ਅਧਿਆਇ 6

ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਅਣਉਪਯੋਗ (Application of Derivatives)

❖ *With the Calculus as a key, Mathematics can be successfully applied to the explanation of the course of Nature — WHITEHEAD* ❖

6.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਯੋਜਕ ਫਲਨਾਂ, ਉਲਟ ਤ੍ਰਿਕੋਨਮਿਤਈ ਫਲਨਾਂ, ਅਸਪਸ਼ਟ ਫਲਨਾਂ, ਚਲ ਘਾਤ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਲਘੂ-ਗਣਨ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ, ਵਿਗਿਆਨ, ਸਮਾਜਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਕਈ ਹੋਰ ਖੇਤਰ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਸਿੱਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (i) ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, (ii) ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, (iii) ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ 'ਤੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ, ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

6.2 ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ (Rate of Change of Quantities)

ਆਓ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਕਿ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{ds}{dt}$ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਸਮਾਂ ਅੰਤਰਾਲ t ਦੇ ਬਾਬਤ ਦੂਰੀ s ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਰਾਸ਼ੀ y ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ x ਦੇ ਬਦਲਣ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ (ਜਾਂ $f'(x)$), x ਦੇ ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (ਜਾਂ $f'(x_0)$) $x = x_0$ ਤੇ) x ਦੇ ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਜੇ ਦੋ ਚਲ x ਅਤੇ y, ਚਲ t ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਬਾਬਤ ਬਦਲ ਰਹੇ ਹੋਣ ਭਾਵ $x = f(t)$ ਅਤੇ

$y = g(t)$ ਹੈ ਤਦ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}, \text{ ਜੇ } \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, x ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦੀ ਗਣਨਾ t ਦੇ ਬਾਬਤ y ਅਤੇ x ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ’ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $r = 5$ cm ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = \pi r^2$ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, r ਦੇ ਬਾਬਤ A ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ $\frac{dA}{dr} = \frac{d}{dr}(\pi r^2) = 2\pi r$ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $r = 5$ cm ਤਾਂ $\frac{dA}{dr} = 10\pi$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 10π cm^2/cm ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਇੱਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 9 cm^3/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇਸ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਣ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x cm ਹੈ। ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ V ਜਾਂ ਘਣ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ। ਤਦ, $V = x^3$ ਅਤੇ $S = 6x^2$, ਇੱਥੇ x ਸਮਾਂ t ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\frac{dV}{dt} = 9 \text{ cm}^3/\text{s} \quad \text{(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)}$$

ਇਸ ਲਈ $$9 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

ਜਾਂ $$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{x^2} \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(6x^2) = \frac{d}{dx}(6x^2) \cdot \frac{dx}{dt} \quad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

$$= 12x \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right) = \frac{36}{x} \quad \text{((1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $$x = 10 \text{ cm}, \quad \frac{dS}{dt} = 3.6 \text{ cm}^2/\text{s}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਰੰਗਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਿੱਚ 4 cm/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਰੰਗ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸ ਪਲ, ਚੱਕਰ ਰਾਹੀਂ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨੀ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਵਾਲੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = \pi r^2$ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂ t ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ A ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \frac{d}{dr}(\pi r^2)\cdot\frac{dr}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ $\quad \frac{dr}{dt} = 4$ cm

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $\quad r = 10$ cm

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(10)(4) = 80\pi$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ $r = 10$ cm ਤਦ ਚੱਕਰ ਤੋਂ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 80π cm²/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।

> *ਟਿੱਪਣੀ* x ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਣ ਨਾਲ ਜੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਵੱਧਣ ਨਾਲ ਜੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ x, ਦੇ ਘਟਣ ਦੀ ਦਰ 3 cm/min ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ y, ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ 2 cm/min ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 10$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm ਹੈ ਤਦ ਆਇਤ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪ ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ ਲੰਬਾਈ x ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ y ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dx}{dt} = \text{ï}\ 3\ \text{cm/min} \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{dy}{dt} = 2\ \text{cm/min}$$

ਜੇ ਆਇਤ ਦਾ ਪਰਿਮਾਪ P ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ, ਭਾਵ ਕਿ

$$P = 2(x + y)$$

ਇਸ ਲਈ $\quad \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-3+2) = -2$ cm/min

ਜੇ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਵੇ

ਭਾਵ ਕਿ $\quad A = x\,.\,y$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$= -3(6) + 10(2) \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } x = 10 \text{ cm ਅਤੇ } y = 6 \text{ cm)}$$
$$= 2 \text{ cm}^2/\text{min}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ C(x) ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ

$$C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ (marginal cost ਜਾਂ MC) ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਪੱਧਰ ਤੇ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਤਤਕਾਲਿਕ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਪੱਧਰ ਤੇ x ਇਕਾਈ ਦੇ ਬਾਬਤ, ਸੰਪੂਰਨ ਲਾਗਤ ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ
$$MC = \frac{dC}{dx} = 0.005(3x^2) - 0.02(2x) + 30$$

ਜਦੋਂ $x = 3$ ਹੈ ਤਦ
$$MC = 0.015(3^2) - 0.04(3) + 30$$
$$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ Rs 30.02 (ਲੱਗਭਗ) ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਕਿਸੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇੱਥੇ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (marginal revenue or MR) ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਪਲ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ (marginal revenue or MR) ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਪਲ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ
$$MR = \frac{dR}{dx} = 6x + 36$$

ਜਦੋਂ $x = 5$ ਹੈ, ਤਦ
$$MR = 6(5) + 36 = 66$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਭਾਵ ਆਮਦਨ Rs 66 ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਇਸ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ r ਦੇ ਬਾਬਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ

(a) $r = 3$ cm ਹੈ। (b) $r = 4$ cm ਹੈ।

2. ਇੱਕ ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ 8 cm^3/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ

ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇਸ ਦੀ ਭੁਜਾ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 12 cm ਹੋਵੇ ?

3. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 cm/s ਦੀ ਇਕਸਮਾਨ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੱਕਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ।

4. ਇੱਕ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਘਣ ਦਾ ਕਿਨਾਰਾ 3 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਘਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿਨਾਰਾ 10 cm ਲੰਬਾ ਹੈ।

5. ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਝੀਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪੱਥਰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਤਰੰਗਾਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਵਿੱਚ 5 cm/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚੱਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਤਰੰਗ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 8 cm ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਪਲ, ਚੱਕਰ ਰਾਹੀਂ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

6. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0·7 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਘੇਰੇ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਕੀ ਹੈ ਜਦੋਂ $r = 4.9$ cm ਹੈ ?

7. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਈ x, 5 cm/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ y, 4 cm/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 8$ cm ਅਤੇ $y = 6$ cm ਹੈ ਤਦ ਆਇਤ ਦੇ (a) ਪਰਿਮਾਪ (b) ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਾਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਪੰਪ ਨਾਲ 900 cm^3 ਗੈਸ ਪ੍ਰਤੀ ਸੈਕਿੰਡ ਭਰ ਕੇ ਫੁਲਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਗੁਬਾਰੇ ਦੀ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 15 cm ਹੈ।

9. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ ਚਲ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 10 cm ਹੈ।

10. ਇੱਕ 5 m ਲੰਬੀ ਪੌੜੀ ਕੰਧ 'ਤੇ (ਝੁਕੀ ਹੋਈ) ਲੱਗੀ ਹੈ। ਪੌੜੀ ਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ, ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦੀਵਾਰ ਤੋਂ 2 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਰ੍ਹਾਂ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੀਵਾਰ ਤੇ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਪੌੜੀ ਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ ਦੀਵਾਰ ਤੋਂ 4 m ਦੂਰ ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਕਣ ਵਕਰ $6y = x^3 + 2$ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਚਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਵਕਰ 'ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਨਾਲ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 8 ਗੁਣਾ ਤੇਜ਼ੀ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹੈ।

12. ਹਵਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬੁਲਬੁਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $\frac{1}{2}$ cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬੁਲਬੁਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧਵਿਆਸ 1 cm ਹੈ ?

13. ਇੱਕ ਗੁਬਾਰਾ ਜੋ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੋਲਾਕਾਰ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਨਸ਼ੀਲ ਵਿਆਸ $\frac{3}{2}(2x+1)$ ਹੈ। x ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

14. ਇੱਕ ਪਾਇਪ ਤੋਂ ਰੇਤ 12 cm^3/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਡਿੱਗ ਰਹੀ ਹੈ। ਡਿੱਗਦੀ ਰੇਤ ਜ਼ਮੀਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸ਼ੰਕੂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਛੇਵਾਂ ਹਿੱਸਾ ਹੈ। ਰੇਤ ਨਾਲ ਬਣੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਹੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਚਾਈ 4 cm ਹੈ ?

15. ਇੱਕ ਵਸਤੂ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ $C(x)$ (ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ)

$C(x) = 0.007x^3$ ï $0.003x^2 + 15x + 4000$

ਨਾਲ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦੋਂ 17 ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ?

16. ਕਿਸੇ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ $R(x)$ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ

$$R(x) = 13x^2 + 26x + 15$$

ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $x = 7$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 17 ਅਤੇ 18 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ

17. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ $r = 6$ cm ਤੇ r ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਹੈ :

(A) 10π (B) 12π (C) 8π (D) 11π

18. ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ ਦੇ ਵੇਚਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ $R(x) = 3x^2 + 36x + 5$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਗਈ ਹੈ। ਜਦੋਂ $x = 15$ ਹੈ ਤਾਂ ਸੀਮਾਂਤ ਆਮਦਨ ਹੈ :

(A) 116 (B) 96 (C) 90 (D) 126

6.3 ਵਧਦੇ (Increasing) ਅਤੇ ਘਟਦੇ (Decreasing) ਫਲਨ

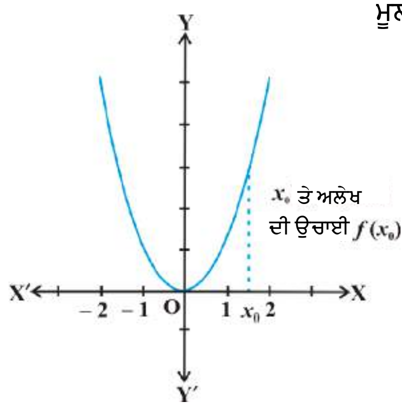
ਇਸ ਭਾਗ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਜਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਜੋ ਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ, ਚਿੱਤਰ 6.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲ

x	$f(x) = x^2$
ï 2	4
$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
ï 1	1
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
0	0

ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.1

ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਮੁੱਲ

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$
2	4

ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਵੱਧਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.1) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਾਲ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਵੱਧਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x > 0$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਿਵੇਂ ਜਿਵੇਂ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਅਲੇਖ ਦੀ ਉਚਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x < 0$ ਦੇ ਲਈ ਫਲਨ ਘਟਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ I ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ। ਤਦ f

(i) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

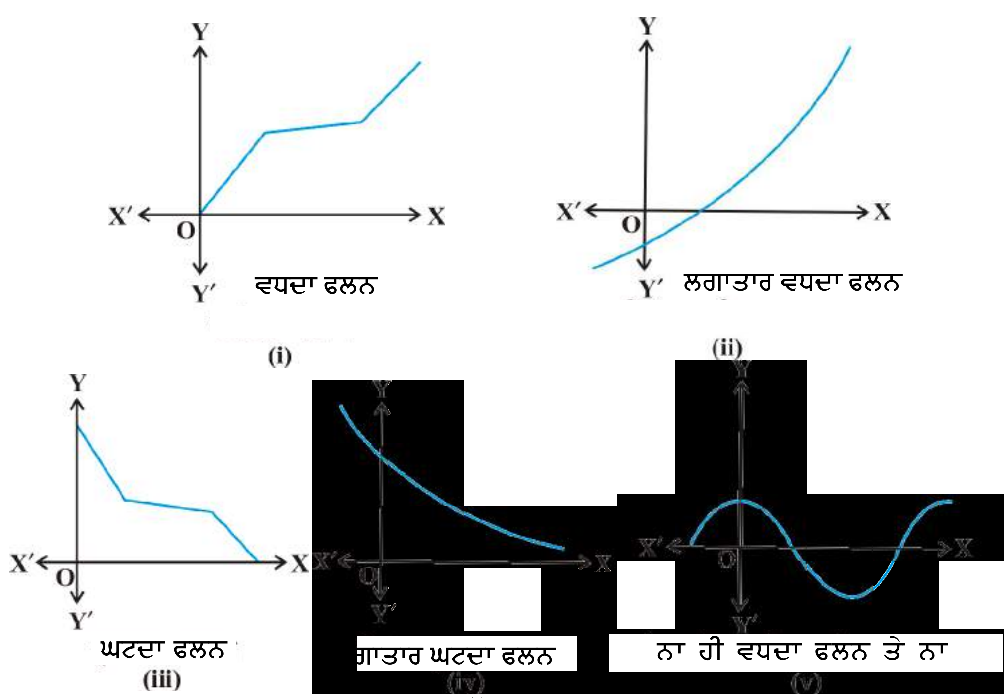
(ii) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

(iii) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

(iv) ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਘਟਦਾ ਹੈ, ਜੇ I ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in$ I ਦੇ ਲਈ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿਤਰਨ ਚਿੱਤਰ 6.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 6.2

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ x_0 ਹੈ ਤਾਂ x_0 ਤੇ f ਵਧਦਾ, ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ, ਘਟਦਾ ਅਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ x_0 ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ I ਵਿੱਚ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ f ਵਧਦਾ, ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ, ਘਟਦਾ ਅਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਵਧਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

x_0 ਤੇ f ਵਧਦਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ $\mathrm{I} = (x_0 - h, x_0 + h)$, $h > 0$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$ ਦੇ ਲਈ

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ਬਾਕੀ ਹਾਲਤਾਂ ਦਾ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = 7x - 3$, **R** ਤੇ ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਵੋ **R** ਵਿੱਚ x_1 ਅਤੇ x_2 ਕੋਈ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੈ; ਤਦ

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow 7x_1 < 7x_2 \\ &\Rightarrow 7x_1 - 3 < 7x_2 - 3 \\ &\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਤੋਂ ਨਤੀਜਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ **R** ਤੇ f ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਧਦੇ ਅਤੇ ਘਟਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਪਰੀਖਿਅਣ ਦੇ ਸਬੂਤ ਲਈ ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤੇ ਗਏ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਲੋੜ ਪੈਂਦੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ f ਅੰਤਰਾਲ $[a,b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਅਤੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ (a,b) ਤੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

(a) $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

(b) $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

(c) $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਫਲਨ ਹੈ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਹੈ।

ਸਬੂਤ (a) ਮੰਨ ਲਵੋ ਕਿ $x_1, x_2 \in [a, b]$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $x_1 < x_2$ ਤਦ ਮੱਧਮਾਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ x_1 ਅਤੇ x_2 ਦੇ ਮੱਧ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

ਅਰਥਾਤ $\quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad$ (ਕਿਉਂਕਿ $f'(c) > 0$)

ਅਰਥਾਤ $\quad f(x_2) > f(x_1)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$[a,b]$ ਦੇ ਸਾਰੇ x_1, x_2 ਦੇ ਲਈ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

ਇਸ ਲਈ $[a,b]$ ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਭਾਗ (b) ਅਤੇ (c) ਦੇ ਸਬੂਤ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀਆਂ

(i) ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਨੁਸਾਰ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ x ਲਈ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ x, f ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਦ f ਨੂੰ ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਇਲਾਵਾ x ਲਈ $f^1(x) < 0$ ਅਤੇ $f(x) > 0$ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਤਦ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਘਟਦਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫਲਨ ਕਿਸੀ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ f ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ, ਇਸ ਦੇ ਕਥਨ ਦਾ ਉਲਟ ਦਾ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f,

$$f(x) = x^3 \text{ ï } 3x^2 + 4x,\ x \in \mathbf{R}$$

R ਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \text{ ï } 6x + 4 \\ &= 3(x^2 \text{ ï } 2x + 1) + 1 \\ &= 3(x \text{ ï } 1)^2 + 1 > 0, \quad \text{ਸਾਰੇ } x \in \mathbf{R} \text{ ਦੇ ਲਈ} \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ f, **R** ਤੇ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = \cos x$

(a) $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(b) $(\pi, 2\pi)$, ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(c) $(0, 2\pi)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $f'(x) = \text{ï } \sin x$

(a) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (0, \pi)$ ਦੇ ਲਈ $\sin x > 0$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) < 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(b) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in (\pi, 2\pi)$ ਦੇ ਲਈ $\sin x < 0$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $(\pi, 2\pi)$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(c) ਉਪਰੋਕਤ (a) ਅਤੇ (b) ਨਾਲ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $(0, 2\pi)$ ਵਿੱਚ f ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = x^2 \text{ ï } 4x + 6$

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = x^2 - 4x + 6$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 2x - 4$$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ $x = 2$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਰਥਾਤ $(-\infty, 2)$ ਅਤੇ $(2, \infty)$ (ਚਿੱਤਰ 6.3) ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅੰਤਰਾਲ $(-\infty, 2)$ ਵਿੱਚ $f'(x) = 2x - 4 < 0$ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 6.3

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ f, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤਰਾਲ $(2, \infty)$, ਵਿੱਚ $f'(x) > 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਉਹ ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f,

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x + 30$$

ਚਿੱਤਰ 6.4

ਜਾਂ
$$f'(x) = 12x^2 - 12x - 72$$
$$= 12(x^2 - x - 6)$$
$$= 12(x - 3)(x + 2)$$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = -2, 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $x = -2$ ਅਤੇ $x = 3$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਅਰਥਾਤ $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.4)।

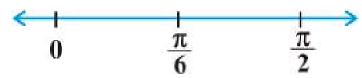
ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\infty, -2)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 3)$ ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ। ਫਲਸਰੂਪ ਫਲਨ f ਅੰਤਰਾਲਾਂ $(-\infty, -2)$ ਅਤੇ $(3, \infty)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(-2, 3)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਪਰ f, **R** ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ	$f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਫਲਨ f ਦੀ ਕਿਸਮ
$(-\infty, -2)$	$(-)(-) > 0$	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ
$(-2, 3)$	$(-)(+) < 0$	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ
$(3, \infty)$	$(+)(+) > 0$	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $f(x) = \sin 3x,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(a) ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ



ਚਿੱਤਰ 6.5

$$f(x) = \sin 3x$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 3\cos 3x$$

ਇਸ ਲਈ, $f'(x) = 0$ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\cos 3x = 0$ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $3x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (ਕਿਉਂਕਿ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $x = \frac{\pi}{6}$ ਅਤੇ $\frac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ $x = \frac{\pi}{6}$, ਅੰਤਰਾਲ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ਨੂੰ ਦੋ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਰੇ $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਕਿਉਂਕਿ $0 \le x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 \le 3x < \frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ ਸਾਰੇ $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) < 0$ ਕਿਉਂਕਿ $\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 3x \le \frac{3\pi}{2}$

ਇਸ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ ਵਿੱਚ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਜਾਂ $x = \frac{\pi}{6}$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਵੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਤੋਂ, f, $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f, ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

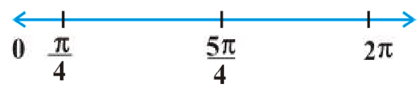
ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$f(x) = \sin x + \cos x, \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = \cos x \text{ ï } \sin x$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $\sin x = \cos x$ ਜਿਸ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $0 \le x \le 2\pi$,

ਬਿੰਦੂ $x = \frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $x = \frac{5\pi}{4}$ ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2\pi]$ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ, ਅਰਥਾਤ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.6

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਅਤੇ $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਅਤੇ $f'(x) < 0,$ ਜਦੋਂ $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਅੰਤਰਾਲ $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ	$f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ	ਫਲਨ ਦੀ ਕਿਸਮ
$\left[0, \frac{\pi}{4}\right)$	> 0	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ
$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$	< 0	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ
$\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$	> 0	f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ **R** ਤੇ $f(x) = 3x + 17$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਤੇ $f(x) = e^{2x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ $f(x) = \sin x$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(c) $(0, \pi)$ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਘਟਦਾ ਹੈ।

4. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^2$ ï $3x$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

5. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ। (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

6. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦੇ ਜਾਂ ਘਟਦੇ ਹਨ :

(a) $x^2 + 2x + 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$

(c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x + 1$ (d) $6 - 9x - x^2$

(e) $(x + 1)^3 (x - 3)^3$

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $y = \log(1+x) - \dfrac{2x}{2+x}, x > -1,$ ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਨ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

8. x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ $y = [x(x - 2)]^2$ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

9. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ਵਿੱਚ $y = \dfrac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, θ ਦਾ ਇੱਕ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

10. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਲਘੂਗਣਨ ਫਲਨ $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(-1, 1)$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2 - x + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਨਾ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਘਟਦਾ ਹੈ।

12. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਫਲਨ $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦੇ ਹਨ ?

(A) $\cos x$ (B) $\cos 2x$ (C) $\cos 3x$ (D) $\tan x$

13. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

(A) $(0,1)$ (B) $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ (C) $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

14. a ਦਾ ਉਹ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 2]$ ਵਿੱਚ $f(x) = x^2 + ax + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f] ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

15. ਮੰਨ ਲਉ $[-1, 1]$ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਾ ਜੁੜਾ ਅੰਤਰਾਲ I ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ I ਵਿੱਚ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f] ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਹੈ।

16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

17. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f(x) = \log|\cos x|$ ਅੰਤਰਾਲ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ **R** ਤੇ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ ਤੋਂ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਵਧਦਾ ਹੈ।

19. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ $y = x^2 e^{-x}$ ਵਧਦਾ ਹੈ।

(A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(2, \infty)$ (D) $(0, 2)$

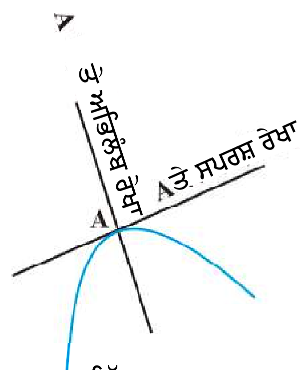
6.4 ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ (Tangents and Normals)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੇਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਵਕਰ ਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਢਲਾਨ (slope) m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ

$y - y_0 = m(x - x_0)$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}$ $[= f'(x_0)]$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (x_0, y_0) ਤੇ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ
$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 6.7

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ, ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\frac{-1}{f'(x_0)}$ ਹੈ। (ਜੇ $f'(x_0) \neq 0$), ਇਸ ਲਈ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

ਅਰਥਾਤ $\quad (y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$

> ☛ *ਟਿੱਪਣੀ* ਜਦੋਂ $y = f(x)$ ਦੀ ਕੋਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨ ਦਿਸ਼ਾ ਨਾਲ θ ਕੋਣ ਬਣਾਏ, ਤਦ
> $\frac{dy}{dx} =$ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \tan\theta$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ (Particular cases)

(i) ਜਦੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, $\tan\theta = 0$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\theta = 0$ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, (x_0, y_0) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $y = y_0$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(ii) ਜਦੋਂ $\theta \to \frac{\pi}{2}$, ਤਦ $\tan\theta \to \infty$, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਰਥਾਤ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, (x_0, y_0) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $x = x_0$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)A

ਉਦਾਹਰਣ 14. $x = 2$ ਤੇ ਵਕਰ $y = x^3$ ï x ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੀ $x = 2$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3x^2 - 1\Big]_{x=2} = 11 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਵਕਰ $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x-3)^{\frac{-1}{2}} \cdot 4 = \frac{2}{\sqrt{4x-3}} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਢਲਾਨ $\frac{2}{3}$ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{2}{\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{3}$$

ਜਾਂ $4x$ ï $3 = 9$

ਜਾਂ $x = 3$

ਹੁਣ $y = \sqrt{4x-3} - 1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $x = 3$, $y = \sqrt{4(3)-3} - 1 = 2$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ $(3, 2)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਢਲਾਨ 2 ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y + \frac{2}{(x-3)} = 0$ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ :

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x,y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x-3)^2} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਢਲਾਨ 2 ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$\frac{2}{(x-3)^2} = 2$$

ਜਾਂ $\qquad (x - 3)^2 = 1$

ਜਾਂ $\qquad x - 3 = \pm 1$

ਜਾਂ $\qquad x = 2, 4$

ਹੁਣ $x = 2$ ਨਾਲ $y = 2$ ਅਤੇ $x = 4$ ਨਾਲ $y = - 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦਿੱਤੇ ਵਕਰ ਦੀ ਢਲਾਨ 2 ਵਾਲੀ ਦੋ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ (2] 2) ਅਤੇ (4] &2) ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (2] 2) ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ :

$$y - 2 = 2(x - 2) \text{ ਹੈ।}$$

ਜਾਂ $\qquad y - 2x + 2 = 0$

ਅਤੇ (4] &2) ਤੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ :

$$y - (- 2) = 2(x - 4)$$

ਜਾਂ $\qquad y - 2x + 10 = 0$ gA

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਵਕਰ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ (i) x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ (ii) y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਨੂੰ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{x}{2}+\frac{2y}{25}\frac{dy}{dx} = 0$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{-25}{4}\frac{x}{y}$$

(i) ਹੁਣ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{-25}{4}\frac{x}{y}=0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਤਦ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੋਵੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਵਿੱਚ $x = 0$ ਤੇ $y^2 = 25$,ਅਰਥਾਤ $y = \pm 5$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ $(0, 5)$ ਅਤੇ $(0, - 5)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ x&ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(ii) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{4y}{25x}=0$, ਜਾਂ $y=0$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ। $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ ਤੇ $y=0$ ਤੋਂ $x=\pm 2$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਬਿੰਦੂ (2] 0) ਅਤੇ (&2] 0) ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਵਕਰ $y=\frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਇਹ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ x-ਧੁਰੇ ਤੇ $y=0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $y=0$, ਤਦ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨਾਲ $x=7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਕਰ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ $(7, 0)$ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-y(2x-5)}{(x-2)(x-3)} \quad \text{(ਕਿਉਂ)}$$

ਜਾਂ $$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(7,0)}=\frac{1-0}{(5)(4)}=\frac{1}{20} \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ $(7, 0)$ ਤੇ ਢਲਾਨ $\frac{1}{20}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(7, 0)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ :

$$y-0=\frac{1}{20}(x-7) \quad \text{ਜਾਂ} \quad 20y-x+7=0 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਵਕਰ $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(1, 1)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=2$ ਦੀ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx}=-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ਇਸ ਲਈ, (1, 1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,\,1)} = -1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (1]1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y ï\ 1 = ï\ 1\,(x ï\ 1) \qquad \text{ਜਾਂ} \qquad y + x ï\ 2 = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ (1] 1) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\frac{-1}{\text{(1]1) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ}} = 1 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ, (1] 1) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y ï\ 1 = 1\,(x ï\ 1) \qquad \text{ਜਾਂ} \qquad y ï\ x = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 20. $x = a\sin^3 t$, $\quad y = b\cos^3 t\quad$ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਵਕਰ ... (1)

ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਜਿੱਥੇ $t = \frac{\pi}{2}$ ਹੈ, ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (1) ਦਾ t ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dx}{dt} = 3a\sin^2 t\cos t \qquad \text{ਅਤੇ} \qquad \frac{dy}{dt} = -3b\cos^2 t\sin t$$

ਜਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3b\cos^2 t\sin t}{3a\sin^2 t\cos t} = \frac{-b}{a}\frac{\cos t}{\sin t}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad t = \frac{\pi}{2}$ ਤਦ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{-b\cos\frac{\pi}{2}}{a\sin\frac{\pi}{2}} = 0$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

ਅਤੇ ਜਦੋਂ $t = \frac{\pi}{2}$, ਤਦ $x = a$ ਅਤੇ $y = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $t = \frac{\pi}{2}$ ਤੇ ਅਰਥਾਤ $(a, 0)$ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $y ï\ 0 = 0\,(x ï\ a)$ ਅਰਥਾਤ $y = 0$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.3

1. ਵਕਰ $y = 3x^4 ï\ 4x$ ਤੇ $x = 4$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵਕਰ $y = \frac{x-1}{x-2}$, $x \neq 2$ ਤੇ $x = 10$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵਕਰ $y = x^3 ï\ x + 1$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 2 ਹੈ।

4. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $3x + 2$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ 3 ਹੈ।

5. ਵਕਰ $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ ਤੇ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਵਕਰ $x = 1 - a\sin\theta, y = b\cos^2\theta$ ਤੇ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $3x^2$ ï $9x + 7$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ x&ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

8. ਵਕਰ $y = (x$ ï $2)^2$ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂਆਂ (2] 0) ਅਤੇ (4] 4) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਜੀਵਾ ਦੇ, ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

9. ਵਕਰ $y = x^3$ ï $11x + 5$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $y = x$ ï 11 ਹੈ।

10. ਢਲਾਨ ï 1 ਵਾਲੀ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq$ ï 1 ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

11. ਢਲਾਨ 2 ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y = \dfrac{1}{x-3}$, $x \neq 3$ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

12. ਢਲਾਨ 0 ਵਾਲੀ ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵਕਰ $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 3}$ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ।

13. ਵਕਰ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ

(i) x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। (ii) y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵਕਰਾਂ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $y = x^4$ ï $6x^3 + 13x^2$ ï $10x + 5$ ਦੇ $(0, 5)$ ਤੇ

(ii) $y = x^4$ ï $6x^3 + 13x^2$ ï $10x + 5$ ਦੇ $(1, 3)$ ਤੇ

(iii) $y = x^3$ ਦੇ $(1, 1)$ ਤੇ

(iv) $y = x^2$ ਦੇ $(0, 0)$ ਤੇ

(v) $x = \cos t, y = \sin t$ ਦੇ $t = \dfrac{\pi}{4}$ ਤੇ

15. ਵਕਰ $y = x^2$ ï $2x + 7$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ

(a) ਰੇਖਾ $2x$ ï $y + 9 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

(b) ਰੇਖਾ $5y$ ï $15x = 13$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

16. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $y = 7x^3 + 11$ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ, ਜਿੱਥੇ $x = 2$ ਅਤੇ $x =$ ï 2 ਹੈ, ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

17. ਵਕਰ $y = x^3$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ ਬਿੰਦੂ ਦੇ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

18. ਵਕਰ $y = 4x^3 - 2x^5$, ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹਨ।

19. ਵਕਰ $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਉਹ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

20. ਵਕਰ $ay^2 = x^3$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (am^2, am^3) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21. ਵਕਰ $y = x^3 + 2x + 6$ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x + 14y + 4 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

22. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(at^2, 2at)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

23. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $x = y^2$ ਅਤੇ $xy = k$ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ* ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ $8k^2 = 1$ ਹੋਵੇ।

24. ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

25. ਵਕਰ $y = \sqrt{3x - 2}$ ਦੀ ਉਸ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $4x - 2y + 5 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 26 ਅਤੇ 27 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

26. ਵਕਰ $y = 2x^2 + 3 \sin x$ ਦੇ $x = 0$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ ਹੈ :

(A) 3 (B) $\frac{1}{3}$ (C) -3 (D) $-\frac{1}{3}$

27. ਕਿਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $y = x + 1$, ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ ?

(A) (1, 2) (B) (2, 1) (C) (1, − 2) (D) (− 1, 2) ਹੈ।

6.5 ਲਗਭਗਤਾਵਾਂ (Approximation)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਦੇ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ $f : D \to \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਵਕਰ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ Δx, ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਛੋਟੇ ਵਾਧੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ x ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਛੋਟੇ ਵਾਧੇ Δx ਦੇ ਸੰਗਤ y ਵਿੱਚ ਹੋਏ ਵਾਧੇ ਨੂੰ Δy ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) x ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਨੂੰ dx ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ $dx = \Delta x$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ii) y ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਨੂੰ dy ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ $dy = f'(x)\, dx$ ਜਾਂ $dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ $dx = \Delta x$ ਛੋਟਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ Δy ਦਾ ਲਗਭਗ ਸਹੀ ਮੁੱਲ dy ਹੁੰਦਾ

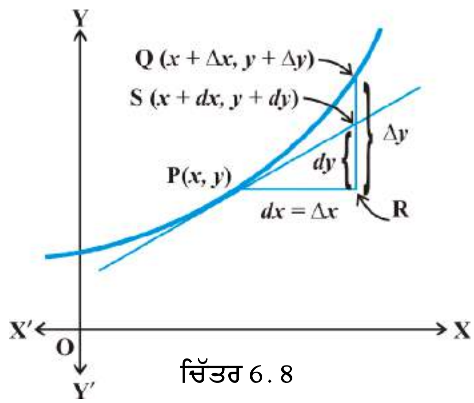
* ਦੋ ਵਕਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹੋਣ।

ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ $dy \approx \Delta y$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

Δx, Δy, dx ਅਤੇ dy ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਦੇ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 6.8 ਦੇਖੋ।

ਟਿੱਪਣੀ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਅਤੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨਿਰਭਰ ਚਲ (Dependent variable) ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ, ਚਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਆਜ਼ਾਦ ਚਲ (Independent variable) ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ, ਚਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $\sqrt{36.6}$ ਦੀ ਲਗਭਗਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.8

ਹੱਲ : $y = \sqrt{x}$ ਲਵੋ ਇੱਥੇ $x = 36$ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $\Delta x = 0.6$ ਹੈ।

ਤਦ $\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{36.6} - \sqrt{36} = \sqrt{36.6} - 6$

$$\sqrt{36.6} = 6 + \Delta y$$

ਹੁਣ Δy ਲਗਭਗ dy ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.6) \quad (\text{ ਕਿਉਂਕਿ } y = \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{36}}(0.6) = 0.05$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\sqrt{36.6}$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ $6 + 0.05 = 6.05$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 22. $(25)^{\frac{1}{3}}$ ਦੀ ਲਗਭਗਤਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $y = x^{\frac{1}{3}}$ ਇੱਥੇ $x = 27$ ਅਤੇ $\Delta x = -2$ ਹੈ।

ਤਦ
$$\Delta y = (x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}$$
$$= (25)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}} = (25)^{\frac{1}{3}} - 3$$

ਜਾਂ
$$(25)^{\frac{1}{3}} = 3 + \Delta y$$

ਹੁਣ Δy ਲਗਭਗ dy ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}(-2) \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } y = x^{\frac{1}{3}})$$

$$= \frac{1}{3((27)^{\frac{1}{3}})^2}(-2) = \frac{-2}{27} = -0.074$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $(25)^{\frac{1}{3}}$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਹੈ :

$$3 + (ï\ 0.074) = 2.926$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. $f(3.02)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $x = 3$ ਅਤੇ $\Delta x = 0.02$ ਹੈ।

$$f(3.02) = f(x + \Delta x) = 3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) + 3$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ï $f(x)$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$

$$\approx f(x) + f'(x)\ \Delta x \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } dx = \Delta x)$$

$$\approx (3x^2 + 5x + 3) + (6x + 5)\ \Delta x$$

$$f(3.02) = (3(3)^2 + 5(3) + 3) + (6(3) + 5)\ (0.02) \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } x = 3, \Delta x = 0.02)$$

$$= (27 + 15 + 3) + (18 + 5)\ (0.02)$$

$$= 45 + 0.46 = 45.46$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f(3.02)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ 45-46 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. x ਮੀਟਰ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 2% ਦੇ ਵਾਧੇ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਘਣ ਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ

$$V = x^3$$

ਜਾਂ

$$dV = \left(\frac{dV}{dx}\right)\Delta x = (3x^2)\ \Delta x$$

$$= (3x^2)\ (0.02x) \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } x \text{ ਦਾ } 2\% = .02x)$$

$$= 0.06x^3\ \text{m}^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ $0.06\,x^3\,\text{m}^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 9 cm ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0-03 cm ਦੀ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ r ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਮਾਪਣ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ Δr ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $r = 9$ cm ਅਤੇ $\Delta r = 0.03$ cm ਹੈ। ਹੁਣ ਗੋਲੇ ਦਾ ਆਇਤਨ V

$$\text{V} = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$

ਜਾਂ
$$\frac{d\text{V}}{dr} = 4\pi r^2$$

ਇਸ ਲਈ
$$d\text{V} = \left(\frac{d\text{V}}{dr}\right)\Delta r = (4\pi r^2)\Delta r$$

$$= [4\pi(9)^2]\,(0.03) = 9.72\pi \text{ cm}^3$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ 9.72π cm^3 ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.4

1. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਦਸ਼ਮਲਵ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੱਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $\sqrt{25.3}$ (ii) $\sqrt{49.5}$ (iii) $\sqrt{0.6}$

   (iv) $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ (vi) $(15)^{\frac{1}{4}}$

   (vii) $(26)^{\frac{1}{3}}$ (viii) $(255)^{\frac{1}{4}}$ (ix) $(82)^{\frac{1}{4}}$

   (x) $(401)^{\frac{1}{4}}$ (xi) $(0.0037)^{\frac{1}{2}}$ (xii) $(26.57)^{\frac{1}{3}}$

   (xiii) $(81.5)^{\frac{1}{4}}$ (xiv) $(3.968)^{\frac{3}{2}}$ (xv) $(32.15)^{\frac{1}{5}}$

2. $f(2.01)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $f(x) = 4x^2 + 5x + 2$ ਹੈ।
3. $f(5.001)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $f(x) = x^3$ ï $7x^2 + 15$ ਹੈ।
4. x m ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 1% ਵਾਧੇ ਦੇ ਕਾਰਨ ਘਣ ਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. x m ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਘਣ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 1% ਘਾਟੇ ਦੇ ਕਾਰਨ ਘਣ ਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਵਾਲਾ

ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 7 m ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0.02 m ਦੀ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਇੱਕ ਗੋਲੇ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ 9 m ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 0.03 cm ਦੀ ਗਲਤੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਗਲਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਜਦੋਂ $f(x) = 3x^2 + 15x + 5$ ਹੋ, ਤਾਂ $f(3.02)$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 47.66 (B) 57.66 (C) 67.66 (D) 77.66

9. ਭੁਜਾ ਵਿੱਚ 3% ਵਾਧੇ ਦੇ ਕਾਰਨ ਭੁਜਾ x ਦੇ ਘਣ ਦੇ ਆਇਤਨ ਵਿੱਚ ਲਗਭਗ ਬਦਲਾਵ ਹੈ :

(A) $0.06\, x^3$ m^3 (B) $0.6\, x^3$ m^3 (C) $0.09\, x^3$ m^3 (D) $0.9\, x^3$ m^3

6.6 ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Maximum and Minimum)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੱਖ–ਵੱਖ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂਆਂ (Turning points) ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੇ ਅਲੇਖ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਤੇ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਗਿਆਨ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (Absolute maximum value) ਅਤੇ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Absolute minimum value) ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਈ ਵਿਹਾਰਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਆਉ ਅਸੀਂ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

(i) ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੇ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਬਾਗ ਤੋਂ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਲਾਭ ਫਲਨ $P(x) = ax + bx^2$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ a, b ਅਚਲ ਹੈ ਅਤੇ x ਪ੍ਰਤੀ ਏਕੜ ਵਿੱਚ ਸੰਤਰੇ ਦੇ ਦਰੱਖਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਤੀ ਏਕੜ ਕਿੰਨੇ ਦਰੱਖਤ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਦੇਣਗੇਂ ?

(ii) ਇੱਕ 60 m ਉੱਚੇ ਭਵਨ ਤੋਂ ਹਵਾ ਵਿੱਚ ਸੁੱਟੀ ਗਈ ਇੱਕ ਗੇਂਦ $h(x) = 60 + x - \dfrac{x^2}{60}$ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਰਸਤੇ ਤੇ ਚਲਦੀ ਹੈ, ਇੱਥੇ x ਭਵਨ ਤੋਂ ਗੇਂਦ ਦੀ ਲੇਟਵੀਂ ਦੂਰੀ ਅਤੇ $h(x)$ ਉਸਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ। ਗੇਂਦ ਕਿੰਨੀ ਅਧਿਕਤਮ ਉਚਾਈ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚੇਗੀ ?

(iii) ਦੁਸ਼ਮਣ ਦਾ ਇੱਕ ਅਪਾਚੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਵਕਰ $f(x) = x^2 + 7$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਰਸਤੇ ਤੇ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਸੈਨਿਕ ਉਸ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਨੂੰ ਗੋਲੀ ਮਾਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਉਸ ਦੇ ਨੇੜੇ ਤੋਂ ਨੇੜੇ ਹੈ। ਇਹ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਝ ਸਾਂਝਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੁਲਝਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਪਰੀਖਿਅਣ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਤਦ

(a) f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ I ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c) \geq f(x)$, ਸਾਰੇ $\forall\ x \in$ I ਲਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $f(c)$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ c ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(b) f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ I ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c) \leq f(x)$, ਸਾਰੇ $\forall\ x \in$ I ਲਈ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $f(c)$ ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ c ਨੂੰ I ਵਿੱਚ f ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

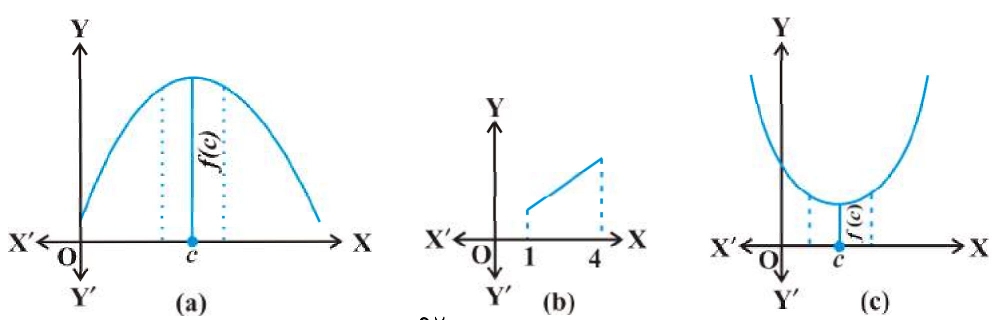
(c) I ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਚਰਮ ਮੁੱਲ (extreme value) ਰੱਖਣ ਵਾਲਾ ਫਲਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਜਦੋਂ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਬਿੰਦੂ c ਦੀ ਹੋਂਦ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $f(c)$, f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $f(c)$, I ਨੂੰ f ਦਾ ਚਰਮ ਮੁੱਲ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ c ਇੱਕ ਚਰਮ ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਚਿੱਤਰ 6.9 (a), (b) ਅਤੇ (c) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਲੇਖ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਲੇਖ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵੀ ਜੋ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ /ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। (ਉਦਾਹਰਨ 27)A

ਉਦਾਹਰਣ 26. $f(x) = x^2, x \in \mathbf{R}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ, ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.10) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = 0$ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੈ ਅਤੇ

$$f(x) \geq 0, \text{ ਸਾਰੇ } x \in \mathbf{R} \text{ ਦੇ ਲਈ}$$



ਚਿੱਤਰ 6.9

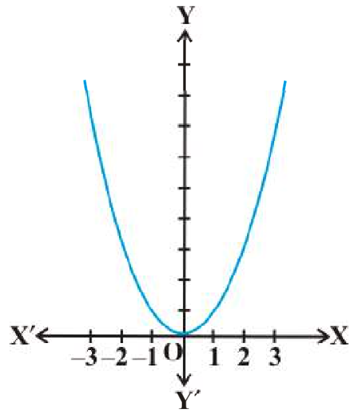
ਇਸ ਲਈ, f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਹੀ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ f ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਕੇਵਲ [ï 2, 1] ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰੀਏ ਤਦ x = ï 2 ਤੇ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (ï 2)^2 = 4 ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. $f(x) = |x|, x \in \mathbf{R}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.11) ਤੋਂ $f(x) \geq 0$, ਸਾਰੇ $x \in \mathbf{R}$ ਲਈ ਅਤੇ $f(x) = 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $x = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਹੈ ਅਤੇ f ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਹੈ। ਅਤੇ ਅਲੇਖ ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ **R** ਵਿੱਚ f ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ **R** ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.10

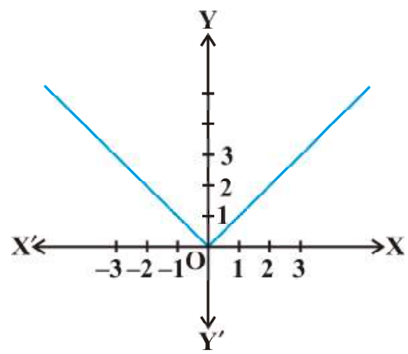
ਟਿੱਪਣੀ

(i) ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਕੇਵਲ [ï 2, 1] ਤੱਕ ਸੀਮਤ ਕਰੀਏ, ਤਾਂ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ |ï 2| = 2 ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਉਦਾਹਰਨ 27 ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਫਲਨ f, $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫਰੇਂਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

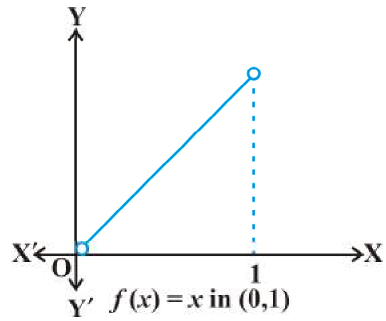
ਉਦਾਹਰਣ 28. $f(x) = x, x \in (0, 1)$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ, ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ (0, 1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਫਲਨ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ। ਫਲਨ f ਦੇ ਅਲੇਖ (ਚਿੱਤਰ 6.12) ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਤੀਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਨੇੜਲੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ 0 ਦਾ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ x_0 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $\frac{x_0}{2} < x_0$ ਸਾਰੇ $x_0 \in (0,1)$ ਦੇ ਲਈ, ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇ 1 ਦਾ ਨੇੜਲਾ ਬਿੰਦੂ x_1 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਰੇ $x_1 \in (0,1)$ ਦੇ ਲਈ $\frac{x_1 + 1}{2} > x_1$ ਮਿਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.11

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ (0] 1) ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6. 12

ਟਿੱਪਣੀ : ਪਾਠਕ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 28 ਵਿੱਚ ਜਦੋਂਕਿ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ 0 ਅਤੇ 1 ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਲ ਕਰ ਲਿਆ ਗਿਆ ਅਰਥਾਤ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਵਧਾ ਕੇ [0, 1] ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਜਾਏ ਤਾਂ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $x = 0$ ਤੇ 0 ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $x = 1$ ਤੇ 1 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਤੀਜੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ (ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ)। ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾਵੀ (monotonic) ਫਲਨ ਆਪਣੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ/ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦਾ ਹੋਰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾਵੀ (monotonic) ਫਲਨ f ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ I ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਜਾਂ ਤਾਂ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਘਟਦਾ ਹੈ।

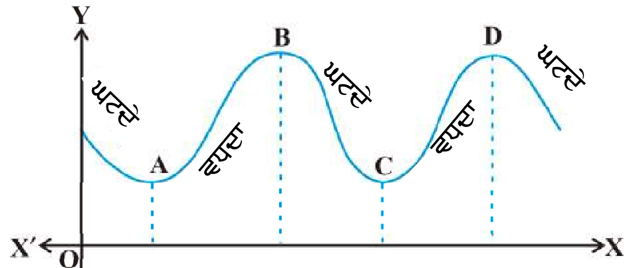
ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ 6.13 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਅਲੇਖ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ। ਦੇਖੋ ਕਿ ਫਲਨ ਦਾ ਅਲੇਖ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D ਤੇ ਘਟਦੇ ਤੋਂ ਵਧਦਾ ਜਾਂ ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਵਧਦੇ ਤੋਂ ਘਟਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਆਪਣਾ ਸੁਭਾਵ ਬਦਲਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਛੋਟੀ ਪਹਾੜੀ ਜਾਂ ਛੋਟੀ ਘਾਟੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਮੋਟੇ ਤੌਰ ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀ ਆਪਣੀ ਘਾਟੀਆਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ D ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਆਪਣੀ ਆਪਣੀ ਪਹਾੜੀਆਂ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਨ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (ਜਾਂ ਮੁਕਾਬਲਤਨ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ) ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ B ਅਤੇ D ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (ਜਾਂ ਮੁਕਾਬਲਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ) ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮਝਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਰਸਮੀ ਤੌਰ ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ c ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅੰਦਰਲਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤਦ

(a) c ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ $h > 0$ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ



ਚਿੱਤਰ 6. 13

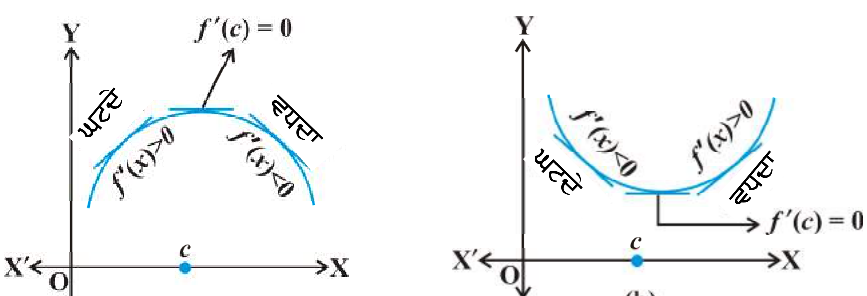
$(c - h, c + h)$ ਤੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(c) > f(x)$ ਹੋਵੇ। ਤਦ $f(c)$, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(b) c ਨੂੰ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ $h > 0$ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c + h)$ ਤੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ $f(c) < f(x)$ ਹੋਵੇ। ਤਦ $f(c)$, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਨਾਲ, ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਜੇ $x = c$, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਾਂ c ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6-14(a) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਵਧਦਾ ਹੈ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) > 0$) ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c, c + h)$ ਵਿੱਚ ਫਲਨ ਘਟਦਾ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) < 0$) ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਇਹ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $f'(c)$ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜਦੋਂ ਕਿ c, ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ c ਦੇ ਗੁਆਂਢ ਦਾ ਅਲੇਖ ਚਿੱਤਰ 6-14(b) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c - h, c)$ ਵਿੱਚ f ਘਟਦਾ (ਅਰਥਾਤ $f'(x) < 0$) ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $(c, c + h)$ ਵਿੱਚ f ਵਧਦਾ (ਅਰਥਾਤ, $f'(x) > 0$) ਹੈ। ਇਹ ਫਿਰ ਸਾਨੂੰ ਸੁਝਾਅ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $f'(c)$ ਜ਼ਰੂਰ ਹੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6. 14

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ)A

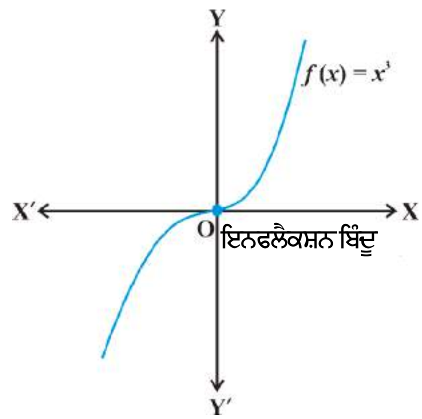
ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $c \in$ I ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਜੇ f ਦਾ $x = c$ ਤੇ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ f ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਸੱਚ ਹੋਵੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਤੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਜਦੋਂ ਕਿ $f(x) = x^3$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $f'(x) = 3x^2$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(0) = 0$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ 0 ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 6.15) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c, ਜਿਸ ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, f ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ (Critical Point) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇ f ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ $f'(c) = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $h > 0$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ (c ï h, $c + h$) ਵਿੱਚ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ਼ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 3. (ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਕਿਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। ਤਦ



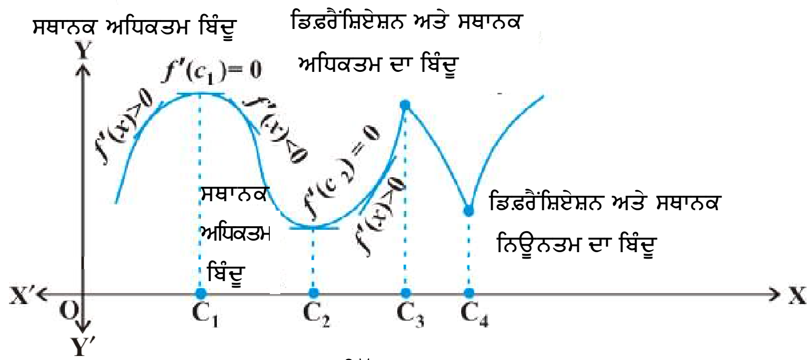
ਚਿੱਤਰ 6.15

(i) x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ&ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(ii) x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ&ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਜਾਂ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

(iii) x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਤਾਂ c ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Point of Inflection) (ਚਿੱਤਰ 6. 15) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ. ਜਦੋਂ c ਫਲਨ f ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f(c)$ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ c ਫਲਨ f ਦਾ ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $f(c)$ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 6.15 ਅਤੇ 6.16 ਪ੍ਰਮੇਯ 3 ਦੀ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6 . 16

ਉਦਾਹਰਣ 29. $f(x) = x^3$ ï $3x + 3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\qquad f(x) = x^3$ ï $3x + 3$

ਜਾਂ $\qquad f'(x) = 3x^2$ ï $3 = 3(x$ ï $1)(x + 1)$

ਜਾਂ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ਅਤੇ $x =$ ï 1

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕੇਵਲ $x = \pm 1$ ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜੋ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ/ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲੇ ਅਸੀਂ $x = 1$ ਤੇ ਪਰੀਖਿਅਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 1ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $f'(x) > 0$ ਹੈ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $f'(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 1$] ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(1) = 1$ ਹੈ।

$x =$ ï 1 ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ï 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ ï 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ &1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ &1 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ $f'(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x =$ ï 1 ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f($ï $1) = 5$ ਹੈ।

x ਦੇ ਮੁੱਲ		$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ
ਦੇ ਨੇੜੇ	ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ 1.1)	>0
	ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ 0.9)	<0
ਦੇ ਨੇੜੇ	ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ– 0.9)	<0
	ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (ਮੰਨਿਆ–1.1)	>0

ਉਦਾਹਰਣ 30. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x - 1)^2$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੇਵਲ $x = 1$ ਹੀ f ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਾਂਗੇ। ਧਿਆਨ ਨਾਲ ਦੇਖੋ ਕਿ ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \geq 0$ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ 1 ਦੇ ਨੇੜੇ ਅਤੇ 1 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਬਿੰਦੂ $x = 1$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 1$ ਇੱਕ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ (inflection) ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 30 ਵਿੱਚ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਅੰਤਰਾਲ $\mathbf{R}$ ਵਿੱਚ ਕਦੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ f ਦੇ ਅਲੇਖ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਨਿਰਣਾਇਕ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਪੇਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹ ਪ੍ਰੇਖਣ, ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਵਿੱਚ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਸੌਖਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 4. (ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ $c \in$ I ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, c ਤੇ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

(i) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) < 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।
ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

(ii) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) > 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।
ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

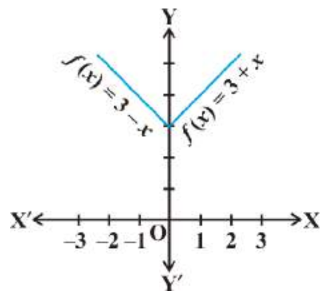
(iii) ਜਦੋਂ ਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) = 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰੀਖਿਅਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਅਧਿਕਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਜਾਂ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ f ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ c ਤੇ f ਦੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 31. $f(x) = 3 + |x|, x \in \mathbf{R}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ 0 ਫਲਨ f ਦਾ ਇੱਕ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਹੁਣ 0 ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ, $f(x) = 3 - x$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(x) = -1 < 0$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 0 ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ, $f(x) = 3 + x$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 1 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 0$, f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਾਂ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(0) = 3$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.17

ਉਦਾਹਰਣ 32. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 12$$

ਜਾਂ $$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x - 1)(x + 2)$$

ਜਾਂ $x = 0, x = 1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਤੇ $f'(x) = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$f''(x) = 36x^2 + 24x - 24 = 12(3x^2 + 2x - 1)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\begin{cases} f''(0) = -12 < 0 \\ f''(1) = 48 > 0 \\ f''(-2) = 84 > 0 \end{cases}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 0$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(0) = 12$ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ $x = 1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $f(1) = 7$ ਅਤੇ $f(-2) = -20$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 33. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$$

ਜਾਂ
$$\begin{cases} f'(x) = 6x^2 - 12x + 6 = 6(x-1)^2 \\ f''(x) = 12(x-1) \end{cases}$$

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਤੋਂ x = ï 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜਾਂ $f''(1) = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਥੇ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਅਸਫਲ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵੱਲ ਵਾਪਸ ਜਾਵਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ (ਉਦਾਹਰਨ 30) ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰੇਖਣ ਨਾਲ $x = 1$ ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 15 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਤਦ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ 15 ï x ਹੋਵੇਗੀ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤਦ

S(x) = x^2 + (15 ï x)^2 = 2x^2 ï 30x + 225

ਜਾਂ
$$\begin{cases} S'(x) = 4x - 30 \\ S''(x) = 4 \end{cases}$$

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{15}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ $S''\left(\frac{15}{2}\right) = 4 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ S ਦੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $x = \frac{15}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{15}{2}$ ਅਤੇ $15 - \frac{15}{2} = \frac{15}{2}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਣ 34 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ k ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\frac{k}{2}, \frac{k}{2}$ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ $0 \le c \le 5$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਤੇ (h, k) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ (h, k) ਅਤੇ $(0, c)$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ D ਹੈ। ਤਦ

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \quad \ldots (1)$$

ਕਿਉਂਕਿ (h, k) ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $k = h^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ

$$D \equiv D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

ਜਾਂ
$$D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

ਹੁਣ $D'(k) = 0$ ਤੋਂ $k = \dfrac{2c-1}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ $k < \dfrac{2c-1}{2}$, ਤਦ $2(k-c)+1<0$, ਅਰਥਾਤ $D'(k)<0$ ਹੈ ਜਾਂ ਜਦੋਂ $k > \dfrac{2c-1}{2}$

ਤਦ $2(k-c)+1>0$ ਹੈ।ਅਰਥਾਤ $D'(k)>0$ (ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $k = \dfrac{2c-1}{2}$

ਤੇ k ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2} \text{ ਹੈ।}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਪਾਠਕ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਕਿ ਉਦਾਹਰਨ 35 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸੰਖੇਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੌਖਾ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 36. ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ AP ਅਤੇ BQ ਦੋ ਲੰਬਕਾਰੀ ਖੰਭੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ AP = 16 m, BQ = 22 m ਅਤੇ AB = 20 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ AB ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਤੋਂ A ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $RP^2 + RQ^2$ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ AB ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ R ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ AR = x m ਹੈ। ਤਦ RB = $(20 - x)$ m (ਕਿਉਂਕਿ AB = 20 m) ਚਿੱਤਰ 6.18 ਤੋਂ

$$RP^2 = AR^2 + AP^2$$

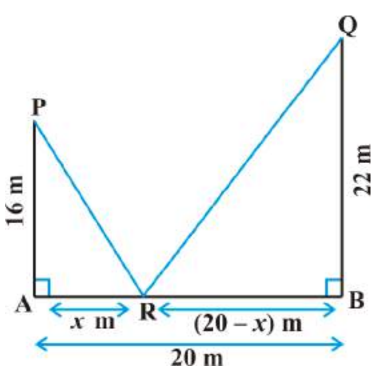
ਅਤੇ $$RQ^2 = RB^2 + BQ^2$$

ਇਸ ਲਈ $$RP^2 + RQ^2 = AR^2 + AP^2 + RB^2 + BQ^2$$
$$= x^2 + (16)^2 + (20 - x)^2 + (22)^2$$
$$= 2x^2 - 40x + 1140$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $S \equiv S(x) = RP^2 + RQ^2 = 2x^2 - 40x + 1140$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $S'(x) = 4x - 40$ ਹੈ।

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ x ਦੇ ਲਈ $S''(x) = 4 > 0$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $S''(10) > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰੇਖਣ $x = 10$, S ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.18

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਤੇ R ਦੀ A ਤੋਂ ਦੂਰੀ AR = x = 10 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 37. ਜਦੋਂਕਿ ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 10 cm ਹੈ ਤਦ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

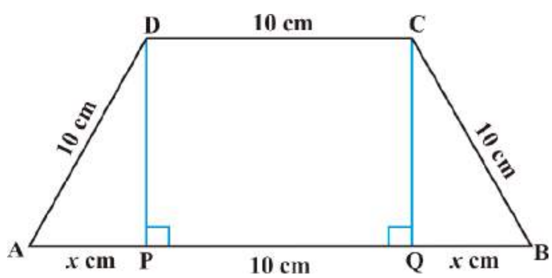
ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 6.19 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। AB ਤੇ DP ਅਤੇ CQ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $AP = x$ cm ਹੈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\Delta APD \cong \Delta BQC$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $QB = x$ cm ਹੈ ਅਤੇ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ $DP = QC = \sqrt{100 - x^2}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A \equiv A(x)$

$= \frac{1}{2}$ (ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ) (ਉਚਾਈ)

$= \frac{1}{2}(2x + 10 + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$

$= (x + 10)\left(\sqrt{100 - x^2}\right)$



ਚਿੱਤਰ 6.19

ਜਾਂ $$A'(x) = (x + 10)\frac{(-2x)}{\sqrt{100 - x^2}} + \left(\sqrt{100 - x^2}\right)$$

$$= \frac{-2x^2 - 10x + 100}{\sqrt{100 - x^2}}$$

ਹੁਣ $A'(x) = 0$ ਨਾਲ $2x^2 + 10x$ ï $100 = 0$, ਜਿਸ ਨਾਲ $x = 5$ ਅਤੇ $x =$ ï 10 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ x ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 5$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$A''(x) = \frac{\sqrt{100 - x^2}(-4x - 10) - (-2x^2 - 10x + 100)\frac{(-2x)}{\sqrt[2]{100 - x^2}}}{100 - x^2}$$

$$= \frac{2x^3 - 300x - 1000}{(100 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$ (ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)

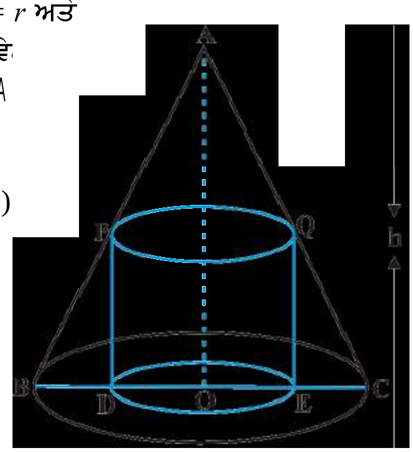
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$A''(5) = \frac{2(5)^3 - 300(5) - 1000}{(100 - (5)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-2250}{75\sqrt{75}} = \frac{-30}{\sqrt{75}} < 0$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 5$ ਤੇ ਸਮਲੰਬ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ

$$A(5) = (5+10)\sqrt{100-(5)^2} = 15\sqrt{75} = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2 \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 38. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਅਧਿਕਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ, ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ ਉਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $OC = r$ ਅਤੇ ਉਚਾਈ $OA = h$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਚੱਕਰ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ $OE = x$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 6.20)A ਦੀ ਉਚਚਾਈ QE ਦੇ ਲਈ



$$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

ਜਾਂ
$$\frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

ਜਾਂ
$$QE = \frac{h(r-x)}{r}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਵੇਲਣ ਦੀ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ S ਹੈ। ਤਦ

$$S \equiv S(x) = \frac{2\pi x h(r-x)}{r} = \frac{2\pi h}{r}(rx - x^2)$$

ਚਿੱਤਰ 6.20

ਜਾਂ
$$\begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$

ਹੁਣ $S'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{r}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਹਰੇਕ x ਦੇ ਲਈ $S''(x) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $S''\left(\frac{r}{2}\right) < 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = \frac{r}{2}$, S ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਦਰ, ਅਧਿਕਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦਾ ਅਰਧਵਿਆਸ, ਉਸ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

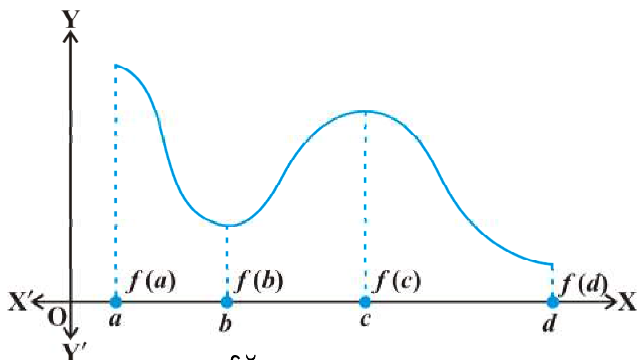
6.6.1 *ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ (Maximum and Minimum Values of a Function in a Closed Interval)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = x + 2, x \in (0, 1)$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ (0] 1) ਤੇ ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸ ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਪਰ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਨੂੰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ [0, 1] ਤੱਕ ਵਧਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਦ ਵੀ f ਦਾ ਸ਼ਾਇਦ ਕੋਈ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $3 = f(1)$ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $2 = f(0)$ ਹੈ। $x = 1$ ਤੇ f ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 3] [0, 1] ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ (global maximum or greatest value) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $x = 0$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 2] [0, 1] ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ(global minimum or least value) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਿਸੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ f ਦੇ ਚਿੱਤਰ 6 . 21ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਅਲੇਖ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਕਿ $x = b$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(b)$ ਹੈ। ਫਲਨ f ਦਾ $x = c$ ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6. 21

ਨਾਲ ਹੀ ਅਲੇਖ ਤੋਂ ਇਹ ਵੀ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(a)$ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $f(d)$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਨਾਲੋਂ ਵੱਖਰਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਨਤੀਜਿਆਂ (ਬਿਨਾਂ ਸਬੂਤ) ਦੇ ਕਥਨ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 5. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $I = [a, b]$ ਤੇ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ। ਤਦ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ I ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ f ਇਹ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ I ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰ f ਇਹ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ f ਇੱਕ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ I ਦੇ ਅੰਦਰ ਕੋਈ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਹੈ। ਤਦ

(i) ਜਦੋਂ c ਤੇ f ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਦ $f'(c) = 0$

(ii) ਜਦੋਂ c ਤੇ f ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਦ $f'(c) = 0$

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਰੌਸ਼ਨੀ ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ।

ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ

ਕਦਮ 1: ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ x ਦੇ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(x) = 0$ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕਦਮ 2: ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਲਉ।

ਕਦਮ 3: ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ (ਕਦਮ 1 ਅਤੇ ਕਦਮ 2 ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ) f ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਕਦਮ 4: ਕਦਮ 3 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਣਨਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ f ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੀ, f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, f ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 39. ਅੰਤਰਾਲ $[1, 5]$ ਵਿੱਚ $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x - 3)(x - 2)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 2$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 5]$ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਅਰਥਾਤ $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ ਅਤੇ $x = 5$ ਤੇ f ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ :

$$f(1) = 2(1^3) - 15(1^2) + 36(1) + 1 = 24$$
$$f(2) = 2(2^3) - 15(2^2) + 36(2) + 1 = 29$$
$$f(3) = 2(3^3) - 15(3^2) + 36(3) + 1 = 28$$
$$f(5) = 2(5^3) - 15(5^2) + 36(5) + 1 = 56$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $[1, 5]$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਲਈ $x = 5$ ਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 56 ਅਤੇ $x = 1$ ਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 24 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 40. $f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$, $x \in [-1, 1]$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$f(x) = 12x^{\frac{4}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}}$$

ਜਾਂ
$$f'(x) = 16x^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{2(8x-1)}{x^{\frac{2}{3}}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = \frac{1}{8}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $x = 0$ ਤੇ $f'(x)$

ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = \frac{1}{8}$ ਹੈ। ਹੁਣ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂਆਂ $x = 0, \frac{1}{8}$ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ $x =$ ï 1 ਅਤੇ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਨਾਲ

$$f(\text{ï}\,1) = 12(-1^{\frac{4}{3}}) - 6(-1^{\frac{1}{3}}) = 18$$

$$f(0) = 12\,(0)\ \text{ï}\ 6(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 12\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{4}{3}} - 6\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{-9}{4}$$

$$f(1) = 12(1^{\frac{4}{3}}) - 6(1^{\frac{1}{3}}) = 6$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x =$ ï 1 ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 18 ਹੈ ਅਤੇ $x = \frac{1}{8}$ ਤੇ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $\frac{-9}{4}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 41. ਦੁਸ਼ਮਣ ਦਾ ਇੱਕ ਅਪਾਚੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਵਕਰ $y = x^2 + 7$ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਡ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਬਿੰਦੂ (3] 7) ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਸੈਨਿਕ ਆਪਣੀ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੇ ਉਸ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਬਿੰਦੂ $(x, x^2 + 7)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $(3, 7)$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+7-7)^2}$, ਅਰਥਾਤ $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = (x$ ï $3)^2 + x^4$

ਜਾਂ $f'(x) = 2(x$ ï $3) + 4x^3 = 2\,(x$ ï $1)\,(2x^2 + 2x + 3)$

ਇਸ ਲਈ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤੇ $2x^2 + 2x + 3 = 0$ ਨਾਲ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ f' ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ, ਅਰਥਾਤ $x = 1$ ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ f ਦਾ ਮੁੱਲ $f(1) = (1$ ï $3)^2 + (1)^4 = 5$ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ $\sqrt{f(1)} = \sqrt{5}$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਜਾਂ ਤਾਂ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{f(x)}$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $\sqrt{5}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੈਨਿਕ ਅਤੇ ਹੈਲੀਕਾਪਟਰ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ $\sqrt{5}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 6.5

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $f(x) = (2x$ ï $1)^2 + 3$ (ii) $f(x) = 9x^2 + 12x + 2$

(iii) $f(x) =$ ï $(x$ ï $1)^2 + 10$ (iv) $g(x) = x^3 + 1$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $f(x) = |x + 2|$ ï 1 (ii) $g(x) =$ ï $|x + 1| + 3$

(iii) $h(x) = \sin(2x) + 5$ (iv) $f(x) = |\sin 4x + 3|$

(v) $h(x) = x + 1, x \in ($ï $1, 1)$

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜੇ ਕੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਹੋਵੇ, ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $g(x) = x^3$ ï $3x$

(iii) $h(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

(iv) $f(x) = \sin x$ ï $\cos x, \; 0 < x < 2\pi$

(v) $f(x) = x^3$ ï $6x^2 + 9x + 15$ (vi) $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}, \quad x > 0$

(vii) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2}$ (viii) $f(x) = x\sqrt{1-x}, \quad 0 < x < 1$

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(i) $f(x) = e^x$ (ii) $g(x) = \log x$

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

5. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $f(x) = x^3, x \in [$ï $2, 2]$ (ii) $f(x) = \sin x + \cos x, \; x \in [0, \pi]$

(iii) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{2}x^2, \; x \in \left[-2, \dfrac{9}{2}\right]$ (iv) $f(x) = (x-1)^2 + 3, \; x \in [-3, 1]$

6. ਜਦੋਂਕਿ ਲਾਭ ਫਲਨ $p(x) = 41$ ï $72x$ ï $18x^2$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਕੰਪਨੀ ਵੱਲੋਂ ਕਮਾਇਆ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਅੰਤਰਾਲ $[0, 3]$ ਤੇ $3x^4$ ï $8x^3 + 12x^2$ ï $48x + 25$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

8. ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2\pi]$ ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਫਲਨ $\sin 2x$ ਆਪਣਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ?

9. ਫਲਨ $\sin x + \cos x$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ?

10. ਅੰਤਰਾਲ $[1, 3]$ ਵਿੱਚ $2x^3$ ï $24x + 107$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਤਰਾਲ [ï 3, ï 1] ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਜਦੋਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਤਰਾਲ $[0, 2]$ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਤੇ ਫਲਨ x^4 ï $62x^2 + ax + 9$ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ a ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. $[0, 2\pi]$ ਤੇ $x + \sin 2x$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

14. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $x + y = 60$ ਅਤੇ xy^3 ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

15. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ x ਅਤੇ y ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 35 ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ $x^2 y^5$ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

16. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਧਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 16 ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

17. 18 cm ਭੁਜਾ ਦੇ ਟੀਨ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵਰਗਕਾਰ ਟੁਕੜੇ ਨਾਲ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਟੀਨ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਢੱਕਣ ਰਹਿਤ ਬਕਸਾ ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

18. 45 cm × 24 cm ਦੀ ਟੀਨ ਦੀ ਆਇਤਾਕਾਰ ਚਾਦਰ ਦੇ ਕੋਨੇ ਤੇ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣੇ ਟੀਨ ਦੇ ਫਲਕਾਂ ਨੂੰ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਢੱਕਣ ਰਹਿਤ ਬਕਸਾ ਬਣਾਇਆ ਹੈ। ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

19. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸਾਰੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਿਕਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

20. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਵੇਲਣ ਦਾ ਆਇਤਨ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਉਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਉਸ ਦੇ ਅਧਾਰ ਦੇ ਵਿਆਸ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

21. 100 cm^3 ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬੰਦ ਵੇਲਣਾਕਾਰ (ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ) ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਡੱਬੇ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

22. ਇੱਕ 28 cm ਲੰਬੇ ਤਾਰ ਨੂੰ ਦੋ ਟੁਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਕ ਟੁਕੜੇ ਨਾਲ ਵਰਗ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਦਾ ਚੱਕਰ ਬਣਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਨਾਂ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿੰਨੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਵਰਗ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

23. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ R ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਗੋਲੇ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦਾ $\frac{8}{27}$ ਵਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

24. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਵਕਰ ਸਤ੍ਹਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਅਧਾਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ $\sqrt{2}$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

25. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਤਿਰਛੀ ਉਚਾਈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

26. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਤ੍ਹਾ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਅਰਧ

ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸੰਖਿਆ 27 ਤੋਂ 29 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

27. ਵਕਰ $x^2 = 2y$ ਤੇ $(0, 5)$ ਤੋਂ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ :

(A) $(2\sqrt{2}, 4)$ (B) $(2\sqrt{2}, 0)$ (C) $(0, 0)$ (D) $(2, 2)$

28. x, ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $\frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$

29. $[x(x-1)+1]^{\frac{1}{3}}$, $0 \le x \le 1$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 0

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 42. ਇੱਕ ਕਾਰ ਸਮੇਂ $t = 0$ ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਚੱਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਬਿੰਦੂ Q ਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕਾਰ ਵੱਲੋਂ t ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ, x ਮੀਟਰ ਵਿੱਚ

$$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ

ਕਾਰ ਨੂੰ Q ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਣ ਵਿੱਚ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ t ਸੈਕਿੰਡ ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਦਾ ਵੇਗ v ਹੈ।

ਹੁਣ $$x = t^2\left(2-\frac{t}{3}\right)$$

ਜਾਂ $$v = \frac{dx}{dt} = 4t \text{ ï } t^2 = t(4 \text{ ï } t)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $v = 0$ ਤੋਂ $t = 0$ ਅਤੇ $t = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

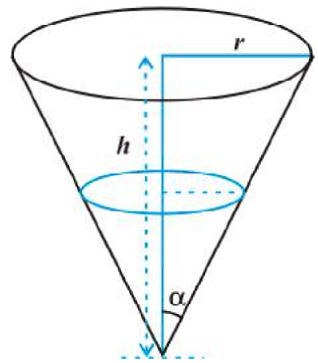
ਹੁਣ P ਅਤੇ Q ਤੇ ਕਾਰ ਦਾ ਵੇਗ $v = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ Q ਤੇ ਕਾਰ 4 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚੇਗੀ। ਹੁਣ 4 ਸੈਕਿੰਡਾਂ

ਵਿੱਚ ਕਾਰ ਵੱਲੋਂ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ :

$$x]_{t=4} = 4^2\left(2-\frac{4}{3}\right) = 16\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}\text{ m}$$

ਉਦਾਹਰਣ 43. ਪਾਣੀ ਦੀ ਇੱਕ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਆਕਾਰ, ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਉਲਟੇ ਲੰਬਕਾਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਵਰਗਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ $\tan^{-1}(0.5)$ ਹੈ। ਇਸ ਵਿੱਚ 5 m^3/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਪਾਣੀ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਪਾਣੀ ਦੇ ਪੱਧਰ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਉਸ ਪਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ ਪਾਣੀ ਦੀ ਉਚਾਈ 10 m ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ r, h ਅਤੇ α ਚਿੱਤਰ 6.22 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ। ਤਦ $\tan\alpha = \frac{r}{h}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.22

ਇਸ ਲਈ $\qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right) = \tan^{-1}(0.5) \qquad$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\qquad \frac{r}{h} = 0.5$ ਜਾਂ $r = \frac{h}{2}$

ਮੰਨ ਲਉ ਸ਼ੰਕੂ ਦਾ ਆਇਤਨ V ਹੈ ਤਦ

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dh}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)\cdot\frac{dh}{dt}$$

(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)

$$= \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

ਹੁਣ ਆਇਤਨ ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਅਰਥਾਤ $\frac{dV}{dt} = 5\,m^3/h$ ਅਤੇ $h = 4$ m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$5 = \frac{\pi}{4}(4)^2\cdot\frac{dh}{dt}$$

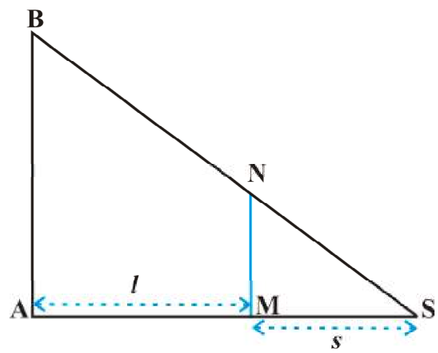
ਜਾਂ
$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} = \frac{35}{88}\text{ m/}h \qquad \left(\pi = \frac{22}{7}\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਾਣੀ ਦੇ ਪੱਧਰ ਦੇ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ $\frac{35}{88}$ m/min ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 44. 2 m ਉਚਾਈ ਦਾ ਆਦਮੀ 6 m ਉੱਚੇ ਬਿਜਲੀ ਦੇ ਖੰਭੇ ਤੋਂ ਦੂਰ 5 km/h ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਚਲਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਵਧਣ ਦੀ ਦਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 6.23 ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ, AB ਇੱਕ ਬਿਜਲੀ ਦਾ ਖੰਭਾ ਹੈ। B ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਬਲਬ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਆਦਮੀ MN ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ AM = l m ਅਤੇ ਆਦਮੀ ਦਾ ਪਰਛਾਵਾਂ MS ਹੈ ਅਤੇ ਮੁੱਲ MS = s m ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\Delta ASB \sim \Delta MSN$



ਚਿੱਤਰ 6.23

ਜਾਂ $\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB}$

ਜਾਂ $AS = 3s$

[(ਕਿਉਂਕਿ MN = 2 m ਅਤੇ AB = 6 m (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)]

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AM = $3s$ ï $s = 2s$ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ AM = l ਮੀਟਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $l = 2s$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{dl}{dt} = 2\frac{ds}{dt}$

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{dl}{dt} = 5$ km/h ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $\frac{5}{2}$ km/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 45. ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1] 2) ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : $x^2 = 4y$ ਦਾ] x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (h, k) ਹਨ (h, k) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(h,\,k)} = \frac{h}{2}$$

$\Rightarrow$ (h, k) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \frac{-2}{h}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ (h, k) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$$y \text{ ï } k = \frac{-2}{h}(x-h) \qquad \dots (1)$$

ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਬਿੰਦੂ $(1, 2)$ ਤੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2-k = \frac{-2}{h}(1-h) \text{ ਜਾਂ } k = 2+\frac{2}{h}(1-h) \qquad \dots (2)$$

ਕਿਉਂਕਿ (h, k) ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$h^2 = 4k \qquad \dots (3)$$

ਹੁਣ (2) ਅਤੇ (3), ਤੋਂ $h = 2$ ਅਤੇ $k = 1$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। h ਅਤੇ k ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਲੰਬਰੂਪ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y-1 = \frac{-2}{2}(x-2) \text{ ਜਾਂ } x + y = 3$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 46. ਵਕਰ $y = \cos(x + y)$, ï $2\pi \le x \le 2\pi$ ਦੀਆਂ ਉਹ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x + 2y = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : $y = \cos(x + y)$ ਦਾ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$$

ਜਾਂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਨ $= \dfrac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x + 2y = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਢਲਾਣ $\dfrac{-1}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{-\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)} = \frac{-1}{2}$$

ਜਾਂ $\sin(x + y) = 1$

ਜਾਂ $x + y = n\pi + (ï\ 1)^n \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{Z},$

ਤਦ $y = \cos(x + y) = \cos\left(n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}\right),\quad n \in \mathbf{Z},$

$= 0$ ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਲਈ

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $-2\pi \le x \le 2\pi$, ਇਸ ਲਈ $x = -\dfrac{3\pi}{2}$ ਅਤੇ $x = \dfrac{\pi}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਕਰ ਦੇ ਕੇਵਲ ਬਿੰਦੂਆਂ $\left(-\dfrac{3\pi}{2}, 0\right)$ ਅਤੇ $\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਰੇਖਾ $x + 2y = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ

$$y\ ï\ 0 = \frac{-1}{2}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2x + 4y + 3\pi = 0$$

ਜਾਂ $y\ ï\ 0 = \dfrac{-1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ ਜਾਂ $2x + 4y - \pi = 0$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 47. ਉਹਨਾਂ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਫਲਨ

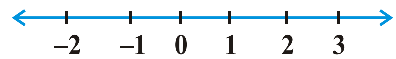
$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

(a) ਸਖਤੀ ਨਾਲ਼ ਵਧਦਾ (b) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$f(x) = \frac{3}{10}x^4 - \frac{4}{5}x^3 - 3x^2 + \frac{36}{5}x + 11$$

ਜਾਂ $f'(x) =$



ਚਿੱਤਰ 6.24

$$\frac{3}{10}(4x^3) - \frac{4}{5}(3x^2) - 3(2x) + \frac{36}{5}$$

$=$

$\frac{6}{5}(x-1)(x+2)(x-3)$ (ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)

ਹੁਣ $f'(x) = 0$ ਨਾਲ $x = 1, x =$ ï 2, ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। $x = 1,$ ï 2, ਅਤੇ 3 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਚਾਰ ਨਾ–ਜੁੜੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ (ï ∞, ï 2), (ï 2, 1), (1, 3) ਅਤੇ (3, ∞) ਵਿੱਚ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 6.24)

ਅੰਤਰਾਲ (ï ∞, ï 2) ਨੂੰ ਲਉ, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ï $\infty < x <$ ï 2 ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ x ï $1 < 0, x + 2 < 0$ ਅਤੇ x ï $3 < 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x =$ ï 3 ਦੇ ਲਈ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $f'(x) = (x$ ï $1)$ $(x + 2)$ $(x$ ï $3)$

= (ï 4) (ï 1) (ï 6) < 0) ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ï $\infty < x <$ ï 2 ਹੈ, ਤਦ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (ï ∞, ï 2) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

ਅੰਤਰਾਲ (ï 2, 1), ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ï $2 < x < 1$ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

x ï $1 < 0, x + 2 > 0$ ਅਤੇ x ï $3 < 0$ ਹੈ।

(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x = 0$, ਦੇ ਲਈ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $f'(x) = (x$ ï $1)$ $(x + 2)$ $(x$ ï $3)$ = (ï 1) (2) (ï 3) = 6 > 0)

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ ï $2 < x < 1$ ਹੈ, ਤਦ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (&2] 1) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅੰਤਰਾਲ (1,3) ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $1 < x < 3$ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ x ï $1 > 0, x + 2 > 0$ ਅਤੇ x ï $3 < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $1 < x < 3$ ਹੈ ਤਾਂ $f'(x) < 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲ (1, 3) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਾਲ (3, ∞), ਨੂੰ ਲਉ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $3 < x < \infty$ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ x ï $1 > 0, x + 2 > 0$ ਅਤੇ x ï $3 > 0$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ $x > 3$ ਹੈ, ਤਾਂ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਤਰਾਲ (3, ∞) ਵਿੱਚ ਫਲਨ f ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 48. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$, $x > 0$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$$

ਜਾਂ

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sin x+\cos x)^2}(\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \qquad \text{(ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ x ਦੇ ਲਈ $2 + \sin 2x > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\cos x - \sin x > 0$

ਜਾਂ $f'(x) > 0$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\cos x > \sin x$ ਜਾਂ $\cot x > 1$

ਹੁਣ $\cot x > 1$ ਜਦੋਂ ਕਿ $\tan x < 1$, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ $0 < x < \frac{\pi}{4}$

ਇਸ ਲਈ ਅੰਤਰਾਲ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ $f'(x) > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚ f ਇੱਕ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 49. 3 cm ਸਮ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪਲੇਟ ਗਰਮ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਫੈਲਣ ਨਾਲ ਇਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 0.05 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਦਰ ਨਾਲ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3.2 cm ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਲੇਟ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਹੈ ਅਤੇ A ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਤਦ

ਹੁਣ

$$\text{A} = \pi r^2$$

ਜਾਂ

$$\frac{d\text{A}}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{(ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ)}$$

ਹੁਣ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦਰ $= dr = \frac{dr}{dt}\Delta t = 0.05$ cm/s ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਲਗਭਗ ਦਰ

$$d\text{A} = \frac{d\text{A}}{dt}(\Delta t)$$

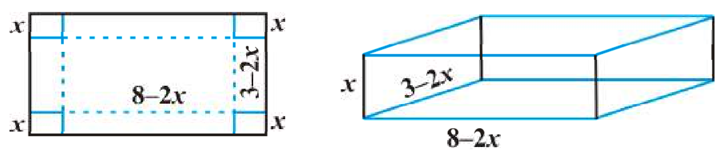
$$= 2\pi r\left(\frac{dr}{dt}\Delta t\right) = 2\pi r\,(dr)$$

$$= 2\pi\,(3.2)\,(0.05) \qquad (r = 3.2 \text{ cm})$$

$$= 0.320\pi\ \text{cm}^2/\text{s}$$

ਉਦਾਹਰਣ 50. ਆਇਤਕਾਰ 3 m × 8 m ਐਲੂਮੀਨੀਅਮ ਦੀ ਚਾਦਰ ਨਾਲ, ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਕਿਨਾਰੇ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਮੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਖੁੱਲਾ ਬਕਸਾ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕੱਟ ਕੇ ਹਟਾਏ ਗਏ ਹਰੇਕ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ x ਮੀ ਹੈ। ਤਦ, ਬਕਸੇ ਦੀ ਉਚਾਈ x ਲੰਬਾਈ 8 ï $2x$ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ 3 ï $2x$ ਹੋਵੇਗੀ। (ਚਿੱਤਰ 6.25) ਜੇ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ V(x) ਹੈ ਤਾਂ



(a) (b)

ਚਿੱਤਰ 6.25

V(x) = x(3 ï $2x$) (8 ï $2x$)

=$4x^3$ ï $22x^2$ + $24x$,

ਇਸ ਲਈ $\begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$

ਹੁਣ $V'(x) = 0$ ਤਾਂ $x = \frac{2}{3}$ ਅਤੇ $x = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ $x \neq 3$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{2}{3}$

ਹੁਣ $V''\left(\frac{2}{3}\right) = 24\left(\frac{2}{3}\right) - 44 = -28 < 0$

ਇਸ ਲਈ, $x = \frac{2}{3}$ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜੇ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਤੋਂ ਭੁਜਾ $\frac{2}{3}$ m ਦਾ ਵਰਗ ਕੱਟ ਕੇ ਹਟਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਚਾਦਰ ਤੋਂ ਬਕਸਾ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਸ ਬਕਸੇ ਦਾ ਆਇਤਨ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27}\text{m}^3$$

ਉਦਾਹਰਨ 51. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ Rs $\left(5-\frac{x}{100}\right)$ ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਵਸਤੂ ਦੇ ਨਾਲ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ। x ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ Rs $\left(\frac{x}{5}+500\right)$ ਰੁਪਏ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਵੇਚਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ S(x) ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ C(x), x ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਖਰੀਦ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਤਦ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ

$$\mathrm{S}(x) = \left(5-\frac{x}{100}\right)x = 5x-\frac{x^2}{100}$$

ਅਤੇ
$$\mathrm{C}(x) = \frac{x}{5}+500$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਲਾਭ ਫਲਨ P (x) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{S}(x)-\mathrm{C}(x) = 5x-\frac{x^2}{100}-\frac{x}{5}-500$$

ਅਰਥਾਤ
$$\mathrm{P}(x) = \frac{24}{5}x-\frac{x^2}{100}-500$$

ਜਾਂ
$$\mathrm{P}'(x) = \frac{24}{5}-\frac{x}{50}$$

ਹੁਣ $\mathrm{P}'(x)=0$ ਨਾਲ $x=240$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\mathrm{P}''(x)=\frac{-1}{50}$. ਇਸ ਲਈ $\mathrm{P}''(240)=\frac{-1}{50}<0$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x=240$ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਮਾਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ240 ਇਕਾਈਆਂ ਵੇਚਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਅਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਰੇਕ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (a) $\left(\frac{17}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ (b) $(33)^{-\frac{1}{5}}$

2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x)=\frac{\log x}{x}$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ $x=e$ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਹੈ।
3. ਕਿਸੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਆਧਾਰ b ਦੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ 3 cm/s ਦੀ ਦਰ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਸ ਸਮੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਭੁਜਾਵਾਂ ਆਧਾਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਉਸ ਸਮੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿੰਨੀ ਤੇਜੀ ਨਾਲ ਘੱਟ ਰਿਹਾ ਹੈ ?

4. ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (1] 2) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta$, $y = a\sin\theta$ ï $a\theta\cos\theta$ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ θ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਚਲ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

6. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਸ ਤੇ

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ f (i) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ (ii) ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਹੈ।

7. ਅੰਤਰਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ

(i) ਵਧਦਾ ਹੈ (ii) ਘਟਦਾ ਹੈ।

8. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਉਸ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ, ਧੁਰੇ ਦੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਹੈ।

9. ਆਇਤਕਾਰ ਅਧਾਰ ਅਤੇ ਆਇਤਕਾਰ ਦੀਵਾਰਾਂ ਦੀ 2 m ਡੂੰਘੀ ਅਤੇ 8 m^3 ਆਇਤਨ ਦੀ ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਢੱਕਣ ਦੀ ਟੈਂਕੀ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਟੈਂਕੀ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਅਧਾਰ ਦੇ ਲਈ Rs 70/m^2 ਅਤੇ ਦੀਵਾਰਾਂ ਤੇ Rs 45/m^2 ਦਰ ਨਾਲ ਖਰਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਖਰਚ ਨਾਲ ਬਣੀ ਟੈਂਕੀ ਦੀ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

10. ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਦਾ ਜੋੜ k ਹੈ, ਇੱਥੇ k ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਨਿਊਨਤਮ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਵਰਗ ਦੀ ਭੁਜਾ, ਚੱਕਰ ਦੇ ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ।

11. ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਉੱਪਰ ਬਣੀ ਅਰਧ-ਚੱਕਰਕਾਰ ਖਿੜਕੀ ਦਾ ਸੰਪੂਰਨ ਪਰਿਮਾਪ 10 m ਹੈ। ਖਿੜਕੀ ਦਾ ਵਿਮਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪੂਰੀ ਖੁੱਲ੍ਹੀ ਖਿੜਕੀ ਵਿੱਚੋਂ ਅਧਿਕਤਮ ਰੋਸ਼ਨੀ ਆਵੇ।

12. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ a ਅਤੇ b ਦੂਰੀ ਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਕਰਣ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਲੰਬਾਈ $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ ਹੈ।

13. ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਤੇ $f(x) = (x$ ï $2)^4 (x + 1)^3$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦਾ]

(i) ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ii) ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ

(iii) ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ

14. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਫਲਨ f ਦਾ ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ r ਅਰਧਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ $\frac{4r}{3}$ ਹੈ।

16. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $[a, b]$ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) > 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ (a, b) ਤੇ f ਵਧਦਾ ਫਲਨ ਹੈ।

17. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ R ਅਰਧਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਗੋਲੇ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵਾਲੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ ਹੈ। ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਅਰਧ ਸਿਖਰ ਕੋਣ α ਅਤੇ ਉਚਾਈ h ਵਾਲੇ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਸ਼ੰਕੂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ ਦੇ ਵੇਲਣ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਸ਼ੰਕੂ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੀ ਇੱਕ ਤਿਹਾਈ ਹੈ ਅਤੇ ਬੇਲਣ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਆਇਤਨ $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ ਹੈ।

19 ਤੋਂ 24 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

19. ਇੱਕ 10 m ਅਰਧਵਿਆਸ ਦੀ ਵੇਲਣਕਾਰ ਟੈਂਕੀ ਵਿੱਚ 314 m^3/h ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕਣਕ ਭਰੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਭਰੀ ਗਈ ਕਣਕ ਦੀ ਡੂੰਘਾਈ ਦੇ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਹੈ :

(A) 1 m/h (B) 0.1 m/h

(C) 1.1 m/h (D) 0.5 m/h

20. ਵਕਰ $x = t^2 + 3t - 8, y = 2t^2 - 2t - 5$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(2, -1)$ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ :

(A) $\frac{22}{7}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{7}{6}$ (D) $\frac{-6}{7}$

21. ਰੇਖਾ $y = mx + 1$, ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) $\frac{1}{2}$

22. ਵਕਰ $2y + x^2 = 3$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ $(1,1)$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

(A) $x + y = 0$ (B) $x - y = 0$

(C) $x + y + 1 = 0$ (D) $x - y = 1$

23. ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਦਾ ਬਿੰਦੂ $(1,2)$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਹੈ :

(A) $x + y = 3$ (B) $x - y = 3$

(C) $x + y = 1$ (D) $x - y = 1$

24. ਵਕਰ $9y^2 = x^3$ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜਿੱਥੇ ਵਕਰ ਦੀ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ :

(A) $\left(4, \pm\frac{8}{3}\right)$ (B) $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$

(C) $\left(4, \pm\frac{3}{8}\right)$ (D) $\left(\pm 4, \frac{3}{8}\right)$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਜਦੋਂ ਕਿ ਰਾਸ਼ੀ y ਇੱਕ ਦੂਸਰੀ ਰਾਸ਼ੀ x ਬਾਬਤ ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ $y = f(x)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਬਦਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $\frac{dy}{dx}$ (ਜਾਂ $f'(x)$) x ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (ਜਾਂ $f'(x_0)$) $x = x_0$ ਤੇ) x ਬਾਬਤ y ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜਦੋਂ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y, t ਬਾਬਤ ਬਦਲ ਰਹੇ ਹੋਣ ਅਰਥਾਤ $x = f(t)$ ਅਤੇ $y = g(t)$, ਤਦ ਲੜੀ ਨਿਯਮ ਨਾਲ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}, \text{ ਜੇਕਰ } \frac{dx}{dt} \neq 0$$

- ਇੱਕ ਫਲਨ f
  (a) ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਵਧਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ

  $[a, b]$ ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ

  ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਰੇਕ $x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \geq 0$, ਹੈ।

  (b) ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਘਟਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂਕਿ

  $[a, b]$ ਵਿੱਚ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, ਸਾਰੇ $x_1, x_2 \in (a, b)$ ਦੇ ਲਈ

  ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂਕਿ ਹਰੇਕ $x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ $f'(x) \leq 0$ ਹੈ।
- ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y - y_0 = \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0) \text{ ਹੈ।}$$

- ਜਦੋਂਕਿ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ $x = x_0$ ਹੈ।
- ਜਦੋਂਕਿ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ $x = x_0$ ਤੇ, x&ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਤਾਂ $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0} = 0$ ਹੈ।
- ਵਕਰ $y = f(x)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$y - y_0 = \frac{-1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}}(x - x_0) \text{ ਹੈ।}$$

- ਜਦੋਂਕਿ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ $\frac{dy}{dx} = 0$ ਤਦ ਲੰਬ ਅਭਿਲੰਬ ਸਮੀਕਰਣ $x = x_0$ ਹੈ।
- ਜਦੋਂਕਿ ਬਿੰਦੂ (x_0, y_0) ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਬਿੰਦੂ ਅਭਿਲੰਬ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $y = y_0$ ਹੈ।
- ਮੰਨ ਲਉ $y = f(x)$ ਅਤੇ Δx, x ਵਿੱਚ ਛੋਟਾ ਵਾਧਾ ਹੈ ਅਤੇ x ਦੀ ਵਾਧੇ ਦੇ ਸੰਗਤ y ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ Δy ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\Delta y = f(x + \Delta x)$ ï $f(x)$ ਤਾਂ

$$dy = f'(x)dx \text{ ਜਾਂ } dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$$

ਜਦੋਂ $dx = \Delta x$ ਸਾਪੇਖਤਾ ਬਹੁਤ ਛੋਟਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ Δy ਦੀ ਇੱਕ ਚੰਗਾ ਲਗਭਗਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $dy \approx \Delta y$ ਦੇ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

- ਫਲਨ f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ c ਜਿਸ ਤੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(c) = 0$ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। f ਦਾ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- (ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਕਿਸੇ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ ਫਲਨ f ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ c ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ f ਹੈ।

  (i) ਜਦੋਂ x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਧਨ ਤੋਂ ਰਿਣ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਅਤੇ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

  (ii) ਜਦੋਂ x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵੱਲ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ, ਜਦੋਂ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਰਿਣ ਤੋਂ ਧਨ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) < 0$ ਜਾਂ c ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਨੇੜੇ ਨਿਕਟ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ $f'(x) > 0$ ਹੋ ਤਾਂ c ਇੱਕ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

  (iii) ਜਦੋਂ x ਦੇ ਬਿੰਦੂ c ਦੇ ਖੱਬੇ ਤੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਦੇ ਨਾਲ ਜਦੋਂਕਿ $f'(x)$ ਦਾ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦਾ ਤਾਂ c ਨਾ ਤਾਂ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਬਿੰਦੂ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ (Point of Inflection) (ਚਿੱਤਰ 6.15) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

- (ਦੂਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਅੰਤਰਾਲ I ਤੇ f ਇੱਕ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ ਹੈ ਜਾਂ $c \in \mathrm{I}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f, c ਤੇ ਦੋ ਵਾਰ ਲਗਾਤਾਰ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ। ਤਦ

  (i) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) < 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ

  f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

  (ii) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) > 0$ ਤਾਂ $x = c$ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ f ਦਾ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $f(c)$ ਹੈ।

  (iii) ਜਦੋਂਕਿ $f'(c) = 0$ ਅਤੇ $f''(c) = 0$, ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਪਰੀਖਿਅਣ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

  ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਾਪਸ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਰਾਹੀਂ ਪਰੀਖਿਅਣ ਤੇ ਵਾਪਸ ਜਾ ਕੇ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ c ਅਧਿਕਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਜਾਂ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

- ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਜਾਂ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਵਿਧੀ (Working Rule)

  ਕਦਮ 1. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ f ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਾਜ਼ੁਕ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ x ਦੇ ਉਹ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿੱਥੇ ਜਾਂ ਤਾਂ $f'(x) = 0$ ਜਾਂ f ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

  ਕਦਮ 2. ਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਲਉ।

  ਕਦਮ 3. ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ (ਕਦਮ 1 ਅਤੇ ਕਦਮ 2 ਵਿੱਚ ਅੰਕਿਤ) f ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਰੋ।

  ਕਦਮ 4. ਕਦਮ 3 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਣਨਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ f ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਲਉ। ਇਹ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੀ, f ਦਾ ਅਸਲ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, f ਦਾ ਅਸਲ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਤਿਕਾ 1

ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ
(Proofs in Mathematics)

❖*Proofs are to Mathematics what calligraphy is to poetry.*
Mathematical works do consist of proofs just as
poems do consist of characters
— VLADIMIR ARNOLD ❖

A.1.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਮਾਤ IX] X ਅਤੇ XI ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਥਨ, ਸੰਯੁਕਤ ਕਥਨ, ਕਥਨ ਦਾ ਨਿਖੇਧਣ, ਉਲਟ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਰੂਪ ਅਤੇ ਅਨੁਮਾਨਤ ਕਥਨ, ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਅਤੇ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਵਿਵੇਚਨ ਦੀ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤੀ ਉਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

A.1.2 ਸਬੂਤ ਕੀ ਹੈ? (What is a Proof?)

ਕਿਸੀ ਗਣਿਤੀ ਕਥਨ ਦੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਕਥਨਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੇ ਹਰੇਕ ਕਥਨ ਦੇ ਮਕਸਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸਨੂੰ ਨਿਗਮਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਕੁਝ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਰਾਹੀਂ ਕੇਵਲ ਮੰਨੇ ਹੋਏ ਤਰਕ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਿਆ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਰੇਕ ਸਬੂਤ ਨਿਗਮਨਾਤਮਕ ਤਰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਆਪਣੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਨਤੀਜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਉਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਤੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਨ।ਪਰੰਤੂ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧੇ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਉਸਦੇ ਤੁੱਲ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹਰੇਕ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਹੇਠਾਂ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੱਖ ਸਬੂਤ ਇਹ ਉਕਤੀ ਦਾ ਉਹ ਸਬੂਤ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਉਕਤੀ ਦਾ ਸਬੂਤ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

(i) ਸਿੱਧੀ ਆਮਦ **(Approach)** ਇਹ ਤਰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੈ, ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂ ਕਲਪਿਤ ਤੱਥਾਂ ਤੋਂ ਸਿੱਧੇ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਪਦਾਂ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਉਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਉਦਾਹਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ਹੈ ਤਾਂ $x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$ ਹੈ।

ਹੱਲ : $x^2 - 5x + 6 = 0$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

$\Rightarrow$ $(x - 3)(x - 2) = 0$ (ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਸਮਤੁੱਲ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਬਦਲਣ ਤੇ)

$\Rightarrow$ $x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 2 = 0$ (ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਉਕਤੀ $ab = 0$ ਤਾਂ $a = 0$ ਜਾਂ $b = 0$, $a, b \in$ **R** ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $x - 3 + 3 = 0 + 3$ ਜਾਂ $x - 2 + 2 = 0 + 2$ (ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਤੇ ਉਸਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਨਹੀਂ ਬਦਲਦੀ)

$\Rightarrow$ $x + 0 = 3$ ਜਾਂ $x + 0 = 2$ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਤਤਸਮਕ (Identity) ਗੁਣ ਦੇ ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$ (ਜੋੜ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਤਤਸਮਕ ਗੁਣ ਰਾਹੀਂ)

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$

ਇੱਥੇ p ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ “$x^2 - 5x + 6 = 0$” ਹੈ ਅਤੇ q ਨਤੀਜਾ ਕਥਨ “$x = 3$ ਜਾਂ $x = 2$” ਹੈ।

ਕਥਨ p ਦੇ ਵਿਅੰਜਕ $x^2 - 5x + 6$ ਨੂੰ, ਇਸ ਦੇ ਤੁੱਲ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ $(x - 3)(x - 2)$ ਤੋਂ ਬਦਲ ਕੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ r : “$(x - 3)(x - 2) = 0$” ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ ਦੋ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦੇ ਹਨ :

(i) ਵਿਅੰਜਕ $(x - 3)(x - 2)$ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅੰਜਕ $x^2 - 5x + 6$ ਦੇ ਤੁੱਲ ਹੈ ?

(ii) ਕਿਸੇ ਵਿਅੰਜਕ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਸਮਾਨ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਅੰਜਕ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਵੇਂ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਪਹਿਲੇ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ :

ਭਾਵ $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2)$

ਦੂਜਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਤਰਕ ਦੇ ਵੈਧ ਰੂਪ ਰਾਹੀਂ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ r ਪੂਰਵ ਕਥਨ ਜਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਕਥਨ (Premise) s: “$x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 2 = 0$” ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਗ (steps) ਦਾ ਮਕਸਦ ਬ੍ਰੈਕੇਟ (brackets) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਾਰਵਾਈ ਲਗਾਤਾਰ ਤਦ ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਆਖਰੀ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚਦੇ।

ਤਰਕ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਕਾਤਮਕ ਤੁਲਤਾ ਨਿਗਮਨ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਹੈ ਕਿ $p \Rightarrow q$ ਸੱਚ ਹੈ।

p ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਕੇ ਨਿਗਮਨ ਰਾਹੀਂ $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow \ldots \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ “$p \Rightarrow q$” ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ ਜਿਹੜਾ $f(x) = 2x + 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇੱਕ-ਇੱਕ (one-one) ਫਲਨ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਫਲਨ f ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

(ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ)

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x_1) = f(x_2)$ ਭਾਵ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$

$\Rightarrow$ $2x_1 + 5$ ï $5 = 2x_2 + 5$ ï 5 (ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜੋੜਨ ਤੇ)

$\Rightarrow$ $2x_1 + 0 = 2x_2 + 0$

$\Rightarrow$ $2x_1 = 2x_2$ (ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਤਤਸਮਕ ਗੁਣ ਰਾਹੀਂ)

$\Rightarrow$ $\frac{2}{2}x_1 = \frac{2}{2}x_2$ (ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਨਾਲ)

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2$

ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੈ।

(ii) ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ

ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ, ਉਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਵਿਧੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੂਪ ਨਿਗਮਿਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਸਬੂਤ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

N ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਉਪ-ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ

(i) ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $1 \in \mathrm{S}$ ਅਤੇ

(ii) ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ $k + 1 \in \mathrm{S}$ ਜਦੋਂ $k \in \mathrm{S}$, ਤਾਂ $\mathrm{S} = \mathbf{N}$

ਗਣਿਤੀ ਆਗਮਨ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਕਥਨ ñS(n), $n = 1$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ” (ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸੰਖਿਆਂ j ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ) ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਕਥਨ $n = k$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੋਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ $n = k + 1$ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਤੌਰ ਤੇ ਸੱਚ ਹੈ (ਜਦੋਂ ਕਦੇ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $k \geq j$), ਤਾਂ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n, ਜਿੱਥੇ $n \geq j$ ਲਈ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਜੇਕਰ $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{P}(n) : \mathrm{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$P(1) : A^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(1)$ ਸੱਚ ਹੈ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ,

$$P(k) : A^k = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix}$$

ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲਿਆ ਕਿ $P(k + 1)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ

$$P(k+1) : A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix} \text{ ਸੱਚ ਹੈ}$$

ਦੁਬਾਰਾ : $$A^{k+1} = A^k . A$$

ਕਿਉਂਕਿ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} \cos k\theta & \sin k\theta \\ -\sin k\theta & \cos k\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta & \cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta \\ -\sin k\theta\cos\theta - \cos k\theta\sin\theta & -\sin k\theta\sin\theta + \cos k\theta\cos\theta \end{bmatrix}$$

(ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੀ ਗੁਣਾ ਰਾਹੀਂ)

$$= \begin{bmatrix} \cos(k+1)\theta & \sin(k+1)\theta \\ -\sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਲਈ $P(k + 1)$ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਦੇ $P(k)$ ਸੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਕਰਕੇ $P(n)$, n ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

(iii) ਵੱਖ ਵੱਖ ਹਾਲਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂ ਸੱਖਣਾਪਣ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ

ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੈ, ਜਦੋਂ p ਨੂੰ ਕਈ ਕਥਨਾਂ r, s, t (ਮੰਨ ਲਉ) ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ ਜਿਵੇਂ ਕਿ $p = r \vee s \vee t$ (ਜਿੱਥੇ ñ$\vee$ò ਪ੍ਰਤੀਕ ñਜਾਂò ਲਈ ਹੈ)

ਜੇਕਰ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨਾਂ $$r \Rightarrow q;$$
$$s \Rightarrow q;$$

ਅਤੇ

$$t \Rightarrow q$$

ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$, ਸਿੱਧ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸੰਭਵ ਹਾਲਤ ਨੂੰ ਜਾਂਚਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਵਿਵਹਾਰਿਕ ਰੂਪ ਨਾਲ ਕੇਵਲ ਤਾਂ ਹੀ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ ਜਦੋਂ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC, ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ p ਕਥਨ ñABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈò ਅਤੇ q ਕਥਨ

ñ$a = b \cos C + c \cos B$ò ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਸਿਖਰ A ਤੋਂ BC (ਤੇ) ਲੰਬ AD ਖਿੱਚੋ।

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਊਨਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਾਂ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ p ਨੂੰ r, s ਅਤੇ t ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ

r : ABC ਇੱਕ ਨਿਊਨਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle C$ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹੈ।

s : ABC ਇੱਕ ਅਧਿਕਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle C$ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ।

t : ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle C$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਹਾਲਤ **(i)** ਜਦੋਂ $\angle A$, $\angle B$, ਅਤੇ $\angle C$ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ A1.1)

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADB, ਰਾਹੀਂ

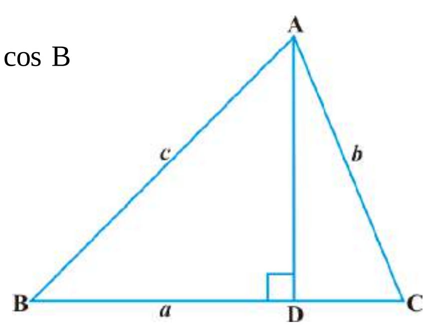
$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

ਭਾਵ $$BD = AB \cos B = c \cos B$$

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਰਾਹੀਂ

$$\frac{CD}{AC} = \cos C$$

ਭਾਵ $$CD = AC \cos C$$
$$= b \cos C$$



ਚਿੱਤਰ A1-1

ਹੁਣ

$$a = BD + CD$$
$$= c \cos B + b \cos C \quad \ldots (1)$$

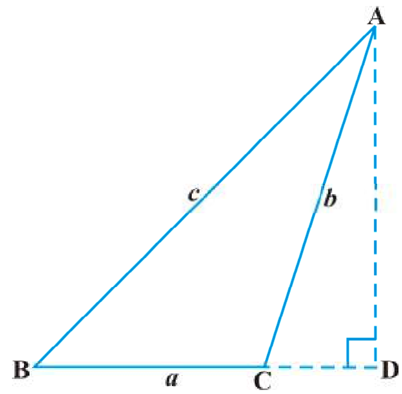
ਹਾਲਤ (ii) ਜਦੋਂ $\angle C$ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.2)

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADB ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BD}{AB} = \cos B$$

ਭਾਵ $$BD = AB \cos B$$

$$= c \cos B$$



ਚਿੱਤਰ A1-2

ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਰਾਹੀਂ

$$\frac{CD}{AC} = \cos \angle ACD$$

$$= \cos (180 - C)$$

$$= -\cos C$$

ਭਾਵ $$CD = -AC \cos C$$

$$= -b \cos C$$

ਹੁਣ $$a = BC = BD - CD$$

ਭਾਵ $$a = c \cos B - (-b \cos C)$$

$$a = c \cos B + b \cos C \qquad \ldots (2)$$

ਹਾਲਤ (iii) ਜਦੋਂ $\angle C$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A1.3)

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ACB, ਰਾਹੀਂ

$$\frac{BC}{AB} = \cos B$$

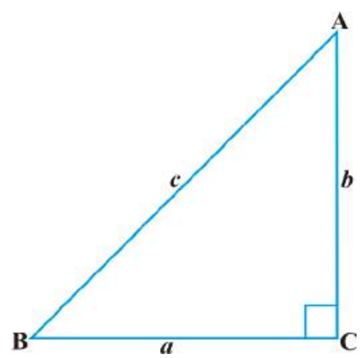
ਭਾਵ $$BC = AB \cos B$$

ਅਤੇ $$a = c \cos B,$$

$$b \cos C = b \cos 90^0 = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $$a = 0 + c \cos B$$

$$= b \cos C + c \cos B \qquad \ldots (3)$$



ਚਿੱਤਰ A1-3

ਸਮੀਕਰਣ (1), (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ, ਕਿ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ

$$a = b \cos C + c \cos B$$

ਹਾਲਤ **(i)** ਤੋਂ $r \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਹਾਲਤ **(ii)** ਤੋਂ $s \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਅਤੇ ਹਾਲਤ **(iii)** ਤੋਂ $t \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(r \vee s \vee t) \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ ਭਾਵ $p \Rightarrow q$ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਹੈ।

ਅਪ੍ਰੱਤਖ ਸਬੂਤ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਉਸ ਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਕਿਸੇ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਕੇ, ਦਿੱਤੀ ਉਕਤੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(i) ਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ (***Reductio Ad Absurdum***):
ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਮਾਨਤਾ ਨਾਲ਼ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੱਲ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਨਤੀਜਾ ਝੂਠ ਹੈ। ਤਰਕ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਜਾਣੂ ਸੱਚ ਕਥਨ, ਝੂਠ ਹੈ, ਜਿਹੜਾ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਰਾਹੀਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (Prime Numbers) ਦਾ ਸਮੂਹ P ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਵਿਰੋਧ ਨੂੰ ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਸੱਚ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸੀਮਿਤ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਵਾਰ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_k$ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ

$$N = (P_1\ P_2\ P_3 é\ P_k) + 1 \qquad \ldots (1)$$

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ N ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸੂਚੀ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

N ਜਾਂ ਤਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਾਂ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ N ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ (1) ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਜਿਹੜੀ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਦੂਜੀ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ N ਇੱਕ ਸੰਯੁਕਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ (Divisor) ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਸੂਚੀ ਦੀ ਕੋਈ ਵੀ ਸੰਖਿਆ N ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਰਾਹੀਂ N ਨੂੰ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਬਾਕੀ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ N ਦਾ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕ ਸੂਚੀ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ ਇਹ, ਇਸ ਕਥਨ ਦਾ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾ ਲਈ ਹੈ, ਵਿਰੋਧ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੀ ਪਹਿਲਾਂ ਮੰਨੀ ਧਾਰਨਾ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਹੈ, ਝੂਠ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਖੰਡਨ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਵੀ ਹੈ।)

(ii) ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ (**contrapositive**) ਦੇ ਕਥਨ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ :
ਇੱਥੇ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ $p \Rightarrow q$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਅਸੀਂ ਉਸਦੇ ਸਮਤੁੱਲ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। (ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਨੂੰ ਸਾਬਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ)A

ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਾਸ਼ਰਤ ਕਥਨ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਅਤੇ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਨਿਖੇਧਨ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $f(x) = 2x + 5$ ਰਾਹੀਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਫਲਨ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

ਇਸ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ ñ$2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ò $\Rightarrow$ ñ$x_1 = x_2$ò ਇਹ $p \Rightarrow q$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ ਕਥਨ p ਹੈ ਅਤੇ $x_1 = x_2$ ਕਥਨ q ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ "ਪ੍ਰਤੱਖ ਵਿਧੀ" ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਵੀ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕਥਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ਹੈ, ਭਾਵ, "ਜੇਕਰ $f(x_1) = f(x_2)$ ਤਾਂ $x_1 = x_2$ò ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਹੈ "ਜੇਕਰ $x_1 \neq x_2$ ਤਾਂ $f(x_1) \neq f(x_2)$ò

ਹੁਣ $\qquad x_1 \neq x_2$

$\Rightarrow \qquad 2x_1 \neq 2x_2$

$\Rightarrow \qquad 2x_1 + 5 \neq 2x_2 + 5$

$\Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$.

ਕਿਉਂਕਿ ñ$\sim q \Rightarrow \sim p$ò, ਅਤੇ ñ$p \Rightarrow q$ò ਸਮਤੁੱਲ ਹੈ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਬੂਤ ਪੂਰਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, Invertible ਹੈ ਤਾਂ A, Non-singular ਹੈ।

ਹੱਲ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀਕ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਲਿਖਣ ਤੇ $p \Rightarrow q$ ਜਿੱਥੇ p ਕਥਨ "ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A, invertible ਹੈ" ਅਤੇ q ਕਥਨ ñA, non-singular ਹੈ।"

ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਤਿਧਨਾਤਮਕ ਕਥਨ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਭਾਵ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A invertible ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੋਇਆ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\qquad A^{ï1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $|A| = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ A, Invertible ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਯ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਜੇਕਰ A ਇੱਕ non-singular ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂA, invertible ਨਹੀਂ ਹੈ। ਭਾਵ, $\sim q \Rightarrow \sim p$.

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ A invertible ਹੈ ਤਾਂ A non-singular ਹੈ।

(iii) ਪ੍ਰਤਿ-ਉਦਾਹਰਣ **(counter example)** ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ :

ਗਣਿਤ ਦੇ ਇਤਿਹਾਸ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਹਾਲਤ ਵੀ ਆਉਂਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਕਲਪਿਤ ਵਿਆਪੀਕਰਣ ਦੇ ਜਾਇਜ਼ ਸਬੂਤ ਜਾਨਣ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ਾਂ ਅਸਫਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦਾ ਸੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਣਿਆ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਫ਼ਾਇਦੇਮੰਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ ਨੂੰ ਝੂਠ ਸਾਬਿਤ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੱਭ ਸਕੀਏ। ਕਿਸੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਨਾ ਮੰਨਣ ਵਾਲਾ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰਤਿ-ਉਦਾਹਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ ਉਕਤੀ $p \Rightarrow q$ ਦਾ ਖੰਡਨ, ਉਕਤੀ $\sim(p \Rightarrow q)$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਮਾਤਰ ਇੱਕ ਸਬੂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਸਬੂਤ ਦੇਣ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਕਥਨ ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ $(2^{2^n}+1)$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਕਥਨ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸੱਚ ਕਥਨ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਸੀ :

$2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 5$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 17$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 257$ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹਾਲਾਂਕਿ, ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵੇਖਣ ਤੇ ਇਹ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਠੀਕ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ $2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4294967297$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4294967297 = 641 \times 6700417$ ਹੈ। ਜਿਹੜਾ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ (1 ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਖੁਦ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਕਿ "ਹਰੇਕ n ਦੇ ਲਈ $2^{2^n}+1$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\forall\, n \in$ N^{+}ò ਝੂਠ ਹੈ।

ਸਿਰਫ਼ ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਕਿ $2^{2^5}+1$ ਅਭਾਜ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ "ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਨੂੰ ਖੰਡਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਕਿ ਕਥਨ "ਹਰੇਕ $n \in \mathbf{N}$ ਲਈ + 1 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ" ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਕਥਨ "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।" ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

(i) $f(x) = x^2$

(ii) $g(x) = e^x$

(iii) $h(x) = \sin x$

ਇਹ ਸਾਰੇ ਫਲਨ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਡਿਫ਼ਰੇਂਸ਼ਿਏਬਿਲਿਟੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਇਹ x ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਾਨਾਂ ਲਈ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹਨ। ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਲਈ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ" ਸੱਚ ਹੈ। ਪਰ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ ñ$\phi(x) = |x|$ò ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਿਲਿਟੀ ਨੂੰ ਜਾਂਚੀਏ, ਕਿ ਜਿਹੜਾ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ $x = 0$ ਤੇ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕਥਨ "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ "ਝੂਠ ਹੈ। ਫਲਨ "$\phi(x) = |x|$ò ਦਾ ਕੇਵਲ ਇਹ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿਆਪੀਕਰਨ ਦਾ ਖੰਡਣ ਕਰਨ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ñ$\phi(x) = |x|$ò ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਭਾਵ, "ਹਰੇਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੇਂਨਸ਼ਿਏਬਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ" ਦੇ ਖੰਡਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਉਦਾਹਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅੰਤਿਕਾ 2

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ (Mathematical Modelling)

A.2.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਨੂੰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਅੰਸ਼ਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਦੇ ਇੱਕ ਉਪਰਾਲੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਅਰਥਾਤ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਗਣਿਤਕ ਰੁਪਾਂਤਰਣ ਹੀ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਹੈ। ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੀ ਰੁਚੀ ਦੇ ਸਾਧਨਾਂ ਜਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵਿਵਹਾਰ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਨ ਹਿਤ ਨਿਦਰਸ਼ਾਂ (Models) ਦੀ ਰਚਨਾ, ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸ਼ਬਦਾਂ, ਆਲੇਖਾਂ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰਾਂ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ, ਗਣਿਤਕ ਸੂਤਰਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਗਣਿਤਕ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਧੇਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਇੱਕ ਵੱਖਰੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੁਬਾਰਾ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ, ਕਲਨ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

A.2.2 ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਿਉਂ ? (Why Mathematical Modelling?)

ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕ ਗਣਿਤ, ਬੀਜ ਗਣਿਤ, ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਆਦਿ ਦੇ ਸ਼ਾਬਦਿਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਗਿਆਨ ਹੈ। ਕਦੇ ਕਦੇ ਅਸੀਂ ਸਥਿਤੀਜਨਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਵਿੱਚ ਗਏ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਸਰਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਭੌਤਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ, ਭਾਵ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਜਿਸ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਗਣਿਤਕ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ। ਅਨੇਕ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਕੌਸ਼ਲ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਕਿਸੇ ਨਦੀ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ ਜਦੋਂ ਨਦੀ ਨੂੰ ਪਾਰ ਕਰਨਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੋਵੇ)A

(ii) ਕਿਸੇ ਗੋਲੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਗੋਲਾ ਸੁੱਟਣ ਵਾਲੇ ਦੀ ਉਚਾਈ, ਮਾਧਿਅਮ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਰੋਧ, ਗਰੁੱਤਾਆਕਰਸ਼ਨ g ਆਦਿ ਚਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹੋਵੇ)।

(iii) ਕਿਸੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਸਿਖਰ ਤੇ ਨਹੀਂ ਪਹੁੰਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ)।

(iv) ਸੂਰਜ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਦਾ ਤਾਪਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(v) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਕਿ ਦਿਲ ਦੇ ਰੋਗੀਆਂ ਨੂੰ ਲਿਫਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਰਜਿਤ ਕਿਉਂ ਹੈ (ਬਿਨਾਂ ਮਨੁੱਖੀ ਸ਼ਰੀਰ ਕਿਰਿਆ ਵਿਗਿਆਨ ਜਾਣੇ)।

(vi) ਧਰਤੀ ਦਾ ਪੁੰਜ ਪਤਾ ਕਰਨਾ।

(vii) ਖੜੀ ਫਸਲ ਨਾਲ ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਦਾਲਾਂ ਦੀ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਫਸਲ ਦੇ ਕੱਟਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(viii) ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸ਼ਰੀਰ ਵਿੱਚ ਖੂਨ ਦਾ ਆਇਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਖੂਨ ਕੱਢਣ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

(ix) ਸਾਲ 2009 ਈ. ਵਿੱਚ ਭਾਰਤ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਣਾ (ਜਦ ਕਿ ਸਾਲ 2009 ਈ. ਤੱਕ ਇੰਤਜਾਰ ਕਰਨ ਦੀ ਆਗਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ)।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕਰੋਗੇ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਗਿਆਨਵਾਚਕ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਆਪ ਸਰਲ ਕਰਨ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰੋ ਉਹ ਵੀ ਬਿਨਾਂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ। ਤਦ ਤੁਸੀਂ ਗਣਿਤ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਅਤੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਲੋੜ ਦੇ ਮਹੱਤਵ ਨੂੰ ਸਮਝ ਸਕਾਂਗੇ।

A.2.3 ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Principles of Mathematical Modelling)

ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਇੱਕ ਸਿਧਾਂਤ ਯੁਕਤ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਸਿਧਾਂਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦਾ ਸਰੂਪ ਲਗਭਗ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੂਲ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

(i) ਨਿਦਰਸ਼ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਅਸੀਂ ਮਾਡਲ ਕਿਉਂ ਖੋਜ ਰਹੇ ਹਾਂ)।

(ii) ਮਾਡਲ ਦੇ ਲਈ ਪੈਰਾਮੀਟਰ/ਚਲ ਨੂੰ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੋ (ਅਸੀਂ ਕੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ)।

(iii) ਉਪਲਬਧ ਢੁੱਕਵੇਂ/ਸੰਗਤ ਅੰਕੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਕੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ)।

(iv) ਪ੍ਰਯੋਗ ਯੋਗ ਪ੍ਰਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ (ਪੂਰਵਧਾਰਨਾ, ਕਲਪਨਾ)।

(v) ਸ਼ਾਸ਼ਕ/ਪ੍ਰਬੰਧਕ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

(vi) ਪਹਿਚਾਣੋ :

  (a) ਸਮੀਕਰਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

  (b) ਗਣਨਾ ਜੋ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

  (c) ਹੱਲ ਜੋ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

(vii) ਉਹਨਾਂ ਪਰੀਖਣਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ :

(a) ਮਾਡਲ ਅਤੇ ਉਸ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਹੋਣਾ।

(b) ਮਾਡਲ ਦੀ ਉਪਯੋਗਤਾ

(viii) ਉਹਨਾਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ ਜੋ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸੁਧਾਰ ਸਕਣ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

ਪਗ 1**:** ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।

ਪਗ 2**:** ਪੈਰਾਮੀਟਰ /ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭੌਤਿਕ ਨਿਯਮਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀਕਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰਨਾ।

ਪਗ 3**:** ਗਣਿਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰੋ।

ਪਗ 4**:** ਪ੍ਰਾਪਤ ਪਰਿਣਾਮ ਦੀ ਮੂਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ (ਸਮੱਸਿਆ) ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ (ਪਰਿਣਾਮ) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਜਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰੋ।

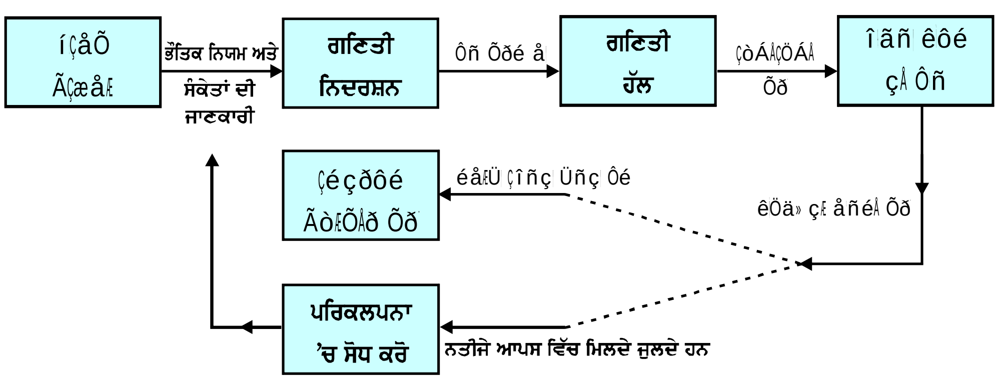
ਪਗ 5**:** ਜੇਕਰ ਪਰਿਣਾਮ ਲਗਭਗ ਮੇਲ ਖਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਮਾਡਲ ਨੂੰ ਸਵੀਕਾਰ ਕਰੋ ਨਤੀਜਾ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ /ਕਲਪਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਪਦ 2 ਤੇ ਜਾਓ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਆਲੇਖ ਵਿੱਚ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੁਆਰਾ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. "ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨਾ" ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ AB ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਮੀਨਾਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A.2.2)। ਮੰਨ ਲਉ PQ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਨਾਪਣ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਹੈ; ਜਿਸ ਦੀ ਅੱਖ ਬਿੰਦੂ P ਤੇ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $PQ = h$ ਅਤੇ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ H ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੀ ਅੱਖ ਤੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਦਾ ਕੋਣ α ਹੈ ਅਤੇ $l = QB = PC$



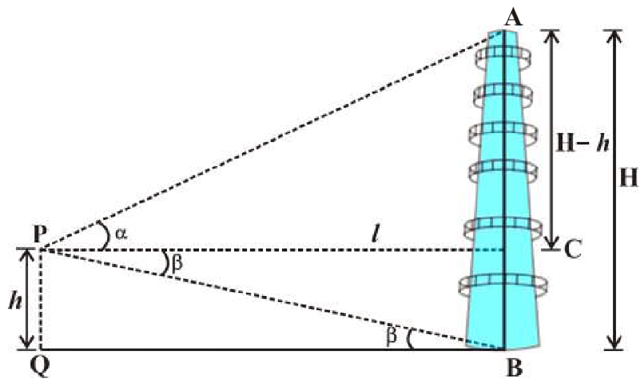
ÇÚåð **A.2.1**

ਹੁਣ $$\tan \alpha = \frac{AC}{PC} = \frac{H-h}{l}$$

ਜਾਂ $$H = h + l \tan \alpha \qquad \text{... (1)}$$

ਪਗ 3: ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਪੈਰਾਮੀਟਰ h, l ਅਤੇ α ਦੇ ਮੁੱਲ ਨਿਰੀਖਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਹਨ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮ (1) ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 4: ਉਸ ਦਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਮੀਨਾਰ ਦਾ ਅਧਾਰ ਨਾ ਪਹੁੰਚਣਯੋਗ ਹੋਵੇ, ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਨਿਰੀਖਕ ਨੂੰ l ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇ, ਤਦ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮੀਨਾਰ ਦੇ ਅਧਾਰ B ਦਾ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਨਿਵਾਣ ਕੋਣ β ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ Δ PQB



ਚਿੱਤਰ **A.2.2**

ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\tan \beta = \frac{PQ}{QB} = \frac{h}{l} \text{ ਜਾਂ } l = h \cot \beta$$

ਪਗ 5: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਚਰਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ h, l, α ਅਤੇ β ਪੈਰਾਮੀਟਰਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਮਾਨ ਪਤਾ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਵਸਾਇਕ ਫਰਮ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਉਤਪਾਦ P_1, P_2 ਅਤੇ P_3 ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ ਤੋਂ ਦੋ ਗਾਹਕ F_1 ਅਤੇ F_2 ਖਰੀਦ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਫਰਮ ਦੇ ਕੋਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦੀ ਸੀਮਤ ਮਾਤਰਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਓ, ਜੋ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨੂੰ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਪਹਿਚਾਣ ਭਲੀਭਾਂਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੈ, ਜੋ ਗਾਹਕਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ A ਦਾ ਰੂਪ ਅਜਿਹਾ ਹੋਵੇਗਾ।

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \\ \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \end{bmatrix} \end{array}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ B .... ਹੈ, ਜੋ ਉਤਪਾਦ P_1, P_2 ਅਤੇ P_3 ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3, ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ B ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇਗਾ ;

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \\ \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \\ \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \end{bmatrix} \end{array}$$

ਪਗ 3. ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A ਅਤੇ B ਮੈਟ੍ਰਿਕਸਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (ਜੋ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$AB = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \\ \text{Å} & \text{Å} & \text{Å} \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਸ ਨਾਲ ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਗਾਹਕਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀਆਂ ਫਰਮਾਇਸ਼ਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਗਿਆਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੇ ਮਾਡਲ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ, ਜਦ ਕਿ

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

ਅਤੇ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ R_1 ਦੀਆਂ 330 ਇਕਾਈਆਂ, R_2 ਦੀਆਂ 455 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 165 & 247 & 87 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1 ਦੀਆਂ 355 ਇਕਾਈਆਂ। R_2 ਦੀਆਂ 467 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 147 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਕੱਚੇ ਮਾਲ

ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਤਿੰਨੋਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਹਿੱਤ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨੂੰ ਵਧਾਉਣ ਦੀ ਮੰਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਅਸੀਂ ਗਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੀ ਬੇਨਤੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ A ਨੂੰ A_1 ਨਾਲ ਬਦਲ ਦੇਈਏ, ਜਿੱਥੇ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਗਾਹਕ ਲੋਕ ਆਪਣੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਮੰਨ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ

$$A_1 B = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 6 \\ 10 & 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 141 & 216 & 78 \\ 170 & 220 & 60 \end{bmatrix}$$

ਜਿੱਥੇ R_1 ਦੀਆਂ 311, R_2 ਦੀਆਂ 436 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 138 ਇਕਾਈਆਂ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਉਪਲਬਧ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਅਰਥਾਤ R_1 ਦੀਆਂ 330, R_2 ਦੀਆਂ 455 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਪੂਰਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਹੋ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ ਗਾਹਕਾਂ ਦੀ ਮੰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ A_1 ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦ ਆਦੇਸ਼ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਫਰਮ ਦੋਵੇਂ ਗਾਹਕਾਂ ਦੇ ਖਰੀਦ ਆਦੇਸ਼ ਨੂੰ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪੁੱਛਗਿੱਛ : ਦਿੱਤੇ B ਅਤੇ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੀਆਂ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਅਸੀਂ, ਫਰਮ ਦੇ ਮਾਲਕ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ, ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਹ ਗਾਹਕਾਂ ਨੂੰ ਬੇਨਤੀ ਕਰ ਸਕੇ ਕਿ ਉਹ ਆਪਣੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਪੁੱਛਗਿੱਛ ਦਾ ਉੱਤਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ :

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ P_1, P_2, P_3 ਅਤੇ R_1, R_2, R_3 ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ ਦੇ ਕੋਲ R_1 ਦੀਆਂ 330 R_2 ਦੀਆਂ 455 ਅਤੇ R_3 ਦੀਆਂ 140 ਇਕਾਈਆਂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤਿੰਨੋਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੀ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਲਈ ਕੱਚੇ ਮਾਲ R_1, R_2 ਅਤੇ R_3, ਦੀਆਂ ਮਾਤਰਾਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$B = \begin{array}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R_1 & R_2 & R_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 9 & 3 \\ 5 & 12 & 7 \end{bmatrix} \end{array}$$

ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਬਣਾਈਆਂ ਹਨ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਪੂਰਾ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਸਥਿਤੀ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਰਮ P_1 ਦੀਆਂ x ਇਕਾਈਆਂ, P_2 ਦੀਆਂ y ਅਤੇ P_3ਦੀਆਂ z ਇਕਾਈਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਤਪਾਦ P_1 ਦੇ ਲਈ R_1 ਦੀਆਂ 3, P_2 ਦੇ ਲਈ R_1 ਦੀਆਂ 7 ਅਤੇ P_3 ਦੇ ਲਈ R_1 ਦੀਆਂ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ (ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ B ਵੇਖੋ) ਅਤੇ R_1 ਦੀਆਂ ਕੁੱਲ 330 ਇਕਾਈਆਂ ਉਪਲਬਧ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$3x + 7y + 5z = 330 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_1 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$4x + 9y + 12z = 455 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_2 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਅਤੇ $$3y + 7z = 140 \text{ (ਕੱਚੇ ਮਾਲ } R_3 \text{ ਦੇ ਲਈ)}$$

ਇਸ (ਉਪਯੁਕਤ) ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਵਿਅਕਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 330 \\ 455 \\ 140 \end{bmatrix}$$

ਪਗ 3. ਆਰੰਭਿਕ ਕਤਾਰ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੁਆਰਾ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x = 20, y = 35$ ਅਤੇ $z = 5$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਫਰਮ P_1 ਦੀਆਂ 20, P_2 ਦੀਆਂ 35 ਅਤੇ P_3 ਦੀਆਂ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪੰਨ ਕਰ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਕੋਈ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਨਿਰਮਾਤਾ ਗਾਹਕਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਹੈ) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਕੇਵਲ ਉਪਲਬਧ ਕੱਚੇ ਮਾਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨ ਦਾ ਫੈਸਲਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਮੰਗਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ F_1 ਨੇ P_3 ਦੀਆਂ 6 ਇਕਾਈਆਂ ਮੰਗੀਆਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਨਿਰਮਾਤਾ ਉਸਦੀਆਂ ਕੇਵਲ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਹੀ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਇੱਕ ਦਵਾ ਨਿਰਮਾਤਾ M_1 ਅਤੇ M_2 ਦਵਾਈਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। M_1 ਦੀਆਂ 20,000 ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ 40,000 ਬੋਤਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਦਵਾਈ ਬਣਾਉਣ ਹਿੱਤ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੱਚਾ ਮਾਲ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਪਰੰਤੂ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕੇਵਲ 45,000 ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੀ ਦਵਾ ਭਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। M_1 ਦੀਆਂ 1000 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘੰਟੇ ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ 1000 ਬੋਤਲਾਂ ਭਰਨ ਦੇ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮਾਲ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 1 ਘੰਟਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ 66 ਘੰਟੇ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। M_1 ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ M_2 ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ 7 ਰੁਪਏ ਦਾ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਦਵਾ ਨਿਰਮਾਤਾ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਆਪਣੀ ਉਤਪਾਦਨ ਯੋਜਨਾ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਣਾਈ ਜਾਵੇ ?

ਪਗ 1. ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਮਹੱਤਵ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਹਿੱਤ ਦਵਾਈਆਂ M_1 ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨਾ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਵਾ M_1 ਦੀਆਂ x ਅਤੇ ਦਵਾ M_2 ਦੀਆਂ y ਬੋਤਲਾਂ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ M_1 ਦੀਆਂ ਬੋਤਲਾਂ

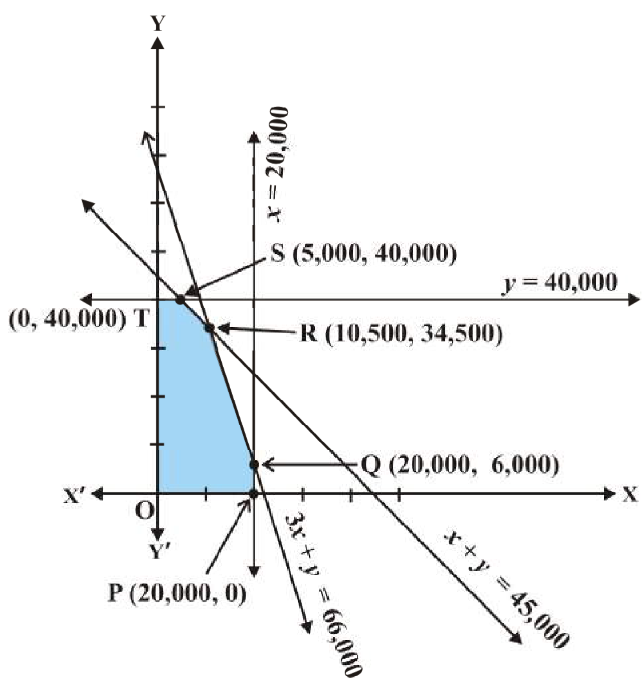
ਤੇ ਲਾਭ 8 ਰੁਪਏ ਅਤੇ M_2 ਦੀ ਹਰੇਕ ਬੋਤਲ ਤੇ ਲਾਭ 7 ਰੁਪਏ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਉਤਪਾਦਨ ਫਲਨ (objective function)] ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$Z \equiv Z(x, y) = 8x + 7y$$

ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਧਿਕਤਮ ਕਰਨਾ ਹੈ (ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 12 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ)।

$$\left.\begin{array}{l} x \le 20000 \\ y \le 40000 \\ x + y \le 45000 \\ 3x + y \le 66000 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \ldots (1)$$

ਪਗ 3. ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (constraints) (1) ਦੇ ਅਧੀਨ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ OPQRST ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਖੇਤਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ A.2.3) ਬਿੰਦੂਆਂ O, P, Q, R, S ਅਤੇ T ਕੋਨਿਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (20000, 0), (20000, 6000), (10500, 34500), (5000, 40000) ਅਤੇ (0, 40000) ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ **A.2.3**

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ :

$$P\,(0, 0) \text{ ਤੇ } Z = 0$$

$$P\,(20000, 0) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 20000 = 160000$$

$$Q\,(20000, 6000) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 20000 + 7 \times 6000 = 202000$$

$$R\,(10500, 34500) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 10500 + 7 \times 34500 = 325500$$

$$S = (5000, 40000) \text{ ਤੇ } Z = 8 \times 5000 + 7 \times 40000 = 320000$$

$$T = (0, 40000) \text{ ਤੇ } Z = 7 \times 40000 = 280000$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $x = 10500$ ਅਤੇ $y = 34500$ ਤੇ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ 325500 ਰੁਪਏ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰਮਾਤਾ (ਉਤਪਾਦਕ) ਨੂੰ 325500 ਰੁਪਏ ਦਾ ਮਹੱਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ M_1 ਦੀਆਂ 10500 ਅਤੇ M_2 ਦੀਆਂ 34500 ਬੋਤਲਾਂ ਉਤਪੰਨ ਕਰਨੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਕੋਈ ਨਵਾਂ ਉਤਪਾਦ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੇ ਕੁੱਝ ਲਾਗਤ (ਸਥਿਰ ਅਤੇ ਚਲ ਲਾਗਤ) ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕੰਪਨੀ ਉਸ ਉਤਪਾਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਮੁੱਲ ਤੇ ਵੇਚਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਲਾਭ-ਹਾਨੀ ਦੇ ਪਰੀਖਣ ਹਿੱਤ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਪਗ 1. ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਹਿਚਾਣ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਲਾਗਤ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਸਥਿਰ ਅਤੇ ਚਰ। ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆਂ ਤੋਂ ਸਵਤੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਕਿਰਾਇਆ, ਟੈਕਸ ਆਦਿ)। ਜਦ ਕਿ ਚਲ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਵਧਣ ਨਾਲ ਵਧਦੀ ਹੈ (ਜਿਵੇਂ ਸਮੱਗਰੀ, ਪੈਕਿੰਗ ਆਦਿ) ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਲ ਲਾਗਤ ਉਤਪਾਦ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸਿੱਧਾ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਨਾਲ ਸਾਡਾ ਮਾਡਲ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਕੁੱਝ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਵੇਚਣ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ (ਕੰਪਨੀ) ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਧਨ ਮਹੱਤਮ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਿਤ ਇਕਾਈ ਤੁਰੰਤ ਵੇਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਤਪੰਨ ਅਤੇ ਵੇਚੀਆਂ ਗਈਆਂ ਇਕਾਈਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ।

C = ਉਤਪਾਦਨ ਦੀ ਕੁੱਲ ਲਾਗਤ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

I = ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

P = ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਹੈ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)

ਸਾਡੀ I ਉਪਰੋਕਤ ਮਾਨਤਾ (assumption) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ C ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਤੋਂ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ :

ਸਥਿਰ ਲਾਗਤ $= a$ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ),

ਚਰ ਲਾਗਤ $= b$ (ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ)

ਅਤੇ $$C = a + bx \qquad \ldots (1)$$

ਨਾਲ ਹੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ I ਵੇਚਿਆ ਗਿਆ ਮੁੱਲ s (ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ) ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\mathrm{I} = sx \qquad \ldots (2)$$

ਲਾਭ P ਆਮਦਨ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{I} - \mathrm{C} \\ &= sx - (a + bx) \\ &= (s - b)\,x - a \qquad \ldots (3) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ x, C, I, P, a, b, ਅਤੇ s ਦੇ ਵਿੱਚ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਪਰਸਪਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਚਲ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਸਵਤੰਤਰ x

ਆਸ਼ਰਿਤ (ਨਿਰਭਰ) C, I, P

ਪੈਰਾਮੀਟਰ a, b, s

ਉਤਪਾਦਕ ਨੂੰ x, a, b, s, ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ P ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3. ਸੰਬੰਧ (3) ਦੁਆਰਾ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ (ਨਾ ਕੋਈ ਲਾਭ ਅਤੇ ਨਾ ਕੋਈ ਹਾਨੀ) ਦੇ ਲਈ P = 0, ਅਰਥਾਤ, $x = \dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ।

ਪਗ 4 ਅਤੇ 5 ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ ਕੁਝ ਇਕਾਈਆਂ ਹੀ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $x = \dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਹਾਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਵਧੇਰੇ ਇਕਾਈਆਂ ਉਤਪਾਦਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\dfrac{a}{s-b}$ ਇਕਾਈਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਇਕਾਈਆਂ ਨਾਲ ਉਸ ਨੂੰ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਸਮ ਵਿਛੇਦਨ ਬਿੰਦੂ ਅਵਾਸਤਵਿਕ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਦ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਡਲ ਉਪਯੁਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਧਨ ਪ੍ਰਵਾਹ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸੰਬੰਧ (3) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d\mathrm{P}}{dx} = s - b$$

ਭਾਵ x ਦੇ ਸਾਪੇਖ P ਦੇ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ, ਰਾਸ਼ੀ $s - b$ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਵੇਚ ਮੁੱਲ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਚਲ ਲਾਗਤ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਾਧੂ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬਹੁਤ ਅਧਿਕ ਮਾਤਰਾ ਉਤਪੰਨ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਚਲ ਲਾਗਤ ਨੂੰ ਘੱਟ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਵੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ 1000 ਲੀਟਰ ਖਾਰਾ ਜਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀ ਲੀਟਰ 250 g ਖਾਰਾ ਹੈ। 200 g/L ਖਾਰਾ ਵਾਲਾ ਖਾਰਾ ਜਲ, 25 L/min ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮਿਸ਼ਰਣ ਸਮਾਨ ਦਰ ਨਾਲ ਟੈਂਕ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਨਿਕਲ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਪਗ 1 ਇੱਥੇ ਸਥਿਤੀ ਸਰਲਤਾ ਦੇ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਨਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ।

ਪਗ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = y(t)$ ਦੁਆਰਾ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਆਰੰਭ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਅਦ, ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t (ਮਿੰਟ ਵਿੱਚ) ਤੇ, ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਉਪਸਥਿਤ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (ਕਿਲੋਗਰਾਮ ਵਿੱਚ) ਸੂਚਿਤ (ਪ੍ਰਗਟ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ $t = 0$, ਅਰਥਾਤ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $y = 250 \text{ g} \times 1000 = 250 \text{ kg}$ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ y ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ, ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ, ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ 5 kg/min (ਕਿਉਂਕਿ $25 \times 200 \text{ g} = 5 \text{ kg}$) ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਖਾਰਾ ਲਿਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦਾ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ $25\left(\frac{y}{1000}\right) = \frac{y}{40}$ kg/min

(ਕਿਉਂਕਿ t ਸਮੇਂ ਤੇ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ $\frac{y}{1000}$ kg ਹੈ।)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ t ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਦੀ ਦਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dt} = 5 - \frac{y}{40} \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਜਾਂ

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{40}y = 5 \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਪਗ 3. ਨਤੀਜਾ /ਪਰਿਣਾਮ (1) ਇੱਕ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਸਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$y e^{\frac{t}{40}} = 200 e^{\frac{t}{40}} + C \quad \text{ਜਾਂ} \quad y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (2)$$

ਜਿੱਥੇ C ਇੰਟਰਗਰੇਸ਼ਨ/ਅਨੁਕੂਲਨ ਅਚੱਲ ਹੈ

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ $t = 0, y = 250$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $250 = 200 + C$

ਜਾਂ $C = 50$

ਤਦ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ

$$y = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{40}} \qquad \ldots (3)$$

ਜਾਂ

$$\frac{y - 200}{50} = e^{-\frac{t}{40}}$$

ਜਾਂ
$$e^{\frac{t}{40}} = \frac{50}{y-200}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$t = 40\log\left(\frac{50}{y-200}\right) \qquad \ldots (4)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਉਹ ਸਮਾਂ t ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ y kg ਹੈ।

ਚਰਣ 4. ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਮੇਸ਼ਾ $y > 200$ ਕਿਉਂਕਿ $e^{-\frac{t}{40}}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟੈਂਕ ਵਿੱਚ ਖਾਰੇ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਤਰਾ ਲਗਭਗ 200 kg (ਪਰੰਤੂ ਠੀਕ ਠੀਕ 200 kg ਨਹੀਂ) ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $t > 0$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $0 < y$ ï $200 < 50$ ਅਰਥਾਤ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $200 < y < 250$ ਅਧੀਨ ਟੈਂਕ ਦੇ ਖਾਰੇ ਜਲ ਦੇ ਅੰਤਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਖਾਰੇ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 200 kg ਅਤੇ 250 kg ਦੇ ਮੱਧ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ (Limitations)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਨੇਕ ਗਣਿਤੀ ਮਾਡਲ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ (application) ਬਹੁਤ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਗੰਭੀਰਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾਪੂਰਵਕ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ। ਕੁੱਝ ਵਿਸ਼ੇ ਜਿਵੇਂ ਗਣਿਤੀ, ਭੌਤਿਕੀ, ਗਣਿਤੀ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ, ਸੰਕਿਰਿਆ ਵਿਗਿਆਨ (operations research)] ਜੀਵ ਗਣਿਤ (Bio-mathematics) ਆਦਿ, ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੇ (ਲਗਭਗ) ਸਮਾਨਅਰਥੀ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ ਅੱਜ ਵੀ ਕਈ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਮਾਡਲ ਅਜੇ ਬਣਨੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਕਾਰਣ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਬਹੁਤ ਜਟਿਲ ਹਨ ਜਾਂ ਵਿਕਸਿਤ ਮਾਡਲ ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਪੇਚੀਦਾ ਹਨ।

ਸ਼ਕਤੀਸ਼ਾਲੀ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਅਤੇ ਸੁਪਰ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ (Super Computers) ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਨੇ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਲਈ, ਗਣਿਤ ਅਨੁਸਾਰ ਮਾਡਲ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਯੋਗ ਬਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਤੇਜ਼ (fast) ਅਤੇ ਉੱਨਤ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੇ ਕਾਰਣ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੋ ਸਕਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਵਧੇਰੇ ਯਥਾਰਥ ਮਾਡਲਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਨਾਲ ਵੱਧ ਸਹਿਮਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਡੇ ਕੋਲ, ਕਿਸੇ ਗਣਿਤਕ ਮਾਡਲ ਵਿੱਚ ਯੁਕਤ ਵਿਭਿੰਨ ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਚਲਾਂ ਦੇ ਮੂਲਅੰਕਣ ਹਿੱਤ ਵਧੇਰੇ ਮਾਰਗਦਰਸ਼ਨ ਸਿਧਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪੰਜ ਨਾਂ ਛੇ ਚਲਾਂ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਕੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਕੜੇ ਦੇ ਲਈ ਬਹੁਤ ਹੱਦ ਤੱਕ ਵਿਅਰਥ (accurate) ਮਾਡਲਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਠੀਕ ਠੀਕ ਮੁਲੰਕਣ ਹਿੱਤ ਸਾਨੂੰ ਚਲਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਰੱਖਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਵੱਡੀ ਜਟਿਲ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇ ਗਣਿਤਕ ਨਿਦਰਸ਼ਨ ਦੀ ਆਪਣੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੱਸਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਪਰਿਸਥਿਤੀਆਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਵਾਤਾਵਰਣ (environment)] ਸਮੁੰਦਰ ਵਿਗਿਆਨ (oceanography)] ਜੰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਿਯੰਤਰਣ (population control) ਆਦਿ ਦੇ ਲੋਕ ਨਿਦਰਸ਼ਾਂ (world models) ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਿੱਖਿਆ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਾਖਾਵਾਂ ਗਣਿਤ, ਕੰਪਿਊਟਰ ਵਿਗਿਆਨ, ਭੌਤਿਕੀ, ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ, ਸਮਾਜ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਤੇ ਗਣਿਤੀ ਨਿਦਰਸ਼ਨ, ਇਸ ਚੁਣੌਤੀ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਸਾਹਸਪੂਰਵਕ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. (i) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ

(ii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ

(iii) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ ਪਰੰਤੂ ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ

(iv) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ

(v) (a) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ

(b) ਨਿੱਜਵਾਚਕ, ਸਮਮਿਤਈ ਅਤੇ ਸਕਰਮਕ

(c) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਤਾਂ ਸਕਰਮਕ

(d) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਪਰੰਤੂ ਸਕਰਮਕ

(e) ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਕਰਮਕ

3. ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ

5. ਨਿੱਜਵਾਚਕ ਨਹੀਂ, ਸਮਮਿਤਈ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਨਾ ਸਕਰਮਕ

9. (i) {1, 5, 9}, (ii) {1}

12. T_1 ਅਤੇ T_3 ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ।

13. ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਨਿੱਜਵਾਚਕ

14. ਸਾਰੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 2x + c, c \in \mathbf{R}$ ਦਾ ਨਿੱਜਵਾਚਕ

15. B

16. C

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਨਹੀਂ

2. (i) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ

(ii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ

(iii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ

(iv) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ

(v) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਰਜੈਕਟਿਵ ਨਹੀਂ

7. (i) ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਸਰਜੈਕਟਿਵ

(ii) ਨਾ ਤਾਂ ਇੰਜੈਕਟਿਵ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਰਜੈਕਟਿਵ

9. ਨਹੀਂ

10. ਹਾਂ

11. D

12. A

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. $gof = \{(1, 3), (3,1), (4,3)\}$

3. (i) $(gof)(x) = |5|x| - 2|$, $(fog)(x) = |5x - 2|$

(ii) $(gof)(x) = 2x$, $(fog)(x) = 8x$

4. f ਦਾ ਉਲਟ ਖੁਦ f ਹੀ ਹੈ

5. (i) ਨਹੀਂ, ਕਿਉਂਕਿ f ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। (ii) ਨਹੀਂ ਕਿਉਂਕਿ g ਇੱਕ ਬਹੁ-ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ।

(iii) ਹਾਂ, ਕਿਉਂਕਿ h ਇੱਕ, ਇੱਕ-ਇੱਕ ਅਤੇ ਔਨਟੂ ਫਲਨ ਹੈ।

6. f^{-1}, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{1-y}$, $y \neq 1$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ **7.** f^{-1}, $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{4}$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

11. f^{-1}, $f^{-1}(a) = 1, f^{-1}(b) = 2$ ਅਤੇ $f^{-1}(c) = 3$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਹੈ।

13. (C) **14.** (B)

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. (i) ਨਹੀਂ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ (iv) ਹਾਂ (v) ਹਾਂ

2. (i) ∗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਹਿਚਰ ਹੈ।

(ii) ∗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ।

(iii) ∗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਹਨ।

(iv) ∗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਸਹਿਚਰ ਨਹੀਂ।

(v) ∗ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਨਾ ਤਾਂ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਹਿਚਰ।

(vi) ∗ ਨਾ ਤਾਂ ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਹਿਚਰ।

3.

∧	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3
4	1	2	3	4	4
5	1	2	3	4	5

4. (i) $(2 * 3) * 4 = 1$ ਅਤੇ $2 * (3 * 4) = 1$ (ii) ਹਾਂ (iii) 1

5. ਹਾਂ

6. (i) $5 * 7 = 35$, $20 * 16 = 80$ (ii) ਹਾਂ (iii) ਹਾਂ (iv) 1 (v) 1

7. ਨਹੀਂ **8.** ∗ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਅਤੇ ਸਹਿਚਰ ਦੋਵੇਂ ਹਨ, ∗ ਦੇ ਸਾਪੇਖ; **N** ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

9. (ii), (iv), (v) ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ। (v) ਸਹਿਚਰ ਹੈ। **10.** (V)

11. ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

12. (i) ਸੱਚ (ii) ਝੂਠ **13.** B

ਅਧਿਆਇ 1 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $g(y)=\dfrac{y-7}{10}$ **2.** f ਦਾ ਉਲਟ ਖੁਦ f ਹੈ।

3. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 3x$ **8.** ਨਹੀਂ **10.** $n!$

11. (i) $F^{-1} = \{(3, a), (2, b), (1, c)\}$, (ii) F^{-1} ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ। **12.** ਨਹੀਂ

15. ਹਾਂ **16.** A **17.** B **18.** ਨਹੀਂ

19. B

ਅਭਿਆਸ 2.1

1. $\dfrac{-\pi}{6}$ **2.** $\dfrac{\pi}{6}$ **3.** $\dfrac{\pi}{6}$ **4.** $\dfrac{-\pi}{3}$

5. $\dfrac{2\pi}{3}$ **6.** $-\dfrac{\pi}{4}$ **7.** $\dfrac{\pi}{6}$ **8.** $\dfrac{\pi}{6}$

9. $\dfrac{3\pi}{4}$ **10.** $\dfrac{-\pi}{4}$ **11.** $\dfrac{3\pi}{4}$ **12.** $\dfrac{2\pi}{3}$

13. B **14.** B

ਅਭਿਆਸ 2.2

5. $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x$ **6.** $\dfrac{\pi}{2} - \sec^{-1}x$ **7.** $\dfrac{x}{2}$ **8.** $\dfrac{\pi}{4}-x$

9. $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ **10.** $3\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ **11.** $\dfrac{\pi}{4}$ **12.** 0

13. $\dfrac{x+y}{1-xy}$ **14.** $\dfrac{1}{5}$ **15.** $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **16.** $\dfrac{\pi}{3}$

17. $\dfrac{-\pi}{4}$ **18.** $\dfrac{17}{6}$ **19.** B **20.** D

21. B

ਅਧਿਆਇ 2 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\dfrac{\pi}{6}$ **2.** $\dfrac{\pi}{6}$ **13.** $x=\dfrac{\pi}{4}$ **14.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

15. D **16.** C **17.** C

ਅਭਿਆਸ 3.1

1. (i) 3×4 (ii) 12 (iii) $19, 35, -5, 12, \frac{5}{2}$

2. $1 \times 24, 2 \times 12, 3 \times 8, 4 \times 6, 6 \times 4, 8 \times 3, 12 \times 2, 24 \times 1; 1 \times 13, 13 \times 1$

3. $1 \times 18, 2 \times 9, 3 \times 6, 6 \times 3, 9 \times 2, 18 \times 1; 1 \times 5, 5 \times 1$

4. (i) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. (i) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 4 & \frac{7}{2} & 3 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. (i) $x = 1, \quad y = 4, \quad z = 3$

(ii) $x = 4, \quad y = 2, \quad z = 0$ or $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 0$

(iii) $x = 2, \quad y = 4, \quad z = 3$

7. $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$

8. C **9.** B **10.** D

ਅਭਿਆਸ 3.2

1. (i) $A + B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (ii) $A - B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A - C = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ (iv) $AB = \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$ (v) $BA = \begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. (i) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

4. $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, B-C = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. (i) $X = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-12}{5} \\ \frac{-11}{5} & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{13}{5} \\ \frac{14}{5} & -2 \end{bmatrix}$

8. $X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ **9.** $x = 3, y = 3$ **10.** $x = 3, y = 6, z = 9, t = 6$

11. $x = 3$, $y =$ ï 4 **12.** $x = 2, y = 4, w = 3, z = 1$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **17.** $k = 1$

19. (a) Rs 15000, Rs 15000 (b) Rs 5000, Rs 25000

20. Rs 20160 **21.** A **22.** B

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. (i) $\begin{bmatrix} 5 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

10. (i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $A = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & -2 \\ \frac{-5}{2} & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{-5}{2} & 0 & 3 \\ \frac{-3}{2} & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. A **12.** B

ਅਭਿਆਸ 3.4

1. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **12.** ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

13. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

15. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-2}{5} & \frac{4}{25} & \frac{11}{25} \\ \frac{-3}{5} & \frac{1}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -15 & 6 & -5 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

18. D

ਅਧਿਆਇ 3 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

6. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

7. x = ï 1 **9.** $x = \pm 4\sqrt{3}$

10. (a) ਬਜ਼ਾਰ -I ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ = Rs 46000

ਬਜ਼ਾਰ-II ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ = Rs 53000

(b) Rs 15000, Rs 17000

11. $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **13.** C **14.** B **15.** C

ਅਭਿਆਸ 4.1

1. (i) 18 **2.** (i) 1, (ii) x^3 ï $x^2 + 2$

5. (i) ï 12, (ii) 46, (iii) 0, (iv) 5 **6.** 0

7. (i) $x = \pm\sqrt{3}$, (ii) $x = 2$ **8.** (B)

ਅਭਿਆਸ 4.2

15. C **16.** C

ਅਭਿਆਸ 4.3

1. (i) $\frac{15}{2}$, (ii) $\frac{47}{2}$, (iii) 15

3. (i) 0, 8, (ii) 0, 8 **4.** (i) $y = 2x$, (ii) x ï $3y = 0$ **5.** (D)

ਅਭਿਆਸ 4.4

1. (i) $M_{11} = 3, M_{12} = 0,\quad M_{21} = ï\ 4, M_{22} = 2, A_{11} = 3, A_{12} = 0, A_{21} = 4, A_{22} = 2$

(ii) $M_{11} = d, M_{12} = b,\ M_{21} = c,\quad M_{22} = a$

$A_{11} = d,\ A_{12} = ï\ b, A_{21} = ï\ c,\ A_{22} = a$

2. (i) $M_{11} = 1, M_{12} = 0, M_{13} = 0,\ M_{21} = 0, M_{22} = 1, M_{23} = 0, M_{31} = 0, M_{32} = 0, M_{33} = 1,$

$A_{11} = 1, A_{12} = 0,\quad A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = 1, A_{23} = 0,\quad A_{31} = 0,\quad A_{32} = 0,\quad A_{33} = 1$

(ii) $M_{11} = 11, M_{12} = 6,\ M_{13} = 3, M_{21} = ï\,4, M_{22} = 2, M_{23} = 1,\ M_{31} = ï\,20, M_{32} = ï\,13, M_{33} = 5$

$A_{11} = 11,\ A_{12} = ï\ 6, A_{13} = 3,\ A_{21} = 4,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = ï\,1, A_{31} = ï\,20, A_{32} = 13, A_{33} = 5$

3. 7 **4.** $(x\ ï\ y)(y\ ï\ z)(z\ ï\ x)$ **5.** (D)

ਅਭਿਆਸ 4.5

1. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. $\frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & ï\ \cos\alpha \end{bmatrix}$

13. $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ **14.** $a = ï\ 4, b = 1$ **15.** $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **17.** B **18.** B

ਅਭਿਆਸ 4.6

1. ਸੰਗਤ
2. ਸੰਗਤ
3. ਅਸੰਗਤ
4. ਸੰਗਤ
5. ਅਸੰਗਤ
6. ਸੰਗਤ

7. $x = 2, y =$ ï 3
8. $x = \dfrac{-5}{11}, \; y = \dfrac{12}{11}$
9. $x = \dfrac{-6}{11}, \; y = \dfrac{-19}{11}$

10. $x =$ ï $1, y = 4$
11. $x = 1, \; y = \dfrac{1}{2}, \; z = \dfrac{-3}{2}$

12. $x = 2, y =$ ï $1, z = 1$
13. $x = 1, y = 2, z =$ ï 1

14. $x = 2, y = 1, z = 3$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{bmatrix}, x = 1, y = 2, z = 3$

16. ਪਿਆਜ਼ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 5
ਕਣਕ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 8
ਚੌਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤਿ kg = Rs 8

ਅਧਿਆਇ 4 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

3. 1
5. $x = \dfrac{-a}{3}$
7. $\begin{bmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. ï $2(x^3 + y^3)$
10. xy
16. $x = 2, y = 3, z = 5$

17. A
18. A
19. D

ਅਭਿਆਸ 5.1

2. f, $x = 3$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

3. (a), (b), (c) ਅਤੇ (d) ਸਾਰੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ।

5. f, $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ $x = 1$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ

6. $x = 2$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ
7. $x = 3$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ

8. $x = 0$ 'ਤੇ ਟੁੱਟਵਾਂ ਹੈ
9. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ

10. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ
11. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ

12. $x = 1$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ **13.** $x = 1$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

14. $x = 1$ ਅਤੇ $x = 3$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

15. ਕੇਵਲ $x = 1$ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

16. ਲਗਾਤਾਰ **17.** $a = b + \frac{2}{3}$

18. λ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ f, $x = 0$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ ਪਰੰਤੂ f, λ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ $x = 1$ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

20. $x = \pi$ 'ਤੇ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **21.** (a), (b) ਅਤੇ (c) ਸਾਰੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹਨ।

22. ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ cosine ਫਲਨ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ cosecant ਫਲਨ $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ secant ਫਲਨ $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ cotangent ਫਲਨ, $x = n\pi, n \in \mathbf{Z}$ ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

23. ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

24. ਹਾਂ, ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ। **25.** ਹਰੇਕ $x \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ f ਲਗਾਤਾਰ ਹੈ।

26. $k = 6$ **27.** $k = \frac{3}{4}$ **28.** $k = \frac{-2}{\pi}$

29. $k = \frac{9}{5}$ **30.** $a = 2, b = 1$ **34.** ਕੋਈ ਟੋਟ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 5.2

1. $2x \cos(x^2 + 5)$ **2.** ï $\cos x \sin(\sin x)$ **3.** $a \cos(ax + b)$

4. $\dfrac{\sec(\tan\sqrt{x}).\tan(\tan\sqrt{x}).\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

5. $a \cos(ax + b) \sec(cx + d) + c \sin(ax + b) \tan(cx + d) \sec(cx + d)$

6. $10x^4 \sin x^5 \cos x^5 \cos x^3$ ï $3x^2 \sin x^3 \sin^2 x^5$

7. $\dfrac{-2\sqrt{2}\,x}{\sin x^2\sqrt{\sin 2x^2}}$ **8.** $-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ਅਭਿਆਸ 5.3

1. $\dfrac{\cos x - 2}{3}$ **2.** $\dfrac{2}{\cos y - 3}$ **3.** $-\dfrac{a}{2by + \sin y}$

4. $\dfrac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$ **5.** $-\dfrac{(2x+y)}{(x+2y)}$ **6.** $-\dfrac{(3x^2+2xy+y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)}$

7. $\dfrac{y \sin xy}{\sin 2y - x \sin xy}$ **8.** $\dfrac{\sin 2x}{\sin 2y}$ **9.** $\dfrac{2}{1+x^2}$ **10.** $\dfrac{3}{1+x^2}$

11. $\dfrac{2}{1+x^2}$ **12.** $\dfrac{-2}{1+x^2}$ **13.** $\dfrac{-2}{1+x^2}$ **14.** $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

ਅਭਿਆਸ 5.4

1. $\dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}$ **2.** $\dfrac{e^{\sin^{-1} x}}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1, 1)$

3. $3x^2 e^{x^3}$ **4.** $-\dfrac{e^{-x}\cos(\tan^{-1} e^{-x})}{1+e^{-2x}}$

5. $-e^x \tan e^x,\ e^x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n \in \mathbf{N}$ **6.** $e^x + 2x e^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$

7. $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}, x > 0$ **8.** $\dfrac{1}{x \log x}, x > 1$

9. $-\dfrac{(x \sin x \cdot \log x + \cos x)}{x (\log x)^2}, x > 0$ **10.** $-\left(\dfrac{1}{x} + e^x\right) \sin(\log x + e^x), x > 0$

ਅਭਿਆਸ 5.5

1. $-\cos x \cos 2x \cos 3x\ [\tan x + 2 \tan 2x + 3 \tan 3x]$

2. $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-5}\right]$

3. $(\log x)^{\cos x}\left[\dfrac{\cos x}{x \log x} - \sin x \log(\log x)\right]$

4. $x^x(1 + \log x) - 2^{\sin x} \cos x \log 2$

5. $(x+3)(x+4)^2(x+5)^3(9x^2+70x+133)$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}+\log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]+x^{1+\frac{1}{x}}\left(\frac{x+1-\log x}{x^2}\right)$

7. $(\log x)^{x-1}$ [1 + log x . log (log x)] + 2$x^{\log x}$ï 1 . log$x$

8. $(\sin x)^x$ (x cot x + log sin x) + $\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

9. $x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x}+\cos x\log x\right]$ + $(\sin x)^{\cos x}$ [cos x cot x ï sin x log sin x]

10. $x^{x\cos x}$ [cos x . (1 + log x) ï x sin x log x] ï $\frac{4x}{(x^2-1)^2}$

11. $(x\cos x)^x$ [1 ï x tan x + log (x cos x)] + $(x\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{x\cot x+1-\log(x\sin x)}{x^2}\right]$

12. $-\frac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}$

13. $\frac{y}{x}\left(\frac{y-x\log y}{x-y\log x}\right)$

14. $\frac{y\tan x+\log\cos y}{x\tan y+\log\cos x}$

15. $\frac{y(x-1)}{x(y+1)}$

16. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\frac{1}{1+x}+\frac{2x}{1+x^2}+\frac{4x^3}{1+x^4}+\frac{8x^7}{1+x^8}\right]$; $f'(1) = 120$

17. $5x^4$ ï $20x^3 + 45x^2$ ï $52x + 11$

ਅਭਿਆਸ 5.6

1. t^2 **2.** $\frac{b}{a}$ **3.** ï 4 sin t **4.** $-\frac{1}{t^2}$

5. $\frac{\cos\theta-2\cos 2\theta}{2\sin 2\theta-\sin\theta}$ **6.** $-\cot\frac{\theta}{2}$ **7.** ï cot 3t **8.** tan t

9. $\frac{b}{a}\operatorname{cosec}\theta$ **10.** tan θ

ਅਭਿਆਸ 5.7

1. 2 **2.** 380 x^{18} **3.** ï x cos x ï 2 sin x

4. $-\frac{1}{x^2}$ **5.** x(5 + 6 log x) **6.** 2e^x(5 cos 5x ï 12 sin 5x)

7. $9e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$ **8.** $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$

9. $-\dfrac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$ **10.** $-\dfrac{\sin(\log x)+\cos(\log x)}{x^2}$

12. $-\cot y\,\mathrm{cosec}^2\, y$

ਅਧਿਆਇ 5 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $27(3x^2 - 9x + 5)^8(2x - 3)$ **2.** $3\sin x\cos x(\sin x - 2\cos^4 x)$

3. $(5x)^{3\cos 2x}\left[\dfrac{3\cos 2x}{x} - 6\sin 2x\log 5x\right]$

4. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{x}{1-x^3}}$ **5.** $-\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{2x+7}} + \dfrac{\cos^{-1}\dfrac{x}{2}}{(2x+7)^{\frac{3}{2}}}\right]$

6. $\dfrac{1}{2}$ **7.** $(\log x)^{\log x}\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{\log(\log x)}{x}\right], x > 1$

8. $(a\sin x - b\cos x)\sin(a\cos x + b\sin x)$

9. $(\sin x - \cos x)^{\sin x - \cos x}(\cos x + \sin x)(1 + \log(\sin x - \cos x)), \sin x > \cos x$

10. $x^x(1 + \log x) + ax^{a-1} + a^x\log a$

11. $x^{x^2-3}\left[\dfrac{x^2-3}{x} + 2x\log x\right] + (x-3)^{x^2}\left[\dfrac{x^2}{x-3} + 2x\log(x-3)\right]$

12. $\dfrac{6}{5}\cot\dfrac{t}{2}$ **13.** 0 **17.** $\dfrac{\sec^3 t}{at}, 0 < t < \dfrac{\pi}{2}$

ਅਭਿਆਸ 6.1

1. (a) 6π cm²/cm (b) 8π cm²/cm

2. $\dfrac{8}{3}$ cm²/s **3.** 60π cm²/s **4.** 900 cm³/s

5. 80π cm²/s **6.** 1.4π cm/s

7. (a) -2 cm/min (b) 2 cm²/min

8. $\dfrac{1}{\pi}$ cm/s **9.** 400π cm³/cm **10.** $\dfrac{8}{3}$ cm/s

11. (4, 11) and $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$ **12.** 2π cm^3/s

13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$ **14.** $\frac{1}{48\pi}$ cm/s **15.** Rs 20.967

16. Rs 208 **17.** B **18.** D

ਅਭਿਆਸ 6.2

4. (a) $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ (b) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$

5. (a) (ï ∞, ï 2) and (3, ∞) (b) (ï 2, 3)

6. (a) $x <$ ï 1 ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਅਤੇ $x >$ ï 1 ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ

(b) $x > -\frac{3}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ ਅਤੇ $x < -\frac{3}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ

(c) ï 2 < x < ï 1 ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ x < ï 2 ਅਤੇ x > ï 1 ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

(d) $x < -\frac{9}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ $x > -\frac{9}{2}$ ਦੇ ਲਈ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

(e) (1, 3) ਅਤੇ (3, ∞), ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਵਧਦਾ ਅਤੇ (ï ∞, ï 1) ਅਤੇ (ï 1, 1) ਵਿੱਚ ਸਖਤੀ ਨਾਲ ਘਟਦਾ

8. $0 < x < 1$ ਅਤੇ $x > 2$ **12.** A, B

13. D **14.** a = ï 2 **19.** D

ਅਭਿਆਸ 6.2

1. 764 **2.** $\frac{-1}{64}$ **3.** 11 **4.** 24

5. 1 **6.** $\frac{-a}{2b}$ **7.** (3, ï 20) ਅਤੇ (ï 1, 12)

8. (3, 1) **9.** (2, ï 9)

10. (i) $y + x + 1 = 0$ ਅਤੇ $y + x$ ï 3 = 0

11. ਵਕਰ 'ਤੇ ਕੋਈ ਅਜਿਹੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਹੀਂ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਨ 2 ਹੋਵੇ।

12. $y = \frac{1}{2}$ **13.** (i) (0, ± 4) (ii) (± 3, 0)

14. (i) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $10x + y = 5$; ਅਭਿਲੰਬ : x ï $10y + 50 = 0$

(ii) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $y = 2x + 1$; ਅਭਿਲੰਬ : $x + 2y$ ï $7 = 0$

(iii) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $y = 3x$ ï 2; ਅਭਿਲੰਬ : $x + 3y$ ï $4 = 0$

(iv) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $y = 0$; ਅਭਿਲੰਬ : $x = 0$

(v) ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ : $x + y - \sqrt{2} = 0$; ਅਭਿਲੰਬ $x = y$

15. (a) y ï $2x$ ï $3 = 0$ (b) $36y + 12x$ ï $227 = 0$

17. (0, 0), (3, 27) **18.** (0, 0), (1, 2), (ï 1, ï 2)

19. $(1, \pm 2)$ **20.** $2x + 3my$ ï $am^2 (2 + 3m^2) = 0$

21. $x + 14y$ ï $254 = 0$, $x + 14y + 86 = 0$

22. $ty = x + at^2$, $y =$ ï $tx + 2at + at^3$

24. $\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1, \ \frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

25. $48x$ ï $24y = 23$ **26.** D **27.** A

ਅਭਿਆਸ 6.4

1. (i) 5.03 (ii) 7.035 (iii) 0.8

(iv) 0.208 (v) 0.9999 (vi) 1.96875

(vii) 2.9629 (viii) 3.9961 (ix) 3.009

(x) 20.025 (xi) 0.06083 (xii) 2.984

(xiii) 3.0046 (xiv) 7.904 (xv) 2.00187

2. 28.21 **3.** ï 34.995 **4.** $0.03\, x^3$ m^3

5. $0.12\, x^2$ m^2 **6.** $3.92\, \pi$ m^3 **7.** $2.16\, \pi$ m^2

8. D **9.** C

ਅਭਿਆਸ 6.5

1. (i) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 3 (ii) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = ï 2

(iii) ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 10 (iv) ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ

2. (i) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = ï 1; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ

(ii) ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 3; ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ

(iii) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ = 4; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ = 6

(iv) ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 2$; ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 4$

(v) ਨਾ ਤਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ

3. (i) $x = 0$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= 0$

(ii) $x = 1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= -2$

$x = -1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= 2$

(iii) $x = \frac{\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= \sqrt{2}$

(iv) $x = \frac{3\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= \sqrt{2}$

$x = \frac{7\pi}{4}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= -\sqrt{2}$

(v) $x = 1$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, $= 19$

$x = 3$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= 15$

(vi) $x = 2$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ, ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ, $= 2$

(vii) $x = 0$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{1}{2}$

(viii) $x = \frac{2}{3}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ , ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

5. (i) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -8$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 8$

(ii) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -1$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \sqrt{2}$

(iii) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -10$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 8$

(iv) ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 3$, ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 19$

6. ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ = 113 ਇਕਾਈ

7. $x = 2$ 'ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= -39$, $x = 0$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 25$.

8. $x = \frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $\frac{5\pi}{4}$ 'ਤੇ

9. ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \sqrt{2}$

10. $x = 3$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 89; $x = -2$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 139$

11. $a = 120$

12. $x = 2\pi$ 'ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ, ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= 2\pi$; $x = 0$ 'ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ, ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 0$

13. 12, 12 **14.** 45, 15 **15.** 25, 10 **16.** 8, 8

17. 3 cm **18.** $x = 5$ cm

21. ਅਰਧ ਵਿਆਸ $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm ਅਤੇ ਉਚਾਈ $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm

22. $\frac{112}{\pi+4}$ cm, $\frac{28\pi}{\pi+4}$ cm **27.** A **28.** D **29.** C

ਅਧਿਆਇ 6 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (a) 0.677 (b) 0.497

3. $b\sqrt{3}$ cm^2/s **4.** $x + y$ ï $3 = 0$

6. (i) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ ਅਤੇ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

7. (i) $x <$ ï 1 ਅਤੇ $x > 1$ (ii) ï $1 < x < 1$

8. $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$ **9.** Rs 1000

11. ਲੰਬਾਈ $= \frac{20}{\pi+4}$ m, ਚੌੜਾਈ $= \frac{10}{\pi+4}$ m

13. (i) $x = \frac{2}{7}$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਅਧਿਕਤਮ (ii) $x = 2$ 'ਤੇ ਸਥਾਨਕ ਨਿਊਨਤਮ

(iii) $x =$ ï 1 'ਤੇ ਇਨਫਲੈਕਸ਼ਨ ਬਿੰਦੂ

14. ਨਿਰਪੇਖ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ $= \frac{5}{4}$, ਨਿਰਪੇਖ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ $= 1$

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ **19.** A **20.** B **21.** A

22. B **23.** A **24.** A

ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮੱਗਰੀ

ਅਭਿਆਸ 5

ਪ੍ਰਮੇਯ 5 (ਪੰਨਾ 190 'ਤੇ ਸਿਰਲੇਖ "ਪ੍ਰਮੇਯ" ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਹੈ)

(i) ਚਲ ਘਾਤੀ ਫਲਨ $f(x) = e^x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

ਜੇਕਰ $f(x) = e^x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= e^x \cdot 1 \quad [\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1] \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ਹੈ।

(ii) ਲਘੂਗਣਕੀ ਫਲਨ $f(x) = \log_e x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ

ਜੇਕਰ $f(x) = \log_e x$ ਹੈ, ਤਾਂ

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e (x+\Delta x) - \log_e x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\log_e \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \quad \left[\text{ਕਿਉਂਕਿ } \lim_{h \to 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1\right]$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{d}{dx} \log_e x = \frac{1}{x}$ ਹੈ।