + xy + xz)$

$= (x + y + z)^3 (2xyz)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

$$x - y + 2z = 1$$
$$2y - 3z = 1$$
$$3x - 2y + 4z = 2$$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਗੁਣਨਫਲ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-9+12 & 0-2+2 & 1+3-4 \\ 0+18-18 & 0+4-3 & 0-6+6 \\ -6-18+24 & 0-4+4 & 3+6-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

ਹੁਣ ਦਿੱਤੇ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\begin{bmatrix} 1 & \text{ï}1 & 2 \\ 0 & 2 & \text{ï}3 \\ 3 & \text{ï}2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ਜਾਂ
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0+2 \\ 9+2-6 \\ 6+1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0, y = 5$ ਅਤੇ $z = 3$

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+bx & c+dx & p+qx \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

ਹੱਲ : ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ Δ ਤੇ $R_1 \to R_1$ ï $x R_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$$D = \begin{vmatrix} a(1-x^2) & c(1-x^2) & p(1-x^2) \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$= (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ ax+b & cx+d & px+q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2$ ï $x R_1$, ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & c & p \\ b & d & q \\ u & v & w \end{vmatrix}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 4 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $\begin{vmatrix} x & \sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\theta & -x & 1 \\ \cos\theta & 1 & x \end{vmatrix}$, θ ਤੋਂ ਸਵਤੰਤਰ ਹੈ।

2. ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ca \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਜੇਕਰ a, b ਅਤੇ c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} = 0$$

ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ $a + b + c = 0$ ਜਾਂ $a = b = c$ ਹੈ।

5. ਜੇਕਰ $a \neq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ $\begin{vmatrix} x+a & x & x \\ x & x+a & x \\ x & x & x+a \end{vmatrix} = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

7. ਜੇਕਰ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $(AB)^{-1}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਮੰਨ ਲਓ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $[adj\ A]^{-1} = adj\ (A^{-1})$ (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

9. $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x+y & y \\ 1 & x & x+y \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ 11 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰੋ :

11. $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 & \beta+\gamma \\ \beta & \beta^2 & \gamma+\alpha \\ \gamma & \gamma^2 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\beta - \gamma)\ (\gamma - \alpha)\ (\alpha - \beta)\ (\alpha + \beta + \gamma)$

12. $\begin{vmatrix} x & x^2 & 1+px^3 \\ y & y^2 & 1+py^3 \\ z & z^2 & 1+pz^3 \end{vmatrix} = (1 + pxyz)\ (x - y)\ (y - z)\ (z - x),$

13. $\begin{vmatrix} 3a & -a+b & -a+c \\ -b+a & 3b & -b+c \\ -c+a & -c+b & 3c \end{vmatrix} = 3(a + b + c)\ (ab + bc + ca)$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1+p & 1+p+q \\ 2 & 3+2p & 4+3p+2q \\ 3 & 6+3p & 10+6p+3q \end{vmatrix} = 1$

15. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix} = 0$

16. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4$$

$$\frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1$$

$$\frac{6}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 2$$

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਤੋਂ 19 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

17. ਜੇਕਰ a, b, c ਅੰਕ ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$\begin{vmatrix} x+2 & x+3 & x+2a \\ x+3 & x+4 & x+2b \\ x+4 & x+5 & x+2c \end{vmatrix}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੋਵੇਗਾ :

(A) 0 (B) 1 (C) x (D) $2x$

18. ਜੇਕਰ x, y, z ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ :

(A) $\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$ (B) $xyz\begin{bmatrix} x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} \end{bmatrix}$

(C) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ (D) $\frac{1}{xyz}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. ਜੇਕਰ $A = \begin{bmatrix} 1 & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & 1 & \sin\theta \\ -1 & -\sin\theta & 1 \end{bmatrix}$, ਜਿੱਥੇ $0 \le \theta \le 2\pi$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ :

(A) $\det(A) = 0$ (B) $\det(A) \in (2, \infty)$

(C) $\det(A) \in (2, 4)$ (D) $\det(A) \in [2, 4]$.

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ $|a_{11}|_{1\times 1} = a_{11}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ਦਾ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}$ ï $a_{12}\, a_{21}$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ(R_1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਸਾਰਣ ’ਤੇ)

  ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ **A** ਦੇ ਲਈ, |**A**| ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

- $|A'| = |A|$, ਜਿੱਥੇ A' = A ਦਾ ਟ੍ਰਾਂਸਪੋਜ਼ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ ਜਾਂ ਥੰਮਾਂ ਨੂੰ ਪਰਸਪਰ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀਆਂ ਕੋਈ ਦੋ ਕਤਾਰਾਂ ਜਾਂ ਥੰਮ ਸਮਾਨ ਜਾਂ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੀ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਨੂੰ ਅਚਲ k, ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ k ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ k ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੇਵਲ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ

ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਨੂੰ k ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ।

- ਜੇਕਰ $A = [a_{ij}]_{3\times3}$, ਤਾਂ $|k.A| = k^3|A|$
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਦੋ ਜਾਂ ਵੱਧ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਉਸ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਦੋ ਜਾਂ ਵਧੇਰੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਹਰੇਕ ਅੰਸ਼ ਦੇ ਸਮਗੁਣਜ ਹੋਰ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ ਜੋੜ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਸਿਖਰਾਂ ਵਾਲੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

- ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਇੱਕ ਅੰਸ਼ a_{ij} ਦਾ ਲਘੂ, i ਵੀਂ ਕਤਾਰ ਅਤੇ j ਵਾਂ ਥੰਮ ਹਟਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ M_{ij} ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ $A_{ij} = (ï\ 1)^{i+j} M_{ij}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- A ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਮੁੱਲ $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਜਾਂ ਥੰਮ ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੂਸਰੀ ਕਤਾਰ (ਜਾਂ ਥੰਮ) ਦੇ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸਿਫਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ

  $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$
- ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਸਹਿਖੰਡਨ $adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a_{ij} ਦਾ ਸਹਿਗੁਣਨਖੰਡ A_{ij} ਹੈ।
- $A\,(adj\ A) = (adj\ A)\,A = |A|\,I$, ਜਿੱਥੇ A, n ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਵਿਚਿੱਤਰ ਜਾਂ ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਜਾਂ $|A| \neq 0$

- ਜੇਕਰ $AB = BA = I$, ਜਿੱਥੇ B ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ ਤਦ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ B ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $A^{-1} = B$ ਜਾਂ $B^{-1} = A$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(A^{-1})^{-1} = A$
- ਕਿਸੇ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦਾ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ A ਅਣਵਿਚਿੱਤਰ ਹੈ।
- $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(adj\, A)$
- ਜੇਕਰ
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$
ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ $AX = B$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ਅਤੇ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

- ਸਮੀਕਰਣ $AX = B$ ਦਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ $X = A^{-1} B$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $|A| \neq 0$
- ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਸਮੀਕਰਣ $AX = B$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਰਗ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A ਦੇ ਲਈ

  (i) ਜੇਕਰ $|A| \neq 0$, ਤਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

  (ii) ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਅਤੇ $(adj\, A)\, B \neq O$, ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

  (iii) ਜੇਕਰ $|A| = 0$ ਅਤੇ $(adj\, A)\, B = O$, ਤਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸੰਗਤ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਗਣਨਾ ਬੋਰਡ ਤੇ ਛੜਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕੁਝ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਅਗਿਆਤ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਗੁਣਜਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੀ ਚੀਨੀ ਵਿਧੀ ਦੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਵਿਲੱਖਣ ਦੀ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਦਿੱਤੀ ਹੈ। ਛੜਾਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉੱਚਿਤ ਵਿਵਸਥਾ ਕ੍ਰਮ ਵਰਗੀ ਸੀ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਥੰਮਾਂ ਜਾਂ ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਘਟਾਉਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਪੈਦਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਚੀਨੀ ਪਹਿਲੇ ਵਿਚਾਰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸਨ (Mikami, China, pp 30, 93).

ਸਤਾਰਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਮਹਾਨ ਜਪਾਨੀ ਗਣਿਤਕਾਰ Seki Kowa ਦੁਆਰਾ 1683 ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਤ ਪੁਸਤਕ 'Kai Fukudai no Ho' ਨਾਲ ਗਿਆਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਪਸਾਰ ਦਾ ਗਿਆਨ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੇਵਲ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਪ੍ਰੰਤੂ ਯੁਗਮਤ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਸਿੱਧਾ

ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। óT. Hayashi, ñThe Fakudoi and Determinants in Japanese Mathematics,ò in the proc. of the Tokyo Math. Soc., V.

Vendermonde ਪਹਿਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਸਵਤੰਤਰ ਫਲਨ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ , ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸੰਸਥਾਪਕ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Laplace (1772) ਨੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਨੂੰ ਇਸ ਦੇ ਪੂਰਕ ਲਘੂਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਪਸਾਰਣ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਵਿਧੀ ਦਿੱਤੀ। 1773 ਵਿੱਚ Lagrange ਨੇ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਦਰਜੇ ਦੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਨੂੰ ਵਿਹਾਰਿਆ ਅਤੇ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। 1801 ਵਿੱਚ Gauss ਨੇ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਵਿੱਚ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ।

ਅਗਲੇ ਮਹਾਨ ਯੋਗਦਾਨ ਦੇਣ ਵਾਲੇ Jacques - Philippe - Marie Binet, (1812) ਸੀ ਜਿਹਨਾਂ ਨੇ m-ਥੰਮਾ ਅਤੇ n-ਕਤਾਰਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕੀਤਾ ਜੋ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ $m = n$ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਸੇ ਦਿਨ Cauchy (1812) ਨੇ ਵੀ ਉਸੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਤੇ ਖੋਜ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਅੱਜ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ Binet ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਗੁਣਨਫਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤਾ।

ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾ ਤੇ ਮਹਾਨਤਮ ਯੋਗਦਾਨ ਵਾਲੇ Carl Gustav Jacob Jacobi ਸੀ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਸ਼ਬਦ ਨੂੰ ਅੰਤਿਮ ਮਾਨਤਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ।