Final

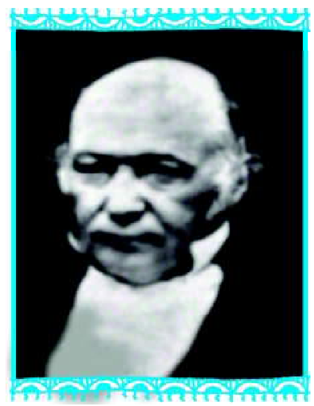
ਅਧਿਆਇ 10

ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਬੀਜ ਗਣਿਤ (Vector Algebra)

❖ *In most sciences one generation tears down what another has built and what one has established another undoes. In Mathematics alone each generation builds a new story to the old structure. – HERMAN HANKEL* ❖

10.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਸਾਨੂੰ ਆਪਣੇ ਦੈਨਿਕ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਮਿਲਦੇ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਹਾਡੀ ਉਚਾਈ ਕੀ ਹੈ ? ਇੱਕ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਖਿਡਾਰੀ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਟੀਮ ਦੇ ਦੂਜੇ ਖਿਡਾਰੀ ਕੋਲ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਪਹੁੰਚਾਉਣ ਲਈ ਗੇਂਦ ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਹਾਰ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ? ਪ੍ਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਸੰਭਾਵਿਤ ਉੱਤਰ 1.6 ਮੀਟਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ (ਸਿਰਫ) ਇੱਕ ਕੀਮਤ (ਅਕਾਰ) ਜੋ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਸਕੇਲਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਪਰ ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਬਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ) ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਾਸਪੇਸ਼ੀਆਂ ਦੀ ਸ਼ਕਤੀ ਅਕਾਰ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਦਿਸ਼ਾ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਖਿਲਾੜੀ ਸਥਿਤ ਹੈ) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਅਜਿਹੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਗਣਿਤ, ਭੌਤਿਕ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਭਾਵ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਲੰਬਾਈ, ਪੁੰਜ, ਸਮੇਂ, ਦੂਰੀ, ਗਤੀ, ਖੇਤਰਫਲ, ਆਇਤਨ, ਤਾਪਮਾਨ, ਕੰਮ, ਧਨ, ਵੋਲਟੇਜ ਘਣਤਾ, ਪ੍ਰਤੀਰੋਧਕ ਆਦਿ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਜਿਵੇਂ ਵਿਸਥਾਪਨ, ਵੇਗ, ਪ੍ਰਵੇਗ, ਬਲ ਭਾਰ, ਘੁੰਮਣ (ਮੂਵਮੈਂਟ) ਬਿਜਲਈ ਖੇਤਰ ਦੀ ਤੀਬਰਤਾ ਆਦਿ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ।



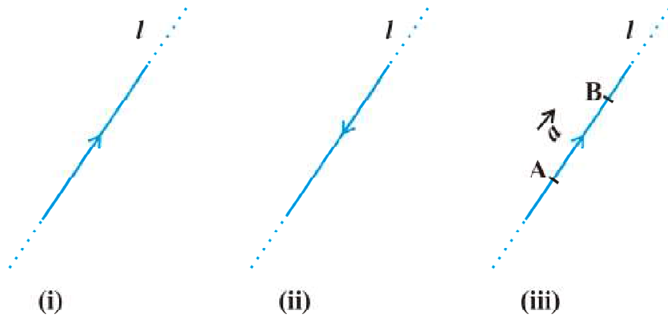
W.R. Hamilton (1805-1865)

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਕੁਝ ਅਧਾਰਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ, ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਵਿਭਿੰਨ ਸੰਕਿਰਿਆ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜਕ ਅਤੇ ਜਿਉਮੈਟ੍ਰਿਕ ਗੁਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਅਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਮਿਲਿਆ ਰੂਪ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਦਾ ਪੂਰਨ ਸੋਝੀ (ਬੋਧ) ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਿਤ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਸ਼ਾਲ ਉਪਯੋਗਤਾ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

10.2 ਕੁਝ ਮੂਲ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (ਸੰਕਲਪ) (Some Basic Concepts)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਿਸੀ ਤਲ ਜਾਂ ਤਿੰਨ&ਵਿਮਾਈ ਪੁਲਾੜ ਵਿੱਚ l ਕੋਈ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਤੀਰ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਵੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.1 (i), (ii)]A

ਹੁਣ ਪ੍ਰੇਖਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ά ôਨੂੰ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੀ



ਚਿੱਤਰ 10.1

ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ά ôਦੇ ਅਕਾਰ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.1(iii))। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਹੁੰਦੇ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ : ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਰਾਸ਼ੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਦੋਨੋਂ ਹੈ, ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਰੇਖਾਖੰਡ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.1(iii)), ਜਿਸਨੂੰ $\overrightarrow{AB}$ ਜਾਂ ਸਧਾਰਨ $\vec{a}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ ^$\overrightarrow{AB}$* ਜਾਂ ਵੈਕਟਰ ^$\vec{a}$* ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

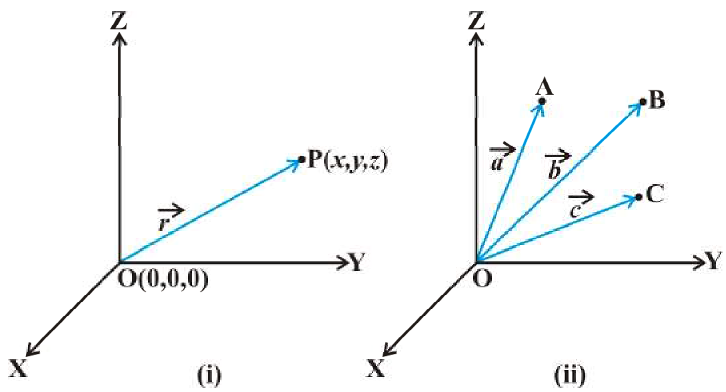
ਉਹ ਬਿੰਦੂ A ਜਿੱਥੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਆਰੰਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ B ਜਿੱਥੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$, ਖਤਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਵਾਲੀ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਅਕਾਰ (ਜਾਂ ਲੰਬਾਈ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $|\overrightarrow{AB}|$ ਜਾਂ $|\vec{a}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੀਰ ਦਾ ਨਿਸ਼ਾਨ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਉਂਕਿ ਲੰਬਾਈ ਕਦੀ ਵੀ ਰਿਣਾਤਮ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ $|\vec{a}| < 0$ ਦਾ ਕੋਈ ਅਰਥ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ (Position Vector)

ਕਲਾਸ XI ਤੋਂ, ਤਿੰਨ&ਵਿਮਾਈ ਸਮਕੋਣੀ ਅਧਿਤਕਾਰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ right handed rectangular Co-ordination System ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 10-2 (i))A ਪੁਲਾੜ ਵਿੱਚ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O (0, 0, 0) ਦੇ ਬਾਬਤ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ P ਲਵੋ ਜਿਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹੈ। ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ O ਅਤੇ P ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, O ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ (ਕਲਾਸ XI ਤੋਂ) ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $\overrightarrow{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) ਦਾ ਅਕਾਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



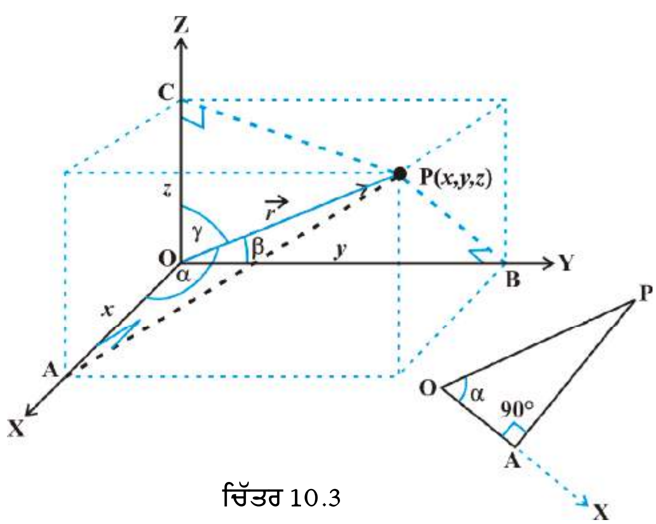
ਚਿੱਤਰ 10.2

ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਬਾਬਤ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਆਦਿ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ [ਚਿੱਤਰ 10.2(ii)]।

ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ (Direction Cosines)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $P(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) ਲਵੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੁਆਰਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਕੋਣ α, β, ਅਤੇ γ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਣ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕੋਮਾਇਨ ਕੀਮਤ ਭਾਵ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ਅਤੇ $\cos\gamma$ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ l, m ਅਤੇ n ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 10.3, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OAP ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤਿਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਿਕੋਣ ਤੋਂ ਅਸੀਂ



ਚਿੱਤਰ 10.3

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$ $\left(r \text{ ਨੂੰ } |\vec{r}| \text{ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ}\right)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OBP ਅਤੇ OCP ਤੋਂ ਅਸੀਂ $\cos\beta = \frac{y}{r}$ ਅਤੇ $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਭੁਜਾਂ ਨੂੰ (lr, mr, nr) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਾਹਿਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ lr, mr ਅਤੇ nr ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b, c ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ ਪਰ ਵਿਆਪਕ : $a^2 + b^2 + c^2 \neq 1$

10.3 ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ (Types of Vectors)

ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ [Zero (null) Vector] ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\vec{0}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਕੋਈ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦਿਸ਼ਾ ਪ੍ਰਦਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜ਼ੀਰੋ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਿਕਲਪੀ : ਇਸ ਨੂੰ ਕੋਈ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਧਾਰਨ ਕੀਤੇ ਹੋਏ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ (Unit Vector) ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਇੱਕ (ਭਾਵ 1 ਇਕਾਈ) ਹੈ, ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ $\hat{a}$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸਹਿ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ (Co-initial Vectors) ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵੈਕਟਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਸਹਿ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ (Collinear Vectors) ਦੋ ਜਾਂ ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਨਅੰਤਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

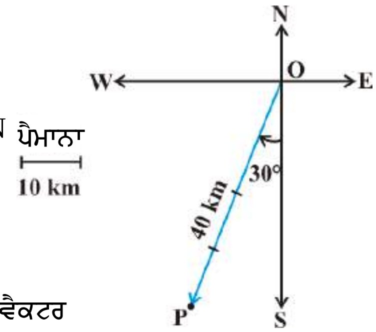
ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ (Equal Vectors) ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $\vec{a} = \vec{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਰਿਣਾਤਮਕ ਵੈਕਟਰ (Negative of a Vector) ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ (ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{AB}$) ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ, ਪਰ ਜਿਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਉਲਟ ਹੈ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ $\overrightarrow{BA}$, ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਬਦਲੀ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਆਪਣੇ ਸਮਾਨਾਂਤਰ ਵਿਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸੁਤੰਤਰ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ। ਇਸ ਪੂਰੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੁਤੰਤਰ (ਆਜ਼ਾਦ) ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਹੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਦੱਖਣ ਤੋਂ $30°$ ਪੱਛਮ ਵਿੱਚ, 40 km ਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}$ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.4 ਦੇਖੋ)A



ਚਿੱਤਰ 10.4

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।

(i) 5 s (ii) $1000\ cm^3$ (iii) 10 N
(iv) 30 km/h (v) $10\ g/cm^3$
(vi) 20 m/s ਉੱਤਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਹੱਲ :

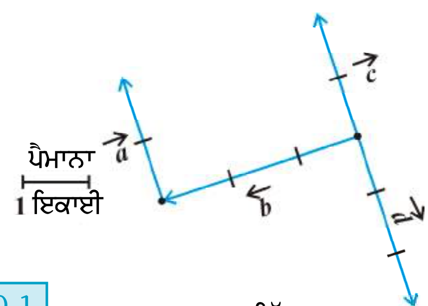
(i) ਸਮੇਂ–ਸਕੇਲਰ (ii) ਆਇਤਨ–ਸਕੇਲਰ (iii) ਬਲ–ਵੈਕਟਰ
(iv) ਗਤੀ–ਸਕੇਲਰ (v) ਘਣਤਾ–ਸਕੇਲਰ (vi) ਵੇਗ–ਵੈਕਟਰ

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਚਿੱਤਰ 10.5 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ?

(i) ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ
(ii) ਸਮਾਨ ਹੈ।
(iii) ਸਹਿ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) .... : $\vec{a}, \vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{d}$
(ii) ਸਮਾਨ ਵੈਕਟਰ : $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{c}$
(iii) ....ਵੈਕਟਰ : $\vec{b}, \vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{d}$

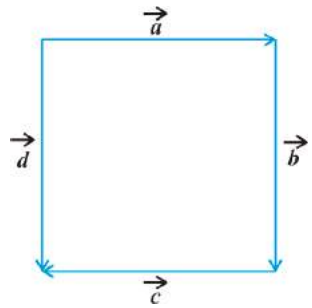


ਚਿੱਤਰ 10.5

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਉੱਤਰ ਤੋਂ 30° ਪੂਰਬ ਵਿੱਚ 40 km ਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਨਿਰੂਪਨ ਕਰੋ।
2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।
   (i) 10 kg (ii) 2 ਮੀਟਰ ਉੱਤਰ ਪੱਛਮ (iii) 40°
   (iv) 40 ਵੋਲਟ (v) 10^{-19} ਕੁਲਮ (vi) $20\ m/s^2$
3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨੂੰ ਸਕੇਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਣੀਬੱਧ ਕਰੋ।
   (i) ਸਮੇਂ ਦੀ ਮਿਆਦ (ii) ਦੂਰੀ (iii) ਬਲ
   (iv) ਵੇਗ (v) ਕੰਮ
4. ਚਿੱਤਰ 10.6 (ਇੱਕ ਵਰਗ) ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਚਾਣੋ।
   (i) ਸਹਿ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ (ii) ਸਮਾਨ
   (iii) ਸਮਰੇਖੀ ਪਰ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ

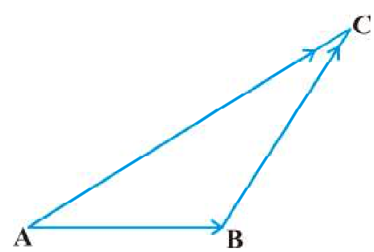
5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਾ ਉੱਤਰ ਸਹੀ ਜਾਂ ਗਲਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਉ।
   (i) $\vec{a}$ ਅਤੇ $-\vec{a}$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
   (ii) ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਅਕਾਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   (iii) ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
   (iv) ਸਮਾਨ ਅਕਾਰ ਵਾਲੇ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 10.6

10.4 ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ (Addition of Vectors)

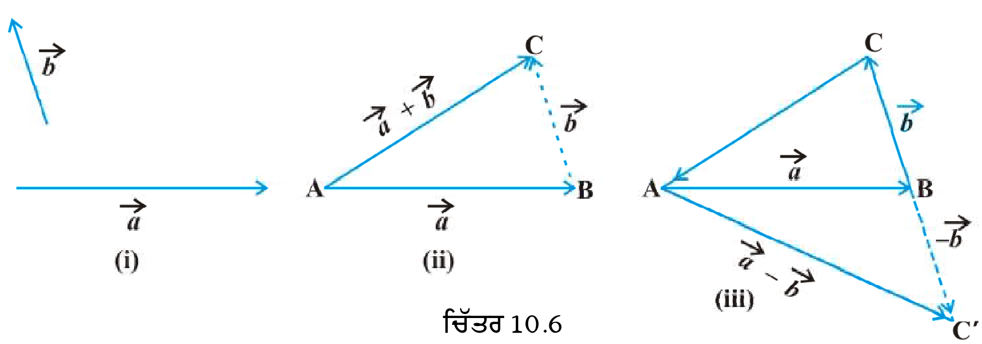
ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਵਿਸਥਾਪਨ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ B ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੱਕ ਚੱਲਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.7)। ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੱਕ ਲੜਕੀ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਕੁਲ ਵਿਸਥਾਪਨ ਜੋ ਵੈਕਟਰ ਕਿ $\overrightarrow{AC}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ : ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ10.8 (i)], ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂਕਿ ਇੱਕ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਦੂਜੇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਵੇ [ਚਿੱਤਰ 10.8(ii)]।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ : ਚਿੱਤਰ 10.8 (ii) ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਨੂੰ ਤਬਦੀਲ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਟਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ, $\vec{a}$ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਤੀਜੀ ਭੁਜਾ AC ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਸਾਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਜੋੜ (ਜਾਂ ਪਰਿਣਾਮੀ) ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ; ਭਾਵ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ਚਿੱਤਰ 10.8 (ii)]।



ਚਿੱਤਰ 10.6

ਹੁਣ ਦੁਬਾਰਾ : ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$, ਇਸ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਜੇਕਰ ਇਹ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਜੀਰੋ ਅਕਾਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਰੰਭਿਕ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ [ਚਿੱਤਰ 10.8(iii)]A

ਹੁਣ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BC'}$ ਦੀ ਰਚਨਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਅਕਾਰ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BC}$, ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇ, ਪਰ ਇਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ $\overrightarrow{BC}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਹੋਵੇ ਚਿੱਤਰ 10-8 (iii) ਭਾਵ $\overrightarrow{BC'} = -\overrightarrow{BC}$ ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ [ਚਿੱਤਰ 10-8 (iii)] ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'}$

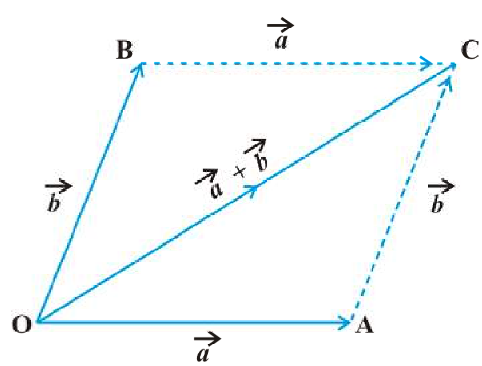
$= \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{BC}) = \vec{a} - \vec{b}$

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AC'}$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਕਿਸੀ ਨਦੀ ਦੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੱਕ ਪਾਣੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਨਾਉ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਇਸ ਨਾਵ (ਕਿਸ਼ਤੀ) ਤੇ ਦੋ ਵੇਗ ਵੈਕਟਰ ਕੰਮ ਕਰ ਰਹੇ ਹਨ, ਇੱਕ ਇੰਜਨ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸ਼ਤੀ ਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਵੇਗ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਨਦੀ ਦੇ ਪਾਣੀ ਦੇ ਵਹਾਅ ਦਾ ਵੇਗ। ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵੇਗਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠੇ ਪ੍ਰਭਾਵ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸ਼ਤੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਵੇਗ ਨਾਲ ਚੱਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਪ੍ਰਭਾਵੀ ਗਤੀ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ (ਭਾਵ ਵਿਲੋਪਣ ਵੇਗ) ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਵਿਚਾਰ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਨਿਯਮ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ (ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਹਿਤ) ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ rFkk $\vec{b}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.9) ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਵਿਕਰਣ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨੋਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਜੋੜ $\vec{a} + \vec{b}$ ਨੂੰ ਅਕਾਰ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਸਹਿਤ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਯਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

☛ *ਟਿੱਪਣੀ :* ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ 10. 9 ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ ਜਾਂ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ (ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$) ਜੋ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਨਿਯਮ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ ਦੇ ਦੋ ਨਿਯਮ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Properties of vector addition)

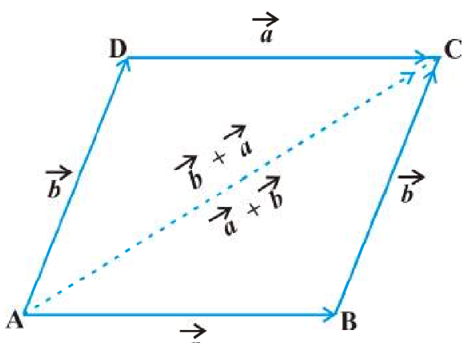
ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ rFk $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ

$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a} \qquad \text{(ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ)}$$

ਸਬੂਤ : ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਨੂੰ ਲਉ (ਚਿੱਤਰ 10.10) ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AC} = \vec{a}+\vec{b}$

ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁਖ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਤੇ ਸਮਾਂਨਤਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 10.10 ਵਿੱਚ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ vkj $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ADC ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = \vec{b}+\vec{a}$

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$



ਚਿੱਤਰ 10.10

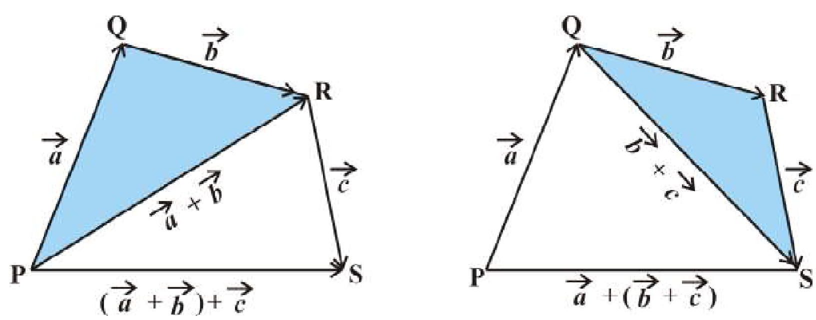
ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਮੰਨ ਲਉ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਵਾਸਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ)

ਵਿਸ਼ੇਸਤਾ : ਮੰਨ ਲਉ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{RS}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.11(i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਤਾਂ $\qquad \vec{a}+\vec{b} = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$

ਅਤੇ $\qquad \vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{QS}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{PS}$



(i) ਚਿੱਤਰ 10.11 (ii)

ਅਤੇ $$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{PS}$$

ਇਸ ਲਈ $$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

ਟਿੱਪਣੀ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਬਰੈਕਟਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਸੀ ਬਰੈਕਟ $\vec{a}$ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

ਇੱਥੇ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{0}$ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਲਈ ਜੁੜਣਯੋਗ ਪਛਾਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

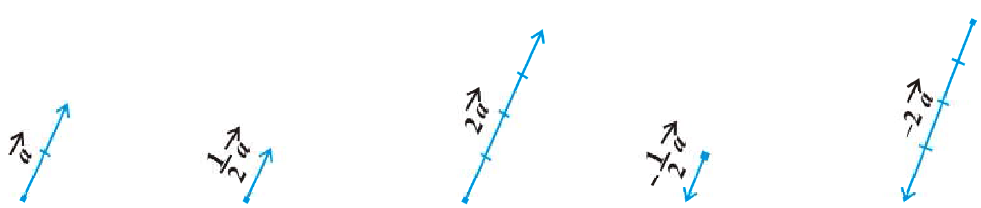
10.5 ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ (Multiplication of a Vector by Scalar)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੈ। ਹੁਣ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਸਕੇਲਰ λ, ਨਾਲ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿਸ ਨੂੰ $\lambda \vec{a}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਸਕੇਲਰ λ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ $\lambda \vec{a}$ ਵੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\lambda \vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ, $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਜਾਂ ਉਲਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। $\lambda \vec{a}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਤੋਂ $|\lambda|$ ਗੁਣਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$$

ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਸਧਾਰਨ [ਰੂਪ ਦੀ ਕਲਪਨਾ (visualisation)] ਚਿੱਤਰ 10.12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਜਦੋਂ $\lambda =$ ï 1, ਤਾਂ $\lambda \vec{a} = -\vec{a}$ ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਆਕਾਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਉਲਟ ਹੈ। ਵੈਕਟਰ ï $\vec{a}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ (ਜਾਂ ਜੁੜਨਯੋਗ ਉਲਟ)ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਮੇਸ਼ਾ $\vec{a} + ($ï $\vec{a}) = ($ï $\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ ਹੀ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10.12

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\lambda = \dfrac{1}{|\vec{a}|}$, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \neq 0$, ਜੋ ਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\lambda\vec{a}$, $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

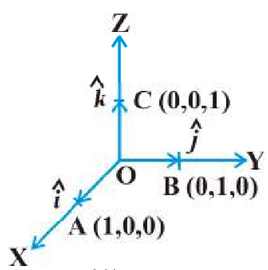
$$\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} \text{ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੀ ਵੀ ਸਕੈਲਰ k ਦੇ ਲਈ $k\vec{0} = \vec{0}$

10.5.1 *ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਘਟਕ* (Components of a vector)

ਆਉ ਬਿੰਦੂਆਂ A(1, 0, 0), B(0, 1, 0) ਅਤੇ C(0,0, 1) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ % x-ਭੁਜਾ y-ਭੁਜ ਅਤੇ z-ਭੁਜ ਤੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਾਂ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ

$$|\overrightarrow{OA}| = 1, |\overrightarrow{OB}| = 1 \text{ ਅਤੇ } |\overrightarrow{OC}| = 1$$



ਚਿੱਤਰ 10.13

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OC}$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਾ ਅਕਾਰ 1 ਹੈ। ਕ੍ਰਮਵਾਰ OX, OY ਅਤੇ OZ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਕਹਾਉਂਦ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.13)A

ਹੁਣ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P(x, y, z) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਲਵੋ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 10.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ P_1 ਦੇ ਤਲ XOY ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦਾ ਪੈਰ ਬਿੰਦੂ P_1 ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P_1P, z-ਭੁਜ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y ਅਤੇ z-ਭੁਜ ਦੇ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OR} = z\hat{k}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\overrightarrow{QP_1} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ} = x\hat{i}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP_1} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

ਅਤੇ

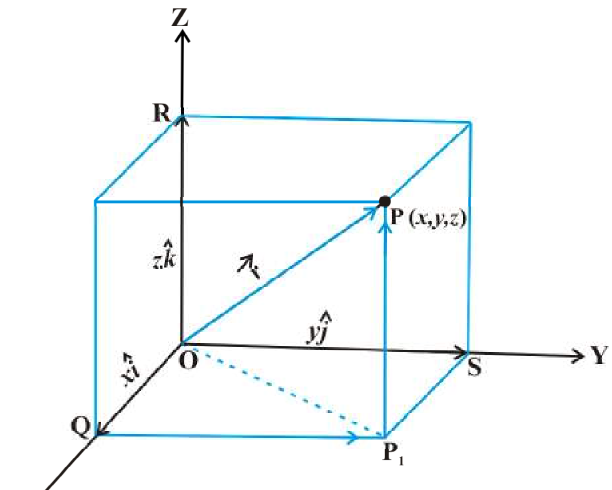
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ O ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਦੇ ਨਾਲ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ (ਜਾਂ $\vec{r}$) $= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਇਹ ਰੂਪ ਘਟਕ ਰੂਪ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ x, y ਅਤੇ z, $\vec{r}$ ਦੇ ਸੇਕੈਲਰ ਘਟਕ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ ਅਤੇ $z\hat{k}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ $\vec{r}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕਦੇ&ਕਦੇ x, y ਅਤੇ z ਨੂੰ ਸਮਕੋਣੀ ਘਟਕ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਕਿਸੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਦੀ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਦੋ ਬਾਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਤੁਰੰਤ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OQP_1 ਵਿੱਚ (ਚਿੱਤਰ 10.14)

$$|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{|\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{QP_1}|^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



ਚਿੱਤਰ 10.14

ਅਤੇ ਸਮਕੋਣ ਤਿਕੋਣ OP_1P, ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP_1}|^2 + |\overrightarrow{P_1P}|^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2}$$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $|\vec{r}| = |x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ

(i) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਜੋੜ

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਅੰਤਰ

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਜੇਕਰ

$a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ਅਤੇ $a_3 = b_3$

(iv) ਕਿਸੇ ਸਕੇਲਰ λ ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਗੁਣਾ

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਵੈਕਟਰਾ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਸਕਲੇਰ ਨਾਲ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਗੁਣਾ ਇਕੱਠੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੰਡਣਾਤਮਕ ਨਿਯਮ ਨਾਲ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

î ѐ ñ À °ÇÕ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਕੋਈ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ k ਅਤੇ m ਦੋ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

(i) $k\vec{a}+m\vec{a}=(k+m)\vec{a}$ (ii) $k(m\vec{a})=(km)\vec{a}$ (iii) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਤੁਸੀਂ ਨੋਟਿਸ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ λ ਨੂੰ ਕਿਸੀ ਵੀ ਕੀਮਤ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\lambda\vec{a}$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਰੇਖੀ ਤਾਂ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ λ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਗੈਰ ਜੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮੌਜ਼ੂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਭਾਵ $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, ਤਾਂ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਰੇਖੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

$$b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=\lambda(a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=(\lambda a_1)\hat{i}+(\lambda a_2)\hat{j}+(\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1=\lambda a_1,\ b_2=\lambda a_2,\ b_3=\lambda a_3$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}=\lambda$$

2. ਜੇਕਰ $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਤਾਂ a_1, a_2, a_3 ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ l, m, n ਕਿਸੀ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ ਹੈ ਤਾਂ

$$l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}=(\cos\alpha)\hat{i}+(\cos\beta)\hat{j}+(\cos\gamma)\hat{k}$$

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜਿੱਥੇ : α, β ਅਤੇ γ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੁਆਰਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x, y ਅਤੇ z ਭੁਜ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੋਣ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :4. x, y ਅਤੇ z ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=x\hat{i}+2\hat{j}+z\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=2\hat{i}+y\hat{j}+\hat{k}$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਨ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $x = 2, y = 2, z = 1$

ਉਦਾਹਰਣ :5. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}$ ਅਤੇ $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}$ ਤਦ ਕੀ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ਹੈ ? ਕੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ ਅਤੇ $|\vec{b}|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ ਪਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਘਟਕ ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ :6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

ਹੱਲ. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇਕਾਈ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਹੁਣ
$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

ਉਦਾਹਰਣ :7. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 7 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{i} - 2\hat{j}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ 7 ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ $7\hat{a} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = \frac{7}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{14}{\sqrt{5}}\hat{j}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ :8. ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}, \text{ ਜਿੱਥੇ } \vec{c} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k} \text{ ਹੈ।}$$

ਅਤੇ
$$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ
$$\hat{c} = \frac{1}{|\vec{c}|}\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{29}}(4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}) = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k} \text{ ਹੈ।}$$

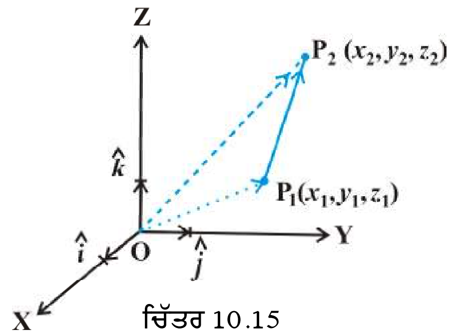
ਉਦਾਹਰਣ : 9. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਵੈਕਟਰ ਦੇ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਟਕ x, y, z ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $a = 1, b = 1$ ਅਤੇ $c = -2$ ਹੈ। ਅੱਗੇ : ਜੇਕਰ l, m ਅਤੇ n ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ ਹਨ ਤਾਂ
$$l = \frac{a}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad m = \frac{b}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad n = \frac{c}{|\vec{r}|} = \frac{-2}{\sqrt{6}} \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } |\vec{r}| = \sqrt{6})$$

ਇਸ ਲਈ : ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ ਹਨ।

10.5.2 *ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ (Vector joining two points)*

ਜੇਕਰ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ P_1 ਨੂੰ P_2 ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.15)। P_1 ਅਤੇ P_2 ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ OP_1P_2 ਤੋਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$



ਚਿੱਤਰ 10.15

ਵੈਕਟਰ ਜੋੜਫਲ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$$

ਭਾਵ
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$
$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 10. ਬਿੰਦੂਆਂ P(2, 3, 0) ਅਤੇ Q(– 1, – 2, – 4) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਅਤੇ P ਤੋਂ Q ਵੱਲ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

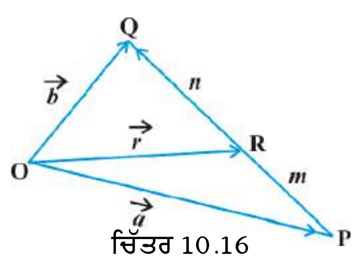
ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਵੈਕਟਰ P ਤੋਂ Q ਵੱਲ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਹੈ, ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ; P ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਅਤੇ Q] ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\overrightarrow{PQ} = (-1-2)\hat{i} + (-2-3)\hat{j} + (-4-0)\hat{k}$$

ਭਾਵ
$$\overrightarrow{PQ} = -3\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$$

10.5.3 *ਕਾਟ ਸੂਤਰ (Section Formula)*

ਮੰਨ ਲਉ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ P ਅਤੇ Q ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ}$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਬਿੰਦੂਆਂ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲਾ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਕਿਸੇ ਤੀਜੇ ਬਿੰਦੂ R ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਵਿਭਜਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। (ਅੰਦਰੂਨੀ ਚਿੱਤਰ 10.16) ਅਤੇ ਬਾਹਰੀ (ਚਿੱਤਰ 10.17)। ਇੱਥੇ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OR}$ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10.16

ਸਥਿਤੀ: ਜਦੋਂ **R, PQ** ਦੀ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.16)। ਜੇਕਰ R, $\overrightarrow{PQ}$ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ $m\,\overrightarrow{RQ} = n\,\overrightarrow{PR}$, ਜਿੱਥੇ m ਅਤੇ n ਧਨਾਤਮਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ R,

$\overrightarrow{PQ}$ ਨੂੰ $m:n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ORQ ਅਤੇ OPR ਤੋਂ

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OR} = \vec{b} - \vec{r}$$

ਅਤੇ
$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = \vec{r} - \vec{a}$$

ਇਸ ਲਈ
$$m(\vec{b} - \vec{r}) = n(\vec{r} - \vec{a}) \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

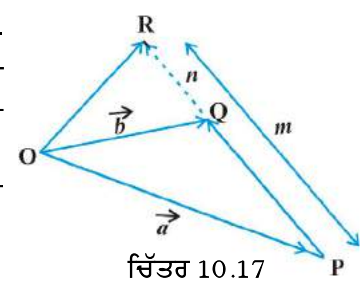
ਜਾਂ
$$\vec{r} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n} \qquad \text{(ਹੱਲ/ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ R ਜੋ ਕਿ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ $m:n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ II ਜਦੋਂ **R, PQ** ਦੀ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10-17)। ਇਹ ਤਸਦੀਕ ਕਰਨਾ ਅਸੀਂ ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਛੱਡਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਨੂੰ $m:n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R $\left(\text{ਭਾਵ } \frac{PR}{QR} = \frac{m}{n}\right)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$\overrightarrow{OR} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.17

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ R, PQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $m = n$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ I ਤੋਂ $\overrightarrow{PQ}$ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OR} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ : 11. ਦੋ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਲਵੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{OQ} = \vec{a} + \vec{b}$ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ (ii) ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

(i) P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2.1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) + (3\vec{a} - 2\vec{b})}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$$

(ii) P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\vec{a} + \vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b})}{2-1} = 4\vec{b} - \vec{a}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 12. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$, $B(\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k})$, $C(3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k})$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੈ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} = (1-2)\hat{i}+(-3+1)\hat{j}+(-5-1)\hat{k} = -\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3-1)\hat{i}+(-4+3)\hat{j}+(-4+5)\hat{k} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$$

ਅਤੇ

$$\overrightarrow{CA} = (2-3)\hat{i}+(-1+4)\hat{j}+(1+4)\hat{k} = -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 41 = 6+35 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਅੰਕ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ :

$$\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}; \quad \vec{b} = 2\hat{i}-7\hat{j}-3\hat{k}; \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

2. ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਾਲੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
3. ਸਮਾਨ ਦਿਸ਼ਾ ਵਾਲੇ ਦੋ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
4. x ਅਤੇ y ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}+3\hat{j}$ ਅਤੇ $x\hat{i}+y\hat{j}$ ਸਮਾਨ ਹੋਣ।
5. ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ (2, 1) ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਬਿੰਦੂ (–5, 7) ਹੈ। ਇਸ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੈਲਰ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = \hat{i}-6\hat{j}-7\hat{k}$ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{PQ}$, ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮਵਾਰ (1, 2, 3) ਅਤੇ (4, 5, 6) ਹਨ।
9. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a} = 2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = -\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਵੈਕਟਰ $5\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ 8 ਇਕਾਈ ਹੈ।
11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $-4\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
12. ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਬਿੰਦੂਆਂ A (1, 2, −3) ਅਤੇ B(−1, −2, 1) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ A ਤੋਂ B ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ਧੁਰਿਆਂ OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ (ਸਮਾਨ) ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

15. ਬਿੰਦੂਆਂ P $(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ ਅਤੇ Q $(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 2:1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (i) ਅੰਦਰੂਨੀ (ii) ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਦੋ ਬਿੰਦੂ P(2, 3, 4) ਅਤੇ Q(4, 1, −2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ਹੈ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ।

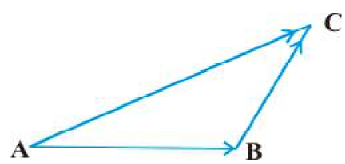
18. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC (ਚਿੱਤਰ 10.18), ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜਾ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$



ਚਿੱਤਰ 10. 18

19. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(A) $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, ਕਿਸੀ ਸਕੇਲਰ λ ਦੇ ਲਈ

(B) $\vec{a}=\pm\vec{b}$

(C) $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਘਟਕ ਸਮਾਨਅਨੁਪਾਤੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(D) ਦੋਨੋਂ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਹੈ; ਪਰ ਮਾਪ ਅੰਕ ਵਿਭਿੰਨ ਹੈ।

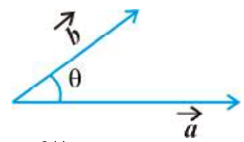
10.6 ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ (Product of Two Vectors)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਉਦੇਸ਼ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਦੂਜੀ ਅਲਜਬਰੇ ਸੰਕਿਰਿਆ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਯਾਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਦੋ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਇੱਕ ਮੈਟ੍ਰਿਕਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵੀ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਨਾਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿੱਥੇ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜਿੱਥੇ ਨਤੀਜਾ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਇਹ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਜਿਊਮੈਟਰੀ, ਮਕੈਨਿਕ ਅਤੇ ਇੰਜੀਨੀਅਰਿੰਗ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਉਪਯੋਗ ਹਨ। ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ (ਅਨੁਭਾਗ) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

10.6.1 *ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ* [*Scalar (or dot) product of two vectors*]

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ θ, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $0 \le \theta \le \pi$ (ਚਿੱਤਰ 10.19)।

ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$, ਤਾਂ θ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.19

ਨਿਰੀਖਣ

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$
3. ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$
   ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੋਂ $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = 0$ ਹੈ।
4. ਜੇਕਰ $\theta = \pi$, ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$
   ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਤੋਂ $\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{a}|^2$, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ θ, π ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।
5. ਨਿਰੀਖਣ ਪ੍ਰੇਖਣ 2 ਅਤੇ 3 ਦੀ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਆਪਸੀ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
   $$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$$
   ਅਤੇ
   $$\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$$
6. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ θ,
   $$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \text{ ਜਾਂ } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) \text{ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।}$$
7. ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ ਭਾਵ
   $$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Two important properties of scalar product)

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1.(ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਜੋੜ ਉੱਪਰ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ) ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$$

ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\
&= a_1\hat{i}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_2\hat{j}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})+a_3\hat{k}\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\
&= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})\\
&\quad + a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})
\end{aligned}$$

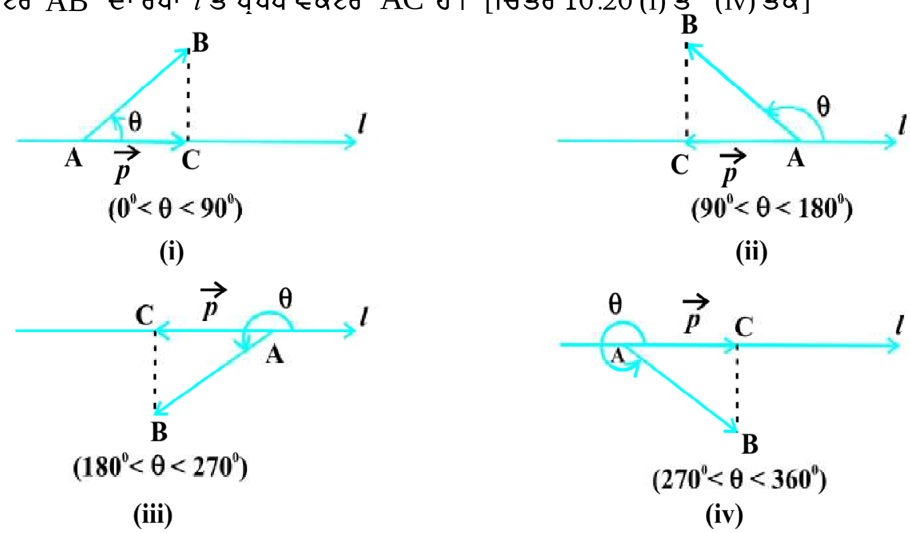
(ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ 1 ਅਤੇ 2 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$ (ਨਿਰੀਖਣ 5 ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

10.6.2 *ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਕਿਸੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ* (*Projection of a vector on a line*)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਕਿਸੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਰੇਖਾ l (ਮੰਨ ਲਉ) ਦੇ ਨਾਲ ਖੱਬੇ ਗੇੜੇ (ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ À ñ à Çç ô Å) ਵਿੱਚ θ ਕੌਣ ਬਣਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.20 ਦੇਖੋ) ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ l ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਖੇਪ Projection ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{p}$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $|\overrightarrow{AB}|\cos\theta$ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦਾ l ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਵੱਲ (ਜਾਂ ਉਲਟ) ਹੋਣਾ ਇਸ ਗੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\cos\theta$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ। ਵੈਕਟਰ $\vec{p}$ ਨੂੰ ਪ੍ਰਖੇਪ (Projection) ਵੈਕਟਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ $|\vec{p}|$, ਸਧਾਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਰੇਖਾ l ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਰੇਖਾ l ਤੇ ਪ੍ਰੇਖਪ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AC}$ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10.20 (i) ਤੋਂ (iv) ਤੱਕ]



ਚਿੱਤਰ 10.20

ਨਿਰੀਖਣ

1. ਰੇਖਾ l ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਜੇਕਰ $\hat{p}$ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ l ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਪ੍ਰਖੇਪ $\vec{a}.\hat{p}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਦੂਜੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$, ਤੇ $\vec{a}\cdot\hat{b}$, ਜਾਂ $\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$, ਜਾਂ $\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਪ੍ਰਖੇਪ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਖੁਦ $\overrightarrow{AB}$ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $\theta = \pi$ ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਪ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{BA}$ ਹੋਵੇਗਾ।
4. ਜੇਕਰ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ਜਾਂ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ਤਾਂ $\overrightarrow{AB}$ ਪ੍ਰਖੇਪ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਜ਼ੀਰੋ ਵੈਕਟਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ α, β ਅਤੇ γ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}.\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},\quad \text{and}\quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $|\vec{a}|\cos\alpha$, $|\vec{a}|\cos\beta$ ਅਤੇ $|\vec{a}|\cos\gamma$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : OX, OY ਅਤੇ OZ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਦੇ $\vec{a}$ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਵੈਕਟਰ a_1, a_2 ਅਤੇ a_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y, ਅਤੇ z ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ

$$\vec{a} = \cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜ਼ਾਹਰ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 13. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ 2 ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1$, ਇਹਨਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1, |\vec{a}| = 1$ ਅਤੇ $|\vec{b}| = 2$. ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ : 14. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ θ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})\cdot(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 1 - 1 - 1 = -1$

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cos\theta = \dfrac{-1}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੋਣ $\theta = \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ : 15. ਜੇਕਰ $\vec{a} = 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਜੀਰੋ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $\vec{a}+\vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) + (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$

ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b} = (5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}) - (\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}) = 4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$

ਇਸ ਲਈ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})\cdot(4\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}) = 24 - 8 - 16 = 0$

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਪਰਸਪਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ : 16. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹੈ।

$$\frac{1}{|\vec{b}|}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(1)^2}}(2\,.\,1+3\,.\,2+2\,.\,1) = \frac{10}{\sqrt{6}} = \frac{5}{3}\sqrt{6} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਨ : 17. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4$ ਤਾਂ $|\vec{a}-\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\begin{aligned} \left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 &= (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \\ &= \vec{a}.\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &= (2)^2 - 2(4) + (3)^2 \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{5}$

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$, ਤਾਂ $|\vec{x}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}| = 1$. ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}+\vec{a}) = 8$$

ਜਾਂ $\vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{x} - \vec{a}\cdot\vec{a} = 8$

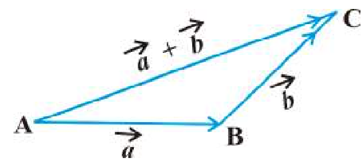
ਜਾਂ $|\vec{x}|^2 - 1 = 8$ ਜਾਂ $|\vec{x}|^2 = 9$

ਇਸ ਲਈ $|\vec{x}| = 3$ (ਕਿਉਂਕਿ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਮਾਪ ਅੰਕ ਹਮੇਸ਼ਾ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ)

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ (Cauchy-Schwartz ਅਸਮਾਨਤਾ)।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$. ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0 = |\vec{a}||\vec{b}|$. ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਲਪਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $|\vec{a}| \ne 0 \ne |\vec{b}|$ ਹਾਂ ਅਸੀਂ

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਇਸ ਲਈ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ ਹਮੇਸ਼ਾ $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਸਮਾਨਤਾ)

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਅਸਮਾਨਤਾ, ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ $\vec{a} = 0$ ਜਾਂ $\vec{b} = 0$ ਵਿੱਚ ਸਹਿਜ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ ?)। ਇਸ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $|\vec{a}| \ne \vec{0} \ne |\vec{b}|$ ਤਾਂ

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 && \text{(ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ-ਵਟਾਂਦਰਾ ਹੈ।)} \\
&\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}| + |\vec{b}|^2 && \text{(ਕਿਉਂਕਿ } x \le |x|\ \forall x \in \mathbf{R}) \\
&\le |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 && \text{(ਉਦਾਹਰਨ 19 ਤੋਂ)} \\
&= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2
\end{aligned}
$$

ਇਸ ਲਈ : $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਸਮਾਨਤਾ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨਤਾ ਰੱਖੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ 20 ਵਿੱਚ) ਇਸ ਲਈ
>
> $$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$ ਤਦ
>
> $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$
>
> ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(-2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})$, $B(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ ਅਤੇ $C(7\hat{i} - \hat{k})$ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\overrightarrow{AB} = (1+2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (3-5)\hat{k} = 3\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = (7-1)\hat{i} + (0-2)\hat{j} + (-1-3)\hat{k} = 6\hat{i} - 2\hat{j} - 4\hat{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (7+2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (-1-5)\hat{k} = 9\hat{i} - 3\hat{j} - 6\hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14},\ |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{14} \text{ ਅਤੇ } |\overrightarrow{AC}| = 3\sqrt{14}$$

ਇਸ ਲਈ $$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਉਦਾਹਰਨ 21 ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\sqrt{3}$ ਅਤੇ 2 ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sqrt{6}$ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + \hat{j}$ ਤੇ ਵੈਕਟਰ $\hat{i} - \hat{j}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + 3\hat{j} + 7\hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰ $7\hat{i} - \hat{j} + 8\hat{k}$ ਤੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦਾ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ :

   $$\frac{1}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}),\quad \frac{1}{7}(3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}),\quad \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$$

   ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਇਹ ਵੈਕਟਰ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਹਨ।
6. ਜੇਕਰ $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b}) = 8$ ਅਤੇ $|\vec{a}| = 8|\vec{b}|$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $|\vec{a}|$ ਅਤੇ $|\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. $(3\vec{a} - 5\vec{b})\cdot(2\vec{a} + 7\vec{b})$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦਾ ਆਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ 60° ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।
9. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, ਦੇ ਲਈ $(\vec{x} - \vec{a})\cdot(\vec{x} + \vec{a}) = 12$ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{x}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਜੇਕਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{c}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਤਾਂ λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਲਈ $|\vec{a}|\vec{b}+|\vec{b}|\vec{a}$, $|\vec{a}|\vec{b}-|\vec{b}|\vec{a}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

12. ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ ਅਤੇ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕਿ ਨਿਸ਼ਕਰਸ਼ (ਨਤੀਜਾ) ਕੱਢਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

13. ਜੇਕਰ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ $\vec{a}=\vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b}=\vec{0}$, ਜਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ਪਰ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।

15. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਸਿਖਰ, A, B, C ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (1, 2, 3), (−1, 0, 0), (0, 1, 2) ਹੈ ਤਾਂ $\angle ABC$ ਪਤਾ ਕਰੋ। [$\angle ABC$, ਸਿਖਰ $\overrightarrow{BA}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{BC}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ।]

16. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A(1, 2, 7), B(2, 6, 3) ਅਤੇ C(3, 10, −1) ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ।

17. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ਅਤੇ $3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k}$ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

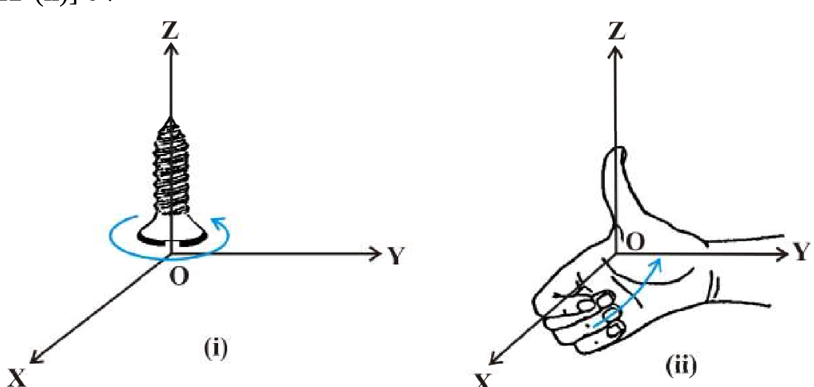
18. ਜੇਕਰ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦਾ ਆਕਾਰ $|a|$ ਹੈ ਤਾਂ λ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਸਕੇਲਰ ਹੈ ਤਾਂ $\lambda\vec{a}$ ਇੱਕ ਮਾਤ੍ਰਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ

(A) $\lambda = 1$ (B) $\lambda = -1$ (C) $a = |\lambda|$ (D) $a = 1/|\lambda|$

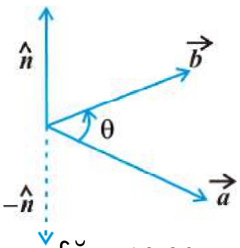
10.6.3 *ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ [Vector (or cross) product of two vectors]*

ਭਾਗ 10.2 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰੈ ਵਿਮਾਈ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਆਇਤਾਕਾਰ ਤਾਲਮੇਲ ਸਿਸਟਮ (ਪ੍ਰਣਾਲੀ) ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ x ਭੁਜ ਨੂੰ ਖੱਬੇ ਗੇੜ (ਘੜੀ ਵਿਪਰੀਤ) ਘੁਮਾ ਕੇ ਧਨਾਤਮਕ y-ਭੁਜ ਤੇ ਲਿਆਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਧਨਾਤਮਕ z-ਭੁਜ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ (ਮਿਆਰੀ) ਪੇਚ ਅੱਗੇ ਵੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.22 (i)]।

ਇੱਕ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਤਾਲਮੇਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦੀਆਂ ਉਂਗਲੀਆਂ ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ x- ਭੁਜ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਤੋਂ ਦੂਰ ਧਨਾਤਮਕ y-ਭੁਜ ਦੇ ਵੱਲ ਘੁਮਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਅੰਗੂਠਾ ਧਨਾਤਮਕ z-ਭੁਜਾ ਦੇ ਵੱਲ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। [ਚਿੱਤਰ 10-22 (ii)] ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10. 22



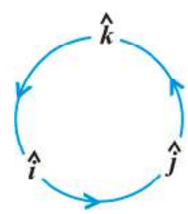
ਚਿੱਤਰ 10.23

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3. ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$, ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\times\vec{b}$ ਤੋਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ θ, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $0 \le \theta \le \pi$ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$,ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10.23) ਇਸ ਲਈ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ $\vec{a}$ ਤੋਂ $\vec{b}$ ਦੇ ਵੱਲ ਘੁੰਮਾਉਣ ਤੇ ਇਹ $\hat{n}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$, ਤਾਂ θ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰੇਖਣ :

1. $\vec{a}\times\vec{b}$ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
2. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਹਨ ਤਾਂ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ (ਜਾਂ ਸਮਰੇਖੀ) ਹੈ ਇਸ ਲਈ
$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$
ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ ਅਤੇ $\vec{a}\times(-\vec{a}) = \vec{0}$, ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = 0$ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\theta = \pi$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋਨੋਂ ਹੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ $\sin\theta$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ਤਾਂ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$
4. ਨਿਰੀਖਣ (ਪ੍ਰੇਖਣ) 2 ਅਤੇ 3 ਦੇ ਝਲਕ ਵਿੱਚ ਆਪਸੀ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰਾਂ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੇ ਲਈ (ਚਿੱਤਰ 10.24), ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$
$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i},\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

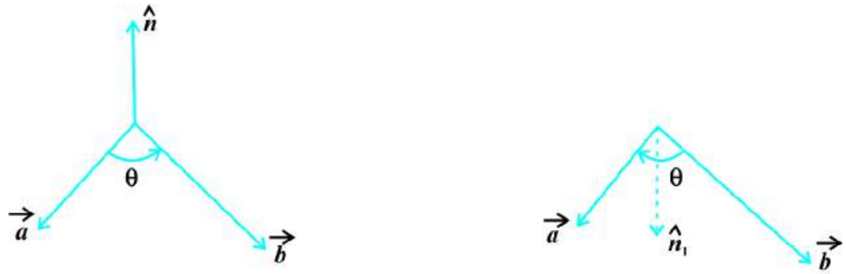


ਚਿੱਤਰ 10 . 24

5. ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਕੋਣ θ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
$$\sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
6. ਇਹ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮ ਵਟਾਂਦਰਾ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ ਅਸਲ ਵਿੱਚ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, ਜਿੱਥੇ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹੈ ਇਸ ਲਈ θ , $\vec{a}$ ਤੋਂ $\vec{b}$ ਵੱਲ ਲੰਘੇ ਹੁੰਦੇ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.25(i) ਜਦੋਂ ਕਿ

$\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1$, ਜਿੱਥੇ $\vec{b}$, $\vec{a}$ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਇੱਕ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\theta, \vec{b}$ ਤੋਂ $\vec{a}$ ਤੋਂ ਦੇ ਵੱਲ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮਹੁੰਦਾ ਹੈ ਚਿੱਤਰ 10-25(ii)।

ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਤਲ ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ



(i) ਚਿੱਤਰ 10.25 (ii)

ਲੰਬ ਹੋਣਗੇ $\hat{n}$ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਕਾਗਜ਼ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\hat{n}_1$ ਕਾਗਜ਼ ਦੇ ਥੱਲੇ ਵੱਲ (ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ) ਹੋਵੇਗਾ ਇਸ ਲਈ $\hat{n}_1 = -\hat{n}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$

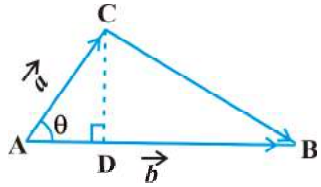
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}_1 = -\vec{b}\times\vec{a}$$

7. ਨਿਰੀਖਣ (ਪ੍ਰੇਖਣ) 4 ਅਤੇ 6 ਦੇ ਝਲਕ ਵਿੱਚ

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k},\ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \text{ ਅਤੇ } \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \text{ ਹੈ।}$$

8. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 10.26 ਤੋਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{CD}$.



ਚਿੱਤਰ 10.26

ਪਰੰਤੂ $\text{AB} = |\vec{b}|$ (ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ) ਅਤੇ $\text{CD} = |\vec{a}|\sin\theta$

ਇਸ ਲਈ : ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

9. ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 10-27 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = AB. DE.

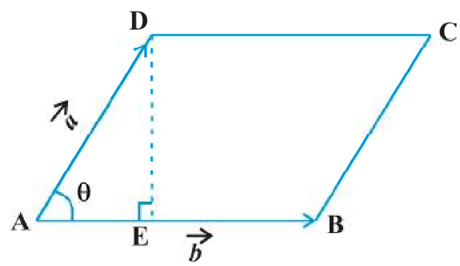
ਪਰ $AB = |\vec{b}|$ (ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ), ਅਤੇ

$DE = |\vec{a}|\sin\theta$ ਇਸ ਲਈ

ਇਸ ਲਈ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ

ਖੇਤਰਫਲ = $|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = |\vec{a}\times\vec{b}|$

ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਦੋ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 10.27

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 3. **ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਤੇ ਵੰਡਕਾਰੀ ਨਿਯਮ** (Distributivity of vector product over addition) ਜੇਕਰ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

(i) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

(ii) $\lambda(\vec{a}\times\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b})$

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਘਟਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਖਿਆ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\times(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \\
&= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i}) \\
&\quad + a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k}) \\
&\quad + a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) && \text{(ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 ਤੋਂ)} \\
&= a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})-a_1b_3(\hat{k}\times\hat{i})-a_2b_1(\hat{i}\times\hat{j}) \\
&\quad + a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})-a_3b_2(\hat{j}\times\hat{k})
\end{aligned}$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = 0$ ਅਤੇ $\hat{i}\times\hat{k} = -\hat{k}\times\hat{i},\ \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{i}\times\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{j}\times\hat{k}$)

$$= a_1b_2\hat{k} - a_1b_3\hat{j} - a_2b_1\hat{k} + a_2b_3\hat{i} + a_3b_1\hat{j} - a_3b_2\hat{i}$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ ਅਤੇ $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$)

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$, ਤਾਂ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(-2-15) - (-4-9)\hat{j} + (10-3)\hat{k} = -17\hat{i} + 13\hat{j} + 7\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(-17)^2 + (13)^2 + (7)^2} = \sqrt{507}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਵੈਕਟਰ $(\vec{a}+\vec{b})$ ਅਤੇ $(\vec{a}-\vec{b})$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}+\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b} = -\hat{j} - 2\hat{k}$

ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ, ਜੋ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}\ (= \vec{c},\ \text{ਮੰਨ ਲਉ})$$

ਹੁਣ $|\vec{c}| = \sqrt{4+16+4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ

$$\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{-1}{\sqrt{6}}\hat{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$$ ਹੈ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਕਿਸੇ ਤਲ ਤੇ ਦੋ ਅਭਿਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾਵਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $\vec{a}+\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a}-\vec{b}$ ਤੇ ਦੂਜਾ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}-\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{k}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$ ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ A(1, 1, 1), B(1, 2, 3) ਅਤੇ C(2, 3, 1) ਹੈ।

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB}=\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AC}=\hat{i}+2\hat{j}$. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix} = -4\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਉਸ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਕਿਸੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ। ਉਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = 5\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{25+1+16}=\sqrt{42}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\sqrt{42}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10-4

1. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਤਾਂ $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{a} - \vec{b}$ ਦੀ ਲੰਬ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, $\hat{i}$ ਦੇ ਨਾਲ $\frac{\pi}{3}$, $\hat{j}$ ਦੇ ਨਾਲ $\frac{\pi}{4}$ ਅਤੇ $\hat{k}$ ਦੇ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਬਣਦਾ ਹੈ ਕਿ θ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ $\vec{a}$ ਦਾ ਘਟਕ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$
5. λ ਅਤੇ μ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = \vec{0}$
6. ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ਅਤੇ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ?
7. ਮੰਨ ਲਉ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, $c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੈ, ਹੁਣ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
8. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{0}$ ਜਾਂ $\vec{b} = \vec{0}$ ਤਾਂ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਉਲਟ ਸਹੀ ਹੈ ? ਉਦਾਹਰਣ ਸਹਿਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
9. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ A(1, 1, 2), B(2, 3, 5) ਅਤੇ C(1, 5, 5) ਹੈ।
10. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = 2\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹਨ।
11. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $|\vec{a}| = 3$ ਅਤੇ $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$, ਤਾਂ $\vec{a} \times \vec{b}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ :

    (A) $\pi/6$ (B) $\pi/4$ (C) $\pi/3$ (D) $\pi/2$

12. ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੇ ਸਿਖਰ A, B, C ਅਤੇ D ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

    $-\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, $\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$ ਅਤੇ $-\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + 4\hat{k}$, ਹੈ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

    (A) $\frac{1}{2}$ (B) 1

    (C) 2 (D) 4

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣਾਂ 26. XY-ਤਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।

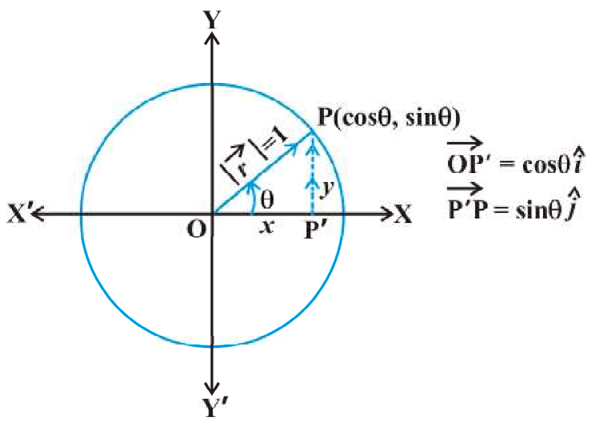
ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$, XY-ਤਲ ਦਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.28)। ਹੁਣ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = \cos\theta$ ਅਤੇ $y = \sin\theta$ (ਕਿਉਂਕਿ $|\vec{r}| = 1$). ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਨੂੰ

$$\vec{r}\left(=\overrightarrow{OP}\right) = \cos\theta\hat{i}+\sin\theta\hat{j} \quad \dots (1)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ $\quad |\vec{r}| = \sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = 1$

ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ θ, 0 ਤੋਂ 2π, ਤੱਕ ਤਬਦੀਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਬਿੰਦੂ P (ਚਿੱਤਰ 10.28) ਘੜੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵੱਲ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2+y^2=1$ ਦੀ ਬਣਾਵਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਿਤ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ



ਚਿੱਤਰ 10.28

XY-ਤਲ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D, ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $2\hat{i}+5\hat{j}$, $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ ਹੈ, ਤੋਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ CD ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਸਿੱਟਾ ਕੱਢੋ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ θ, AB ਅਤੇ CD, ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਤਾਂ θ, $\overrightarrow{AB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{CD}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਵੀ ਕੋਣ ਹੈ।

ਹੁਣ $\quad \overrightarrow{AB}$ = B ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ï A ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ

$$= (2\hat{i}+5\hat{j})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) = \hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1)^2+(4)^2+(-1)^2} = 3\sqrt{2}$

ਇਸ ਲਈ $\overrightarrow{CD} = -2\hat{i} - 8\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $|\overrightarrow{CD}| = 6\sqrt{2}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|}$$

$$= \frac{1(-2)+4(-8)+(-1)(2)}{(3\sqrt{2})(6\sqrt{2})} = \frac{-36}{36} = -1$$

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq \theta \leq \pi$, ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $\theta = \pi$. ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ AB ਅਤੇ CD ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਵਿਕਲਪ : $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$] ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\overrightarrow{AB}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{CD}$ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 5$ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ, ਹੋਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = 0,\ \vec{b}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) = 0,\ \vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = 0$

ਹੁਣ
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$= \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})$$

$$+\ \vec{c}.(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c}.\vec{c}$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2$$

$$= 9 + 16 + 25 = 50$$

ਇਸ ਲਈ
$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸ਼ਰਤ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4$ ਅਤੇ $|\vec{c}| = 2$ ਤਾਂ ਰਾਸ਼ੀ $\mu = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

ਜਾਂ
$$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$$

ਇਸ ਲਈ
$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c} = -|\vec{a}|^2 = -9 \qquad \ldots (1)$$

ਦੁਬਾਰਾ
$$\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = 0$$

ਜਾਂ
$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} = -|\vec{b}|^2 = -16 \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\qquad \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c} = -4 \qquad$ ... (3)

(1), (2) ਅਤੇ (3) ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) = -29$$

ਜਾਂ $\qquad 2\mu = -29$, i.e., $\mu = \dfrac{-29}{2}$

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਜੇਕਰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੀ ਸੱਜ ਹੱਥ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਨਾਲ $\vec{\alpha} = 3\hat{i}-\hat{j}$, $\vec{\beta} = 2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$, ਤਾਂ $\vec{\beta}$ ਨੂੰ $\vec{\beta} = \vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਪ੍ਰਤੱਖ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $\vec{\beta}_1$, $\vec{\alpha}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\alpha}$, λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\vec{\beta}_1 = 3\lambda\hat{i}-\lambda\hat{j}$

ਹੁਣ $\qquad \vec{\beta}_2 = \vec{\beta}-\vec{\beta}_1 = (2-3\lambda)\hat{i}+(1+\lambda)\hat{j}-3\hat{k}$

ਕਿਉਂਕਿ $\qquad \vec{\beta}_2$, $\vec{\alpha}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}_2 = 0$

ਜਾਂ $\qquad 3(2-3\lambda)-(1+\lambda) = 0$

ਜਾਂ $\qquad \lambda = \dfrac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \vec{\beta}_1 = \dfrac{3}{2}\hat{i}-\dfrac{1}{2}\hat{j}$ ਅਤੇ $\vec{\beta}_2 = \dfrac{1}{2}\hat{i}+\dfrac{3}{2}\hat{j}-3\hat{k}$

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. XY-ਤਲ ਵਿੱਚ, x-ਭੁਜ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਲਿਖੋ।
2. ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੈਲਰ ਘਟਕ ਅਤੇ ਅਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਪੱਛਮੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 4 km ਚੱਲਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਉੱਤਰ ਤੋਂ 30° ਪੱਛਮ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ 3 km ਚੱਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰੁਕ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਪ੍ਰਸਥਾਨ ਦੇ ਆਰੰਭਿਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੜਕੀ ਦਾ ਵਿਸਥਾਪਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \vec{b}+\vec{c}$, ਤਾਂ ਕਿ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ $|\vec{a}| = |\vec{b}|+|\vec{c}|$? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦੀ ਪੁਸ਼ਟੀ ਕਰੋ।
5. x ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ $x(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
6. ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ਦੇ ਆਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਆਕਾਰ 5 ਇਕਾਈ ਹੈ।

7. ਜੇਕਰ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, ਤਾਂ ਵੈਕਟਰ $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ ਅਤੇ $C(11, 3, 7)$ ਸਮਰੇਖੀ ਹੈ ਅਤੇ B ਦੁਆਰਾ AC ਨੂੰ ਵੰਡਣ ਵਾਲਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P\ (2\vec{a} + \vec{b})$ ਅਤੇ $Q(\vec{a} - 3\vec{b})$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ 1:2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।ਇਹ ਵੀ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ P ਰੇਖਾਖੰਡ RQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ $2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ਹੈ।ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦਰਸਾਉ ਕਿ OX, OY ਅਤੇ OZ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਝੁਕੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ।

12. ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k},\ \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{d}$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋਨਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{c}\cdot\vec{d} = 15$

13. ਵੈਕਟਰ $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ਦਾ, ਵੈਕਟਰਾਂ $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ ਅਤੇ $\lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ਦੇ ਯੋਗਫਲ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਸਕੈਲਰ ਗੁਣਨਫਲ 1 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਤਾਂ λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰਾਂ ਵਾਲੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਤੇ ਲੰਭ ਹਨ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a},\ \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦੇ ਨਾਲ ਬਰਾਬਰ ਝੁਕਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ।

15. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

16 ਤੋਂ 19 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a}\cdot\vec{b} \geq 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ :

(A) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ (B) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(C) $0 < \theta < \pi$ (D) $0 \leq \theta \leq \pi$

17. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੋ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ $\vec{a} + \vec{b}$ ਇੱਕ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੇਕਰ :

(A) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (B) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (C) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (D) $\theta = \frac{2\pi}{3}$

18. $\hat{i}\cdot(\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j}\cdot(\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k}\cdot(\hat{i} \times \hat{j})$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਹੈ ?

(A) 0 (B) -1 (C) 1 (D) 3

19. ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}\times\vec{b}|$ ਜਦੋਂ θ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) 0 (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) π

ਸਾਰ–ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P(x, y, z) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\overline{\mathrm{OP}}(=\vec{r}) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ਹੈ ਅਤੇ ਆਕਾਰ $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸਕੇਲਰ ਘਟਕ ਇਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹੈ ਅਤੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸ ਦੇ ਪ੍ਰਾਜੈਕਸ਼ਨ (ਵਧਾ) ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ (r), ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ (l, m, n) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ :

$$l = \frac{a}{r},\quad m = \frac{b}{r},\quad n = \frac{c}{r}$$

- ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨੋਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲੈਣ ਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਜੋੜ $\vec{0}$ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਹਿ&ਮੁੱਢਲੇ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਸਕੇਲਰ λ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਇਸ ਦੇ ਆਕਾਰ ਨੂੰ $|\lambda|$ ਦੇ ਗੁਣਾਕ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ λ ਦੀ ਕੀਮਤ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਅਨੁਸਾਰ ਇਸ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਬਾਰਬਰ ਅਤੇ ਉਲਟ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।
- ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$] $\vec{a}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਦਿਸ਼ਾ ਹੈ।
- ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ Q ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹੈ, ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਨੂੰ $m : n$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ R ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ (i) $\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$ ਅੰਦਰੂਨੀ ਵੰਡ ਤੇ (ii) $\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ ਬਾਹਰੀ ਵੰਡ ਤੇ, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ

$\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ θ, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਜੇਕਰ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ

  $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\hat{n}$ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਜੋ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਰੱਖਣ ਵਾਲੇ ਤਲ ਦੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\hat{n}$ ਸੱਜਾ ਹੱਥ ਸਮਕੋਣ ਤਾਲਮੇਲ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਨਿਰਮਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।

- ਜੇਕਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ λ ਇੱਕ ਸਕੈਲਰ ਹੈ ਤਾਂ

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i} + (a_2+b_2)\hat{j} + (a_3+b_3)\hat{k}$$

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\hat{i} + (\lambda a_2)\hat{j} + (\lambda a_3)\hat{k}$$

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ਅਤੇ $$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਵੈਕਟਰ ਸ਼ਬਦ ਦੀ ਪ੍ਰਾਪਤੀ ਲੈਟਿਨ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਇੱਕ ਸ਼ਬਦ ਵੈਕਟਸ (vectus) ਤੋਂ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ "ਲੈ ਲਈ"। ਆਧੁਨਿਕ ਵੈਕਟਰ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਪੈਦਾਇਸ਼ੀ ਵਿਚਾਰ ਦੀ ਮਿਤੀ ਸੰਨ 1800 ਦੇ ਆਸ ਪਾਸ ਮੰਨੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ Caspar Wessel (1745&1818 ਈ.) ਅਤੇ Jean Robert Argand (1768-1822 ਈ.) ਨੇ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਭੁਜ-ਤਲ (ਨਿਰਦੇਸ਼-ਤਲ) ਵਿੱਚ ਕਿਸੀ ਲਾਇਨ ਖੰਡ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇੱਕ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਸੰਖਿਆ $a + ib$ ਦਾ ਜਨਮ ਜਾਂ ਵਿਆਖਿਆ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਆਇਰਿਸ਼ ਗਣਿਤਕਾਰ William Rowen Hamilton (1805-1865 ਈ.) ਨੇ ਆਪਣੀ ਕਿਤਾਬ "*Lectures on Quaternions*" (1853 ਈ.-) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਲਈ ਵੈਕਟਰ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕੀਤਾ ਸੀ। (quaternians) [ਕੁਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬੀਜਕ ਨਿਯਮਾਂ ਦਾ ਪਾਲਣ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ] ਦੀ ਹੈਮਿਲਟਨ ਵਿਧੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿ-ਵਿਸਾਈ ਬ੍ਰਹਿਮੰਡ ਵਿੱਚ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਜ਼ਰੂਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ

ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਬਹੁਤ-ਦਿਨਾਂ ਤੋਂ Plato (384-322 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਇੱਕ ਅਨੁਜਾਈ ਅਤੇ ਯੂਨਾਨੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨਕ Aristotle (427-348 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਕਾਲ ਵਿੱਚੋਂ ਹੈ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਸੀ ਕਿ ਦੋ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਬਲਾਂ ਦੀ ਸੰਯੁਕਤ ਕਿਰਿਆ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਨਿਯਮ ਅਨੁਪਾਤ ਜੋੜ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਬਲਾਂ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਹੀ ਨਿਯਮ ਕਿ ਬਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਖੋਜ Sterin Simon (1548-1620 ਈਸਵੀ) ਦੁਆਰਾ ਲੰਬਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਸੰਨ 1586 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਲੇਖ ਕਿਤਾਬ "*DeBeghinselen der Weeghconst*" (ਵਜਨ ਕਰਨ ਦੀ ਕਲਾ ਦਾ ਸਿਧਾਂਤ) ਵਿੱਚ ਬਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੀ ਜਿਊਮੈਟਰੀ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਾਰਨ ਯੰਤਰਿਕ ਦੇ ਵਿਕਾਸ ਦਾ ਇੱਕ ਮੁੱਖ ਪਰਿਵਰਤਨ ਹੋਇਆ। ਪਰ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵੀ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 200 ਸਾਲ ਲੱਗ ਗਏ।

ਸੰਨ 1880 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਮਰੀਕੀ ਭੌਤਿਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਅਤੇ ਹਿਸਾਬਦਾਨ Josaih Willard Gibbs (1839-1903 ਈਸਵੀ) ਅਤੇ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਇੰਜੀਨੀਅਰ Oliver Heaviside (1850-1925 ਈਸਵੀ) ਨੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਦੇ ਵਾਸਤਵਿਕ (ਸਕੈਲਰ) ਨੂੰ ਕਾਲਪਨਿਕ (ਵੈਕਟਰ) ਭਾਗ ਤੋਂ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੈਕਟਰ ਵਿਸ਼ਲੇਸਣ ਦਾ ਬਿਊਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਸੰਨ 1881 ਅਤੇ 1884 ਵਿੱਚ Gibbs ਨੇ "*Entitled Element of Vector Analysis*" ਨਾਮਕ ਇੱਕ ਲੇਖ ਕਿਤਾਬ ਛਪਾਈ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵੈਕਟਰਾ ਦਾ ਇੱਕ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿਵਰਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਲੇਕਿਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਤੀ D. Heaviside ਅਤੇ P.G. Tait (1831-1901 ਈਸਵੀ) ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਲਈ ਸਬੂਤ (ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ) ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।