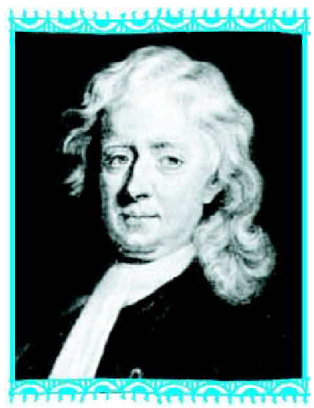
ਅਧਿਆਇ 5

ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਬਿਲਿਟੀ (Continuity and Differentiability)

❖ *The whole of science is nothing more than a refinement of everyday thinking." — ALBERT EINSTEIN* ❖

5.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



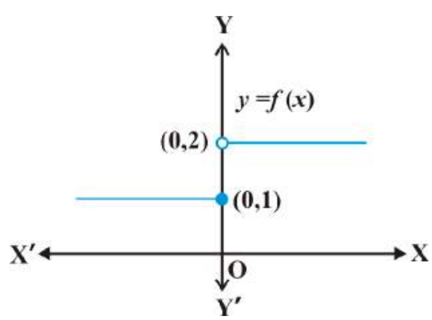
Sir Issac Newton (1642-1727)

ਇਹ ਅਧਿਆਇ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਜਮਾਤ 11 ਵਿੱਚ ਪਏ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਸ਼ਨ (differentiation) ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰਤਾ (continuity),ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਏਬਿਲਿਟੀ (differentiability) ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ (inverse trigonometric) ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨਾ ਵੀ ਸਿੱਖਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਨਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਲ ਘਾਤੀ (exponential) ਅਤੇ ਲਘੂਗਣਕ (logarithmic) ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀਆਂ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਤਰੀਕਿਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ੀਅਲ ਕੇਲਕੂਲਸ (differential calculus) ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਜਿਆਮਿਤੀ ਰੂਪ ਤੋਂ (ਸਪਸ਼ਟ) (obvious) ਕੁਝ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ, ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮੂਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (theorems) ਨੂੰ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

5.2 ਲਗਾਤਾਰਤਾ (Continuity)

ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਸੰਕਲਪਣਾ ਦਾ ਕੁਝ ਅਨੁਮਾਨ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਭਾਗ ਨੂੰ ਦੋ ਗੈਰ ਰਸਮੀ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ਼ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ਜੇਕਰ } x \le 0\\ 2, \text{ਜੇਕਰ } x > 0\end{cases}$$



ਚਿੱਤਰ 5.1

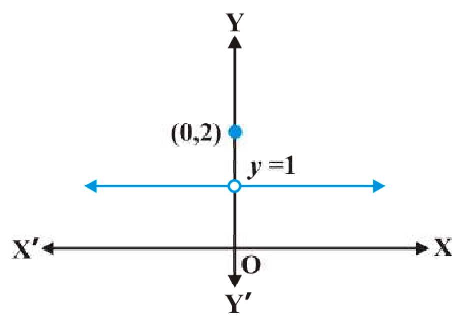
ਇਹ ਫਲਨ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ (real line) ਦੇ

ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੋਈ ਵੀ ਇਸ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਤੱਤ ਕੱਢ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $x = 0$ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, x&ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੋਰ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੀਮਤਾਂ ਵੀ $x = 0$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੱਗਭੱਗ ਸਮਾਨ ਹਨ। 0 ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਬਿੰਦੂ ਉਹ ਹੈ ਭਾਵ ï 0.1, ï 0.01, ï 0.001, ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਹੈ ਅਤੇ 0 ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ 0.1, 0.01, 0.001, ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੈ। ਸੱਜਾ ਅਤੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (limits) ਦੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸਮਾਨ (ਸੰਪਾਤੀ) ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ। (ਬਰਾਬਰ ਹੈ)। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਦਾ ਮਾਨ ਭਾਵ ਕਲਮ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਚੁੱਕੇ, ਨਹੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਕਲਮ ਨੂੰ ਚੁੱਕਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਉਦੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਜ਼ੀਰੋ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸਿਉਂ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਣ ਲਈ) ਆਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 2, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

ਇਹ ਅਲੇਖ ਵੀ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $x = 0$ ਤੇ ਦੋਨੋਂ ਹੀ, ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਕੀਮਤ 2 ਹੈ, ਜੋ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੀ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

ਦੁਬਾਰਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਕਲਮ ਚੁੱਕੇ ਅਸੀਂ ਨਹੀਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਉਦਾਹਰਨ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਅਚੱਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੋਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਆਸ&ਪਾਸ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਕਲਮ ਚੁੱਕੇ ਬਿਨਾਂ ਖਿੱਚ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ (precisely)] ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਮੰਨ ਲਉ f ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਿਸੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ c ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤਾਂ f ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \text{ ਹੈ।}$$

ਵਿਸਤਰਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੀ ਜੇਕਰ ਹੋਂਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ ਸਾਰੇ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ $x = c$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ

ਕਿ ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਵੀ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਫਲਨ $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਫਲਨ $x = c$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਕੀਮਤ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਤੇ f ਟੁੱਟਵਾਂ (discontinuous) ਹੈ ਅਤੇ c ਨੂੰ f ਦਾ ਇੱਕ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ (point of discontinuity) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x + 3$ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਪਰਖ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਫਲਨ, $x = 1$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ 5 ਹੈ। ਹੁਣ ਫਲਨ ਦੀ $x = 1$ ਤੇ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 3) = 2(1) + 3 = 5 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\lim_{x \to 1} f(x) = 5 = f(1)$$

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਪਰਖ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^2$, $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ 0 ਹੈ। ਹੁਣ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = |x|$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x, & \text{ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$$

ਸਾਫ਼ ਹੈ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $f(0) = 0$ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (ï\ x) = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 0$ ਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਫਲਨ

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3, & \text{ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 1, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ $x = 0$ ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ 1 ਹੈ। ਜਦੋਂ $x \neq 0$, ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ ਬਹੁਪਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^3 + 3) = 0^3 + 3 = 3$$

ਕਿਉਂਕਿ $x = 0$ ਤੇ f ਦੀ ਸੀਮਾ, $f(0)$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = k$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ k ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} k = k$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਦੇ ਲਈ $f(c) = k = \lim_{x\to c} f(x)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ f ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਤੱਤਸਮਕ ਫਲਨ (Identity function) $f(x) = x$, ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਫ ਹੈ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਦੇ ਲਈ $f(c) = c$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\lim_{x \to c} f(x) = c = f(c)$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ f ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੀ, ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ :2. ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ f ਲਗਾਤਾਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਕੁਝ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ f ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ $[a, b]$ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ (end points) a ਅਤੇ b ਸਹਿਤ ਉਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ।

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ਅਤੇ f ਦਾ b ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x \to b^{ï}} f(x) = f(b)$$

ਦੇਖੋ $\lim_{x \to a^-} f(x)$ ਅਤੇ $\lim_{x \to b^+} f(x)$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਫਲਸਰੂਪ, ਜੇਕਰ f ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ f ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਇੱਕ ਤੱਤੀ (Singleton) ਹੈ, ਤਾਂ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਕੀ $f(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ?

ਹੱਲ : f ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x, \ \ \text{ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$

ਉਦਾਹਰਣ 3 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $c < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$f(c) = ï\ c$$

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (-x) = -c \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, ਹੈ, f ਸਾਰੀਆਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $c > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f(c) = c$

ਨਾਲ ਹੀ $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਕਿਉਂਕਿ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, ਇਸ ਲਈ f ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ f ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਫਲਨ $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ f ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ c ਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਨ $c^3 + c^2 - 1$ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (x^3 + x^2 - 1) = c^3 + c^2 - 1$$

ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 9. ਕਿ $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਸੀ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਨੂੰ ਸੁਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ :

ਹੁਣ $$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$$

ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ $c \neq 0$, ਇਸ ਲਈ, $f(c) = \frac{1}{c}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ f ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਮੌਕੇ ਦਾ ਲਾਭ, ਅਨੰਤਤਾ (infinity) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਚੁੱਕਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ $f(x) = \frac{1}{x}$ ਦਾ ਵਿਸਲੇਸ਼ਣ $x = 0$ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਮਾਨਾਂ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ 0 ਦੇ ਨੇੜੇ ਦੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਤਰੀਕੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਰੂਰੀ : ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $x = 0$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਥੱਲੇ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਨੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। (ਸਾਰਣੀ 5.1)

ਸਾਰਣੀ 5.1

x	1	0.3	0.2	$0.1 = 10^{ï 1}$	$0.01 = 10^{ï 2}$	$0.001 = 10^{ï 3}$	$10^{ï n}$
$f(x)$	1	3.333...	5	10	$100 = 10^2$	$1000 = 10^3$	10^n

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ x ਸੱਜੇ ਤੋਂ 0 ਦੇ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਉੱਪਰ ਨੂੰ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ, $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸੂਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

(ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ : 0 ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਧਨਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ।)A ਇੱਥੇ $+\infty$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ)।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਸਾਰਨੀ ਨਾਲ ਵਿਸਤਰਿਤ ਸਾਫ਼ ਹੈ।

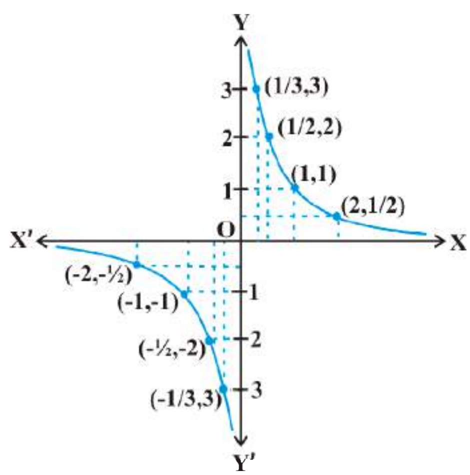
ਸਾਰਣੀ 5.2

x	ï 1	ï 0.3	ï 0.2	ï $10^{ï 1}$	ï $10^{ï 2}$	ï $10^{ï 3}$	ï $10^{ï n}$
$f(x)$	ï 1	ï 3.333...	ï 5	ï 10	ï 10^2	ï 10^3	ï 10^n

ਸਾਰਨੀ 5.2 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਚੁਣ ਕੇ, $f(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲੋਂ ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ : 0 ਤੇ $f(x)$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਨੰਤ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਜ਼ੋਰ ਦੇਣਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ï ∞ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ)A ਚਿੱਤਰ 5.3 ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਪ੍ਰਗਟਾਉਣਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.3

ਉਦਾਹਰਨ 10. ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x \le 1 \\ x-2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਫਲਨ f ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 1. ਜਦੋਂ $c < 1$, ਤੋਂ $f(c) = c + 2$ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} x + 2 = c + 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 1 ਤੋਂ ਘੱਟ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 2. ਜੇਕਰ $c > 1$, ਤਾਂ $f(c) = c$ ï 2 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (x$ ï $2) = c$ ï $2 = f(c)$ ਹੈ।

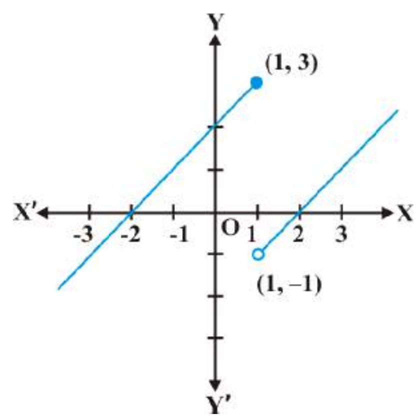
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਜਿੱਥੇ $x > 1$ ਹੈ, f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 3. ਜੇਕਰ $c = 1$, ਤਾਂ $x = 1$ ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਭਾਵ $\lim\limits_{x \to 1^{ï}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{ï}} (x+2) = 1 + 2 = 3$ ਹੈ।

$x = 1$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਭਾਵ

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^{ï}} (x-2) = 1 - 2 = -1 \text{ ਹੈ।}$$

ਹੁਣ ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਸੰਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



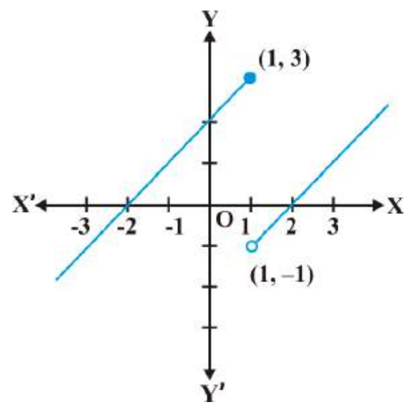
ਚਿੱਤਰ 5.4

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਨਿਮਨ ਲਿਖਿਤ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 1 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 1 \\ x-2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਪਿਛਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $x \ne 1$ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। $x = 1$ ਦੇ ਲਈ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, $\lim\limits_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{ï}} (x+2) = 1 + 2 = 3$ ਹੈ।
$x = 1$ ਦੇ ਲਈ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ, $\lim\limits_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^{ï}} (x-2) = 1 - 2 = -1$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $x = 1$ ਤੇ f ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ : $x = 1$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਦਾ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.5 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



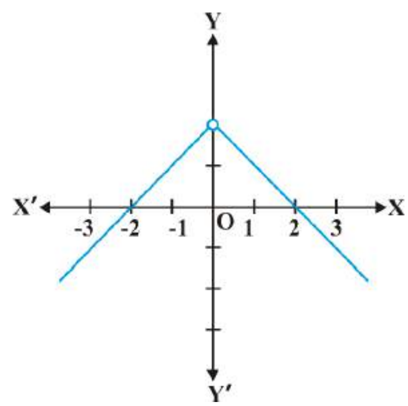
ਚਿੱਤਰ 5.5

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ -x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਫਲਨ 0 ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ

$D_1 \cup D_2$ ਹੈ ਇੱਥੇ $D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$ ਅਤੇ
$D_2 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ ਹੈ।

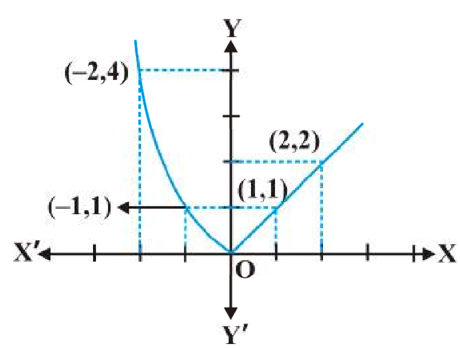


ਚਿੱਤਰ 5.6

ਸੂਰਤ : 1. ਜੇਕਰ $c \in D_1$, ਤਾਂ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (x+2) =$ $c + 2 = f(c)$ ਇਸ ਲਈ D_1 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ।

ਸੂਰਤ:2.ਜੇਕਰ $c \in D_2$, ਤਾਂ $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} (-x+2) =$
ï $c + 2 = f(c)$ ਇਸ ਲਈ D_2 ਵਿੱਚ ਵੀ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ f ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ 5.6 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਕਲਮ ਨੂੰ ਕਾਗਜ਼ ਦੀ ਸਤਹਿ ਤੋਂ ਉਠਾਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਸਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਉਹ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.7

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \\ x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \end{cases}$$

ਹੱਲ : ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਤਿੰਨ ਨਾ ਜੁੜੇ ਉੱਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਲਿਆ ਜਾਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ :

$D_1 = \{x \in \mathbf{R} : x < 0\}$, $D_2 = \{0\}$ ਅਤੇ

$D_3 = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ ਹੈ।

ਸੂਰਤ : 1. D_1 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x) = x^2$ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ D_1 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ (ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੇਖੋ)

ਸੂਰਤ : 2. D_3 ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x) = x$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ D_3 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। (ਉਦਾਹਰਣ 6 ਦੇਖੋ)

ਸੂਰਤ : 3. ਅਸੀਂ ਹੁਣ $x = 0$ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਲੇਸ਼ਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। 0 ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $f(0) = 0$ ਹੈ। 0 ਤੇ f ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^1} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0^2 = 0 \text{ ਹੈ ਅਤੇ}$$

0 ਤੇ f ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

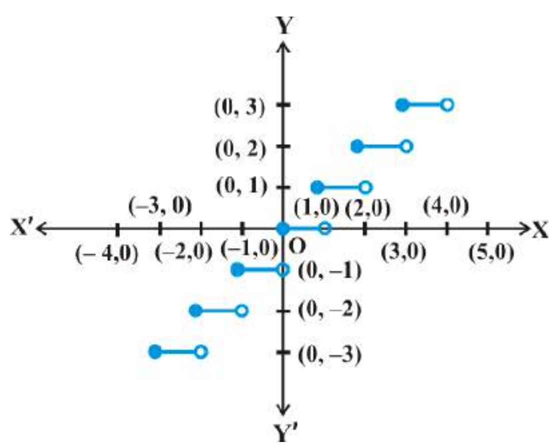
ਇਸ ਲਈ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$, ਇਸ ਲਈ 0 ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ f ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ : f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਕੋਈ ਫਲਨ p, ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਕਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $a_i \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $a_n \neq 0$ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ c ਤੇ p ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ c ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ



ਚਿੱਤਰ 5.8

ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ p ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਭਾਵ p ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $f(x) = [x]$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਅੰਕ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $[x]$ ਉਸ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਅੰਕ ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ x ਦੇ ਘੱਟ ਜਾਂ ਉਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ f ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ 5.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਆਲੇਖ ਤੋਂ ਅਜਿਹਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ x ਦੇ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਣਾਂ ਹੈ। ਥੱਲੇ ਅਸੀਂ ਛਾਣਬੀਣ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ।

ਸੂਰਤ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਕਿਸੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ c ਦੇ ਨੇੜੇ (ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ) ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਮਾਨ $[c]$ ਹੈ, ਭਾਵ $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} [x] = [c]$ ਨਾਲ ਹੀ $f(c) = [c]$, ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ, ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਸੂਰਤ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਛੋਟੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $r > 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ $[c ï r] = c ï 1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $[c + r] = c$ ਹੈ।

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = c ï 1 \text{ ਅਤੇ } \lim_{x\to c^+} f(x) = c$$

ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਇਹ ਸੀਮਾਵਾਂ c ਲਈ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ, ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ x ਸਾਰੇ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਣਾਂ ਹੈ।

5.2.1 *ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Algebra of continuous functions)*

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਸੀਮਾ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਮਝਣ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਅਸੀਂ ਸੀਮਾ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਕੁਝ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਤਰਕਸ਼ੀਲ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਬੀਜਿਕ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅਤੇ g ਦੋ ਅਜਿਹੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ। ਜੋ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

(1) $f + g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(2) $f ï g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(3) $f . g$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, $x = c$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। (ਜਦੋਂ ਕਿ $g(c) \neq 0$ ਹੈ।)

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂ $x = c$ ਤੇ $(f + g)$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x) = \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)] \qquad (f + g \text{ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ})$$

$$= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x) \qquad (\text{ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੁਆਰਾ})$$

$$= f(c) + g(c) \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } f \text{ ਅਤੇ } g \text{ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ})$$

$$= (f + g)(c) \qquad (f + g \text{ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਲਈ] $f + g$ ਵੀ $x = c$ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਸਬੂਤ 1 ਦੇ ਬਾਕੀ ਭਾਗ ਦੀ ਉਤਪਤੀ ਇਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ (3) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = \lambda$ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ λ, ਕੋਈ ਅਚੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ $(\lambda . g)(x) = \lambda . g(x)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $(\lambda . g)$ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $\lambda =$ ï 1, ਤਾਂ f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੋਂ ਹੀ ï f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਿਖਦੀ ਹੈ।

(ii) ਉਪਰੋਕਤ ਭਾਗ (4) ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਭਾਗ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ $f(x) = \lambda$, ਤਾਂ $\frac{\lambda}{g}(x) = \frac{\lambda}{g(x)}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $\frac{\lambda}{g}$ ਵੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਹੈ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, g ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਵਿੱਚ $\frac{1}{g}$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨੋਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਅਨੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਗੱਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ f ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},\ q(x) \neq 0$$

ਇੱਥੇ p ਅਤੇ q ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਹਨ। f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ q ਦਾ ਮਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਨ 14)] ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੇ ਭਾਗ (4) ਦੁਆਰਾ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. sine ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਸ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਤੱਥਾਂ ਨੂੰ ਇੱਥੇ ਸਿੱਧ ਤਾਂ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਪਰ sine ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਨੇੜੇ ਦੇਖ ਕੇ ਇਹ ਤੱਥ ਆਪੇ ਹੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦੇਖੋ ਕਿ $f(x) = \sin x$ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ c ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। $x = c + h$ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਜੇਕਰ $x \to c$ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $h \to 0$ ਇਸ ਲਈ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \sin x\\ &= \lim_{h\to 0} \sin(c+h)\\ &= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h + \cos c \sin h]\\ &= \lim_{h\to 0} [\sin c \cos h] + \lim_{h\to 0} [\cos c \sin h]\\ &= \sin c + 0 = \sin c = f(c)\end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ cosine ਫਲਨ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \tan x$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀਆਂ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\cos x \neq 0$, ਭਾਵ $x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣੇ ਹੀ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ sine ਅਤੇ cosine ਫਲਨ, ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਫਲਨ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ, x ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ (composition) ਦੇ ਸੰਬੰਧਿਤ, ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਵਿਹਾਰ ਇੱਕ ਦਿਲਚਸਪ ਤੱਤ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ f ਅਤੇ g ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ

$$(f \text{ o } g)\ (x) = f(g(x)) \text{ ਹੈ।}$$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ g ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ f ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਿਅਕਤ)] ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ f ਅਤੇ g ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਵਾਲੇ (real valued) ਫਲਨ ਹਨ ਕਿ c ਤੇ $(f \text{ o } g)$ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ c ਤੇ g ਅਤੇ $g(c)$ ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਤਾਂ c ਤੇ $(f \text{ o } g)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਦਰਸਾਓ ਕਿ $f(x) = \sin(x^2)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਫਲਨ f ਨੂੰ, g ਅਤੇ h ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ $(g \text{ o } h)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੋਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ $g(x) = \sin x$ ਅਤੇ $h(x) = x^2$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ g ਅਤੇ h ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਦੁਆਰਾ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x) = |1$ ï $x + |x||$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f] ਜਿੱਥੇ x ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਦੇ ਲਈ g ਨੂੰ $g(x) = 1$ ï $x + |x|$ ਅਤੇ h ਨੂੰ $h(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰੋ। ਤਾਂ

$$(h \text{ o } g)(x) = h(g(x))$$
$$= h(1 \text{ï } x + |x|)$$
$$= |1 \text{ï } x + |x|| = f(x)$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ h ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਮਾਪ ਅੰਕ ਫਲਨ ਦੇ ਯੋਗ ਹੋਣ ਕਾਰਨ g ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਫਲਨ ਹੋਣ ਕਾਰਨ f ਵੀ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.1

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = 5x$ ï 3, $x = 0$, $x =$ ï 3 ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।
2. $x = 3$ ਤੇ ਫਲਨ $f(x) = 2x^2$ ï 1 ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (a) $f(x) = x$ ï 5 (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}, x \neq 5$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x+5}$, $x \neq$ ï 5 (d) $f(x) = |x$ ï $5|$

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = x^n$, $x = n$, ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਇੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. ਕੀ $f(x) = \begin{cases} x, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 1 \\ 5, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f

$x = 0$, $x = 1$, ਅਤੇ $x = 2$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਹੈ ?

f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ f ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

6. $f(x) = \begin{cases} 2x+3, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 2 \\ 2x-3, \text{ ਜੇਕਰ } x > 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} |x|+3, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq -3 \\ -2x, \text{ ਜੇਕਰ } -3 < x < 3 \\ 6x+2, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{ ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ -1, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ ਜੇਕਰ } x \geq 1 \\ x^2+1, \text{ ਜੇਕਰ } x < 1 \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} x^3-3, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 2 \\ x^2+1, \text{ ਜੇਕਰ } x > 2 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x^{10}-1, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 1 \\ x^2, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

13. ਕਿ $f(x) = \begin{cases} x+5, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq 1 \\ x-5, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ?

ਫਲਨ f, ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਇੱਥੇ f ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ?

14. $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ ਜੇਕਰ } 0 \leq x \leq 1 \\ 4, \text{ ਜੇਕਰ } 1 < x < 3 \\ 5, \text{ ਜੇਕਰ } 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$

15. $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ ਜੇਕਰ } x < 0 \\ 0, \text{ ਜੇਕਰ } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} -2, \text{ ਜੇਕਰ } x \leq -1 \\ 2x, \text{ ਜੇਕਰ } -1 < x \leq 1 \\ 2, \quad \text{ ਜੇਕਰ } x > 1 \end{cases}$

17. a ਅਤੇ b ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1, & \text{ਜੇਕਰ } x \leq 3 \\ bx + 3, & \text{ਜੇਕਰ } x > 3 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 3$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

18. λ ਦੀ ਕਿਸੀ ਕੀਮਤ ਲਈ

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2 - 2x), & \text{ਜੇਕਰ } x \leq 0 \\ 4x + 1, & \text{ਜੇਕਰ } x > 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

19. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $g(x) = x$ ï $[x]$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ $[x]$ ਉਸ ਮਹੱਤਮਪੂਰਣ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ x ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਜਾਂ x ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

20. ਕੀ $f(x) = x^2$ ï $\sin x + 5$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = \pi$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ?

21. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$ (b) $f(x) = \sin x$ ï $\cos x$

(c) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

22. cosine, cosecant, secant ਅਤੇ cotangent ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

23. f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{ਜੇਕਰ } x < 0 \\ x + 1, & \text{ਜੇਕਰ } x \geq 0 \end{cases}$$

24. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ਜੇਕਰ } x \neq 0 \\ 0, & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

25. f ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ f ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-\cos x, & \text{ਜੇਕਰ } x\neq 0\\ -1, & \text{ਜੇਕਰ } x=0\end{cases}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 26 ਤੋਂ 29 ਵਿੱਚ k ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ Indicated ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ।

26. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x}, & \text{ਜੇਕਰ } x\neq \dfrac{\pi}{2}\\ 3, & \text{ਜੇਕਰ } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x=\dfrac{\pi}{2}$ ਤੇ

27. $f(x)=\begin{cases}kx^2, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 2\\ 3, & \text{ਜੇਕਰ } x>2\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 2$ ਤੇ

28. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq \pi\\ \cos x, & \text{ਜੇਕਰ } x>\pi\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = \pi$ ਤੇ

29. $f(x)=\begin{cases}kx+1, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 5\\ 3x-5, & \text{ਜੇਕਰ } x>5\end{cases}$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $x = 5$ ਤੇ

30. a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ

$$f(x)=\begin{cases}5, & \text{ਜੇਕਰ } x\leq 2\\ ax+b, & \text{ਜੇਕਰ } 2<x<10\\ 21, & \text{ਜੇਕਰ } x\geq 10\end{cases}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

31. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x) = \cos(x^2)$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

32. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f(x) = |\cos x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

33. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ $\sin|x|$ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ।

34. $f(x) = |x|$ ï $|x + 1|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.3. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਏਬਿਲਟੀ (Differentiability)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਸਿਖਾਏ ਗਏ ਤੱਥਾਂ ਦਾ ਸਮਰਣ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ (Derivative) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ c ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। c ਦਾ f ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਸੀਮਾ ਦੀ ਅਸਤਿਤਵ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਤੇ f ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ $f'(c)$ ਜਾਂ $\frac{d}{dx}(f(x))|_c$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ, ਜਦੋਂ ਵੀ ਇਸ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ, f ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। f ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ $f'(x)$ ਜਾਂ $\frac{d}{dx}(f(x))$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਅਤੇ ਜੇਕਰ $y=f(x)$ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx}$ ਜਾਂ y' ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਕਿਸੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਵਾਕ ਅੰਸ਼ ¶x ਦੇ ਬਾਬਤ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ¸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f'(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ :

(1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

(2) $(uv)' = u'v + uv'$ (ਲੈਬਨੀਜ ਜਾਂ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ)

(3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, ਜਿੱਥੇ $v \neq 0$ (ਭਾਗਫਲ ਨਿਯਮ)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਾਰਨੀ ਦੇ ਕੁਝ ਮਿਆਰੀ (standard) ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵਾ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ :

ਸਾਰਣੀ 5.3

$f(x)$	x^n	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$f'(x)$	$nx^{n \text{ ï } 1}$	$\cos x$	ï $\sin x$	$\sec^2 x$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਵੀ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸੁਝਾਅ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਸੀਮਾ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।" ਹੁਣ ਸੁਭਾਵਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬਿਲਕੁਲ ਢੁੱਕਵਾਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਵੀ। ਜੇਕਰ $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਤੇ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਕਿਸੇ

ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਫਲਨ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਦੋਨੋਂ ਸੀਮਾਵਾਂ $\lim\limits_{h \to 0^{\text{ï}}} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਅਤੇ $\lim\limits_{h \to 0^{+}} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ a ਅਤੇ b ਤੇ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਿ ਹੋਰ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ a ਅਤੇ b ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਫਲਨ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਡੇਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. ਜੇਕਰ ਫਲਨ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਵੀ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ ਇਸ ਲਈ :

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$$

ਪਰ $x \neq c$ ਦੇ ਲਈ

$$f(x) \text{ ï } f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \, . \, (x-c)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\lim_{x \to c} [f(x)-f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \, . \, (x-c) \right]$$

ਜਾਂ
$$\lim_{x \to c} [f(x)] - \lim_{x \to c} [f(c)] = \lim_{x \to c} \left[\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \right] . \lim_{x \to c} [(x-c)]$$

$$= f'(c) \, . \, 0 = 0$$

ਜਾਂ
$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = c$ ਤੇ ਫਲਨ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

ਉਪ ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਕਥਨ (converse) ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = |x|$ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ

ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ ਹੈ :

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾ

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ 0 ਤੇ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਖੱਬੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 0 ਤੇ f ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5.3.1 *ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ* (*Differentials of composite functions*)

ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ ਦੁਆਰਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ f ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ

$$f(x) = (2x + 1)^3$$

ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ $(2x + 1)^3$ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਥੱਲੇ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx}\left[(2x+1)^3\right] \\ &= \frac{d}{dx}(8x^3+12x^2+6x+1) \\ &= 24x^2 + 24x + 6 \\ &= 6\,(2x + 1)^2 \end{aligned}$$

ਹੁਣ, ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$f(x) = (h \circ g)(x)$$

ਇੱਥੇ $g(x) = 2x + 1$ ਅਤੇ $h(x) = x^3$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ $t = g(x) = 2x + 1$. ਤਾਂ $f(x) = h(t) = t^3$.

ਇਸ ਲਈ : $\frac{df}{dx} = 6\,(2x + 1)^2 = 3(2x + 1)^2 \,.\, 2 = 3t^2 \,.\, 2 = \frac{dh}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

ਇਸ ਦੂਸਰੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਲਾਭ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕਈ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2x+1)^{100}$ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨਾ ਇਸ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਚਰਚਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਨੂੰ ਲੜੀ ਨਿਯਮ (chain rule) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. **(ਲੜੀ ਨਿਯਮ)** ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਯੁਕਤ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ u ਅਤੇ v ਦੋਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ; ਭਾਵ $f = v \text{ o } u$. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = u(x)$ ਅਤੇ, ਜੇਕਰ $\frac{dt}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{dv}{dt}$ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨ ਫਲਨ u, v ਅਤੇ w ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ, ਭਾਵ

$f = (w \text{ o } u) \text{ o } v$ ਹੈ, ਜੇਕਰ $t = u(x)$ ਅਤੇ $s = v(t)$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dt}(w \text{o} u) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਠਕ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਸੂਤਰਬੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $f(x) = \sin (x^2)$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $u(x) = x^2$ ਅਤੇ $v(t) = \sin t$ ਹੈ ਤਾਂ

$$f(x) = (v \text{ o } u)\ (x) = v(u(x)) = v(x^2) = \sin x^2$$

$t = u(x) = x^2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\frac{dv}{dt} = \cos t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2x$ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \,.\, 2x$$

ਸਧਾਰਨ ਅਭਿਆਸ ਨਾਲ ਅਖੀਰਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ x ਦੇ ਪਦਾਂ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰਨ ਦਾ ਰਿਵਾਜ਼ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{df}{dx} = \cos t \cdot 2x = 2x \cos x^2$$

ਵਿਕਲਪ : ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਵੀ ਇਸ ਦੀ ਕੀਮਤ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਥੱਲੇ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਹੈ,

$$y = \sin (x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (\sin x^2)$$

$$= \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \cos x^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 22. $\tan(2x+3)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \tan(2x+3)$, $u(x) = 2x + 3$ ਅਤੇ $v(t) = \tan t$ ਹੈ।

$$(v \text{ o } u)(x) = v(u(x)) = v(2x+3) = \tan(2x+3) = f(x)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ f ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਜੇਕਰ $t = u(x) = 2x + 3$. ਤਾਂ $\frac{dv}{dt} = \sec^2 t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2$ ਅਤੇ ਦੋਨਾਂ ਦੀ ਹੀ ਹੋਂਦ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 2\sec^2(2x+3)$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. x ਦੇ ਬਾਬਤ $\sin(\cos(x^2))$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f(x) = \sin(\cos(x^2))$, u, v ਅਤੇ w, ਤਿੰਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f(x) = (w \text{ o } v \text{ o } u)(x)$, ਜਿੱਥੇ $u(x) = x^2$, $v(t) = \cos t$ ਅਤੇ $w(s) = \sin s$ ਹੈ। $t = u(x) = x^2$ ਅਤੇ $s = v(t) = \cos t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{dw}{ds} = \cos s, \frac{ds}{dt} = -\sin t$ ਅਤੇ $\frac{dt}{dx} = 2x$ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਦੀ, x ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ।

$$\frac{df}{dx} = \frac{dw}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (\cos s)\ (\text{ï}\ \sin t)\ (2x) = \text{ï}\ 2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

ਵਿਕਲਪ :

$$y = \sin(\cos x^2)$$

ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(\cos x^2) = \cos(\cos x^2)\ \frac{d}{dx}\ (\cos x^2)$$

$$= \cos(\cos x^2)\ (\text{ï}\ \sin x^2)\ \frac{d}{dx}\ (x^2)$$

$$= \text{ï}\ \sin x^2 \cos(\cos x^2)\ (2x)$$

$$= \text{ï}\ 2x \sin x^2 \cos(\cos x^2)$$

ਅਭਿਆਸ 5.2

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 8 ਵਿੱਚ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\sin (x^2 + 5)$ **2.** $\cos (\sin x)$ **3.** $\sin (ax + b)$

4. $\sec (\tan (\sqrt{x}))$ **5.** $\dfrac{\sin (ax+b)}{\cos (cx+d)}$ **6.** $\cos x^3 \,.\, \sin^2 (x^5)$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$ **8.** $\cos(\sqrt{x})$

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = |x$ ï $1|$, $x \in \mathbf{R}$, $x = 1$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਮਹੱਤਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਫਲਨ $f(x) = [x]$, $0 < x < 3$, $x = 1$ ਅਤੇ $x = 2$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

5.3.2 ਅਸਪੱਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ (***Derivatives of Implicit Functions***)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ $y = f(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ....ਅਨੇਕ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਪਰ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਦਾ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ x ਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੰਬੰਧਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$x \text{ ï } y \text{ ï } \pi = 0$$

$$x + \sin xy \text{ ï } y = 0$$

ਪਹਿਲੀ ਹਾਲਤ (ਸੂਰਤ) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ y ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ $y = x$ ï π ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਜੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਬੰਧ y ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦਾ ਕੋਈ ਆਸਾਨ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸੂਰਤ ਵਿੱਚ, y ਦੀ x ਤੇ ਨਿਰਭਰਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸ਼ੱਕ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਜਦੋਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਉਸ y ਦੇ ਲਈ ਸਰਲ ਕਰਨਾ ਆਸਾਨ ਹੈ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y ਨੂੰ x ਦੇ ਸਪੱਸ਼ਟ (explicit) ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਦੂਸਰੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y ਨੂੰ x ਦੇ (implicity) ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਜੇਕਰ x ï $y = \pi$ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ y ਦੇ ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਉਪਰੋਕਤ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖੀਏ ?

$$y = x \text{ ï } \pi$$

ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

ਵਿਕਲਪ : ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਸਿੱਧਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{d}{dx}(x-y) = \frac{d\pi}{dx}$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d\pi}{dx}$ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਅਚਲ π ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}(y) = 0$$

ਜੋ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੇਕਰ $y + \sin y = \cos x$ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੰਬੰਧ ਦਾ ਸਿੱਧਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{dy}{dx}+\frac{d}{dx}(\sin y) = \frac{d}{dx}(\cos x)$$

ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx}+\cos y\cdot\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

ਇਸ ਤੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{1+\cos y}$$

ਜਿੱਥੇ $$y \neq (2n+1)\pi$$

5.3.3 *ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Derivatives of Inverse Trigonometric Functions)*

ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਧਿਆਨ ਦਵਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਲਈ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. $f(x) = \sin^{-1} x$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = f(x) = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \sin y$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$1 = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਇਹ ਕੇਵਲ $\cos y \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, $\sin^{-1} x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, ਇਸ ਲਈ $x \neq -1, 1$, ਇਸ ਲਈ $x \in (-1, 1)$

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਰੋਮਾਂਚਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੇਰ-ਫੇਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ $x \in (-1, 1)$ ਦੇ ਲਈ $\sin(\sin^{-1} x) = x$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\cos^2 y = 1 - (\sin y)^2 = 1 - (\sin(\sin^{-1} x))^2 = 1 - x^2$$

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos y$ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਅਤੇ $\cos y = \sqrt{1-x^2}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad x \in (-1, 1)$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 27. $f(x) = \tan^{-1} x$ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \tan^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $x = \tan y$ ਹੈ। x ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਕਰਨ ਤੇ

$$1 = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+(\tan(\tan^{-1} x))^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

ਬਾਕੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਆਪਦੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਾਕੀ ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਨੀ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਨੀ 5 4

$f(x)$	$\cos^{-1}x$	$\cot^{-1}x$	$\sec^{-1}x$	$\text{cosec}^{-1}x$
$f'(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$
Domain of f'	$(-1, 1)$	**R**	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

ਅਭਿਆਸ 5.3

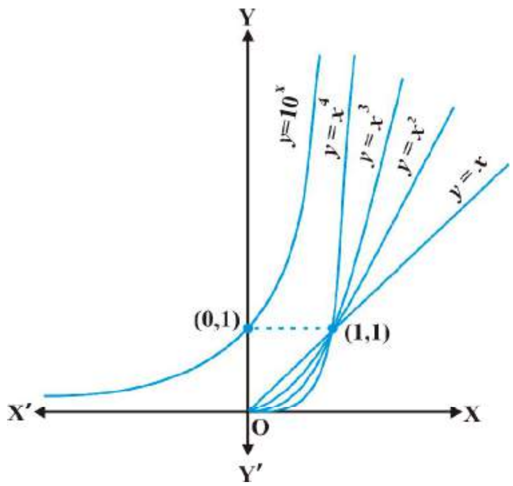
ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $2x + 3y = \sin x$
2. $2x + 3y = \sin y$
3. $ax + by^2 = \cos y$
4. $xy + y^2 = \tan x + y$
5. $x^2 + xy + y^2 = 100$
6. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 81$
7. $\sin^2 y + \cos xy = k$
8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$
9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right), \ -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$
11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$
12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), 0 < x < 1$
13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), -1 < x < 1$
14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $y=\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right), 0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

5.4 ਚਲ ਘਾਤ ਅਤੇ ਲਘੂ ਗਣਨ ਫਲਨ (Exponential and Logarithmic Functions)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨ, ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਤੇ ਤਿਕੋਣਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਪਹਿਲੂਆਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਵਰਗ ਦੇ ਬਾਰੇ ਸਿੱਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਚਲ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਲਘੂਗਣਨ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੱਸਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਭਾਗ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਕਾਰਨ ਪ੍ਰੇਰਕ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਦਰੁਸਤ) (ਮੁੱਲਵਾਨ) ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਪਲਬਧੀਆਂ ਇਸ ਕਿਤਾਬ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇ–ਵਸਤੂ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.9

ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ $y=f_1(x)=x$, $y=f_2(x)=x^2$, $y=f_3(x)=x^3$ ਅਤੇ $y=f_4(x)=x^4$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਿਉਂ&ਜਿਉਂ x ਦੀ ਘਾਤ ਵਧਦੀ ਹੈ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਣ ਵੀ ਵਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਣ ਵਧਣ ਨਾਲ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਤੇਜ਼ ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ x (>1) ਦੇ ਮਾਨ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਵਾਧੇ ਦੇ ਸੰਗਤ $y=f_n(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ਵਧਦਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ n ਦੀ ਕੀਮਤ 1] 2] 3] 4 ਹੁੰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕਥਨ ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਇੱਥੇ $f_n(x)=x^n$ ਹੈ। ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੋਇਆ ਕਿ ਜਿਵੇਂ–ਜਿਵੇਂ n ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $y=f_n(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ y-ਧੁਰੇ ਵੱਲ ਹੋਰ ਜ਼ਿਆਦਾ ਝੁਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ $f_{10}(x)=x^{10}$ ਅਤੇ $f_{15}(x)=x^{15}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜੇਕਰ x ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵਧ ਕੇ 2 ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ f_{10} ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 2^{10} ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ f_{15} ਦਾ ਮਾਨ 1 ਤੋਂ ਵੱਧ ਕੇ 2^{15} ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਦੇ ਸਮਾਨ ਵਾਧੇ ਦੇ ਲਈ, f_{15} ਦਾ ਵਾਧਾ f_{10} ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵੱਧ ਗਤੀ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਹੁਪਦੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵਾਧੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਘਾਤ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਘਾਤ ਵਧਾਉਂਦੇ ਜਾਓ, ਵਾਧਾ ਵਧਦਾ ਜਾਵੇਗਾ ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਸੁਭਾਵਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜੋ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਾਕਾਰਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਨ $y=f(x)=10^x$ ਹੈ।

ਸਾਡਾ ਦਾਅਵਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਫਲਨ f] ਫਲਨ $f_n(x)=x^n$ ਮੁਕਾਬਲੇ ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f_{100}(x)=x^{100}$ ਦੇ

ਮੁਕਾਬਲੇ 10^x ਅਧਿਕ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ x ਦੇ ਵੱਡੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ, ਜਿਵੇਂ $x = 10^3, f_{100}(x) = (10^3)^{100} = 10^{300}$ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(10^3) = 10^{10^3} = 10^{1000}$ ਹੈ। ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $f_{100}(x)$ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ $f(x)$ ਦੇ ਮਾਨ ਅਧਿਕ ਹਨ। ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਕਠਿਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ xਦੇ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਜਿੱਥੇ $x > 10^3$, $f(x) > f_{100}(x)$ ਹੈ। ਪਰ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇਣ ਲਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ x ਦੇ ò ÇÂâ Á » î Åé » ù Ú ã Õ ¶ÇÂ Ô ÇÃ ¾ Õ Æå Å Ü Å Ã Õ ç Å Ô ËÇÕ , ÇÕ Ã ¶ò Æ è é Ã î ê ÿ é Ã ÇÖ Á Á n ਦੇ ਲਈ $f_n(x)$ ਦੇ ਮੁਕਾਬਲੇ $f(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਵਧਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਫਲਨ $y = f(x) = b^x$, ਧਨਾਤਮਕ ਅਧਾਰ $b > 1$ ਦੇ ਲਈ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5.9 ਵਿੱਚ $y = 10^x$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਲਾਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਪਾਠਕ ਇਸ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ b ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕੀਮਤਾਂ ਜਿਵੇਂ 2, 3, 4 ਦੇ ਲਈ ਖਿੱਚ ਕੇ ਦੇਖੋ। ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

(1) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R** ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(2) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ, ਸਾਰੇ ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(3) ਬਿੰਦੂ $(0, 1)$ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਇਹ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਦੁਬਾਰਾ ਕਥਨ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $b > 1$ ਦੇ ਲਈ $b^0 = 1$)

(4) ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਕ੍ਰਮ ਫਲਨ (increasing function) ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਜਿਵੇਂ-ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਨੂੰ ਵਧਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਉੱਪਰ ਉੱਠ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(5) x ਦੇ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਵੱਡੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਮਾਨ 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਦੂਜੇ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਪਹੁੰਚ x- ਧੁਰੇ ਵੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਪਰ ਕਦੇ ਵੀ ਮਿਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ)

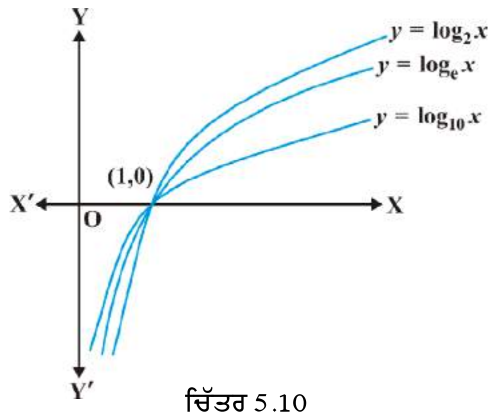
ਅਧਾਰ 10 ਵਾਲੇ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਚਲ ਘਾਤੀ ਫਲਨ **(common exponential Function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ XI ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਨੁਬੰਧ A.1.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸ਼੍ਰੇਣੀ

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$$

ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਕੀਮਤ 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ e ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ e ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ $y = e^x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਤਿਕ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨ **(natural exponential function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਰੋਮਾਂਚਿਕ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਚਲ-ਘਾਤੀ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਉਲਟ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਜੇਕਰ 'ਹੈ' ਤਾਂ ਕੀ ਉਸ ਦੀ ਇੱਕ ਵਧੀਆ ਵਿਆਖਿਆ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ? ਇਹ ਖੋਜ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $b > 1$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ b ਅਧਾਰ ਤੇ a ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ x ਹੈ, ਜੇਕਰ $b^x = a$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.10

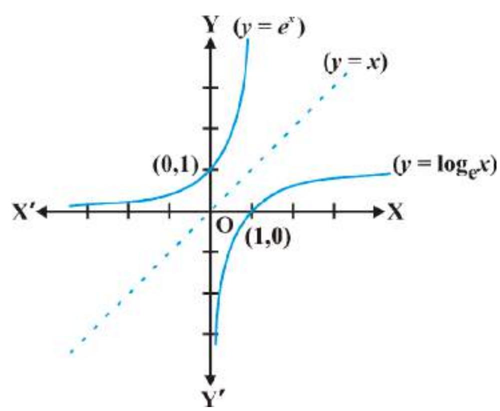
b ਅਧਾਰ ਤੇ a ਦੇ ਲਘੂਗਣਾਕ ਨੂੰ $\log_b a$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $b^x = a$, ਤਾਂ $\log_b a = x$ ਇਸ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਆਉ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਸਪੱਸ਼ਟ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $2^3 = 8$ ਹੈ। ਲਘੂਗਣਕ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ $\log_2 8 = 3$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $10^4 = 10000$ ਅਤੇ $\log_{10} 10000 = 4$ ਸਰਵਾਗਸਮ ਕਥਨ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ $625 = 5^4 = 25^2$ ਅਤੇ $\log_5 625 = 4$ ਜਾਂ $\log_{25} 625 = 2$ ਸਰਵਾਗਸਮ ਕਥਨ ਹੈ।

ਥੋੜ੍ਹਾ ਜਿਹਾ ਹੋਰ ਪਰਿਪੱਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $b > 1$ ਨੂੰ ਅਧਾਰ ਮੰਨਣ ਦੇ ਕਾਰਣ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਨੂੰ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਫਲਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ **(logarithmic function)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ :

$$\log_b : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$$

$$x \to \log_b x = y \text{ ਜੇਕਰ } b^y = x$$

ਪਹਿਲੇ ਕਥਨ ਤੋਂ, ਜੇਕਰ ਅਧਾਰ $b = 10$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ "ਸਾਧਾਰਨ ਲਘੂਗਣਕ" ਅਤੇ ਜੇਕਰ $b = e$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ "ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਲਘੂਗਣਕ" ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਅਕਸਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਲਘੂਗਣਕ ਨੂੰ ln ਨਾਲ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ $\log x$ ਅਧਾਰ e ਵਾਲੇ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 5.10 ਵਿੱਚ 2 ਅਤੇ 10 ਅਧਾਰਿਤ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 5.11

ਅਧਾਰ $b > 1$ ਵਾਲੇ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਥੱਲੇ ਸੂਚੀਬੱਧ ਹਨ :

(1) ਗੈਰ ਧਨਾਤਮਕ (non-positive) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਘੂਗਣਕ ਦੀ ਕੋਈ ਅਰਥਪੂਰਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨਹੀਂ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ $\mathbf{R}^+$ ਹੈ।

(2) ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(3) ਬਿੰਦੂ $(1, 0)$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਲਘੂਗਣਿਕ ਫਲਨਾ ਦਾ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(4) ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਇੱਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਫਲਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਜਿਉਂ ਜਿਉਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਵੱਲ ਚਲਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(5) 0 ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਵਾਲੇ x ਦੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ $\log x$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਚੌਥੀ (ਚੌਥਾਈ) ਵਿੱਚ ਅਲੇਖ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨੇੜੇ ਮਿਲਦਾ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਕਦੇ ਮਿਲਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ)A

(6) ਚਿੱਤਰ 5.11 ਵਿੱਚ $y = e^x$ ਅਤੇ $y = \log_e x$ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਰੋਮਾਂਚਕਾਰੀ ਹੈ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਵਕਰ, ਰੇਖਾ $y = x$ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਦਰਪਣ ਪ੍ਰਤੀਬਿੰਬ ਹਨ।

ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣ ਹੇਠਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹੈ :

(1) ਅਧਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦਾ ਇੱਕ ਮਿਆਰੀ ਨਿਯਮ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\log_a p$ ਨੂੰ $\log_b p$ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\log_a p = \alpha$, $\log_b p = \beta$ ਅਤੇ $\log_b a = \gamma$ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $a^\alpha = p$, $b^\beta = p$ ਅਤੇ $b^\gamma = a$ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੀਜੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ

$$(b^\gamma)^\alpha = b^{\gamma\alpha} = p$$

ਇਸ ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$b^\beta = p = b^{\gamma\alpha}$$

ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ $\beta = \alpha\gamma$ ਜਾਂ $\alpha = \dfrac{\beta}{\gamma}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\mathbf{\log_a p = \frac{\log_b p}{\log_b a}}$$

(2) ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਤੇ log ਫਲਨ ਦਾ ਪ੍ਰਭਾਵ ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਰੋਮਾਂਚਕ ਗੁਣ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\log_b pq = \alpha$ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ $b^\alpha = pq$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $\log_b p = \beta$ ਅਤੇ $\log_b q = \gamma$ ਹੈ ਤਾਂ $b^\beta = p$ ਅਤੇ $b^\gamma = q$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਪਰ $b^\alpha = pq = b^\beta b^\gamma = b^{\beta+\gamma}$ ਹੈ।

ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $\alpha = \beta + \gamma$, ਭਾਵ

$$\mathbf{\log_b pq = \log_b p + \log_b q}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੋਚਕ ਅਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਨਤੀਜਾ ਉਦੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ $p = q$ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\mathbf{\log_b p^2 = \log_b p + \log_b p = 2 \log_b p}$$

ਇਸ ਦਾ ਇੱਕ ਸਰਲ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਭਾਵ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ

$$\mathbf{\log_b p^n = n \log_b p}$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਨਤੀਜਾ n ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ

ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਪਾਠਕ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $x = e^{\log x}$ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਪਹਿਲਾਂ ਤਾਂ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ log ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਸਾਰੇ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ ਗੈਰ-ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\log x}$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $y > 0$ ਤਾਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਲੈਣ ਤੇ $\log y = \log (e^{\log x}) = \log x \,.\, \log e = \log x$ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ $y = x$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = e^{\log x}$ ਕੇਵਲ x ਦੇ ਧਨ ਕੀਮਤਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਕਲਨ ਗਣਿਤ (differential calculus) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਚਲਘਾਤੀ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਅਸਧਾਰਨ ਗੁਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ, ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਰਿਵਰਤਨ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਗੁਣ ਦੇ ਥੱਲੇ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਵਿੱਚ ਬਿਆਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਸਬੂਤ ਅਸੀਂ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5*

(1) x ਦੇ ਬਾਬਤ e^x ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

(2) x ਦੇ ਬਾਬਤ $\log x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{1}{x}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$

ਉਦਾਹਰਣ 29. x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) e^{-x} (ii) $\sin (\log x), x > 0$ (iii) $\cos^{-1} (e^x)$ (iv) $e^{\cos x}$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{-x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(-x) = -e^{-x}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sin (\log x)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = \cos(\log x) \cdot \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{\cos (\log x)}{x}$$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \cos^{-1}(e^x)$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$$

* ਕ੍ਰਿਪਾ ਕਰਕੇ ਸੰਪੂਰਨ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ ਪੰਨਾ 303-304

(iv) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\cos x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dx} = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x}$$

ਅਭਿਆਸ 5.4

ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\dfrac{e^x}{\sin x}$ **2.** $e^{\sin^{-1} x}$ **3.** e^{x^3}

4. $\sin(\tan^{-1} e^{-x})$ **5.** $\log(\cos e^x)$ **6.** $e^x + e^{x^2} + \ldots + e^{x^5}$

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}},\ x > 0$ **8.** $\log(\log x),\ x > 1$ **9.** $\dfrac{\cos x}{\log x},\ x > 0$

10. $\cos(\log x + e^x)$

5.5. ਲਘੂਗਣਕੀ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ (Logarithmic Differentiation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਵਰਗ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਾਂਗੇ।

$$y = f(x) = [u(x)]^{v(x)}$$

ਲਘੂਗਣਕ (e ਅਧਾਰ ਤੇ) ਲੈਣ ਨਾਲ ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ :

$$\log y = v(x)\, \log\, [u(x)]$$

ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ, $\dfrac{1}{y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = v(x) \cdot \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log\, [u(x)]$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) + v'(x) \cdot \log[u(x)]\right]$

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਮੁੱਖ ਗੱਲ ਇਹ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਅਤੇ $u(x)$ ਨੂੰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. x ਦੇ ਬਾਬਤ $\sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $y = \sqrt{\dfrac{(x-3)(x^2+4)}{(3x^2+4x+5)}}$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \frac{1}{2}[\log (x \text{ ï } 3) + \log (x^2 + 4) \text{ ï } \log (3x^2 + 4x + 5)]$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-3)(x^2+4)}{3x^2+4x+5}}\left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{2x}{x^2+4} - \frac{6x+4}{3x^2+4x+5}\right]$$

ਉਦਾਹਰਨ 31. x ਦੇ ਬਾਬਤ a^x ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨ ਅਚੱਲ ਹੈ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $y = a^x$, ਤਾਂ

$$\log y = x \log a$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx} = \log a$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = y \log a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$$

ਵਿਕਲਪ
$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\log a}) = e^{x\log a}\frac{d}{dx}(x\log a)$$
$$= e^{x \log a} . \log a = a^x \log a$$

ਉਦਾਹਰਨ 32. x ਦੇ ਬਾਬਤ $x^{\sin x}$, ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ $x > 0$ ਹੈ ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = x^{\sin x}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log y = \sin x \log x$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \sin x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

ਜਾਂ
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)\frac{1}{x} + \log x \cos x$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \cos x \log x\right]$$

$$= x^{\sin x - 1}\cdot \sin x + x^{\sin x}\cdot \cos x \log x$$

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਜੇਕਰ $y^x + x^y + x^x = a^b$ ਹੈ। ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y^x + x^y + x^x = a^b$

$u = y^x$, $v = x^y$ ਅਤੇ $w = x^x$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $u + v + w = a^b$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \qquad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ $u = y^x$ ਹੈ। ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log u = x \log y$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਲੈਣ ਤੇ

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log y) + \log y \frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{du}{dx} = u\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right) = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] \qquad \text{... (2)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $v = x^y$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log v = y \log x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = y\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{dy}{dx}$$

$$= y\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot\frac{dy}{dx}$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right]$$

$$= x^y\left[\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right] \qquad \ldots (3)$$

ਗਣਿਤ $w = x^x$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਲਘੂਗਣਕ ਲੈਣ ਤੇ

$$\log w = x \log x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ

$$\frac{1}{w}\cdot\frac{dw}{dx} = x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\,.\,\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\cdot\frac{1}{x}+\log x\cdot 1$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dw}{dx} = w\,(1+\log x)$$

$$= x^x\,(1+\log x) \qquad \ldots (4)$$

(1), (2), (3) ਅਤੇ (4), ਦੁਆਰਾ

$$y^x\left(\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right)+x^y\left(\frac{y}{x}+\log x\frac{dy}{dx}\right) + x^x\,(1+\log x) = 0$$

ਜਾਂ $$(x\,.\,y^{x ï 1} + x^y\,.\,\log x)\,\frac{dy}{dx} = ï\; x^x\,(1+\log x)\; ï\; y\,.\,x^{y ï 1}\; ï\; y^x \log y$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-[y^x\log y + y\,.\,x^{y-1} + x^x(1+\log x)]}{x\,.\,y^{x-1}+x^y\log x}$$

ਅਭਿਆਸ 5.5

1 ਤੋਂ 11 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $\cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)\,(x-5)}}$

3. $(\log x)^{\cos x}$

4. x^x ï $2^{\sin x}$

5. $(x+3)^2 \,.\, (x+4)^3 \,.\, (x+5)^4$

6. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

7. $(\log x)^x + x^{\log x}$

8. $(\sin x)^x + \sin^{\text{ï}1}\sqrt{x}$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

10. $x^{x\cos x} + \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

11. $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{\frac{1}{x}}$

12 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

12. $x^y + y^x = 1$

13. $y^x = x^y$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

15. $xy = e^{(x\,\text{ï}\,y)}$

16. $f(x) = (1+x)\,(1+x^2)\,(1+x^4)\,(1+x^8)$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $f'(1)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. $(x^2$ ï $5x+8)\,(x^3+7x+9)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ

(ii) ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਵਿਸਤਾਰ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਇਕੱਲਾ ਬਹੁਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ

(iii) ਲਘੂਗਣਕ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੁਆਰਾ

ਇਸ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਤਿੰਨੋਂ ਉੱਤਰ ਸਮਾਨ ਹਨ।

18. ਜੇਕਰ u, v ਅਤੇ w, x ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਭਾਵ ਪਹਿਲੇ-ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ *(Repeat)* ਦੁਆਰਾ ਦੂਜੀ-ਲਘੂਗੁਣਕ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}(u.\,v.\,w) = \frac{du}{dx}\,v.\,w + u\,.\,\frac{dv}{dx}\,.\,w + u\,.\,v\,\frac{dw}{dx}$$

5.6 ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਰੂਪਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Derivatives of Functions in Parametric Forms)

ਕਦੀ – ਕਦੀ ਦੋ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਸੰਬੰਧ, ਨਾ ਤਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਸਪਸ਼ਟ, ਪਰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧ ਇਕ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਦੇ ਮਾਧਿਅਮ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤੀਜੀ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਹੋਰ ਸਾਫ਼-ਸੁਥਰੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਦੋ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਵਿੱਚ $x = f(t)$, $y = g(t)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਸੰਬੰਧ, ਨੂੰ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸੰਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ t ਇੱਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਰੂਪ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਦੁਆਰਾ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \left(\text{ਜਦੋਂ ਕਦੀ } \frac{dx}{dt} \neq 0\right) \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)} \left(\text{ਕਿਉਂਕਿ } \frac{dy}{dt} = g'(t) \text{ ਅਤੇ } \frac{dx}{dt} = f'(t)\right) \quad [\text{ਬਸ਼ਰਤ } f'(t) \neq 0]$$

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਜੇਕਰ $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਜੇਕਰ $x = at^2$, $y = 2at$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $x = at^2$, $y = 2at$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dx}{dt} = 2at \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{dy}{dt} = 2a$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਜੇਕਰ $x = a\,(\theta + \sin\theta)$, $y = a\,(1$ ï $\cos\theta)$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos\theta)$, $\frac{dy}{d\theta} = a\,(\sin\theta)$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \tan\frac{\theta}{2}$$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇੱਥੇ, ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\frac{dy}{dx}$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ, ਕੇਵਲ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਜੇਕਰ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ ਹੈ ਤਾਂ

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = (a\cos^3\theta)^{\frac{2}{3}} + (a\sin^3\theta)^{\frac{2}{3}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}}(\cos^2\theta + (\sin^2\theta) = a^{\frac{2}{3}}$$

ਇਸ ਲਈ $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ਦੀ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{dx}{d\theta}$ = ï $3a\cos^2\theta\sin\theta$ ਅਤੇ $\frac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = -\tan\theta = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਸਪੱਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਕਾਫ਼ੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋਵੇਗਾ :

ਅਭਿਆਸ 5.6

ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ x ਅਤੇ y ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ, ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਲੁਪਤ ਕੀਤੇ, $\frac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $x = 2at^2,\ y = at^4$

2. $x = a\cos\theta,\ y = b\cos\theta$

3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$

4. $x = 4t,\ y = \frac{4}{t}$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$

6. $x = a(\theta - \sin\theta),\ y = a(1 + \cos\theta)$

7. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}},\ y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

8. $x = a\left(\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\right)\ y = a\sin t$

9. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta),\ y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

11. ਜੇਕਰ $x = \sqrt{a^{\sin^{-1}t}},\ y = \sqrt{a^{\cos^{-1}t}}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

5.7 ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Second Order Derivative)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = f(x)$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \text{... (1)}$$

ਜੇਕਰ $f'(x)$ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਅਚਲ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਬਾਬਤ (1) ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ (Second Order Derivative) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। $f(x)$ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਨੂੰ $f''(x)$ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ $y = f(x)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ $D^2(y)$ ਜਾਂ y'' ਜਾਂ y_2 ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਟਿੱਪਣੀ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਜੇਕਰ $y = x^3 + \tan x$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = x^3 + \tan x$ ਹੈ। ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \sec^2 x$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(3x^2 + \sec^2 x\right)$$
$$= 6x + 2\sec x \,.\, \sec x \tan x = 6x + 2\sec^2 x \tan x$$

ਉਦਾਹਰਣ 39. ਜੇਕਰ $y = \mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{A}\cos x \text{ ï } \mathrm{B}\sin x$$

ਅਤੇ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\mathrm{A}\cos x \text{ ï } \mathrm{B}\sin x)$$
$$= \text{ï } \mathrm{A}\sin x \text{ ï } \mathrm{B}\cos x = \text{ï } y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 40. ਜੇਕਰ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = 3e^{2x} + 2e^{3x}$ ਹੈ। ਹੁਣ

$$\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 6e^{3x} = 6\,(e^{2x} + e^{3x})$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12e^{2x} + 18e^{3x} = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 6\,(2e^{2x} + 3e^{3x})$$
$$\text{ï } 30\,(e^{2x} + e^{3x}) + 6\,(3e^{2x} + 2e^{3x}) = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਜੇਕਰ $y = \sin^{\text{ï}1} x$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(1 \text{ ï } x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $y = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\,\frac{dy}{dx} = 1$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}\left(\sqrt{(1-x^2)}\right) = 0$$

ਜਾਂ $$\sqrt{(1-x^2)}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$$

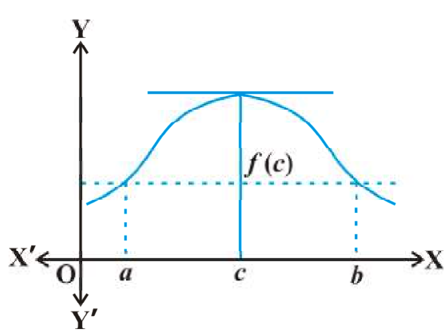
ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 0$$

ਵਿਕਲਪ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = \sin^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ

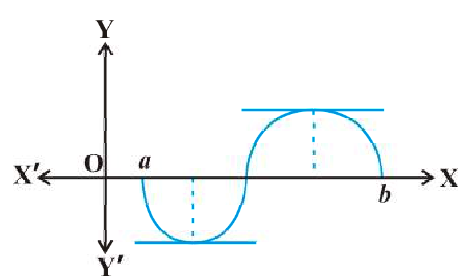
$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{ਭਾਵ}\ \left(1-x^2\right)y_1^2 = 1$$

ਇਸ ਲਈ $$(1-x^2)\cdot 2y_1y_2 + y_1^2(0-2x) = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$(1 - x^2)\, y_2 - x y_1 = 0$$



ਚਿੱਤਰ 5.12



ਚਿੱਤਰ 5.13

ਅਭਿਆਸ 5.7

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $x^2 + 3x + 2$ **2.** x^{20} **3.** $x \cdot \cos x$

4. $\log x$ **5.** $x^3 \log x$ **6.** $e^x \sin 5x$

7. $e^{6x} \cos 3x$ **8.** $\tan^{-1} x$ **9.** $\log (\log x)$

10. $\sin (\log x)$ **11.** ਜੇਕਰ $y = 5 \cos x - 3 \sin x$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

12. ਜੇਕਰ $y = \cos^{-1} x$ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਨੂੰ ਕੇਵਲ y ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਜੇਕਰ $y = 3 \cos (\log x) + 4 \sin (\log x)$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$

14. ਜੇਕਰ $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny = 0$

15. ਜੇਕਰ $y = 500e^{7x} + 600e^{-7x}$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = 49y$ ਹੈ।

16. ਜੇਕਰ $e^y (x + 1) = 1$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ ਹੈ।

17. ਜੇਕਰ $y = (\tan^{-1} x)^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(x^2 + 1)^2 y_2 + 2x (x^2 + 1) y_1 = 2$ ਹੈ।

5.8 ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (Mean Value Theorem)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਲਨ ਗਣਿਤ ਦੇ ਦੋ ਮੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ, ਬਿਨਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ, ਵਿਅਕਤ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਦਾ ਵੀ ਗਿਆਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6. ਰੋਲੇ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ **(Rolle's Theorem)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ਦੀ ਲਗਾਤਾਰਤਾ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ $f(a) = f(b)$ ਹੈ, ਇੱਥੇ a ਅਤੇ b ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ c ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚੋਂ ਹੈ, ਕਿ $f'(c) = 0$ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 5.12 ਅਤੇ 5.13 ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ, ਜੋ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪਿਛਲੇ ਪੰਨੇ ਤੇ ਬਣੇ ਚਿੱਤਰ 5.12 ਅਤੇ 5.13 ਇੱਥੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸਥਿਤ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਤੇ ਕੀ ਵਾਪਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖੀ ਦੀ ਢਾਲ ਜ਼ੀਰੋ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

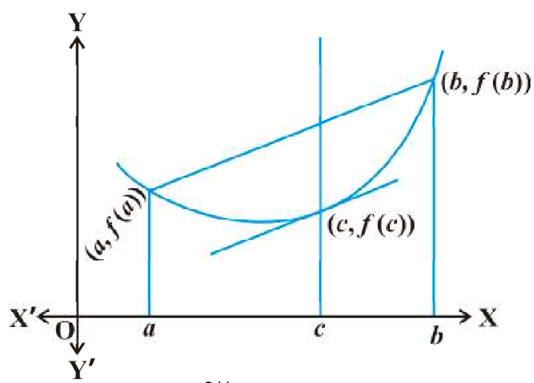
ਰੋਲੇ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਠੀਕ-ਠੀਕ ਇਹੀ ਦਾਅਵਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $y = f(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ

ਦੀ ਢਾਲ ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 7. ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ **(Mean Value Theorem)** ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ। ਹੁਣ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਅਜਿਹੇ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ ਹੈ।}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ (MVT), ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਸਤਾਰ (extension) ਹੈ। ਆਉ, ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਸਮਝੀਏ। ਫਲਨ $y = f(x)$ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 5.13 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ $f'(c)$ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(c, f(c))$ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਾਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 5.14 ਤੋਂ ਸਾਫ ਹੈ ਕਿ $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ਬਿੰਦੂਆਂ $(a, f(a))$ ਅਤੇ $(b, f(b))$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ (Secant) ਦੀ ਢਲਾਨ ਹੈ। ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $(c, f(c))$ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $(a, f(a))$ ਅਤੇ $(b, f(b))$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਛੇਦਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਨੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ (a, b) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਜੋ $(c, f(c))$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $(a, f(a))$ ਅਤੇ $(b, f(b))$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਸਮਾਨੰਤਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.14

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਫਲਨ $y = x^2 + 2$ ਦੇ ਲਈ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ, ਜਦੋਂ $a =$ ï 2 ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $y = x^2 + 2$, ਅੰਤਰਾਲ [ï 2, 2] ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (ï 2, 2) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ $f($ï $2) = f(2) = 6$ ਹੈ $f(x)$ ਦਾ ਮਾਨ ï 2 ਅਤੇ 2 ਤੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c \in$ (ï 2, 2) ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $f'(x) = 2x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $c =$

0 ਤੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਅਤੇ $c = 0 \in (\text{ï } 2, 2)$

ਉਦਾਹਰਣ 43. ਅੰਤਰਾਲ [2, 4] ਦੇ ਫਲਨ $f(x) = x^2$ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ $f(x) = x^2$ ਅੰਤਰਾਲ [2, 4] ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (2, 4) ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $f'(x) = 2x$ ਅੰਤਰਾਲ (2, 4) ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਹੁਣ $f(2) = 4$ ਅਤੇ $f(4) = 16$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{16-4}{4-2} = 6$$

ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $c \in (2, 4)$ ਅਜਿਹਾ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ $f'(c) = 6$ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ $f'(x) = 2x$ ਜਿਸ ਦਾ ਭਾਵ $c = 3$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $c = 3 \in (2, 4)$, ਤੇ $f'(c) = 6$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.8

1. ਫਲਨ $f(x) = x^2 + 2x$ ï $8, x \in [$ï $4, 2]$ ਦੇ ਲਈ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।
2. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਕਿਸ ਤੇ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਉਲਟ ਬਾਰੇ ਕੁਝ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ?
   (i) $f(x) = [x]$ ਦੇ ਲਈ $x \in [5, 9]$ (ii) $f(x) = [x]$ ਦੇ ਲਈ $x \in [$ï $2, 2]$
   (iii) $f(x) = x^2$ ï 1 ਦੇ ਲਈ $x \in [1, 2]$
3. ਜੇਕਰ $f : [$ï $5, 5] \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $f'(x)$ ਕਿਸੀ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਜ਼ੀਰੋ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f($ï $5) \neq f(5)$
4. ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2$ ï $4x$ ï 3, ਇੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $b = 4$ ਹੈ।
5. ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^3$ ï $5x^2$ ï $3x$, ਜਿੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $b = 3$ ਹੈ। $f'(c) = 0$ ਦੇ ਲਈ $c \in (1, 3)$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 2 ਦੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੇ ਤਿੰਨੋਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਲਾਗੂ ਹੋਣ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 44. x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}}$ (ii) $e^{\sec^2 x} + 3\cos^{\text{ï}1} x$ (iii) $\log_7 (\log x)$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sqrt{3x+2} + \dfrac{1}{\sqrt{2x^2+4}} = (3x+2)^{\frac{1}{2}} + (2x^2+4)^{-\frac{1}{2}}$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > -\dfrac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(3x+2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2+4)$$

$$= \frac{1}{2}(3x+2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3) - \left(\frac{1}{2}\right)(2x^2+4)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4x$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} - \frac{2x}{\left(2x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > -\dfrac{2}{3}$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = e^{\sec^2 x} + 3\cos^{-1} x$ ਹੈ। ਇਹ $[-1, 1]$ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = e^{\sec^2 x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec^2 x) + 3\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= e^{\sec^2 x} \cdot \left(2\sec x \frac{d}{dx}(\sec x)\right) - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sec x\,(\sec x \tan x)\, e^{\sec^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\sec^2 x \tan x\, e^{\sec^2 x} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸਿਰਫ਼ $[-1, 1]$ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੰਨਿਆ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $\cos^{ï\,1} x$ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਸਿਰਫ਼ $(ï\;1, 1)$ ਵਿੱਚ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \log_7 (\log x) = \dfrac{\log (\log x)}{\log 7}$ (ਅਧਾਰ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ)

ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 1$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log 7}\frac{d}{dx}(\log (\log x))$$
$$= \frac{1}{\log 7}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{d}{dx}(\log x)$$
$$= \frac{1}{x \log 7 \log x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 45. x ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\cos^{ï 1} (\sin x)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \cos^{ï 1} (\sin x)$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$f(x) = \cos^{ï 1} (\sin x)$$
$$= \cos^{-1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right], \text{ since } \frac{\pi}{2} - x \in [0.\pi]$$
$$= \frac{\pi}{2} - x$$

ਇਉਂ $f'(x) = ï\ 1$ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = \tan^{ï 1}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ ਫਲਨ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਲਈ $\cos x \neq ï\ 1$, ਅਤੇ π ਦੇ ਸਾਰੇ ਟਾਂਕ ਗੁਣਾਕ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਾਲ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$$
$$= \tan^{-1}\left[\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{x}{2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ ਨੂੰ ਕੱਟ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਜ਼ੀਰੋ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $f'(x) = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right)$ ਹੈ। ਇਸ ਫਲਨ ਦੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ x ਨੂੰ ਲੱਭਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $-1 \le \frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\frac{2^{x+1}}{1+4^x}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੇ x ਨੂੰ ਲੱਭਣਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $\frac{2^{x+1}}{1+4^x} \le 1$, ਭਾਵ ਇਹ ਸਾਰੇ x ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $2^{x+1} \le 1 + 4^x$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $2 \le \frac{1}{2^x} + 2^x$ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸਾਰੇ x ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਹਰੇਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਹੁਣ $2^x = \tan\theta$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$f(x) = \sin^{-1}\left[\frac{2^{x+1}}{1+4^x}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2^x \cdot 2}{1+(2^x)^2}\right]$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$= \sin^{-1}[\sin 2\theta] = 2\theta = 2\tan^{-1}(2^x)$$

ਇਸ ਲਈ
$$f'(x) = 2\cdot\frac{1}{1+(2^x)^2}\cdot\frac{d}{dx}(2^x)$$

$$= \frac{2}{1+4^x}\cdot(2^x)\log 2$$

$$= \frac{2^{x+1}\log 2}{1+4^x}$$

ਉਦਾਹਰਣ 46. ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ $0 < x < \pi$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$ ਹੈ ਤਾਂ $f'(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਫਲਨ $y = (\sin x)^{\sin x}$ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ $(\sin x>0)$ ਹੈ। ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਹੋਣ ਤੇ

$$\log y = \log (\sin x)^{\sin x} = \sin x \log (\sin x)$$

ਹੁਣ
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log (\sin x))$$

$$= \cos x \log (\sin x) + \sin x \, . \, \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \cos x \log (\sin x) + \cos x$$

$$= (1 + \log (\sin x)) \cos x$$

ਹੁਣ
$$\frac{dy}{dx} = y((1 + \log (\sin x)) \cos x) = (1 + \log (\sin x)) (\sin x)^{\sin x} \cos x$$

ਉਦਾਹਰਣ 47. ਧਨਾਤਮਕ ਚਲ a ਦੇ ਲਈ $\dfrac{dy}{dx}$, ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ

$$y = a^{t+\frac{1}{t}}, \text{ ਅਤੇ } x = \left(t + \frac{1}{t}\right)^a \text{ ਹੈ।}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦੋਨੋਂ y ਅਤੇ x, ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $t \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a^{t+\frac{1}{t}}\right) = a^{t+\frac{1}{t}}\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right).\log a$$

$$= a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{dx}{dt} = a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\frac{d}{dt}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

$$= a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$\dfrac{dx}{dt} \neq 0$ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ $t \neq \pm 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $t \neq \pm 1$ ਦੇ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\log a}{a\left[t+\frac{1}{t}\right]^{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{t^2}\right)} = \frac{a^{t+\frac{1}{t}}\log a}{a\left(t+\frac{1}{t}\right)^{a-1}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 48. $e^{\cos x}$ ਦੇ ਬਾਬਤ $\sin^2 x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $u(x) = \sin^2 x$ ਅਤੇ $v(x) = e^{\cos x}$ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ ਸਾਨੂੰ $\frac{du}{dv} = \frac{du/dx}{dv/dx}$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ :

$$\frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x \text{ ਅਤੇ } \frac{dv}{dx} = e^{\cos x} (-\sin x) = -(\sin x)\, e^{\cos x} \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{du}{dv} = \frac{2 \sin x \cos x}{-\sin x\, e^{\cos x}} = -\frac{2\cos x}{e^{\cos x}}$$

ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆਂ 1 ਤੋਂ 11 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ, x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. $(3x^2 - 9x + 5)^9$

2. $\sin^3 x + \cos^6 x$

3. $(5x)^{3 \cos x\ 2x}$

4. $\sin^{-1}(x \sqrt{x}),\ 0 \le x \le 1.$

5. $\dfrac{\cos^{-1} \frac{x}{2}}{\sqrt{2x+7}},\ -2 < x < 2.$

6. $\cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right],\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

7. $(\log x)^{\log x},\ x > 1$

8. $\cos(a \cos x + b \sin x)$, ਕਿਸੇ ਅਚਲ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ

9. $(\sin x - \cos x)^{(\sin x - \cos x)},\ \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}$

10. $x^x + x^a + a^x + a^a$, ਕਿਸੇ ਪੱਕਾ $a > 0$ ਅਤੇ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ

11. $x^{x^2-3} + (x-3)^{x^2}$, $x > 3$ ਦੇ ਲਈ

12. ਜੇਕਰ $y = 12(1 - \cos t),\ x = 10(t - \sin t),\ -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਜੇਕਰ $y = \sin^{-1} x + \sin^{-1} \sqrt{1-x^2},\ 0 < x < 1$, ਹੈ ਤਾਂ $\dfrac{dy}{dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ $-1 < x < 1$ ਦੇ ਲਈ $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

15. ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ $c > 0$ ਦੇ ਲਈ $(x$ ï $a)^2 + (y$ ï $b)^2 = c^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$, a ਅਤੇ b ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਇੱਕ ਅਚਲ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ

16. ਜੇਕਰ $\cos y = x \cos (a + y)$, ਅਤੇ $\cos a \neq \pm 1$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

17. ਜੇਕਰ $x = a(\cos t + t \sin t)$ ਅਤੇ $y = a(\sin t$ ï $t \cos t)$, ਤਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ $f(x) = |x|^3$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $f''(x)$ ਦੀ ਅਸਤਿਤਵ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਗਣਿਤਕ ਆਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਰੇ ਧਨ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ n ਦੇ ਲਈ $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ ਹੈ।

20. $\sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੁਆਰਾ cosines ਦੇ ਲਈ ਜੋੜ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21. ਕੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਫਲਨ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜੋ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਵੇ ਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਆਪਣੇ ਜਾਇਜ਼ ਉੱਤਰ ਵੀ ਦੱਸੋ।

22. ਜੇਕਰ $y = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & h(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = \begin{vmatrix} f'(x) & g'(x) & h'(x) \\ l & m & n \\ a & b & c \end{vmatrix}$

23. ਜੇਕਰ $y = e^{a \cos^{-1} x}$, ï $1 \le x \le 1$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਆਪਣੀ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਕਿਸੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਮਾਨ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਅੰਤਰ, ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ f ਅਤੇ g ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ

$(f \pm g)\ (x) = f(x) \pm g(x)$ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$(f\ .\ g)\ (x) = f(x)\ .\ g(x)$ ਲਗਾਤਾਰ (ਨਿਰੰਤਰ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ (ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$) ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ (ਸੀਮਿਤ) ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।
- ਲੜੀ&ਨਿਯਮ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਜੇਕਰ $f = v \text{ o } u,\ t = u\ (x)$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\frac{dt}{dx}$ ਅਤੇ $\frac{dv}{dt}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ

$$\frac{df}{dx} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

- ਕੁਝ ਮਾਨਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1 + x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x \qquad \frac{d}{dx}\left(\log x\right) = \frac{1}{x}$$

- ਲਘੂਗੁਣਾਕ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ $f(x) = [u\ (x)]^{v\ (x)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਤਕਨੀਕ ਹੈ। ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਅਰਥ ਪੂਰਨ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ਕਿ $f(x)$ ਅਤੇ $u\ (x)$ ਦੋਨੋ ਹੀ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣ।
- ਰੋਲੇ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ : ਜੇਕਰ $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ, ਅਤੇ $f(a) = f(b)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ (a, b) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ $f'(c) = 0$.
- ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ : ਜੇਕਰ $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅੰਤਰਾਲ (a, b) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਜਿਸ ਲਈ

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$