ਅਧਿਆਇ 11

ਤਿੰਨ-ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ
(Three Dimensional Geometry)

❖ *The moving power of mathematical invention is not reasoning but imagination. – A.DEMORGAN* ❖

11.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

Leonhard Euler
(1707-1783)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਵਿਸਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਦੋ-ਵਿਮਾਈ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਵਿਸ਼ਿਆਂ ਦੀ ਜਾਣ ਪਛਾਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਵਿਧੀ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਿਆ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੈੱਕਟਰਜ਼ ਦੀ ਮੂਲ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੈਕਟਰਜ਼ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦਾ ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ। ਤਿੰਨ ਵਿਮਾਈ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿੱਚ ਇਸ ਉਪਗਮਨ (approach) ਦਾ ਉਦੇਸ਼ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਇਸ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਅਤੇ ਰੁਚੀਪੂਰਨ ਬਣਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।*

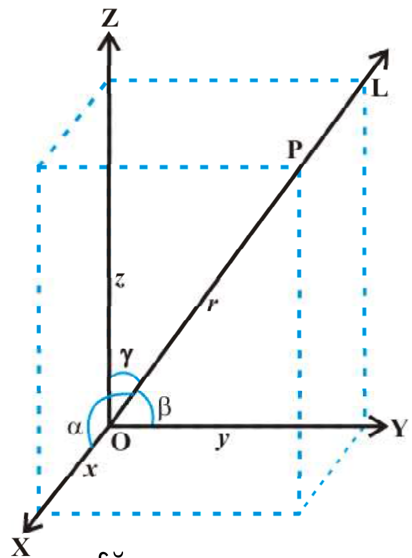
ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਿਖ (space) ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਤਲਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ, ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਦੋ ਤਲਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤਲ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ, ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤਲ ਦੀ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਧੇਰੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰਾਂ (Vecters) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਨੁਵਾਦ ਕਰਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਚਿੱਤਰਣ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

11.2 ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ (Direction Cosines and Direction Ratios of a Line)

ਅਧਿਆਇ 10 ਵਿੱਚ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ L ਦੁਆਰਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ α] β ਅਤੇ γ ਬਣਾਏ ਗਏ ਕੋਣ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਦੇ

* For various activities in three dimensional geometry, one may refer to the Book ***"A Hand Book for designing Mathematics Laboratory in Schools",*** NCERT, 2005

ਕੋਸਾਈਨ ਦਾ ਨਾਮ : $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ਅਤੇ $\cos\gamma$ ਰੇਖਾ L ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਇਨ (direction cosines or dc's) ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 11.1

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ L ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਪਰੀਤ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਆਪਣੇ ਸੰਪੂਰਕਾਂ ਅਰਥਾਤ π-α, π-β ਅਤੇ π-γ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਬਦਲ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ, ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਦੋ ਵਿਪਰੀਤ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲਈ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਇਨ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਸਮੂਹ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਲੱਖਣ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ l, m ਅਤੇ n ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਹੀਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੁਆਰਾ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ (direction ratios or *dr's*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ $\lambda \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਲਈ $a = \lambda l$, $b=\lambda m$ ਅਤੇ $c = \lambda n$

ਟਿੱਪਣੀ ਕੁਝ ਲੇਖਕ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਦਿਸ਼ਾ ਸੰਖਿਆ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹੈ। ਤਦ

$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k$$ (ਮੰਨ ਲਉ), k ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $l = ak,\ m = bk,\ n = ck$ ... (1)

ਪਰੰਤੂ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

ਇਸ ਲਈ $k^2 (a^2 + b^2 + c^2) = 1$

ਜਾਂ $$k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

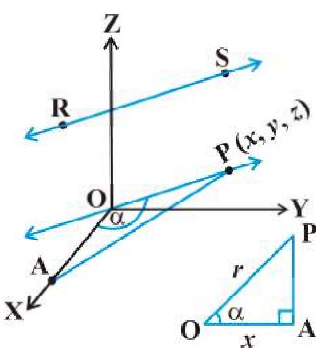
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ($d.c.$ਸ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ

$$l=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ m=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\ n=\pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਲਈ ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a, b, c ਹਨ, ਤਾਂ $ka, kb, kc; k \neq 0$ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਦੋ ਸਮੂਹ ਵੀ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੇ ਅਨੰਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

11.2.1 *ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨਾਂ ਦਾ ਸੰਬੰਧ (Relation between the direction cosines of a line)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ RS ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ। ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਇਸ ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P(x, y, z) ਲਉ। P ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ PA ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 11.2)।



ਚਿੱਤਰ 11.2

ਜੇਕਰ OP = r.ਤਾਂ $\cos\alpha = \frac{OA}{OP} = \frac{x}{r}$. ਜਿਸ ਤੋਂ $x = lr$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ($y = mr$ ਅਤੇ $z = nr$)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 (l^2 + m^2 + n^2)$

ਪਰੰਤੂ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

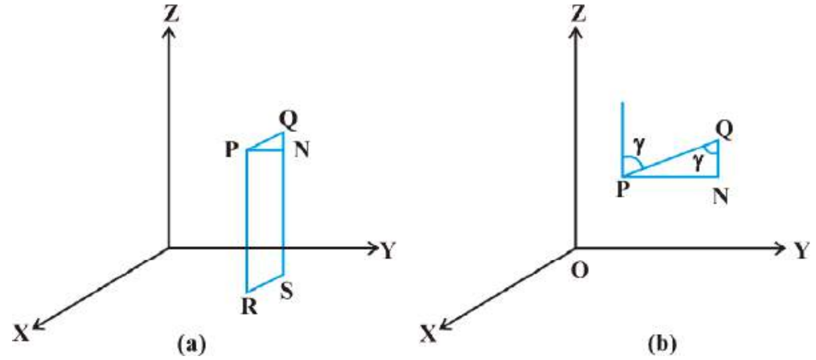
ਇਸ ਲਈ $\mathbf{l^2 + m^2 + n^2 = 1}$

11.2.2 ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ *(Direction cosines of a line passing through two points)*

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ P(x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ Q(x_2, y_2, z_2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਨੂੰ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 11.3(a))।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ PQ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : α, β, γ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ P ਅਤੇ Q ਤੋਂ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ XY-ਤਲ ਨੂੰ R ਅਤੇ S ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। P ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਲੰਬ



ਚਿੱਤਰ 11 . 3

ਖਿੱਚੀਏ ਜੋ QS ਨੂੰ N ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PNQ ਵਿੱਚ, $\angle PQN = \gamma$ (ਚਿੱਤਰ 11.3 (b)) ਇਸ ਲਈ

$$\cos\gamma = \frac{NQ}{PQ} = \frac{z_2 - z_1}{PQ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{PQ} \text{ ਅਤੇ } \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{PQ}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ PQ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ

$$\frac{x_2 - x_1}{PQ}, \frac{y_2 - y_1}{PQ}, \frac{z_2 - z_1}{PQ} \text{ ਹੈ।}$$

ਜਿੱਥੇ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਲਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ।

x_2 ï x_1, y_2 ï y_1, z_2 ï z_1, ਜਾਂ x_1 ï x_2, y_1 ï y_2, z_1 ï z_2

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 90°, 60° ਅਤੇ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ। ਤਦ $l = \cos 90° = 0$, $m = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $n = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 2] &1] &2 ਹਨ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :–

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}},\ \frac{-1}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}},\ \frac{-2}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $$\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (ï 2, 4, ï 5) ਅਤੇ (1, 2, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ

$$\frac{x_2-x_1}{PQ}, \frac{y_2-y_1}{PQ}, \frac{z_2-z_1}{PQ}$$ ਹਨ।

ਜਿੱਥੇ $$PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ਇੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (ï 2, 4, ï 5) ਅਤੇ (1, 2, 3) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$PQ = \sqrt{(1-(-2))^2+(2-4)^2+(3-(-5))^2} = \sqrt{77}$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ :

$$\frac{3}{\sqrt{77}},\ \frac{-2}{\sqrt{77}},\ \frac{8}{\sqrt{77}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x-ਧੁਰਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰਾ ਦੇ ਨਾਲ $0°$, $90°$ ਅਤੇ $90°$ ਦੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਕੋਸਾਈਨ $\cos 0°, \cos 90°, \cos 90°$ ਅਰਥਾਤ 1,0,0 ਹਨ।
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 0, 1, 0 ਅਤੇ 0, 0, 1 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A (2, 3, ï 4), B (1, ï 2, 3) ਅਤੇ C (3, 8, ï 11) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ

1 ï 2, ï 2 ï 3, 3 + 4 ਅਰਥਾਤï 1, ï 5, 7 ਹਨ।

B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਅਨੁਪਾਤ 3 ï 1, 8 + 2, ï 11 ï 3, ਅਰਥਾਤ, 2, 10,ï 14 ਹਨ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ AB ਅਤੇ BC ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ–ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ AB ਅਤੇ BC ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ AB ਅਤੇ BC ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ B ਸਾਂਝਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ A, B, ਅਤੇ C ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $90°, 135°, 45°$ ਦੇ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਨਾਲ ਸਮਾਨ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
3. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ï 18, 12, ï 4, ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਕੀ ਹਨ।
4. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (2, 3, 4), (ï 1, ï 2, 1), (5, 8, 7) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।
5. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ (3, 5, ï 4), (ï 1, 1, 2) ਅਤੇ (ï 5, ï 5, ï 2) ਹਨ।

11.3 ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a Line in Space)

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਦੋ ਵਿਮਾਈ ਤਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ

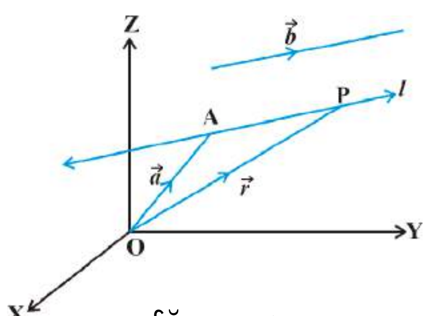
(i) ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਾਂ

(ii) ਇਹ ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

11.3.1 *ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ A ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a line through a given point A and parallel to a given vector $\vec{b}$)*

ਸਮਕੋਣਿਕ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਦਾ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ l ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ l ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.4)।

ਤਦ $\overrightarrow{AP}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\overrightarrow{AP} = \lambda \vec{b}$, ਜਿੱਥੇ λ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.4

ਪਰੰਤੂ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP}$ ï $\overrightarrow{OA}$

ਅਰਥਾਤ $\lambda \vec{b} = \vec{r} - \vec{a}$

ਉਲਟ : ਪੈਰਾਮੀਟਰ λ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਸਮੀਕਰਨ ਰੇਖਾ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b} \quad \ldots (1)$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹਨ ਅਤੇ ਉਲਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹੋਣ ਤਾਂ $\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ b ਨੂੰ $|\vec{b}|$ ਨਾ ਸਮਝਾਇਆ ਜਾਵੇ।

ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਕਾਰਟੀਜਨ ਰੂਪ ਵਿਉਂਤਪੰਨ ਕਰਨਾ (Derivation of Cartesian Form from Vector Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x_1, y_1, z_1) ਹਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ a, b, c ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਹਨ। ਤਦ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k};\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

ਅਤੇ
$$\vec{b} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ $\hat{i}, \hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = x_1 + \lambda a;\ y = y_1 + \lambda b;\ z = z_1 + \lambda c \qquad \dots (2)$$

ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੇ ਪੈਰਾਮੀਟਰਿਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ। (2) ਤੋਂ ਪੈਰਾਮੀਟਰ λ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \qquad \dots (3)$$

ਇਹ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਬਿੰਦੂ $(5, 2, -4)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$\vec{r} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k}) \quad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y, z)$ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 5\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 8\hat{k})$$

$$= (5+3\lambda)\,\hat{i} + (2+2\lambda)\,\hat{j} + (-4-8\lambda)\,\hat{k}$$

λ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-8}$$

ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

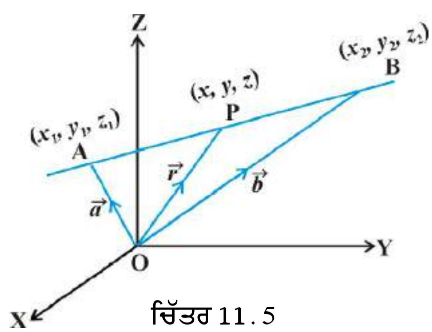
11.3.2 *ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a line passing through two given points)*

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2, z_2)$, ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 11.5)।

ਮੰਨ ਲਉ $\vec{r}$ ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। ਤਦ P ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ ਸਮਰੇਖੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ P ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

$$\vec{r} - \vec{a} = \lambda(\vec{b} - \vec{a})$$

ਜਾਂ $$\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \lambda(\vec{\boldsymbol{b}} \quad \vec{\boldsymbol{a}}),\ \lambda \in \mathbf{R} \quad \ldots (1)$$



ਚਿੱਤਰ 11.5

ਜੋ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਤੋਂ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿਉਤਪੰਨ ਕਰਨਾ

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k};\ \vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k};\ \text{ਅਤੇ}\ \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k} + \lambda[(x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}]$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = x_1 + \lambda\,(x_2 ï\ x_1);\ y = y_1 + \lambda\,(y_2 ï\ y_1);\ z = z_1 + \lambda\,(z_2 ï\ z_1)$$

λ ਦਾ ਵਿਲੋਪਣ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਬਿੰਦੂਆਂ (ï 1, 0, 2) ਅਤੇ (3, 4, 6) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਬਿੰਦੂਆਂ A(ï 1, 0, 2) ਅਤੇ B(3, 4, 6) ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਤਦ $\vec{a} = -\hat{i} + 2\hat{k}$

ਅਤੇ $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k}$

ਇਸ ਲਈ $\vec{b} - \vec{a} = 4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ

$$\vec{r} = -\hat{i} + 2\hat{k} + \lambda(4\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$$

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਨ $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+6}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਮਿਆਰੀ ਮਾਨਕ ਰੂਪ

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x_1 = -3, y_1 = 5, z_1 = -6; a = 2, b = 4, c = 2$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂ $(-3, 5, -6)$ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ

$$\vec{r} = (-3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}) + \lambda\ (2\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$$

ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

11.4 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਕੋਣ (Angle between two lines)

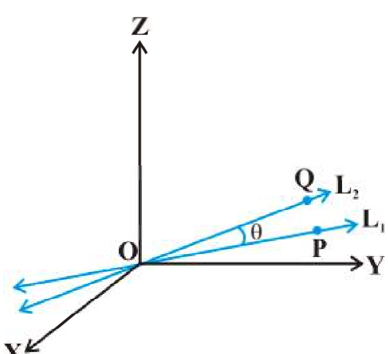
ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L_1 ਅਤੇ L_2 ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2, ਹਨ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L_1 ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਅਤੇ L_2 ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ Q ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 11.6 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ OP ਅਤੇ OQ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ OP ਅਤੇ OQ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ। ਹੁਣ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਵੈਕਟਰ OP ਅਤੇ OQ ਦੇ ਘਟਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \right|$$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਿਰ ਤੋਂ $\sin\theta$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

$$= \sqrt{1 - \frac{(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2}{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2)}}$$



ਚਿੱਤਰ 11.6

$$= \frac{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)-\left(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right)^2}}{\sqrt{\left(a_1^2+b_1^2+c_1^2\right)}\sqrt{\left(a_2^2+b_2^2+c_2^2\right)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2}}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \quad \ldots (2)$$

ਟਿੱਪਣੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਹੀਂ ਨਿਕਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : L'_1 ਅਤੇ L'_2 ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਥਾਂ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹੋਣ ਜਿਵੇਂ L_1 ਦੇ ਲਈ l_1, m_1, n_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਲਈ l_2, m_2, n_2 ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਲੈਣਗੇ।

$$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1m_2 + n_1n_2| \text{ (ਕਿਉਂਕਿ } l_1^2+m_1^2+n_1^2=1=l_2^2+m_2^2+n_2^2) \quad \ldots (3)$$

ਅਤੇ
$$\sin\theta = \sqrt{(l_1 m_2 - l_2 m_1)^2 - (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1 l_2 - n_2 l_1)^2} \quad \ldots (4)$$

ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

(i) ਅਭਿਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $\theta = 90°$, ਅਰਥਾਤ (1) ਤੋਂ $\boldsymbol{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0}$

(ii) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ $\theta = 0$, ਅਰਥਾਤ (2) ਤੋਂ $\boldsymbol{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu\vec{b}_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ।

ਤਦ
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right|$$

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ
$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1} \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ
$$\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2} \quad \ldots (2)$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ&ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਹੈ ਤਦ

$$\cos\theta = \left|\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾ-ਜੋੜੇ

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r} = 5\hat{i} - 2\hat{j} + \mu(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{b}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{b}_2 = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$

ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1||\vec{b}_2|}\right| = \left|\frac{(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{9+4+36}}\right|$$

$$= \left|\frac{3+4+12}{3\times 7}\right| = \frac{19}{21}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਰੇਖਾ-ਜੋੜੇ :

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{4}$$

ਅਤੇ $$\frac{x+1}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2}$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 3, 5, 4 ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 1, 1, 2 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੋਵੇ ਤਦ

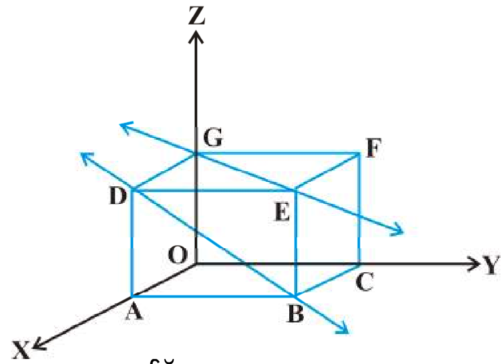
$$\cos\theta = \left|\frac{3.1 + 5.1 + 4.2}{\sqrt{3^2+5^2+4^2}\,\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\right| = \frac{16}{\sqrt{50}\,\sqrt{6}} = \frac{16}{5\sqrt{2}\,\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{3}}{15}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਕੋਣ $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{3}}{15}\right)$ ਹੈ।

11.5 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ (Shortest Distance between two lines)

ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇਗੀ ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਖਿੱਚਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਵੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਗੈਰ ਸਹਿਸਮਤਲੀ (noncoplanar) ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ (skew lines) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 11.7 ਵਿੱਚ x, y ਅਤੇ z-ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 1] 3] 2 ਇਕਾਈ ਦੇ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਕਮਰੇ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



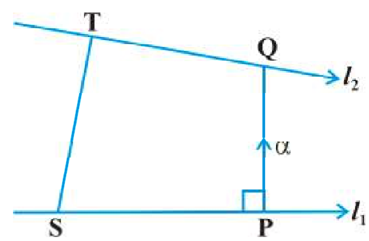
ਚਿੱਤਰ 11.7

ਰੇਖਾ GE ਛੱਤ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ DB, A ਦੇ ਠੀਕ ਉੱਪਰ ਛੱਤ ਦੇ ਕੋਨੇ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੀ ਹੋਈ ਦੀਵਾਰ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਹੈ। ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਦੇ ਮਿਲਦੀਆਂ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਅਰਥ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ। ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੋਵੇਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ।

11.5.1 *ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ* (*Distance between two skew lines*)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ (ਚਿੱਤਰ 11.8) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ :



ਚਿੱਤਰ 11.8

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \quad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ $$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2 \quad \text{... (2)}$$

ਰੇਖਾ l_1 ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ S ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਅਤੇ l_2 ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ T ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਲਉ। ਤਦ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ ST ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਖੇਪ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੋਵੇਗਾ (ਸੈਕਸ਼ਨ10.6.2)।

ਜੇਕਰ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ $\overline{PQ}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਦੋਵੇਂ $\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗੀ। $\overline{PQ}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ

$$\hat{n} = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \quad \text{... (3)}$$

ਤਦ $$\overrightarrow{PQ} = d\,\hat{n}$$

ਜਿੱਥੇ d, ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਵੈਕਟਰ ਦਾ ਆਕਾਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $\overrightarrow{ST}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{PQ}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੈ, ਤਦ

$$PQ = ST\,|\cos\theta|$$

ਪਰੰਤੂ $$\cos\theta = \left|\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{ST}}{|\overrightarrow{PQ}|\,|\overrightarrow{ST}|}\right|$$

$$= \left|\frac{d\,\hat{n}\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{d\ ST}\right| \quad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1)$$

$$= \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{ST\,\left|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2\right|}\right| \quad ((3) \text{ ਦੇ ਦੁਆਰਾ})$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = PQ = ST\,|\cos\theta|$$

ਜਾਂ $$d = \left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਰੇਖਾਵਾਂ :

$$l_1 : \frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$$

ਅਤੇ $$l_2 : \frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$

11.5.2 *ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ* **(*Distance between parallel lines*)**

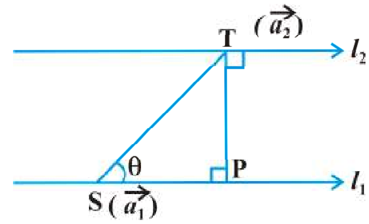
ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਸਹਿ ਸਮਤਲੀ (Coplanar) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b} \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$$

é (2)



ਚਿੱਤਰ 11.9

ਹਨ, ਜਿੱਥੇ l_1 ਤੇ ਬਿੰਦੂ S ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਅਤੇ l_2 ਤੇ ਬਿੰਦੂ T ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.9)

ਕਿਉਂਕਿ l_1, ਅਤੇ l_2 ਸਹਿਸਮਤਲੀ ਹਨ।ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ T ਤੋਂ l_1 ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦਾ ਪੈਰ P ਹੈ ਤਦ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ = |TP|

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{ST}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ।ਤਦ

$$\vec{b} \times \overrightarrow{ST} = (|\vec{b}||\overrightarrow{ST}|\sin\theta)\hat{n} \qquad \text{... (3)}$$

ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ।

ਪਰੰਤੂ

$$\overrightarrow{ST} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

ਇਸ ਲਈ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) = |\vec{b}|\,\text{PT}\,\hat{n} \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ PT} = \text{ST}\sin\theta)$$

ਅਰਥਾਤ

$$|\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)| = |\vec{b}|\,\text{PT}\cdot 1 \qquad (\text{as } |\hat{n}| = 1)$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = |\overrightarrow{PT}| = \left|\frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ :

$$\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda\,(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu\,(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}) \qquad \text{... (2)}$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$, ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + \hat{j},\ \vec{b}_1 = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a}_2 = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b}_2 = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ $$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = \hat{i} - \hat{k}$$

ਅਤੇ $$\vec{b}_1 \times \vec{b}_2 = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - \hat{j} - 7\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $$|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| = \sqrt{9 + 1 + 49} = \sqrt{59}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

$$d = \left| \frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} \right| = \frac{|3 - 0 + 7|}{\sqrt{59}} = \frac{10}{\sqrt{59}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2:

$$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k} + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} + \mu(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ ÇÕ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। (ਕਿਉਂ) ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਕਿ

$$\vec{a}_1 = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k},\ \vec{a}_2 = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ

$$d = \left| \frac{\vec{b} \times (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}|} \right| = \left| \frac{\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right|$$

$$= \frac{|-9\hat{i} + 14\hat{j} - 4\hat{k}|}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{293}}{7} \text{ ਹੈ।}$$

ਅਭਿਆਸ 11.2

1. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ ਵਾਲੀਆਂ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੈ।

2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ $(1, -1, 2)$, $(3, 4, -2)$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ $(0, 3, 2)$ ਅਤੇ $(3, 5, 6)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

3. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ $(4, 7, 8)$, $(2, 3, 4)$ ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਬਿੰਦੂਆਂ $(-1, -2, 1)$, $(1, 2, 5)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

4. ਬਿੰਦੂ $(1, 2, 3)$ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

5. ਬਿੰਦੂ ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ $(-2, 4, -5)$ ਤੋਂ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{x+3}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+8}{6}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

7. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x-5}{3}=\frac{y+4}{7}=\frac{z-6}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ $(5, -2, 3)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, -2, -5)$, ਅਤੇ $(3, -2, 6)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੇਖਾ-ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\vec{r} = 2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})$ ਅਤੇ

$\vec{r} = 7\hat{i}-6\hat{k}+\mu(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})$ ਅਤੇ

$\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}-56\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

11. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੇਖਾ-ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z+3}{-3}$ ਅਤੇ $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-4}{8}=\frac{z-5}{4}$

(ii) $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ ਅਤੇ $\frac{x-5}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{8}$

12. p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{1-x}{3}=\frac{7y-14}{2p}=\frac{z-3}{2}$

ਅਤੇ $\dfrac{7-7x}{3p}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{6-z}{5}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ।

13. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x-5}{7}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z}{1}$ ਅਤੇ $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ।

14. ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})+\lambda(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})$ ਅਤੇ $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}+\mu(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ ਦੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x+1}{7}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z+1}{1}$ ਅਤੇ $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z-7}{1}$ ਦੇ ਵਿਚਾਕਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :
$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ ਅਤੇ $\vec{r}=4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}+\mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$

17. ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
$\vec{r}=(1-t)\hat{i}+(t-2)\hat{j}+(3-2t)\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{r}=(s+1)\hat{i}+(2s-1)\hat{j}-(2s+1)\hat{k}$

11.6 ਸਮਤਲ (Plane)

ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਨੂੰ ਵਿਲੱਖਣ ਰੂਪ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਸ਼ਰਤ ਪਤਾ ਹੋਵੇ :

(i) ਸਮਤਲ ਦਾ ਅਭਿਲੰਬ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਅਭਿਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ।

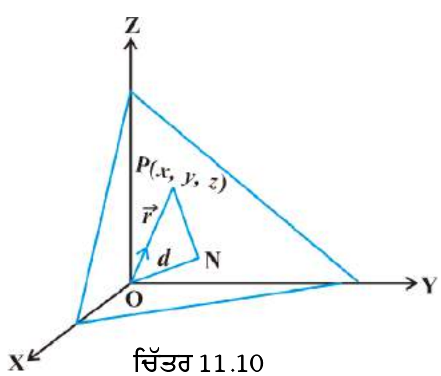
(ii) ਇਹ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਦਿਸ਼ਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤਿੰਨ ਗੈਰ ਸਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

11.6.1 *ਅਭਿਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a Plane in normal form)*

ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਦੂਰੀ $d\ (d \neq 0)$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11-10)।



ਚਿੱਤਰ 11.10

ਜੇਕਰ $\overrightarrow{ON}$ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ $\overrightarrow{ON}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ $\hat{n}$ ਇਕਾਈ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ ਹੈ ਤਦ $\overrightarrow{ON}=d\,\hat{n}$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{ON}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\overrightarrow{NP}\cdot\overrightarrow{ON} = 0$ ... (1)

ਮੰਨ ਲਓ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ ਤਾਂ $\overrightarrow{NP} = \vec{r} - d\,\hat{n}$ (ਕਿਉਂਕਿ $\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{OP}$)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਰੂਪ ਦਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$(\vec{r}-d\,\hat{n})\cdot d\,\hat{n} = 0$$

ਜਾਂ $$(\vec{r}-d\,\hat{n})\cdot\hat{n} = 0 \ (d \neq 0)$$

ਜਾਂ $$\vec{r}\cdot\hat{n} - d\,\hat{n}\cdot\hat{n} = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$\vec{r}\cdot\hat{n} = d \ \ (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \hat{n}\cdot\hat{n}=1)$$ ... (2)

ਇਹ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $\hat{n}$ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਓ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P(x, y, z) ਹੈ। ਤਦ

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

ਮੰਨ ਲਓ $\hat{n}$ ਦਾ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ। ਤਦ

$$\hat{n} = l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}$$

$\vec{r}\cdot\hat{n}$ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (2) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$$(x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k})\cdot(l\,\hat{i} + m\,\hat{j} + n\,\hat{k}) = d$$

ਅਰਥਾਤ $$\boldsymbol{lx + my + nz = d}$$ ... (3)

ਇਹ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ $\vec{r}\cdot(a\,\hat{i} + b\,\hat{j} + c\,\hat{k}) = d$ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਤਾਂ $ax + by + cz = d$ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a, b ਅਤੇ c ਸਮਤਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ $\frac{6}{\sqrt{29}}$ ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਸ ਦਾ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ $2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $\vec{n} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ ਹੈ। ਤਦ

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{29}}$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮਤਲ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$\vec{r}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{-3}{\sqrt{29}}\hat{j} + \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{k}\right) = \frac{6}{\sqrt{29}} \text{ ਹੈ।}$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}) + 1 = 0$ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਤਲ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\vec{r}\cdot(-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 1 \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $$|-6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{36+9+4} = 7$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ 7 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$\vec{r}\cdot\left(-\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}\right) = \frac{1}{7}$$

ਜੋ ਕਿ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\,.\,\hat{n} = d$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $\hat{n} = -\frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਹਨ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\hat{n}$ ਦਾ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ $\frac{-6}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਸਮਤਲ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ 2, –3, 4 ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਹਨ :

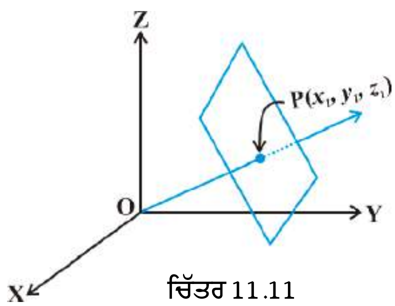
$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{-3}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}, \frac{4}{\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}} \text{, ਅਰਥਾਤ } \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ $2x - 3y + 4z - 6 = 0$ ਅਰਥਾਤ $2x - 3y + 4z = 6$ ਨੂੰ $\sqrt{29}$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x + \frac{-3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

ਅਤੇ ਇਹ $lx + my + nz = d$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ d ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮਤਲ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $\frac{6}{\sqrt{29}}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ $2x ï \ 3y + 4z ï \ 6 = 0$ ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 11.11

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਤੇ ਪਾਏ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x_1, y_1, z_1) ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.11)A

ਤਦ ਰੇਖਾ OP ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ x_1, y_1, z_1 ਹਨ।

ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{6}{\sqrt{29}}$$

ਜਿੱਥੇ OP ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ $\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}$ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\frac{x_1}{\frac{2}{\sqrt{29}}} = \frac{y_1}{\frac{-3}{\sqrt{29}}} = \frac{z_1}{\frac{4}{\sqrt{29}}} = k$$

ਅਰਥਾਤ
$$x_1 = \frac{2k}{\sqrt{29}},\ y_1 = \frac{-3k}{\sqrt{29}},\ z_1 = \frac{4k}{\sqrt{29}}$$

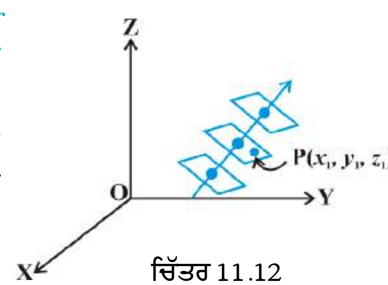
ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $k = \frac{6}{\sqrt{29}}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰ (ਪਾਦ) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{12}{29}, \frac{-18}{29}, \frac{24}{29}\right)$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ d ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹੋਣ ਤਦ ਲੰਬ ਦੇ ਪਾਦ (ld, md, nd) ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

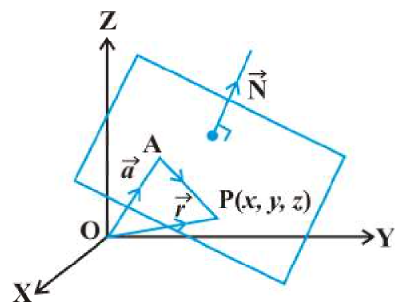
11.6.2 *ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ (Equation of a plane perpendicular to a given vector and passing through a given point)*

ਅੰਤਰਿਖ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵੈਕਟਰ ਤੇ ਲੰਬ ਅਨੇਕ ਸਮਤਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 11-12)A



ਚਿੱਤਰ 11.12

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A, ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ, ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{N}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11-13)।



ਚਿੱਤਰ 11.13

ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AP}$, $\vec{N}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{N} = 0$. ਪਰੰਤੂ $\overrightarrow{AP} = \vec{r}-\vec{a}$. ਇਸ ਲਈ

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{N}=0 \qquad \ldots (1)$$

ਇਹ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਬਿੰਦੂ A (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P (x, y, z) ਹੈ ਅਤੇ $\vec{N}$ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ A, B ਅਤੇ C ਹੈ, ਤਦ

$$\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k};\ \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{N}=A\hat{i}+B\hat{j}+C\hat{k}$$

ਹੁਣ $\quad (\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{N}=0$

ਇਸ ਲਈ $\quad \left[(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}\right]\cdot(A\hat{i}+B\hat{j}+C\hat{k})=0$

ਅਰਥਾਤ $\quad \mathbf{A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0}$

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (5, 2, – 4) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 2, 3, – 1 ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (5, 2, – 4) ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦਾ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ $\vec{N}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{N}=0$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਜਾਂ $\quad [\vec{r}-(5\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k})]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0 \qquad \ldots (1)$

(1) ਨੂੰ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$[(x-5)\hat{i}+(y-2)\hat{j}+(z+4)\hat{k}]\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=0$$

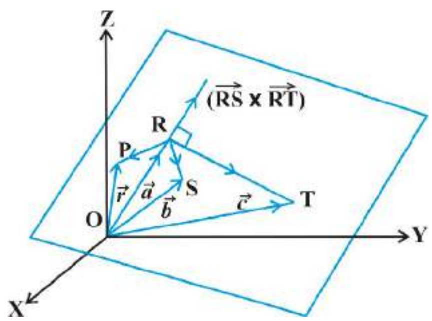
ਜਾਂ $\quad 2(x-5)+3(y-2)-1(z+4)=0$

ਅਰਥਾਤ $\quad 2x+3y-z=20$

ਜੋ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

11.6.3 *ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ* *(Equation of a plane passing through three non-collinear points)*

ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਤੇ ਸਥਿਤ ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.14)।



ਚਿੱਤਰ 11.14

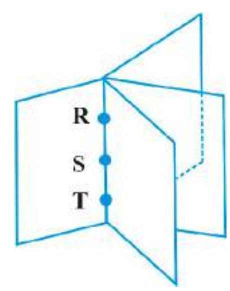
ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{RS}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{RT}$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹੋਏ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ R ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}$ ਤੇ ਲੰਬ, ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}) = 0$ ਹੈ।

ਜਾਂ

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot [(\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})] = 0 \quad \ldots (1)$$

ਇਹ ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਹੈ।

> *ਟਿੱਪਣੀ* ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂ ਕਹਿਣਾ ਕਿਉਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਤਦ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਕਈ ਸਮਤਲ ਹੋਣਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 11.15)।



ਚਿੱਤਰ 11.15

ਇਹ ਸਮਤਲ ਇੱਕ ਕਿਤਾਬ ਦੇ ਪੰਨਿਆਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪੰਨਿਆਂ ਦੇ ਜੁੜਨ (binding) ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ ਦਾ ਮੈਂਬਰ ਹੈ।

ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂਆਂ R, S ਅਤੇ T ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y, z) ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$ ਹੈ। ਤਦ

$$\overrightarrow{RP} = (x - x_1)\hat{i} + (y - y_1)\hat{j} + (z - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RS} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\overrightarrow{RT} = (x_3 - x_1)\hat{i} + (y_3 - y_1)\hat{j} + (z_3 - z_1)\hat{k}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ਜੋ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਰੂਪ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਬਿੰਦੂਆਂ R(2, 5, −3), S(−2, −3, 5) ਅਤੇ T(5, 3, −3) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\vec{a} = 2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{c} = 5\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$

ਤਦ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\overrightarrow{RS}\times\overrightarrow{RT}) = 0 \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

ਜਾਂ $$(\vec{r}-\vec{a})\cdot[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})] = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$[\vec{r}-(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})]\cdot[(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k})\times(3\hat{i}-2\hat{j})]=0$$

11.6.4 ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅੰਤਰ ਖੰਡ-ਰੂਪ (*Intercept form of the equation of a plane*)

ਇਸ ਸੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਉਸ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕੀ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਗਮਨ (deduce) ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0 \quad (\mathrm{D} \neq 0) \text{ ਹੈ।} \qquad \ldots (1)$$

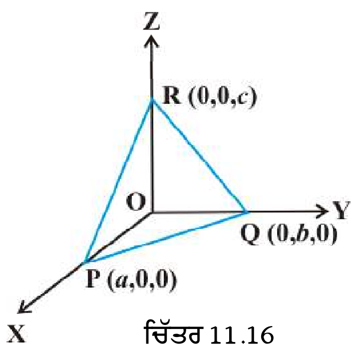
ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਦੁਆਰਾ x, y, ਅਤੇ z-ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a, b ਅਤੇ c (ਚਿੱਤਰ 11.16) ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰਿਆਂ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, ਅਤੇ $(0, 0, c)$ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{A}a + \mathrm{D} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathrm{A} = \frac{-\mathrm{D}}{a}$$

$$\mathrm{B}b + \mathrm{D} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathrm{B} = \frac{-\mathrm{D}}{b}$$

$$\mathrm{C}c + \mathrm{D} = 0 \text{ ਜਾਂ } \mathrm{C} = \frac{-\mathrm{D}}{c}$$



ਚਿੱਤਰ 11.16

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (1) ਜੋ ਕਿ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \qquad \ldots (2)$$

ਜੋ ਕਿ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ x, y ਅਤੇ z-ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, 3 ਅਤੇ 4 ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \qquad \text{... (1)}$$

ਜਿੱਥੇ $a = 2, b = 3, c = 4$ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

a, b ਅਤੇ c ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਤੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ ਜਾਂ $6x + 4y + 3z = 12$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

11.6.5 *ਦੋ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲਾ ਸਮਤਲ* (Plane passing through the intersection of two given planes)

ਮੰਨ ਲਉ π_1 ਅਤੇ π_2 ਦੋ ਸਮਤਲ ਜਿਸਦੇ ਸਮਕੀਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $\vec{r}\cdot\hat{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\hat{n}_2 = d_2$ ਹਨ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ 7)A

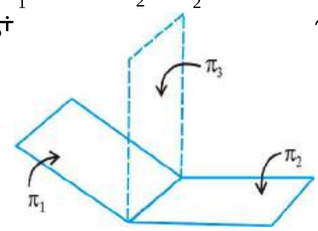
ਜੇਕਰ ਇਸ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{t}$ ਹੈ ਤਾਂ

$$\vec{t}\cdot\vec{n}_1 = d_1 \text{ ਅਤੇ } \vec{t}\cdot\vec{n}_2 = d_2$$

ਇਸ ਲਈ λ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\vec{t}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$$

ਕਿਉਂਕਿ $\vec{t}$ ਸਵੈ ਇੱਛਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰੇਖਾ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11.17

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਨ $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$ ਸਮਤਲ π_3 ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਵੈਕਟਰ $\vec{r}$, π_1 ਅਤੇ π_2, ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ π_3 ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\boldsymbol{\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2}$ ਹੈ। ... (1)

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ :

$$\vec{n}_1 = A_1\hat{i}+B_2\hat{j}+C_1\hat{k}$$
$$\vec{n}_2 = A_2\hat{i}+B_2\hat{j}+C_2\hat{k}$$

ਅਤੇ
$$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$$

ਤਾਂ (1) ਦਾ ਪਰਿਵਰਤਿਤ ਰੂਪ ਹੈ :

$$x(A_1 + \lambda A_2) + y(B_1 + \lambda B_2) + z(C_1 + \lambda C_2) = d_1 + \lambda d_2$$

ਜਾਂ
$$\mathbf{(A_1x + B_1y + C_1z - d_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z - d_2) = 0} \qquad \text{... (2)}$$

ਜੋ ਹਰੇਕ λ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})=-5$, ਦੇ ਕਾਟ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1,1,1) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{n}_2 = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $d_1 = 6$ ਅਤੇ $d_2 = -5$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸੂਤਰ $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)=d_1+\lambda d_2$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ

$$\vec{r}\cdot[\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})] = 6-5\lambda$$

ਜਾਂ $$\vec{r}\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)]\hat{k} = 6-5\lambda \qquad \dots (1)$$

ਜਿੱਥੇ λ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot[(1+2\lambda)\hat{i}+(1+3\lambda)\hat{j}+(1+4\lambda)\hat{k}]=6-5\lambda$$

ਜਾਂ $$(1 + 2\lambda)x + (1 + 3\lambda)y + (1 + 4\lambda)z = 6 - 5\lambda$$

ਜਾਂ $$(x + y + z - 6) + \lambda(2x + 3y + 4z + 5) = 0 \qquad \dots (2)$$

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਮਤਲ ਬਿੰਦੂ (1,1,1) ਤੋਂ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਬਿੰਦੂ, (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਅਰਥਾਤ

$$(1 + 1 + 1 - 6) + \lambda(2 + 3 + 4 + 5) = 0$$

ਜਾਂ $$\lambda = \frac{3}{14}$$

λ ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\vec{r}\cdot\left[\left(1+\frac{3}{7}\right)\hat{i}+\left(1+\frac{9}{14}\right)\hat{j}+\left(1+\frac{6}{7}\right)\hat{k}\right] = 6-\frac{15}{14}$$

ਜਾਂ $$\vec{r}\cdot\left(\frac{10}{7}\hat{i}+\frac{23}{14}\hat{j}+\frac{13}{7}\hat{k}\right) = \frac{69}{14}$$

ਜਾਂ $$\vec{r}\cdot(20\hat{i}+23\hat{j}+26\hat{k}) = 69$$

ਜੋ ਸਮਤਲ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

11.7 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹੋਣਾ (Coplanarity of two lines)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਲੋੜੀਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

$$\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1 \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ
$$\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2 \text{ ਹਨ।} \qquad \ldots (2)$$

ਰੇਖਾ (1) ਬਿੰਦੂ A, ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_1$ ਹੈ, ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਅਤੇ $\vec{b}_1$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਰੇਖਾ (2) ਬਿੰਦੂ B ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}_2$ ਹੈ ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। ਤਦ

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$$

ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AB}, \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਅਤੇ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ,

ਅਰਥਾਤ
$$\overrightarrow{AB}.(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0 \text{ ਜਾਂ } (\vec{a}_2 - \vec{a}_1)\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ (x_2, y_2, z_2) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{b}_2$ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ-ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਹਨ। ਤਦ

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}; \text{ ਅਤੇ } \vec{b}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$$

ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$ ਜਿਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \ldots (4)$$

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{5} \text{ ਅਤੇ } \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{5} \text{ ਸਹਿ-ਤਲੀ ਹਨ।}$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x_1 = -3, y_1 = 1, z_1 = 5, a_1 = -3, b_1 = 1, c_1 = 5$

$$x_2 = -1, y_2 = 2, z_2 = 5, a_2 = -1, b_2 = 2, c_2 = 5$$

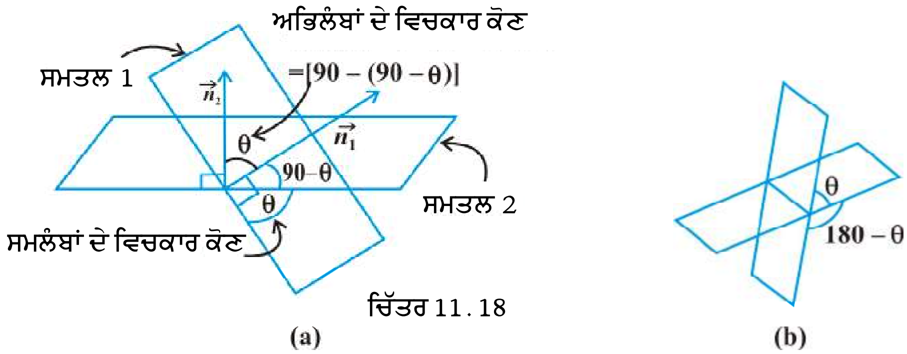
ਹੁਣ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਲੈਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

11.8 ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ (Angle between two planes)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਦੁਆਰਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.18 (a))। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ 180 ï θ (ਚਿੱਤਰ 11.18 (b)) ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਨੂੰ ਹੀ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਲਿਆਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 11.18

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲਾਂ, $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ। ਤਦ ਕਿਸੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਤਲਾਂ ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਅਭਿਲੰਬਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ।

ਤਦ $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}\right|$$

ਟਿੱਪਣੀ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤਲ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $\vec{n}_1 . \vec{n}_2 = 0$ ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ $\vec{n}_1$ ਅਤੇ $\vec{n}_2$ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਸਮਤਲਾਂ

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ ਅਤੇ } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ ਹੈ।

ਤਾਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A_1, B_1, C_1 ਅਤੇ A_2, B_2, C_2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\cos\theta = \left|\frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}\right|$$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤਲ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹਨ ਤਦ $\theta = 90^\circ$ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos\theta = 0$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\cos\theta = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
2. ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤਲ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ ਤਾਂ $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ $2x + y - 2z = 5$ ਅਤੇ $3x - 6y - 2z = 7$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਵੈਕਟਰ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ ਹੈ। ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਅਭਿਲੰਬ

$$\vec{N}_1 = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ ਅਤੇ } \vec{N}_2 = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \text{ ਹਨ।}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|}\right| = \left|\frac{(2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})\cdot(3\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k})}{\sqrt{4+1+4}\ \sqrt{9+36+4}}\right| = \left(\frac{4}{21}\right)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ $3x - 6y + 2z = 7$ ਅਤੇ $2x + 2y - 2z = 5$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਸਮੀਕਰਨਾਂ

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \text{ ਅਤੇ } A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ
$$A_1 = 3,\ B_1 = -6,\ C_1 = 2$$
$$A_2 = 2,\ B_2 = 2,\ C_2 = -2$$

ਫਿਰ ਤੋਂ
$$\cos\theta = \left|\frac{3\times 2 + (-6)\,(2) + (2)\,(-2)}{\sqrt{\left(3^2 + (-6)^2 + (-2)^2\right)}\ \sqrt{\left(2^2 + 2^2 + (-2)^2\right)}}\right|$$

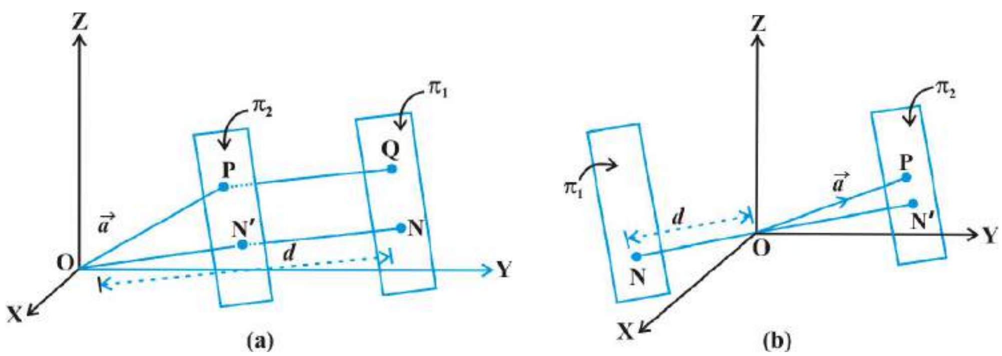
$$= \left| \frac{-10}{7 \times 2\sqrt{3}} \right| = \frac{5}{7\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{21}$$

ਇਸ ਲਈ $$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{3}}{21}\right)$$

11.9 ਸਮਤਲ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ (Distance of a point from a plane)

ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ (Vector Form)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ P ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ π_1 ਜਿਸਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ (ਚਿੱਤਰ 11.19) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 11. 19

ਫਿਰ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਸਮਤਲ π_1 ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਸਮਤਲ π_2 ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਮਤਲ π_2 ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r} - \vec{a})\cdot\hat{n} = 0$ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ $$\vec{r}\cdot\hat{n} = \vec{a}\cdot\hat{n}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਇਸ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ $ON' = |\vec{a}\cdot\hat{n}|$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ P ਤੋ. ਸਮਤਲ π_1 ਤੋਂ ਦੂਰੀ (ਚਿੱਤਰ 11. 21 (a))

$$PQ = ON - ON' = |d - \vec{a}\cdot\hat{n}|$$

ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 11. 19 (b) ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਟਿੱਪਣੀ 1. ਜੇਕਰ ਸਮਤਲ π_2 ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\,.\,\vec{\mathrm{N}} = d$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $\vec{\mathrm{N}}$ ਸਮਤਲ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ ਤਾਂ ਲੰਬ ਦੀ ਦੂਰੀ $\dfrac{|\vec{a}\,.\,\vec{\mathrm{N}} - d|}{|\vec{\mathrm{N}}|}$ ਹੈ।

2. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਸਮਤਲ $\vec{r}\,.\,\vec{\mathrm{N}} = d$ ਦੀ ਦੂਰੀ $\dfrac{|d|}{|\vec{\mathrm{N}}|}$ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a} = 0$)।

ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ (Cartesian Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{P}(x_1, y_1, z_1)$ ਇੱਕ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{D} \text{ ਹੈ।}$$

ਤਦ

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$$

$$\vec{\mathrm{N}} = \mathrm{A}\hat{i} + \mathrm{B}\hat{j} + \mathrm{C}\hat{k}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (1) ਦੇ ਦੁਆਰਾ P ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ

$$\left|\frac{(x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})\cdot(\mathrm{A}\hat{i} + \mathrm{B}\hat{j} + \mathrm{C}\hat{k}) - \mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}\right|$$

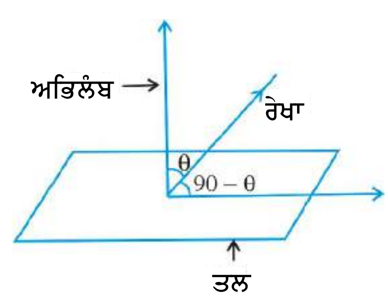
$$= \left|\frac{\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{C}z_1 - \mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਬਿੰਦੂ (2, 5, −3) ਦੀ ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) = 4$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\vec{a} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{\mathrm{N}} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ਅਤੇ $d = 4$.

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (2, 5, −3) ਦੀ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$\frac{|(2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k})\cdot(6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - 4|}{|6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}|} = \frac{|12 - 15 - 6 - 4|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{13}{7}$$



ਚਿੱਤਰ 11.20

11.10 ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ (Angle between a line and a plane)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ, ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਦਾ ਕੋਣ ਪੂਰਕ (complementary angle) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.20)।

ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ (Vector Form)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$ ਹੈ। ਤਦ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ θ, ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\cdot|\vec{n}|}\right|$$

ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ϕ, $90° - \theta$, ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$

ਅਰਥਾਤ
$$\sin\phi = \left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}|\;|\vec{n}|}\right| \quad \text{ਜਾਂ } \phi = \sin^{-1}\left|\frac{\vec{b}\cdot\vec{n}}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਰੇਖਾ $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{6}$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ $10x + 2y - 11z = 3$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ θ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ ਅਸੀਂ

$$\vec{r} = (-\hat{i} + 3\hat{k}) + \lambda(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$$

ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}) = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇੱਥੇ $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{n} = 10\hat{i} + 2\hat{j} - 11\hat{k}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\sin\phi = \left|\frac{(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})\cdot(10\hat{i}+2\hat{j}-11\hat{k})}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\,\sqrt{10^2+2^2+11^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-40}{7\times 15}\right| = \left|\frac{-8}{21}\right| = \frac{8}{21} \quad \text{ਜਾਂ } \phi = \sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$$

ਅਭਿਆਸ 11.3

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (a) $z = 2$ (b) $x + y + z = 1$

   (c) $2x + 3y - z = 5$ (d) $5y + 8 = 0$

2. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 7 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}$ ਤੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ।

3. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮਤਲਾਂ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (a) $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ (b) $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}) = 1$

   (c) $\vec{r} \cdot [(s - 2t)\hat{i} + (3 - t)\hat{j} + (2s + t)\hat{k}] = 15$

4. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਪੈਰ/ਪਾਦ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ।

   (a) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ (b) $3y + 4z - 6 = 0$

   (c) $x + y + z = 1$ (d) $5y + 8 = 0$

5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਸਮਤਲਾਂ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ

   (a) ਬਿੰਦੂ $(1, 0, -2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਂਦਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਹੈ।

   (b) ਬਿੰਦੂ $(1,4, 6)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਵੈਕਟਰ ਹੈ।

6. ਉਹਨਾਂ ਸਮਤਲਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੈ।

   (a) $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$, $(-4, -2, 3)$

   (b) $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(-2, 2, -1)$

7. ਸਮਤਲ $2x + y - z = 5$ ਦੁਆਰਾ ਕੱਟੇ ਗਏ : ਅੰਤਰ ਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ 3 ਅਤੇ ਜੋ ਤਲ ZOX ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।

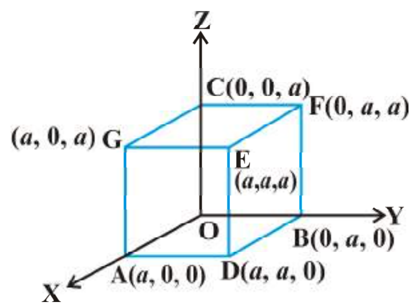
9. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਤਲਾਂ $3x - y + 2z - 4 = 0$ ਅਤੇ $x + y + z - 2 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $(2, 2, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

10. ਉਸ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$, $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਅਤੇ $(2, 1, 3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ।

11. ਤਲਾਂ $x + y + z = 1$ ਅਤੇ $2x + 3y + 4z = 5$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਤਲ $x - y + z = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਸਮਤਲਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 5$ ਅਤੇ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) = 3$ ਹਨ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮਤਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜਾਂ ਲੰਬ ਹਨ, ਅਤੇ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਨਾ ਤੇ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਲੰਬ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 11.21

(a) 7x + 5y + 6z + 30 = 0 ਅਤੇ 3x ï y ï 10z + 4 = 0

(b) 2x + y + 3z ï 2 = 0 ਅਤੇ x ï 2y + 5 = 0

(c) 2x ï 2y + 4z + 5 = 0 ਅਤੇ 3x ï 3y + 6z ï 1 = 0

(d) 2x ï y + 3z ï 1 = 0 ਅਤੇ 2x ï y + 3z + 3 = 0

(e) 4x + 8y + z ï 8 = 0 ਅਤੇ y + z ï 4 = 0

14. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸੰਗਤ ਸਮਤਲਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

	ਬਿੰਦੂ	ਸਮਤਲ
(a)	(0, 0, 0)	3x ï 4y + 12 z = 3
(b)	(3, ï 2, 1)	2x ï y + 2z + 3 = 0
(c)	(2, 3, ï 5)	x + 2y ï 2z = 9
(d)	(ï 6, 0, 0)	2x ï 3y + 6z ï 2 = 0

ਫੁਟਕਲ ਵਿਭਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਇੱਕ ਘਣ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੇ ਨਾਲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + \cos^2 \delta = \frac{4}{3}$$

ਹੱਲ : ਇੱਕ ਘਣ, ਇੱਕ ਸਮਕੋਣਿਕ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫਲਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਅਤੇ ਉਚਾਈ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ OADBEFCG ਇੱਕ ਘਣ ਜਿਸ ਦੀ ਹਰੇਕ ਭੁਜਾ a ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.21)A

OE, AF, BG ਅਤੇ CD ਚਾਰ ਵਿਕਰਣ ਹਨ

ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ O ਅਤੇ E ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ OE ਅਰਥਾਤ ਵਿਕਰਣ OE ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ

$$\frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}, \frac{a-0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹਨ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ AF, BG ਅਤੇ CD ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ :

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$$ ਅਤੇ $$\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}},$$ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜੋ OE, AF, BG, ਅਤੇ CD, ਦੇ ਨਾਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : α, β, γ, ਅਤੇ δ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ।

ਤਦ $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m + n); \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(-l + m + n)$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}(l - m + n); \cos\delta = \frac{1}{\sqrt{3}}(l + m - n)$$

ਵਰਗ ਕਰਕੇ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + \cos^2\delta$$

$$= \frac{1}{3}\left[(l + m + n)^2 + (-l + m + n)^2 \right] + (l - m + n)^2 + (l + m - n)^2]$$

$$= \frac{1}{3}\left[4(l^2 + m^2 + n^2) \right] = \frac{4}{3}$$ (ਕਿਉਂਕਿ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$)

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਉਸ ਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ $(1, -1, 2)$ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਜੋ ਸਮਤਲਾਂ $2x + 3y - 2z = 5$ ਅਤੇ $x + 2y - 3z = 8$ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$A(x - 1) + B(y + 1) + C(z - 2) = 0$$ ਹੈ। ... (1)

ਸਮਤਲਾਂ $2x + 3y - 2z = 5$ ਅਤੇ $x + 2y - 3z = 8$, ਦੇ ਨਾਲ (1) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਣ ਦੀ ਸ਼ਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$2A + 3B - 2C = 0$$ ਅਤੇ $$A + 2B - 3C = 0$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A = -5C$ ਅਤੇ $B = 4C$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$-5C(x - 1) + 4C(y + 1) + C(z - 2) = 0$$

ਅਰਥਾਤ $$5x - 4y - z = 7$$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਬਿੰਦੂ $P(6, 5, 9)$ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(3, -1, 2)$, $B(5, 2, 4)$ ਅਤੇ $C(-1, -1, 6)$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਮਤਲ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ A, B, ਅਤੇ C ਹਨ। ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਸਮਤਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦਾ ਪਾਦ D ਹੈ। ਅਸੀਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ PD ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ PD, $\overrightarrow{AP}$ ਦਾ $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ਤੇ ਪ੍ਰਖੇਪ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad PD = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ $\overrightarrow{AP}$ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ।

ਫਿਰ ਤੋਂ $\quad \overrightarrow{AP} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}$

ਅਤੇ
$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 12\hat{i} - 16\hat{j} + 12\hat{k}$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ ਦੇ ਸਾਪੇਖ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $= \dfrac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\overrightarrow{PD} = (3\hat{i} + 6\hat{j} + 7\hat{k}) \cdot \frac{3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}}{\sqrt{34}}$$
$$= \frac{3\sqrt{34}}{17}$$

ਵਿਕਲਪ : ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਦੀ ਸਮਤਲ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ
$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta}$$
ਅਤੇ
$$\frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ

$x_1 = a - d$ ਅਤੇ $x_2 = b - c$

$y_1 = a$ $\quad y_2 = b$

$z_1 = a + d$ $\quad z_2 = b + c$

ਅਤੇ $a_1 = \alpha - \delta$ $\quad a_2 = \beta - \gamma$

$b_1 = \alpha$ $\quad b_2 = \beta$

$c_1 = \alpha + \delta$ $\quad c_2 = \beta + \gamma$

ਹੁਣ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b - c - a + d & b - a & b + c - a - d \\ \alpha - \delta & \alpha & \alpha + \delta \\ \beta - \gamma & \beta & \beta + \gamma \end{vmatrix}$$

ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਤੀਸਰੇ ਥੰਮ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਥੰਮ ਵਿੱਚ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2\begin{vmatrix} b - a & b - a & b + c - a - d \\ \alpha & \alpha & \alpha + \delta \\ \beta & \beta & \beta + \gamma \end{vmatrix} = 0$$

ਕਿਉਂਕਿ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਥੰਮ ਸਮਾਨ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A(3, 4, 1) ਅਤੇ B(5, 1, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ XY- ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ :

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,[\,(5-3)\hat{i} + (1-4)\hat{j} + (6-1)\hat{k}]$$

ਅਰਥਾਤ $\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k} + \lambda\,(2\hat{i} - 3$ ਅਤੇ $5\hat{k})$ ਹੈ। ... (1)

ਮੰਨ ਲਓ P ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾ AB, XY-ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਤਦ ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $x\hat{i} + y\hat{j}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਪੱਕੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਅਰਥਾਤ $x\hat{i} + y\hat{j} = (3 + 2\lambda)\hat{i} + (4 - 3\lambda)\hat{j} + (1 + 5\lambda)\hat{k}$

$\hat{i}$, $\hat{j}$ ਅਤੇ $\hat{k}$, ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$x = 3 + 2\lambda$$
$$y = 4 - 3\lambda$$
$$0 = 1 + 5\lambda$$

ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$x = \frac{13}{5} \quad \text{vkj} \quad y = \frac{23}{5}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{13}{5}, \frac{23}{5}, 0\right)$ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ (2] 1] 1) ਨਾਲ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ (3] 5 &1) ਅਤੇ (4] 3]&1) ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

2. ਜੇਕਰ ਦੋ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l_1, m_1, n_1 ਅਤੇ l_2, m_2, n_2 ਹੋਣ ਤਾਂ ਦਰਸਾਓ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ

$m_1 n_2$ ï $m_2 n_1$, $n_1 l_2$ ï $n_2 l_1$, $l_1 m_2$ ï l_2 ï m_1 ਹਨ।

3. ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਅਤੇ b ï c, c ï a, a ï b ਹਨ।

4. x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C, ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (1, 2, 3), (4, 5, 7), (ï 4, 3, ï 6) ਅਤੇ (2, 9, 2) ਹੋਣ ਤਾਂ AB ਅਤੇ CD ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$, $\frac{x-1}{3k} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-6}{-5}$ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ ਤਾਂ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਬਿੰਦੂ (1, 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}) + 9 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਬਿੰਦੂ (a, b, c) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) = 2$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ ਅਤੇ

$\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (5, 1, 6) ਅਤੇ (3, 4,1) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ YZ- ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

11. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (5, 1, 6) ਅਤੇ (3, 4, 1) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ZX- ਤਲ ਨੂੰ ਕੱਟਦੀ ਹੈ।

12. ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (3, ï 4, ï 5) ਅਤੇ (2, ï 3, 1) ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਸਮਤਲ $2x + y + z = 7$ ਦੇ ਪਾਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

13. ਬਿੰਦੂ (ï 1, 3, 2) ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ ਸਮਤਲਾਂ $x + 2y + 3z = 5$ ਅਤੇ $3x + 3y + z = 0$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ $(1, 1, p)$ ਅਤੇ (ï 3, 0, 1) ਸਮਤਲ $\vec{r} \cdot (3\hat{i} + 4\hat{j} - 12\hat{k}) + 13 = 0$ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+4=0$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ O ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(1, 2, -3)$, ਹਨ ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਤੇ OP ਤੇ ਲੰਬ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})-4=0$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+5=0$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r}\cdot(5\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})+8=0$ ਉੱਪਰ ਲੰਬ ਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਬਿੰਦੂ $(-1, -5, -10)$ ਤੋਂ ਰੇਖਾ $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k})$ ਅਤੇ ਸਮਤਲ $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=5$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਬਿੰਦੂ $(1, 2, 3)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot(\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})=5$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot(3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=6$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਬਿੰਦੂ $(1, 2, -4)$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ $\dfrac{x-8}{3}=\dfrac{y+19}{-16}=\dfrac{z-10}{7}$ ਅਤੇ $\dfrac{x-15}{3}=\dfrac{y-29}{8}=\dfrac{z-5}{-5}$ ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅੰਤਰ ਖੰਡ a, b, c ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ p ਇਕਾਈ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}=\dfrac{1}{p^2}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

22. ਦੋ ਸਮਤਲਾਂ $2x + 3y + 4z = 4$ ਅਤੇ $4x + 6y + 8z = 12$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

(A) 2 ਇਕਾਈ (B) 4 ਇਕਾਈ (C) 8 ਇਕਾਈ (D) $\dfrac{2}{\sqrt{29}}$ ਇਕਾਈ

23. ਸਮਤਲ $2x - y + 4z = 5$ ਅਤੇ $5x - 2.5y + 10z = 6$ ਹਨ :

(A) ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ (B) ਸਮਾਂਤਰ

(C) y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ (D) ਬਿੰਦੂ $\left(0, 0, \dfrac{5}{4}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਰੇਖਾ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਦਾ ਕੋਸਾਈਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ ਤਾਂ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1, z_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ

  $\dfrac{x_2 - x_1}{PQ}, \dfrac{y_2 - y_1}{PQ}, \dfrac{z_2 - z_1}{PQ}$ ਹਨ।

  ਜਿੱਥੇ $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ ਉਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਦੇ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਅਤੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ a, b, c ਹਨ ਤਾਂ

  $$l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;\ m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\,;\ n = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$
- ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ : ਅੰਤਰਿਖ ਦੀਆਂ ਉਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਕਾਟਵੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਭਿੰਨ ਤਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।
- ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਕੋਣ : ਉਹ ਕੋਣ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (ਤਰਜੀਹ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ) ਤੋਂ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਦੋ ਕਾਟਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ l_1, m_1, n_1 ਅਤੇ l_2, m_2, n_2 ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਦ

  $$\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$$
- ਜੇਕਰ a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਦ

  $$\cos\theta = \left|\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\right|$$
- ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ ਵਿੱਚ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ ਹੈ।
- ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1, z_1) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਜਿਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ

  $\dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$ ਹੈ।

- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਹਨ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\,(\vec{b} - \vec{a})$ ਹੈ।
- ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ (x_2, y_2, z_2) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ

  $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \lambda \vec{b}_2$, ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਨਿਊਨਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ

  $$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\,|\vec{b}_2|}\right|$$
- ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$ ਅਤੇ

  $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦਾ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਦ

  $\cos\theta = |l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|$.
- ਦੋ ਬਿਖਮਤਲੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ ਉਹ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਹੈ ਜੋ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

  $$\left|\frac{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot(\vec{a}_2 - \vec{a}_1)}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|}\right|$$ ਹੈ।
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ ਅਤੇ $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$ ਦੀ

  ਨਿਊਨਤਮ ਦੂਰੀ

  $$\frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}}$$ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੀ ਦੂਰੀ

$$\left|\frac{\vec{b}\times(\vec{a}_2-\vec{a}_1)}{|\vec{b}|}\right| \text{ ਹੈ।}$$

- ਇੱਕ ਸਮਤਲ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ d ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਅਭਿਲੰਬ ਇਕਾਈ ਵੈਕਟਰ $\hat{n}$ ਹੈ, ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਨ $\vec{r}\cdot\hat{n} = d$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਸਮਤਲ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ d ਅਤੇ ਸਮਤਲ ਦੇ ਅਭਿਲੰਬ ਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਕੋਸਾਈਨ l, m, n ਹਨ, ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $lx + my + nz = d$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਤੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲਾ ਅਤੇ ਵੈਕਟਰ $\vec{N}$ ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r}-\vec{a})\,.\,\vec{N} = 0$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1, z_1) ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਜਿਸਦੇ ਦਿਸ਼ਾ ਅਨੁਪਾਤ A, B, C ਹਨ, ਤੇ ਲੰਬ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ A (x ï x_1) + B (y ï y_1) + C (z ï z_1) = 0 ਹੈ।
- ਤਿੰਨ ਬਿਖਮਰੇਖੀ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ਅਤੇ (x_3, y_3, z_3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $(\vec{r}-\vec{a})\,.\,[(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})] = 0$ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ ਅਤੇ $(0, 0, c)$ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1$ ਹੈ।
- ਸਮਤਲਾਂ $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ ਦੀ ਕਾਟ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ $\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2) = d_1+\lambda d_2$ ਹੈ ਜਿੱਥੇ λ ਇੱਕ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਅਚਲ ਹੈ।
- ਸਮਤਲਾਂ
  $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$
  ਅਤੇ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$
  ਦੇ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮਤਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ
  $(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) + \lambda(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) = 0$ ਹੈ।

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $\vec{r} = \vec{a}_1 + \lambda \vec{b}_1$ ਅਤੇ $\vec{r} = \vec{a}_2 + \mu \vec{b}_2$ ਸਹਿ ਤਲੀ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$(\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \cdot (\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = 0$$

- ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ A(x_1, y_1, z_1) ਅਤੇ B(x_2, y_2, z_2) ਵਿੱਚੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦੀ ਹੈ ਤਦ ਸਮਤਲੀ ਹੈ ਜੇਕਰ

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

- ਦੋ ਤਲ ਜਿਸਦੇ ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = d_1$ ਅਤੇ $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = d_2$ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਦ $\theta = \cos^{-1} \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

- ਰੇਖਾ $\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ ਅਤੇ ਤਲ $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ϕ ਹੈ ਤਦ

$$\sin \phi = \left| \frac{\vec{b} \cdot \hat{n}}{|\vec{b}||\hat{n}|} \right|$$

- ਤਲਾਂ $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ ਅਤੇ $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨ ਕੋਣ θ ਹੈ ਤਾਂ

$$\theta = \cos^{-1} \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$$

- ਵੈਕਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਜਿਸਦਾ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਹੈ, ਤੋਂ ਤਲ $\vec{r} \cdot \hat{n} = d$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ $|d - \vec{a} \cdot \hat{n}|$ ਹੈ।

- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1, z_1) ਦੀ ਤਲ $Ax + By + Cz + D = 0$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ

$$\left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$ ਹੈ।

—❖—