ਅਧਿਆਇ 12

ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ Linear Programming

❖ *The mathematical experience of the student is incomplete if he never had the opportunity to solve a problem invented by himself. — G POLYA* ❖

12.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਦਿਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਜਮਾਤ ਗਿਆਰਵੀਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਗਰਾਫ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਗਣਿਤ ਦੇ ਕਈ ਉਪਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ/ (Inequations) ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਰੈਖਿਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ/ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

L. Kantorovich

ਇੱਕ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਦੋ ਵਸਤੂਆਂ ਜਿਵੇਂ ਮੇਜ਼ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦਾ ਵਪਾਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਨਿਵੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ ਉਸਦੇ ਕੋਲ 50,000 ਰੁ: ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕੇਵਲ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਹੈ। ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਤੇ 2500 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਤੇ 500 ਰੁ: ਦੀ ਲਾਗਤ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਨੂੰ ਵੇਚ ਕੇ ਉਹ 250 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੁਰਸੀ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਤੇ 75 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਉਸ ਨੇ ਖਰੀਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਦ ਉਹ ਜਾਨਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਉਪਲਬਧ ਨਿਵੇਸ਼ ਰਾਸ਼ੀ ਤੇ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਖੋਜਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ (Optimisation Problems) ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ, ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਜਾਂ ਸੰਸਧਾਨਾਂ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਉਪਯੋਗ ਆਦਿ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ।

ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪਰੰਤੂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਣ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਪਰੋਕਤ ਦਰਸਾਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਨ ਸਮੱਸਿਆ ਵੀ ਇੱਕ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਉਦਯੋਗ, ਵਣਿਜ, ਪ੍ਰਬੰਧਨ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਵਿਸਤਰਿਤ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਕਾਰਣ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਸ਼ਾਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਰੈਖਿਕ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗਰਾਫ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਜਦਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵੀ ਹਨ।

12.2 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ (Linear Programming Problem and its Mathematical Formulation)

ਅਸੀਂ ਆਪਣਾ ਵਿਚਾਰ ਵਟਾਂਦਰਾ ਉਪਰੋਕਤ ਫਰਨੀਚਰ ਡੀਲਰ ਦੀ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰੇਗਾ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਧਿਆਨਪੂਰਵਕ ਦੇਖਿਆ ਕਿ

(i) ਵਪਾਰੀ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ ਮੇਜ਼ਾਂ ਜਾਂ ਕੁਰਸੀਆਂ ਜਾਂ ਦੋਵਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੀਆਂ ਵਿਭਿੰਨ ਯੋਜਨਾਤਮਕ ਵਿਧੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਭਿੰਨ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕੇਗਾ।

(ii) ਕੁਝ ਵਧੇਰੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ/ਬੰਦਸ਼ਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਉਸਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਅਧਿਕਤਮ 50,000 ਰੁ: ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਲ ਅਧਿਕਤਮ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਉਪਲਬਧ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਕੋਈ ਕੁਰਸੀ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦਦਾ ਕੇਵਲ ਮੇਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਦਾ ਨਿਸ਼ਚੈ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਉਹ 50,000 ÷ 2500, ਜਾਂ 20 ਮੇਜ਼ਾਂ ਨੂੰ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ Rs (250 × 20) ਜਾਂ Rs 5000 ਹੋਵੇਗਾ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਕੋਈ ਮੇਜ਼ ਨਾ ਖਰੀਦ ਕੇ ਕੇਵਲ ਕੁਰਸੀਆਂ ਹੀ ਖਰੀਦਣ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਤਦ ਉਹ ਆਪਣੀ ਉਪਲਬਧ 5000 ਰੁ: ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਵਿੱਚ 50,000 ÷ 500, ਅਰਥਾਤ 100 ਕੁਰਸੀਆਂ ਹੀ ਖਰੀਦ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਉਹ ਕੇਵਲ 60 ਨਗਾਂ ਨੂੰ ਹੀ ਰੱਖ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਹ ਕੇਵਲ 60 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਲਈ ਬੰਧਿਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ Rs 60 × 75 ਅਰਥਾਤ **Rs** 4500 ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਜਿਹੀਆਂ ਹੋਰ ਵੀ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਹ 10 ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ 50 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਦੇ ਕੋਲ 60 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦਾ ਸਥਾਨ ਉਪਲਬਧ ਹੈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦਾ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਰੁ: (10 × 250 + 50 × 75), ਅਰਥਾਤ Rs 6250 ਆਦਿ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਵਿਭਿੰਨ ਚੋਣ ਵਿਧੀਆਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿਭਿੰਨ ਨਿਵੇਸ਼ ਯੋਜਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਪਣਾ ਕੇ ਵਿਭਿੰਨ ਲਾਭ ਕਮਾ ਸਕੇਗਾ। ਹੁਣ ਸਮੱਸਿਆ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਤੋਂ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯਾਸ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

12.2.1 *ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਣ (Mathematical Formulation of the Problem)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮੇਜ਼ਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ y ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਫਰਨੀਚਰ ਵਪਾਰੀ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ x ਅਤੇ y ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ, ਅਰਥਾਤ

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{c}\text{ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ} \\ \text{ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ/ਬੰਦਿਸ਼}\end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \ldots (1) \\ \ldots (2) \end{array}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ

ਵਪਾਰੀ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ (ਇੱਥੇ ਇਹ ਰਾਸ਼ੀ Rs 50]000 ਹੈ) ਦਾ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ ਅਤੇ ਵਪਾਰੀ ਦੇ ਕੋਲ ਕੇਵਲ ਅਧਿਕਤਮ ਵਸਤੂਆਂ (ਇੱਥੇ ਇਹ 60 ਹੈ)ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਦਾ ਵੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ। ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਤੇ

$$2500x + 500y \le 50{,}000 \quad \text{(ਨਿਵੇਸ਼ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ)}$$

ਜਾਂ

$$5x + y \le 100 \qquad \dots (3)$$

ਅਤੇ

$$x + y \le 60 \quad \text{(ਸਟੋਰ ਕਰਨ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ)} \qquad \dots (4)$$

ਵਪਾਰੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਉਸ ਦਾ ਲਾਭ Z (ਮੰਨ ਲਉ) ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸ ਨੂੰ x ਅਤੇ y ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਕਾਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$Z = 250x + 75y$ (ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ)

ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਹੁਣ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਵਰਤਨ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$Z = 250x + 75y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ

$$5x + y \le 100$$

$$x + y \le 60$$

$$x \ge 0, \ y \ge 0$$

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਰੇਖੀ ਫਲਨ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਦਕਿ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਅਰਾ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।ਕੁਝ ਹੋਰ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵੀ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ Z , ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਕੁੱਝ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਗੈਰਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ x ਅਤੇ y ਵਰਗੇ ਕੁਝ ਅਨੇਕ ਚਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਫਲਨ Z (ਜੋ ਕਿ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ)ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮਾਨ) ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਚਲ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਰੇਖੀ ਪਦ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਗਣਿਤੀ ਸੰਬੰਧ ਰੇਖੀ ਹਨ ਜਦਕਿ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਜਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਅੱਗੇ ਵਧਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਪਦਾਂ (ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਉੱਪਰ ਹੋ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ) ਨੂੰ ਰਸਮੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ : ਰੇਖੀ ਫਲਨ $Z = ax + by$, ਜਦਕਿ a, b ਅਚਲ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮਕੀਰਣ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਹੋਣਾ ਹੈ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ $Z = 250x + 75y$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਚਲ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਨਿਰਣਾਤਮਕ ਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ : ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਚਲਾਂ ਤੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਜਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਬੰਦਸ਼, ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸ਼ਰਤਾਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ਨੂੰ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ/ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਅਸਮਤਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਮੱਸਿਆ ਜੋ ਚਲਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦੋ ਚਲ x ਅਤੇ y) ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਕਰੇ, ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮ (optimal) ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ। ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਸਮੱਸਿਆ ਵਪਾਰੀ ਦੁਆਰਾ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਦੀ ਖਰੀਦ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ ਦੁਆਰਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮੀਕਰਣ ਦੀ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ ਹੈ।

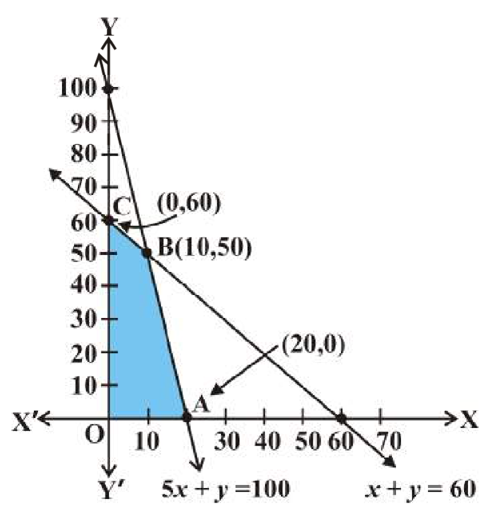
ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੀ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰਹਾਂਗੇ।

12.2.2 *ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ (Graphical Method of Solving Linear Programming Problems)*

ਗਿਆਰਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੈਕਸ਼ਨ 12.2 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੋਈ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਹੁਣ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖੀਚੀਏ।

$$5x + y \leq 100 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \leq 60 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0 \quad \ldots (3)$$
$$y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ) ਵਿੱਚ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (4) ਤੱਕ, ਦੁਆਰਾ ਨਿਯਤ ਸਾਰੇ ਅਰਧਤਲਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਮਿਤ ਹੈ ਇਸ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ ਕੁਰਸੀਆਂ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਵਿਕਲਪ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਖੇਤਰ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਖੇਤਰ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.1)। ਇਸ ਖੇਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.1

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (Feasible Ragion) ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਗੈਰਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ $x, y \geq 0$ ਅਧੀਨ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਯਤ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ (ਜਾਂ ਹੱਲ ਖੇਤਰ) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਚਿੱਤਰ 12.1 ਵਿੱਚ ਖੇਤਰ OABC (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੋ ਖੇਤਰ ਹੈ ਉਸ ਨੂੰ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਸਮੂਹ : ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 12.1 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਅਤੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (10] 50) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (0] 60)] (20] 0) ਆਦਿ ਵੀ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਦੇ ਬਾਹਰ ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (25] 40) ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗੈਰ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਹਨ।

ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ : ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਦੋ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਦੇਵੇ, ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਜਿਹੇ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਇਹ ਸਪੱਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = 250x + 75y$ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਉਪਰਾਲਾ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਮੁੱਢਲਾ ਸਿਧਾਂਤ (ਅਧਾਰਭੂਤ) ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਥਿਊਰਮਾਂ ਦੇ ਸਬੂਤ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹਨ।

ਥਿਊਰਮ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ R ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ* (ਉੱਤਮ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦੋਂ Z ਦਾ ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੋਵੇ ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਚਲ x ਅਤੇ y ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਵੇ ਤਦ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨੇ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਥਿਊਰਮ 2. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ R ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ ਅਤੇ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜੇਕਰ R ਪ੍ਰਬਿੰਧਤ ਖੇਤਰ ਹੋਵੇ ਤਦ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z, R ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਰੱਖਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ R ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (corner) (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ R ਗੈਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਹੈ ਤਦ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ R ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਥਿਊਰਮ 1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ)

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (ਉਪਯੁਕਤ) ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ O, A, B ਅਤੇ C ਹਨ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਹੈ ਜਿਵੇਂ (0, 0), (20, 0), (10, 50) ਅਤੇ (0, 60) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਿਖਰ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ :

ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ	**Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ**	
O (0,0)	0	
A (0,60)	4500	
B (10,50)	**6250** ←	ਅਧਿਕਤਮ
C (20,0)	5000	

ਅਸੀਂ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਪਾਰੀ ਨੂੰ ਨਿਵੇਸ਼ ਯੋਜਨਾ (10, 50) ਅਰਥਾਤ 10 ਮੇਜ਼ਾਂ ਅਤੇ 50 ਕੁਰਸੀਆਂ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਸੁਮੇਲ ਹੈ :

1. ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (ਸਿਖਰ) ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਨਿਰੀਖਣ ਦੁਆਰਾ ਜਾਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = ax + by$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।ਮੰਨਿਆ ਕਿ M ਅਤੇ m, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
3. (i) ਜਦੋਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ (bounded) ਹੈ, M ਅਤੇ m, Z ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹਨ।

   (ii) ਅਜਿਹੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਗੈਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
4. (a) M ਨੂੰ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ $ax + by > M$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਰਧ ਤਲ ਦਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਨਾ ਪਵੇ ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਕੋਈ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

   (b) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, m, ਨੂੰ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜੇਕਰ $ax + by < m$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੁੱਲ੍ਹੇ ਅਰਧ ਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੈ।ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਕੋਨਾਂ ਵਿਧੀ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ :

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ :

$$x + y \le 50 \qquad \dots (1)$$

* ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

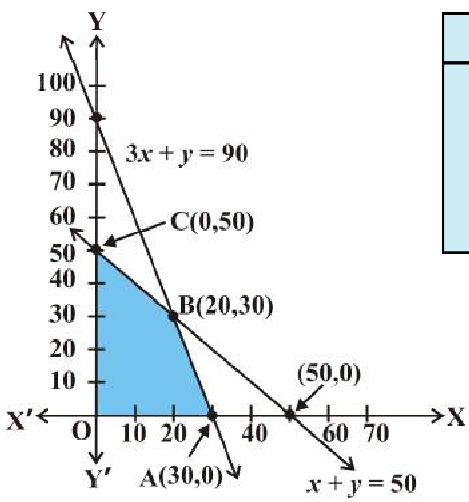
** ਇੱਕ ਕਾਟ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਸੀਮਾਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਗੈਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਗੈਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਤੋਂ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਧਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$3x + y \le 90 \quad \text{... (2)}$$

$$x \ge 0, y \ge 0 \quad \text{... (3)}$$

$Z = 4x + y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 12.2 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ (1) ਤੋਂ (3) ਦੇ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 12.2

ਕੋਨਾਂ ਬਿੰਦੂ	Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ	
(0, 0)	0	
(30, 0)	**120** ←	ਅਧਿਕਤਮ
(20, 30)	110	
(0, 50)	50	

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ O, A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (30, 0), (20, 30) ਅਤੇ (0, 50) ਹਨ। ਹੁਣ ਹਰੇਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ : ਬਿੰਦੂ (30] 0) ਤੇ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 120 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਆਲੇਖ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਨਿਮਨ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

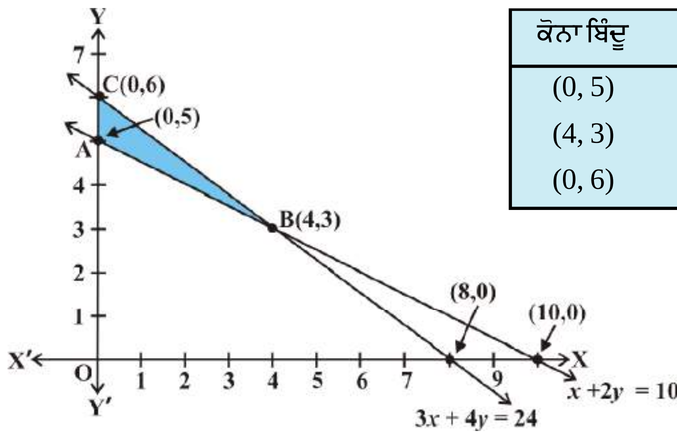
$$x + 2y \ge 10 \quad \text{... (1)}$$

$$3x + 4y \le 24 \quad \text{... (2)}$$

$$x \ge 0, y \ge 0 \quad \text{... (3)}$$

$Z = 200\,x + 500\,y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 12. 3 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ (1) ਤੋਂ (3) ਦੇ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABC ਹੈ ਜੋ ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ। ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B ਅਤੇ C ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 5), (4, 3) ਅਤੇ (0, 6) ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆ ਤੇ $Z = 200x + 500y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	Z ਦੇ ਸੰਗਤ ਮੁੱਲ	
(0, 5)	2500	
(4, 3)	**2300**	← ਨਿਊਨਤਮ
(0, 6)	3000	

ਚਿੱਤਰ 12.3

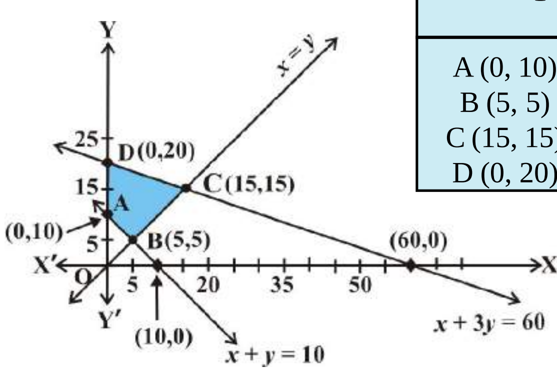
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (4] 3) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ Rs 2300 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਮਨ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :
ਨਿਮਨ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$x + 3y \leq 60 \quad \ldots (1)$$
$$x + y \geq 10 \quad \ldots (2)$$
$$x \leq y \quad \ldots (3)$$
$$x \geq 0, y \geq 0 \quad \ldots (4)$$

$Z = 3x + 9y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABCD ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਖੇਤਰ ਸੀਮਾਬੱਧ /ਘਿਰਿਆ



ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	Z ਦੇ ਸੰਗ ਮੁੱਲ $Z = 3x + 9y$	
A (0, 10)	90	
B (5, 5)	**60**	← ਨਿਊਨਤਮ
C (15, 15)	**180**	← ਅਧਿਕਤਮ (ਬਹੁ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ)
D (0, 20)	**180**	

ਚਿੱਤਰ 12.4

(bounded) ਹੈ।ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 10), (5, 5), (15,15) ਅਤੇ (0, 20) ਹਨ।ਹੁਣ ਅਸੀਂ Z ਦੇ ਨਿਊਨਤਮ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਬਿੰਦੂ B (5] 5) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 60 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਹਰੇਕ C (15, 15) ਅਤੇ D (0, 20) ਤੇ 120 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ, ਸਮੱਸਿਆ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ C ਅਤੇ D, ਤੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਰੱਖਦੀ ਹੈ, ਅਰਥਾਤ ਦੋਵੇਂ ਬਿੰਦੂ ਉਕਤ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 180 ਉਤਪੰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ CD ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ C ਅਤੇ D ਵੀ ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।ਇਹ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਉਕਤ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਉਤਪੰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z = ï 50x + 20y ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ ਪਤਾ ਕਰੋ :

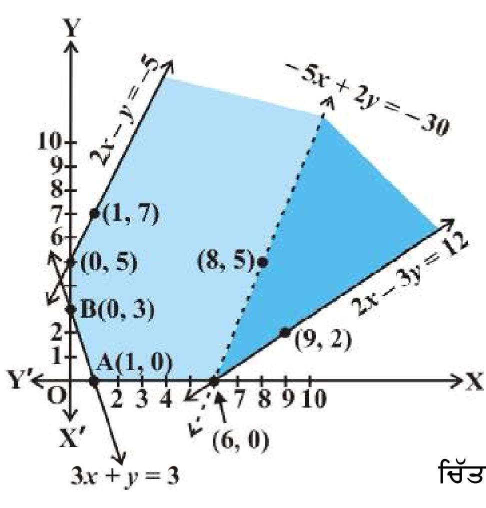
2x ï y ≥ ï 5 ... (1)

3x + y ≥ 3 ... (2)

2x ï 3y ≤ 12 ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (4)

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੇ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੁਆਰਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।ਚਿੱਤਰ 12.5 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ।



ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ	Z = – 50x + 20y	
(0, 5)	100	
(0, 3)	**60**	
(1, 0)	**–50**	
(6, 0)	**–300** ⟵	ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ

ਚਿੱਤਰ 12.5

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮਾਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ :

ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ (6] 0) ਤੇ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ –300 ਹੈ ? ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ –300 ਹੈ ? ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਜੇਕਰ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੁੰਦਾ ਤਾਂ ਇਹ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ (ਥਿਊਰਮ 2 ਤੋਂ) ਹੁੰਦਾ। ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ –300] Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਨਹੀਂ ਵੀ। ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਸਿੱਟਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

$$ï\ 50x + 20y < ï\ 300$$

ਅਰਥਾਤ $$ï\ 5x + 2y < ï\ 30$$

ਅਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਆਲੇਖ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਖੁੱਲੇ ਅਰਧ ਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾਂ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਤਦ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ –300 ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ–300 ਹੋਵੇਗਾ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 12. 5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $Z = ï\,50\,x + 20\,y,$ ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

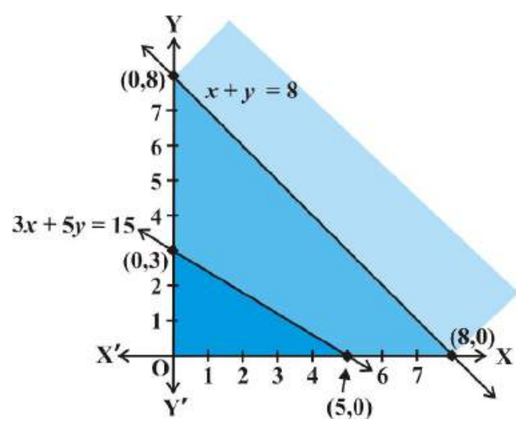
ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $Z = ï\ 50\,x + 20\,y$, (0]5) ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 100 ਰੱਖਦਾ ਹੈ ? ਇਸ ਦੇ ਲਈ, ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ $ï\ 50\,x + 20\,y > 100$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ $Z = 3x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :

$$x + y \geq 8 \quad \ldots (1)$$
$$3x + 5y \leq 15 \quad \ldots (2)$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \ldots (3)$$

ਹੱਲ : ਅਸਮਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (3) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 12.6)A ਕੀ ਕੋਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ ? ਇਹ ਅਜਿਹਾ ਕਿਉਂ ਹੈ ?

ਚਿੱਤਰ 12.6 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜੋ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰ ਸਕੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12.6

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਵੇਚਨਾ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦਾ ਆਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(1) ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(2) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਹੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਸਿਖਰ

(ਕੋਨੇ ਤੇ) ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨੇ ਦੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਇੱਕ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸਮਾਨ ਅਧਿਕਤਮ (ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਮੁੱਲ ਦੇਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 12.1

ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਨਿਮਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ $Z = 3x + 4y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + y \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

2. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = \text{ï}\ 3x + 4y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \le 8,\ 3x + 2y \le 12,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

3. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 5x + 3y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$3x + 5y \le 15,\ 5x + 2y \le 10,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

4. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 3x + 5y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 3y \ge 3,\ x + y \ge 2,\ x, y \ge 0$

5. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 3x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \le 10,\ 3x + y \le 15,\ x, y \ge 0$

6. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + 2y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$2x + y \ge 3,\ x + 2y \ge 6,\ x, y \ge 0$

ਦਿਖਾਓ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = 5x + 10y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \le 120,\ x + y \ge 60,\ x\ \text{ï}\ 2y \ge 0,\ x, y \ge 0$

8. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + 2y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x + 2y \ge 100,\ 2x\ \text{ï}\ y \le 0,\ 2x + y \le 200;\ x, y \ge 0$

9. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = \text{ï}\ x + 2y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x \ge 3,\ x + y \ge 5,\ x + 2y \ge 6,\ y \ge 0$

10. ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ $Z = x + y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :
$x\ \text{ï}\ y \le \text{ï}1,\ \text{ï}x + y \le 0,\ x, y \ge 0$

12.3 ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪ੍ਰਕਾਰ(Different Types of Linear Programming Problems)

ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਹੇਠਾਂ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਹਨ :

1. ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ : ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਉਤਪਾਦਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਜਨ ਸ਼ਕਤੀ, ਮਸ਼ੀਨ ਦੇ ਘੰਟੇ, ਹਰੇਕ ਨਗ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਲਾਗਤ, ਕੰਮ ਦੇ ਘੰਟੇ, ਸਮਾਨ/ਮਾਲ ਭੰਡਾਰਣ ਗੋਦਾਮ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਨ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਦੇ ਲਈ ਸਥਾਨ ਆਦਿ ਨਜ਼ਰ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦੇ ਹੋਏ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ।

2. ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ : ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਘਟਕ/ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਮਾਤਰਾ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਲੋੜੀਂਦੀ ਮਾਤਰਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਲਾਗਤ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।
3. ਪਰਿਵਹਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ : ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਰਿਵਹਨ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਲਾਟ/ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਤੋਂ ਵਿਭਿੰਨ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਵਿਭਿੰਨ ਬਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨਾਂ ਨੂੰ ਭੇਜਣ ਵਿੱਚ ਢੋ-ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ।

ਹੁਣ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6. **(ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ):** ਇੱਕ ਆਹਾਰ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਘਟਕ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 8 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਦਾ ਘਟਕ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 10 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ। ਭੋਜਨ I ਵਿੱਚ 2 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਪ੍ਰਤਿ kg ਅਤੇ 1 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਪ੍ਰਤਿ kg ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਭੋਜਨ II ਵਿੱਚ 1 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਪ੍ਰਤਿ kg ਅਤੇ 2 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਪ੍ਰਤਿ kg ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਤਿ kg ਭੋਜਨ I ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ 50 ਰੁ: ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿ kg ਭੋਜਨ II ਨੂੰ ਖਰੀਦਣ ਵਿੱਚ 70 ਰੁ: ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਨ ਵਿੱਚ ਭੋਜਨ I ਦਾ x kg ਅਤੇ ਭੋਜਨ II ਦਾ y kg ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $x \geq 0$, $y \geq 0$. ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਤੋਂ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

ਸਰੋਤ	ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥ		ਲੋੜ-ਜ਼ਰੂਰਤ (ਇਕਾਈਆਂ ਵਿੱਚ)
	I (x)	**II** (y)	
ਵਿਟਾਮਿਨ A (ਇਕਾਈ/kg)	2	1	8
ਵਿਟਾਮਿਨ C (ਇਕਾਈ/kg)	1	2	10
ਲਾਗਤ (Rs/kg)	50	70	

ਕਿਉਂਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 8 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਦੇ 10 ਇਕਾਈ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$2x + y \geq 8$$
$$x + 2y \geq 10$$

ਭੋਜਨ I ਦੇ x kg ਅਤੇ ਭੋਜਨ II ਦੇ y kg ਖਰੀਦਣ ਦਾ ਮੁੱਲ Z ਹੈ ਜਿੱਥੇ

$$Z = 50x + 70y$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਬਾਬਤ

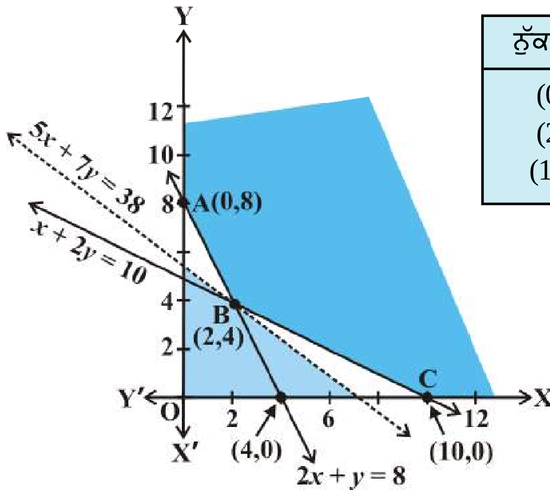
$$2x + y \geq 8 \qquad \ldots (1)$$

$$x + 2y \geq 10 \qquad \ldots (2)$$

$$x, y \geq 0 \qquad \ldots (3)$$

$Z = 50x + 70y$ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (3) ਤੱਕ ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਨੁੱਕਰ ਬਿੰਦੂ	**Z = 50x + 70y**
(0,8)	560
(2,4)	**380** ← ਨਿਊਨਤਮ
(10,0)	500

ਚਿੱਤਰ 12.7

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A(0,8), B(2,4) ਅਤੇ C(10,0) ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ (2] 4) ਤੇ Z ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਘੱਟ ਮੁੱਲ 380 ਹੈ, ਕੀ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 380 ਹੈ (ਕਿਉਂ ?) ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਬੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣਾ ਪਵੇਗਾ।

$$50x + 70y < 380$$

ਅਰਥਾਤ $$5x + 7y < 38$$

ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਅਰਧ ਤਲ, ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 12.7 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (2] 4) ਤੇ Z ਦਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 380 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੀ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮਿਸ਼ਰਨ ਯੋਜਨਾ ਭੋਜਨ dÎôਦੀ 2 kg ਅਤੇ ਭੋਜਨ dIôਦੇ 4 kg ਦੇ ਮਿਸ਼ਰਨ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਯੋਜਨਾ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਮਿਸ਼ਰਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 380 ਰੁ: ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. (ਵਿਤਰਣ ਸਮੱਸਿਆ) ਕਿਸਾਨਾਂ ਦੀ ਸਹਿਕਾਰੀ ਸਮਿਤੀ ਦੇ ਕੋਲ ਦੋ ਫਸਲਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਉਗਾਉਣ ਲਈ 50 ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਹੈ। ਫਸਲਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਉਗਾਉਣ ਲਈ 50 ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਹੈ। ਫਸਲਾਂ

X ਅਤੇ Y ਤੋਂ ਹੈਕਟੇਅਰ ਲਾਭ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10,500 ਰੁ: ਅਤੇ 9000 ਰੁ: ਦਾ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਸਲਾਂ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਲਈ ਘਾਹ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਲਈ ਬੂਟੀ ਨਾਸ਼ਕ ਦ੍ਰਵ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 20 ਲਿਟਰ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਭੂਮੀ ਨਾਲ ਜੁੜੀ ਨਾਲੀਆਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਤਲਾਬ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਜੀਵ ਧਾਰੀਆਂ ਅਤੇ ਮੱਛਲੀਆਂ ਦੀ ਜੀਵਨ ਸੁਰੱਖਿਆ ਹਿੱਤ ਬੂਟੀ ਨਾਸ਼ਕ ਦ੍ਰਵ ਦੀ ਮਾਤਰਾ 800 ਲੀਟਰ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਹਰੇਕ ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ ਕਿੰਨੀ ਭੂਮੀ ਦਾ ਵਿਤਰਣ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਸਮਿਤੀ ਦੇ ਕੁੱਲ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ x ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਅਤੇ Y ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ y ਹੈਕਟੇਅਰ ਭੂਮੀ ਦੀ ਵੰਡ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ : $x \geq 0, y \geq 0$

X ਫਸਲ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਲਾਭ = Rs 10500

Y ਫਸਲ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਹੈਕਟੇਅਰ ਲਾਭ = Rs 9000

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਲਾਭ = Rs $(10500x + 9000y)$

ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

$x + y \leq 50$ (ਭੂਮੀ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ) ... (1)

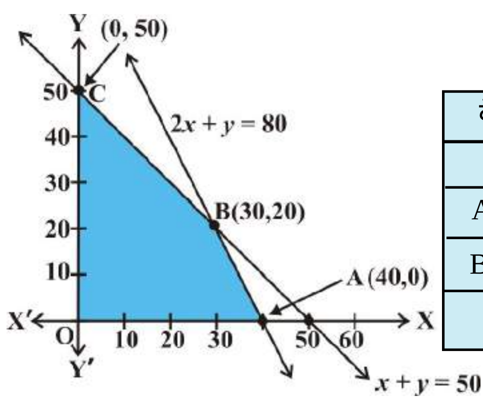
$20x + 10y \leq 800$ (ਬੂਟੀ ਨਾਸ਼ਕ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਸੰਬੰਧੀ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ)

ਅਰਥਾਤ $2x + y \leq 80$ ... (2)

$x \geq 0, y \geq 0$ ... (3)

$Z = 10500\,x + 9000\,y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ :

ਹੁਣ ਅਸੀਂ (1) ਤੋਂ (3) ਤੱਕ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿਚੱਦੇ ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ 12.8 ਵਿੱਚ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC ਨੂੰ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਸੀਮਾਬੱਧ ਹੈ।



ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	$Z = 10500x + 9000y$	
O (0, 0)	0	
A (40, 0)	420000	
B (30, 20)	**495000** ←	ਅਧਿਕਤਮ
C (0,50)	450000	

ਚਿੱਤਰ 12.8

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (0, 0), (40, 0), (30, 20) ਅਤੇ (0, 50) ਹਨ। ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = 10500\,x + 9000y$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਇਹਨਾਂ ਸਿਖਰਾਂ ਤੇ ਪਤਾ ਕਰਨਾਂ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ ਉਸ ਸਿਖਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦੇ ਜਿਸ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮਿਤੀ ਨੂੰ X ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ 30 ਹੈਕਟੇਅਰ ਅਤੇ Y ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ 20 ਹੈਕਟੇਅਰ ਦੀ ਵੰਡ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ 495000 ਰੁ: ਦਾ ਹੋ ਸਕੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ **(Manufacturing Problem)** ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣਕਰਤਾ ਕੰਪਨੀ ਇੱਕ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਦੋ ਨਮੂਨੇ A ਅਤੇ B ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਮੂਨਾ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 9 ਘੰਟੇ ਲੇਬਰ ਅਤੇ 1 ਘੰਟਾ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਲਗਦਾ ਹੈ ਜਦਕਿ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਿੱਚ 12 ਘੰਟੇ ਲੇਬਰ ਅਤੇ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 3 ਘੰਟੇ ਲੇਬਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਬਣਾਉਣ ਅਤੇ ਪਾਲਿਸ਼ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਅਧਿਕਤਮ ਲੇਬਰ ਘੰਟੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 180 ਅਤੇ 30 ਹਨ। ਕੰਪਨੀ ਨਮੂਨਾ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਤੇ Rs 8000 ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਤੇ Rs 12000 ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਮੂਨਾ A ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀ ਹਫਤਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਪ੍ਰਤੀ ਹਫਤਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਮੂਨਾ A ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ y ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਕੁੱਲ ਲਾਭ = (Rs $8000\,x + 12000\,y$)

$$Z = 8000\,x + 12000\,y$$

ਹੁਣ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧਾ ਦੇ ਤਹਿਤ

$$9x + 12y \le 180$$

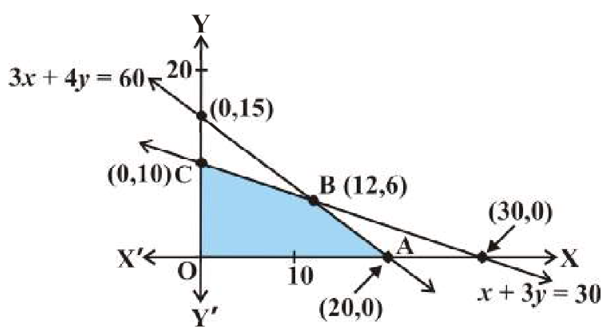
ਅਰਥਾਤ $3x + 4y \le 60$ (ਬਣਾਉਣ–ਨਿਰਮਾਣ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (1)

$x + 3y \le 30$ (ਪਾਲਿਸ਼ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (2)

$x \ge 0,\ y \ge 0$ (ਗੈਰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਰਿਣਾਤਮਕ) ... (3)

$Z = 8000\,x + 12000\,y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਨ ਕਰੋ।

ਰੇਖੀ ਸਮੀਰਕਨ (1)ਤੋਂ (3) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ OABC (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਚਿੱਤਰ 12.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ ।



ਚਿੱਤਰ 12.8

ਹਰੇਕ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ Z ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ :

ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	**Z = 8000 *x* + 12000 *y***	
0 (0, 0)	0	
A (20, 0)	160000	
B (12, 6)	**168000** ←	ਅਧਿਕਤਮ
C (0, 10)	120000	

ਅਸੀਂ ਸਿਖਰ B (12, 6) ਤੇ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ 16,8000 ਰੁ: ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਪਨੀ ਨੂੰ ਨਮੂਨਾ A ਦੇ 12 ਨਗ ਅਤੇ ਨਮੂਨਾ B ਦੇ 6 ਨਗਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ 168,000 ਰੁ: ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. ਰੇਸ਼ਮਾ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਆਹਾਰ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ ਅੰਸ਼ਾਂ ਵਿੱਚ 8 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 11 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ B ਹੋਵੇ। ਆਹਾਰ P ਦੀ ਲਾਗਤ 60 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਅਤੇ ਆਹਾਰ Q ਦੀ ਲਾਗਤ 80 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਹੈ। ਆਹਾਰ P ਵਿੱਚੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 5 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ B ਹੈ ਜਦਕਿ ਆਹਾਰ Q ਵਿੱਚ 4 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 2 ਇਕਾਈ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਵਿਟਾਮਿਨ B ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੇਕ ਨੂੰ 200 ਗ੍ਰਾਮ ਆਟਾ ਅਤੇ 25 ਗ੍ਰਾਮ ਵਸਾ (fat) ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੇਕ ਦੇ ਲਈ 100 ਗ੍ਰਾਮ ਆਟਾ ਅਤੇ 50 ਗ੍ਰਾਮ ਵਸਾ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੇਕਾਂ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜੋ 5 ਕਿਲੋ ਆਟੇ ਅਤੇ 1 ਕਿਲੋ ਵਸਾ ਤੋਂ ਬਣ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਇਹ ਮੁੱਲ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕੇਕਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਹੋਰ ਪਦਾਰਥਾਂ ਦੀ ਕਮੀ ਨਹੀਂ ਰਹੇਗੀ।

3. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਟੈਨਿਸ ਦੇ ਰੈਕਟ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਦੇ ਬੱਲੇ ਬਣਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਟੈਨਿਸ ਰੈਕਟ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ 1.5 ਘੰਟਾ ਯਾਂਤੰਰਿਕ ਸਮਾਂ ਅਤੇ 3 ਘੰਟੇ ਸ਼ਿਲਪਕਾਰ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕਟ ਬੱਲੇ ਨੂੰ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 3 ਘੰਟੇ ਯਾਂਤਰਿਕ ਸਮਾਂ ਅਤੇ 1 ਘੰਟਾ ਸ਼ਿਲਪਕਾਰ ਦਾ ਸਮਾਂ ਲਗਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਵਿਭਿੰਨ ਯੰਤਰਾਂ ਦੇ ਉਪਲਬਧ ਯਾਂਤਰਿਕ ਸਮੇਂ ਦੇ 42 ਘੰਟੇ ਅਤੇ ਸ਼ਿਲਪਕਾਰ ਸਮੇਂ ਦੇ 24 ਘੰਟਿਆਂ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(i) ਰੈਕਟਾਂ ਅਤੇ ਬੱਲਿਆਂ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਸੰਖਿਆ ਬਣਾਈ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਕਾਰਖਾਨਾ ਪੂਰੀ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰੇ ?

(ii) ਜੇਕਰ ਰੈਕਟ ਅਤੇ ਬੱਲੇ ਤੇ ਲਾਭ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 20 ਰੁ: ਅਤੇ 10 ਰੁ: ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕਾਰਖਾਨੇ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਕਾਰਖਾਨਾ ਪੂਰੀ ਸਮਰੱਥਾ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰੇ।

4. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਤਾ ਨੱਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਨਟਾਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨ A ਤੇ ਇੱਕ ਘੰਟਾ ਅਤੇ ਮਸ਼ੀਨ B ਤੇ 3 ਘੰਟੇ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਬੋਲਟ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 3 ਘੰਟੇ ਮਸ਼ੀਨ A ਤੇ ਅਤੇ 1 ਘੰਟਾ ਮਸ਼ੀਨ B ਤੇ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਨਟਾਂ ਤੋਂ 17. 50 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੈਕਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟਾਂ ਤੇ 7.00 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਪੈਕੇਟ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਤੀ ਦਿਨ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਉਪਯੋਗ 12 ਘੰਟੇ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ (ਨਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟ) ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਇਆ ਜਾ ਸਕੇ।

5. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪੇਚ A ਅਤੇ B ਬਣਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀ ਲੋੜ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਵੈਚਾਲਕ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਹਸਤਚਾਲਕ ਹੈ। ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਪੇਚ A ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 4 ਮਿੰਟ ਸਵੈਚਾਲਕ ਅਤੇ 6 ਮਿੰਟ ਹਸਤਚਾਲਕ ਮਸ਼ੀਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੈਕਟ ਪੇਚ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 6 ਮਿੰਟ ਸਵੈਚਾਲਕ ਅਤੇ 3 ਮਿੰਟ ਹਸਤਚਾਲਕ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਕੰਮ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਮਸ਼ੀਨ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ਅਧਿਕਤਮ 4 ਘੰਟੇ ਕੰਮ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਨਿਰਮਾਤਾ ਪੇਚ A ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਕਟ ਤੇ 7 ਰੁ: ਅਤੇ ਪੇਚ B ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਕਟ ਤੇ 10 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਨਿਰਮਿਤ ਸਾਰੇ ਪੇਚਾਂ ਦੇ ਪੈਕਟ ਵਿਕ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟ ਵਿਭਿੰਨ ਪੇਚਾਂ ਦੇ ਬਣਾਏ ਜਾਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਘਰੇਲੂ ਉਦਯੋਗ ਨਿਰਮਾਤਾ ਪੈਡਸਟਲ ਲੈਂਪ ਅਤੇ ਲੱਕੜੀ ਦੇ ਸ਼ੇਡ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰਗੜਨੇ/ ਕੱਟਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਲੈਂਪ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 2 ਘੰਟੇ ਰਗੜਨ/ਕੱਟਣ ਅਤੇ 3 ਘੰਟੇ ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਸੇਡ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 1 ਘੰਟਾ ਰਗੜਨ/ਕੱਟਣ ਅਤੇ 2 ਘੰਟੇ ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਸਪਰੇਅਰ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਅਧਿਕਤਮ 20 ਘੰਟੇ ਅਤੇ ਰਗੜਨ/ਕੱਟਣ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਅਧਿਕਤਮ 12 ਘੰਟੇ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਇੱਕ ਲੈਂਪ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਤੇ 5 ਰੁ: ਅਤੇ ਇੱਕ ਸ਼ੇਡ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਤੇ 3 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਾਰੇ ਨਿਰਮਿਤ ਲੈਂਪ ਅਤੇ ਸ਼ੇਡ ਵਿਕ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਉਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਕਿਹੋ ਜਿਹੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਣ ਕਿ ਲਾਭ ਅਧਿਕਤਮ ਹੋਵੇ।

7. ਇੱਕ ਕੰਪਨੀ ਪਲਾਈਵੁੱਡ ਦੇ ਵਿਲੱਖਣ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ 5 ਮਿੰਟ ਕੱਟਣ ਅਤੇ 10 ਮਿੰਟ ਜੋੜਨ ਵਿੱਚ ਲਗਦੇ ਹਨ। B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਲਈ 8 ਮਿੰਟ ਕੱਟਣ ਅਤੇ 8 ਮਿੰਟ ਜੋੜਨ ਵਿੱਚ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕੱਟਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ 3 ਘੰਟੇ 20 ਮਿੰਟ ਅਤੇ ਜੋੜਨ ਦੇ ਲਈ 4 ਘੰਟੇ ਉਪਲਬਧ ਹਨ। ਹਰੇਕ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ 5 ਰੁ: ਅਤੇ ਹਰੇਕ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ 6 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਣਾ ਹੈ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਲਾਭ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕਿੰਨੇ ਯਾਦ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਨੀ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਮਾਣ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

8. ਇੱਕ ਸੌਦਾਗਰ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਨਿੱਜੀ ਕੰਪਿਊਟਰ–ਇੱਕ ਡੈਸਕਟਾਪ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ ਪੋਰਟੇਬਲ ਨਮੂਨਾ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 25,000 ਰੁ: ਅਤੇ 40,000 ਰੁ: ਹੋਵੇਗੀ, ਵੇਚਣ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਮੰਗ 250 ਨਗਾਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਹੀਂ

ਹੋਵੇਗੀ। ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕੰਪਿਊਟਰਾਂ ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨੂੰ ਸੌਦਾਗਰ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਕਰਨ ਜੇਕਰ ਉਸ ਦੇ ਕੋਲ ਨਿਵੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ 70 ਲੱਖ ਰੁਪਏ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਡੈਸਕਟਾਪ ਨਮੂਨੇ ਤੇ ਉਸ ਦਾ ਲਾਭ 4500 ਰੁ: ਅਤੇ ਪੋਰਟੇਬਲ ਨਮੂਨੇ ਤੇ 5000 ਰੁ: ਹੋਵੇ।

9. ਇੱਕ ਭੋਜਨ ਪਦਾਰਥ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 80 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 100 ਇਕਾਈ ਖਣਿਜ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨ F_1 ਅਤੇ F_2 ਉਪਲਬਧ ਹਨ। ਭੋਜਨ F_1 ਦੀ ਲਾਗਤ 4 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਲਾਗਤ 5 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ f ਇਕਾਈ ਹੈ। ਭੋਜਨ F_1 ਦੀ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 3 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 4 ਇਕਾਈ ਖਣਿਜ ਹੈ। F_2 ਦੀ ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 6 ਇਕਾਈ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਅਤੇ 3 ਇਕਾਈ ਖਣਿਜ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰਬੱਧ ਕਰੋ। ਉਸ ਆਹਾਰ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਭੋਜਨਾਂ ਦਾ ਮਿਸ਼ਰਣ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚ ਨਿਊਨਤਮ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ ਹਨ।

10. ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਰਸਾਇਣਿਕ ਖਾਦਾਂ F_1 ਅਤੇ F_2 ਹਨ। F_1 ਵਿੱਚ 10% ਨਾਈਟਰੋਜਨ ਅਤੇ 6% ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਹੈ। ਅਤੇ F_2 ਵਿੱਚ 5% ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਅਤੇ 10% ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਹੈ। ਮਿੱਟੀ ਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦਾ ਪਰੀਖਣ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਪਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੂੰ ਆਪਣੀ ਫਸਲ ਦੇ ਲਈ 14kg ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਅਤੇ 14kg ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ F_1 ਦੀ ਕੀਮਤ 6 ਕਿਲੋ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋਗ੍ਰਾਮ ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਕੀਮਤ 5 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋ ਹੈ, ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਖਣਿਜ ਰਸਾਇਣ ਉਪਯੋਗ ਦੇ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਕਿ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ ਮਿਲ ਸਕਣ। ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੈ।

11. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਪ੍ਰਣਾਲੀ : $2x + y \le 10$, $x + 3y \le 15$, $x, y \ge 0$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ : (0, 0), (5,0), (3, 4) ਅਤੇ (0, 5) ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $Z = px + qy$, ਜਿੱਥੇ $p, q > 0$, p ਅਤੇ q ਦੇ ਲਈ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤੀਬੰਧ ਉੱਚਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ, (3] 4) ਅਤੇ (0] 5) ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(A) $p = q$ (B) $p = 2q$ (C) $p = 3q$ (D) $q = 3p$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਨ (Miscellaneerus Examples)

ਉਦਾਹਰਣ 9 (ਆਹਾਰ ਸਮੱਸਿਆ) ਇੱਕ ਭੋਜਨ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੋ ਭੋਜਨਾਂ P ਅਤੇ Q ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਆਹਾਰ ਤਿਆਰ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਭੋਜਨ P ਦਾ ਹਰੇਕ ਪੈਕੇਟ (ਜਿਸ ਵਿੱਚ 30 ਗ੍ਰਾਮ ਮਾਤਰਾ ਹੈ) ਵਿੱਚ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ ਦੇ 12 ਇਕਾਈ, ਲੋਹ ਤੱਤ ਦੇ 4 ਇਕਾਈ, ਕੈਲਸਟਰੋਲ ਦੇ 6 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ 6 ਇਕਾਈ ਮਾਤਰਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਜਦ ਕਿ ਉਸੇ ਮਾਤਰਾ ਦੇ ਭੋਜਨ Q ਦੇ ਪੈਕੇਟ ਵਿੱਚ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ ਤੱਤ ਦੇ 3 ਇਕਾਈ, ਲੋਹ ਤੱਤ ਦੇ 20 ਇਕਾਈ, ਕੈਲਸਟਰੋਲ ਦੇ 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੇ 3 ਇਕਾਈ ਮਾਤਰਾ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 240 ਇਕਾਈ ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ, ਲੋਹ ਤੱਤ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 460 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਕੈਲਸਟਰੋਲ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 300 ਇਕਾਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਭੋਜਨ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕੇ।

ਹੱਲ ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਭੋਜਨ P ਅਤੇ Q ਦੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : x ਅਤੇ y ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ : $x \ge 0, y$

≥ 0. ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।
ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

$12x + 3y \geq 240$ (ਕੈਲਸ਼ੀਅਮ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ਅਰਥਾਤ $4x + y \geq 80$ ... (1)

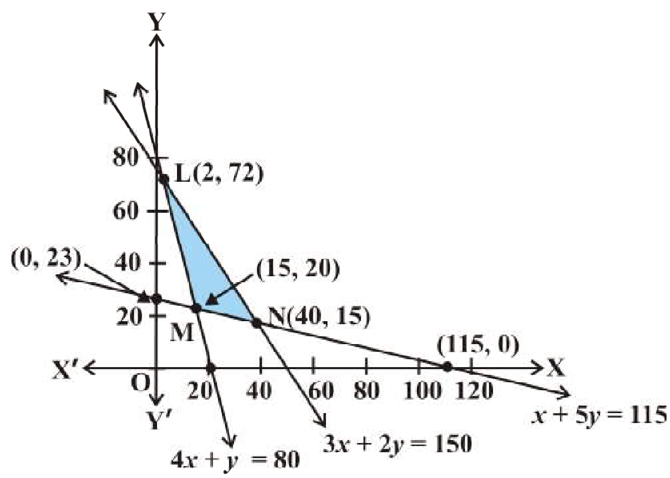
$4x + 20y \geq 460$ (ਲੋਹ ਤੱਤ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ਅਰਥਾਤ $x + 5y \geq 115$ ... (2)

$6x + 4y \leq 300$ (ਕੈਸਟਰੋਲ ਦਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ਅਰਥਾਤ $3x + 2y \leq 150$ ... (3)

$x \geq 0, y \geq 0$ $x \geq 0, y \geq 0$ ... (4)

$Z = 6x + 3y$ (ਵਿਟਾਮਿਨA) ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ।

ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦਾ ਆਲੇਖ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (1) ਤੋਂ (4) ਤੱਕ ਦੇ ਤਹਿਤ ਚਿੱਤਰ 12.10 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।ਉਸ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਜੋ ਕਿ ਘਿਰਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12. 10

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ L, M ਅਤੇ N ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (2, 72), (15, 20) ਅਤੇ (40, 15) ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ)	$Z = 6x + 3y$	
(2, 72)	228	
(15, 20)	**150** ←	ਨਿਊਨਤਮ
(40, 15)	285	

ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ Z ਦਾ ਮੁੱਲ, ਬਿੰਦੂ (15, 20) ਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਅਧੀਨ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਊਨਤਮ ਤਦ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦ ਕਿ ਭੋਜਨ P ਦੇ 15 ਪੈਕੇਟ ਅਤੇ ਭੋਜਨ Q ਦੇ 20 ਪੈਕਟ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਆਹਾਰ ਦੇ ਪ੍ਰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 150 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ **(Manufacturing problem)** ਇੱਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਸ਼ੀਨਾਂ I, II ਅਤੇ III ਲੱਗੀਆਂ ਹਨ। ਮਸ਼ੀਨ I ਅਤੇ II ਅਧਿਕਤਮ 12 ਘੰਟੇ ਤੱਕ ਚਲਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ ਰੱਖਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ III ਪ੍ਰਤਿਦਿਨ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 5 ਘੰਟ ਚੱਲਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਨਿਰਮਾਣਕਰਤਾ ਕੇਵਲ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸਮਾਨ M ਅਤੇ N ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨੋਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। M ਅਤੇ N ਦੇ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦਨ ਦੇ ਇੱਕ ਨਗ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨੋਂ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਲੱਗੇ ਸਮੇਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ) ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਉਤਪਾਦ	ਮਸ਼ੀਨ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ (ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ)		
	I	II	III
M	1	2	1
N	2	1	1.25

ਉਹ ਉਤਪਾਦ M ਤੇ 600 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਅਤੇ ਉਤਪਾਦ N ਤੇ 400 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਨਗ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਤਪਾਦ ਵਿਕ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਹੋਵੇ ? ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨਿਆ ਕਿ ਉਤਪਾਦ M ਅਤੇ N ਦੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x ਅਤੇ y ਹੈ।

ਉਤਪਾਦਨ ਤੇ ਕੁੱਲ ਲਾਭ = Rs $(600\,x + 400\,y)$ ਰੁ:

ਦਿੱਤੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਗਣਿਤੀ ਸੂਤਰਬੱਧ ਰੂਪ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ :

$Z = 600\,x + 400\,y$ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਜਿੱਥੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹਨ।

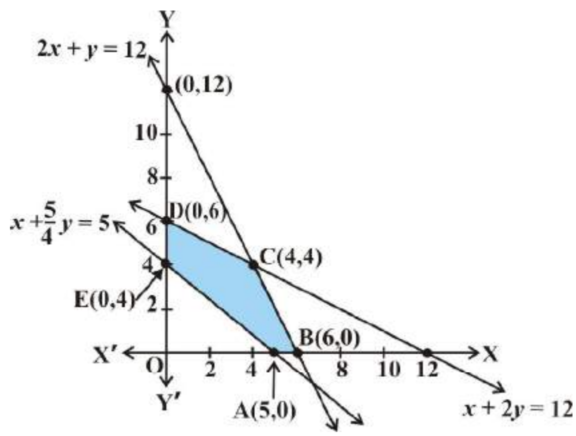
$x + 2y \leq 12$ (ਮਸ਼ੀਨ I ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (1)

$2x + y \leq 12$ (ਮਸ਼ੀਨ II ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (2)

$x + \frac{5}{4}\,y \geq 5$ (ਮਸ਼ੀਨ III ਤੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ) ... (3)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ ... (4)

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (1) ਤੋਂ (4) ਦਾ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 12.11 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ABCDE (ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ) ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ (1) ਤੋਂ (4) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ, ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C, D ਅਤੇ E ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : (5, 0) (6, 0), (4, 4), (0, 6) ਅਤੇ (0, 4) ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 12. 11

ਇਹਨਾਂ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (ਸਿਖਰਾਂ) ਤੇ Z =600+400 y ਦਾ ਮਾਨ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	**Z = 600 *x* + 400 *y* ਦਾ ਮੁੱਲ**	
(5, 0)	3000	
(6, 0)	3600	
(4, 4)	**4000** ←	ਅਧਿਕਤਮ
(0, 6)	2400	
(0, 4)	1600	

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (4] 4), Z ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਉਤਪਾਦਕ ਨੂੰ ਅਧਿਕਤਮ 4000 ਰੁ: ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਉਤਪਾਦ ਦੇ 4 ਨਗਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

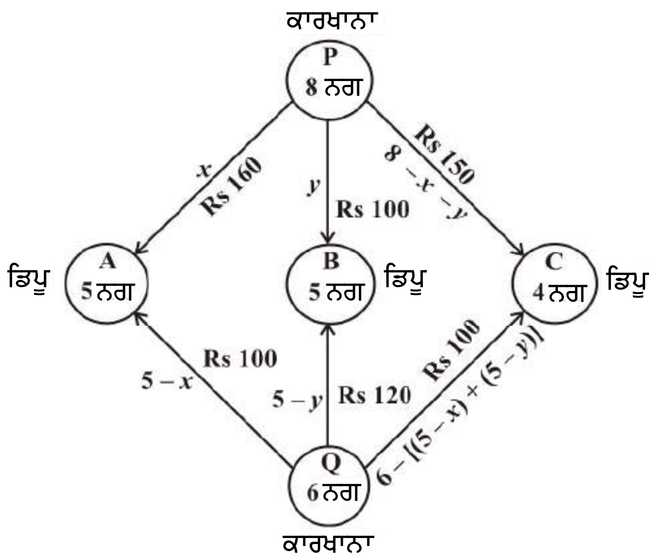
ਉਦਾਹਰਣ 11. ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ (**Transportation Problem**) P ਅਤੇ Q ਦੋ ਸਥਾਨਾਂ ਤੇ ਦੋ ਕਾਰਖਾਨੇ ਸਥਾਪਿਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਥਾਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ A, B ਅਤੇ C ਤੇ ਸਥਿਤ ਤਿੰਨ ਡਿਪੂਆਂ ਵਿੱਚ ਭੇਜੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਡਿਪੂਆਂ ਦੀ ਹਫਤਾਵਾਰ ਲੋੜ ਸਮਾਨ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 5] 5 ਅਤੇ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ, ਜਦਕਿ P ਅਤੇ Q ਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਕਾਰਖਾਨਿਆਂ ਦੀ ਉਤਪਾਦਨ ਸਮਰੱਥਾ 8 ਅਤੇ 6 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੀ ਇਕਾਈ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਰਣੀਬੱਧ ਹੈ :

ਤੋਂ /ਤੱਕ	ਮੁੱਲ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ)		
	A	**B**	**C**
P	160	100	150
Q	100	120	100

ਹਰੇਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਤੋਂ ਕਿੰਨੇ ਨਗ ਹਰੇਕ ਡਿਪੂ ਨੂੰ ਭੇਜੇ ਜਾਣ ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੋਆ-ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ ? ਨਿਊਨਤਮ ਢੋਆ-ਢੋਆਈ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੱਲ: ਚਿੱਤਰ 12. 12 ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 12. 12

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਮਾਲ ਦੇ x ਨਗਾਂ ਅਤੇ y ਨਗਾਂ ਨੂੰ ਕਾਰਖਾਨੇ P ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : A ਅਤੇ B ਡਿੱਪੂ ਨੂੰ ਭੇਜਿਆ ਗਿਆ। ਤਦ $(8 - x - y)$ ਨਗਾਂ ਨੂੰ C ਡਿਪੂਆਂ ਤੱਕ ਭੇਜਿਆ ਜਾਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ ?)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad x \geq 0, y \geq 0$ ਅਤੇ $8 - x - y \geq 0$

ਅਰਥਾਤ $\quad x \geq 0, y \geq 0$ ਅਤੇ $x + y \leq 8$

ਹੁਣ ਡਿੱਪੂ A ਤੇ ਨਗਾਂ ਦੀ ਹਫਤਾਵਾਰ ਜ਼ਰੂਰਤ 5 ਨਗ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ P ਕਾਰਖਾਨੇ ਤੋਂ x ਨਗ ਡਿੱਪੂ A ਨੂੰ ਭੇਜਿਆ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਕਾਰਖਾਨੇ Q ਤੋਂ $(5 - x)$ ਨਗ, ਡਿੱਪੂ A ਨੂੰ ਭੇਜੇ ਜਾਣਗੇ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ $5 - x \geq 0$, ਅਰਥਾਤ $x \leq 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(5 - y)$ ਅਤ੍ਰੇ $6 - (5 - x + 5 - y) = x + y - 4$ ਨਗ ਕਾਰਖਾਨੇ Q ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਡਿੱਪੂ B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਭੇਜੇ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$5 - y \geq 0, \qquad x + y - 4 \geq 0$$

ਅਰਥਾਤ $$y \leq 5, \qquad x + y \geq 4$$

ਕੁੱਲ ਢੋਆ-ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ/ਖਰਚ, ਜੋ Z ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਨਿਮਨ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$Z = 160\,x + 100\,y + 100\,(5 - x) + 120\,(5 - y) + 100\,(x + y - 4) + 150\,(8 - x - y)$$
$$= 10\,(x - 7\,y + 190)$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੱਸਿਆ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

ਨਿਮਨ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਤਹਿਤ

$$x \geq 0,\ y \geq 0 \quad \dots (1)$$

$$x + y \leq 8 \quad \dots (2)$$

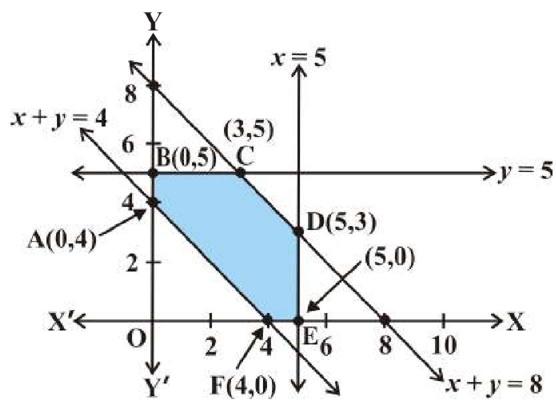
$$x \leq 5 \quad \dots (3)$$

$$y \leq 5 \quad \dots (4)$$

$$x + y \geq 4 \quad \dots (5)$$

Z = 10 (x ï 7y + 190) ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰੋ

ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (1) ਤੋਂ (5) ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਛਾਇਆ ਅੰਕਿਤ ਖੇਤਰ ABCDEF ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 12.13)



ਚਿੱਤਰ 12.13

ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0, 4), (0, 5), (3, 5), (5, 3), (5, 0) ਅਤੇ (4, 0) ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ Z ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ	Z = 10 (x – 7 y + 190)	
(0, 4)	1620	
(0, 5)	**1550** ←	ਨਿਊਨਤਮ
(3, 5)	1580	
(5, 3)	1740	
(5, 0)	1950	
(4, 0)	1940	

ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (0] 5) ਤੇ Z ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ 1550 ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਾਰਖਾਨੇ P ਤੋਂ 5, 0 ਅਤੇ 3 ਨਗ ਅਤੇ Q ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਡਿੱਪੂ A, B ਅਤੇ C ਤੱਕ 5] 0 ਅਤੇ 1 ਨਗ ਭੇਜਿਆ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਸੰਗਤ ਨਿਊਨਤਮ ਪਰਿਵਰਤਨ ਲਾਗਤ 1500 ਰੁ: ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਉਦਾਹਰਣ 9 ਤੇ ਧਿਆਨ ਕਰੋ ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਭੋਜਨ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪੈਕਟਾਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਆਹਾਰ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮਾਤਰਾ ਕਿੰਨੀ ਹੈ ?

2. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਰੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। P ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਾਰੇ, ਜਿਸ ਦਾ ਮੁੱਲ 250 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਥੈਲਾ ਜੋ ਕਿ ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ A ਦੇ 3 ਇਕਾਈ, ਤੱਤ B ਦੇ 2.5 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਤੱਤ C ਦੇ 2 ਇਕਾਈ ਰੱਖਦਾ ਹੈ ਜਦ ਕਿ Q ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਚਾਰਾ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ 200 ਰੁ: ਪ੍ਰਤੀ ਥੈਲਾ ਹੈ, ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤ A ਦਾ 1.5 ਇਕਾਈ, ਤੱਤ B ਦਾ 11 . 25 ਇਕਾਈ ਅ ਤੇ ਤੱਤ C ਦੇ ਤਿੰਨ ਇਕਾਈ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਪੋਸ਼ਕ ਤੱਤਾਂ A, B, ਅਤੇ C ਦੀ ਨਿਊਨਤਮ ਜ਼ਰੂਰਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 18 ਇਕਾਈ, 45 ਅਤੇ 24 ਇਕਾਈ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਥੈਲਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਥੈਲੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਵੇ ? ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਥੈਲੇ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

3. ਇੱਕ ਭੋਜਨ ਵਿਗਿਆਨੀ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਭੋਜਨਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਿਸ਼ਰਣ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨ A, ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 10 ਇਕਾਈ, ਵਿਟਾਮਿਨ B ਦੀ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 12 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਵਿਟਾਮਿਨ C ਦੀ 8 ਇਕਾਈ ਹੋਵੇ। 1kg ਭੋਜਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਟਾਮਿਨਾਂ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਭੋਜਨ	ਵਿਟਾਮਿਨ **A**	ਵਿਟਾਮਨ **B**	ਵਿਟਾਮਿਨ **C**
X	1	2	3
Y	2	2	1

ਭੋਜਨ X ਦੇ 1kg ਦਾ ਮੁੱਲ 16 ਰੁ: ਅਤੇ Y ਦੇ 1kg ਦਾ ਮੁੱਲ 20 ਰੁ: ਹੈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਆਹਾਰ ਦੇ ਲਈ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣੇ A ਅਤੇ B ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਦੇ ਲਈ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਪੈਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣੇ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਲਈ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ (ਮਿੰਨਟਾਂ ਵਿੱਚ) ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਹੈ।

ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ	ਮਸ਼ੀਨ		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

ਹਰ ਮਸ਼ੀਨ ਅਧਿਕਤਮ 6 ਘੰਟੇ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਲਬਧ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਦੀ ਵਿਕਰੀ ਤੇ 7.50 ਰੁ: ਲਾਭ ਅਤੇ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਤੇ 5 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਮਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਦਿਨ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 15 ਖਿਲੌਣਿਆਂ ਅਤੇ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 30 ਖਿਲੌਣੇ ਨਿਰਮਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

5. ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਜ਼ਹਾਜ਼ ਅਧਿਕਤਮ 200 ਯਾਤਰੀਆਂ ਨੂੰ ਯਾਤਰਾ ਕਰਵਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਟਿਕਟ ਤੇ 1000 ਰੁ: ਅਤੇ ਸਸਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਟਿਕਟ ਤੇ 600 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਏਅਰਲਾਈਨ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 20 ਸੀਟਾਂ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਲਈ ਰਿਜ਼ਰਵ ਕਰਦੀ ਹੈ ਫਿਰ ਵੀ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ ਥਾਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 4 ਗੁਣਾ ਯਾਤਰੀ ਸਸਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਟਿਕਟ ਨਾਲ ਯਾਤਰਾ ਕਰਨ ਨੂੰ ਪਹਿਲ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਕਿੰਨੇ ਟਿਕਟ ਵੇਚੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਕਿ ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਨ ਹੋਵੇ ? ਅਧਿਕਤਮ ਲਾਭ ਕਿੰਨਾ ਹੈ ?

6. ਦੋ ਅਨਾਜ ਭੰਡਾਰਾਂ A ਅਤੇ B ਦੀ ਭੰਡਾਰਣ ਸਮਰੱਥਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 100 ਕੁਇੰਟਲ ਅਤੇ 50 ਕੁਇੰਟਲ ਹੈ । ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਦੁਕਾਨਾਂ D, E ਅਤੇ F ਤੇ ਅੰਨ ਉਪਲਬਧ ਕਰਾਉਣਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 60] 50] ਅਤੇ 40 ਕੁਇੰਟਲ ਹਨ।

ਭੰਡਾਰਾਂ ਤੋਂ ਦੁਕਾਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤੀ ਕੁਇੰਟਲ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਪ੍ਰਤੀ ਕੁਇੰਟਲ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆ ਵਿੱਚ)		
ਤੋਂ/ ਤੱਕ	**A**	**B**
D	6	4
E	3	2
F	2.50	3

ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਦੇ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਤੀ ਦੀ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ? ਨਿਊਨਤਮ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ ?

7. ਇੱਕ ਤੇਲ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਦੋ ਡਿੱਪੂ A ਅਤੇ B ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਸਮਰੱਥਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 7000 ਲੀਟਰ ਅਤੇ 4000 ਲੀਟਰ ਦੀ ਹੈ। ਕਾਰਖਾਨੇ ਦੁਆਰਾ ਤਿੰਨ ਪ੍ਰੈਟੋਲ ਪੰਪਾਂ D, E ਅਤੇ F ਦੇ ਲਈ ਪੂਰਤੀ ਕਰਨੀ ਹੈ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 4500 ਲੀਟਰ, 3000 ਲੀਟਰ ਅਤੇ 3500 ਲੀਟਰ ਦੀ ਹੈ। ਡਿੱਪੂ ਤੋਂ ਪ੍ਰੈਟੋਲ ਪੰਪਾਂ ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ (km ਵਿੱਚ) ਨਿਮਨ ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ।

ਦੂਰੀਆਂ (**km** ਵਿੱਚ)		
ਤੋਂ / ਨੂੰ	**A**	**B**
D	7	3
E	6	4
F	3	2

ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਪ੍ਰਤੀ 10 ਲੀਟਰ ਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿਲੋਮੀਟਰ 1 ਰੁਪਇਆ ਹੈ ? ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿਹੋ ਜਿਹੀ ਪੂਰਤੀ ਯੋਜਨਾ ਅਪਣਾਈ ਜਾਵੇ ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਲਾਗਤ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਨ ਹੋ ਜਾਵੇ ? ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਕੀ ਹੈ ?

8. ਇੱਕ ਫਲ ਉਤਪਾਦਕ ਆਪਣੇ ਬਾਗ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਖਾਦਾਂ P ਬਰਾਂਡ ਅਤੇ Q ਬਰਾਂਡ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਹਰੇਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ, ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ, ਪੋਟਾਸ਼ ਅਤੇ ਕਲੋਰੀਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ (kg ਵਿੱਚ) ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪਰੀਖਣ ਸੰਕੇਤ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਬਾਗ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 250kg ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ 270kg ਪੋਟਾਸ਼ ਅਤੇ ਕਲੋਰੀਨ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 310kg ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਕ ਬਾਗ ਦੇ ਲਈ ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਥੈਲਿਆਂ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਨਿਮਨਤਮ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ ?

kg ਪ੍ਰਤੀ ਥੈਲਾ		
	ਬਰਾਂਡ **P**	ਬਰਾਂਡ **Q**
ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ	3	3.5
ਫਾਸਫੋਰਿਕ ਤੇਜ਼ਾਬ	1	2
ਪੋਟਾਸ਼	3	1.5
ਕਲੋਰੀਨ	1.5	2

9. ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 8 ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ। ਜੇਕਰ ਉਤਪਾਦਕ ਬਾਗ ਵਿੱਚ ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਮਾਤਰਾ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਨ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਮਿਸ਼ਰਣ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਥੈਲਿਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਇਆ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ? ਮਿਲਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਨਾਈਟ੍ਰੋਜਨ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਮਾਤਰਾ ਕੀ ਹੈ ?

10. ਇੱਕ ਖਿਲੌਣਾ ਕੰਪਨੀ A ਅਤੇ B ਦੋ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਮਾਰਕੀਟ ਪਰੀਖਣਾਂ ਅਤੇ ਉਪਲਬਧ ਸੰਸਾਧਨਾਂ ਤੋਂ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਕੱਠਾ ਉਤਪਾਦਨ ਪੱਧਰ ਪ੍ਰਤੀ ਹਫਤੇ 1200 ਗੁੱਡੀਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਨਹੀਂ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਅਤੇ B ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਤੋਂ ਵਧੇਰੇ ਮੰਗ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਤੋਂ ਅੱਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ A ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਗੁੱਡੀਆਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਪੱਧਰ ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਗੁੱਡੀਆਂ ਦੇ ਉਤਪਾਦਨ ਪੱਧਰ ਦੇ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ 600 ਨਗ ਵਧੇਰੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੰਪਨੀ A ਅਤੇ B ਹਰੇਕ ਗੁੱਡੀ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : 12 ਰੁ: ਅਤੇ 16 ਰੁ: ਦਾ ਲਾਭ ਕਮਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਲਾਭ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮੀਕਰਣ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗਾਂ ਦਾ ਹਫਤਾਵਾਰ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਨਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਉਹ ਸਮੱਸਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਈ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਫਲਨ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਫਲਨ ਨੂੰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਇਹ ਹੋਵੇ ਕਿ ਚਲ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਣ ਅਤੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ (ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਚਰਾਂ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਨਿਰਣਾਇਕ ਚਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹਨ।
- ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨਿਮਨਲਿਖਿਤ ਹਨ :
  (i) ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ
  (ii) ਉਤਪਾਦਨ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ
  (iii) ਢੋਆ-ਢੁਆਈ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ
- ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾ ਅਤੇ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ $x \geq 0, y \geq 0$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਸਾਂਝਾ ਖੇਤਰ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ, ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਜਾਂ ਹੱਲ ਖੇਤਰ) ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰਲੇ ਭਾਗ ਦੇ ਅਤੇ ਸੀਮਾਂਤ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਬਾਹਰੀ ਭਾਗ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਅਸੰਗਤ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਇੱਕ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਥਿਊਰਮ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਆਧਾਰਭੂਤ ਮਹੱਤਵ ਦੇ ਹਨ:
  ਥਿਊਰਮ 1. ਮੰਨਿਆ ਕਿ R ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨਿਆ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦ Z ਇੱਕ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ (ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ) ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖੀ ਅਸਮਾਨਤਾਵਾਂ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਹੋਣਾ ਹੀ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
  ਪ੍ਰਮੇਯ 2. ਮੰਨਿਆ ਕਿ R ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ (ਉੱਤਲ ਬਹੁਭੁਜ) ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨਿਆ ਕਿ $Z = ax + by$ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਜੇਕਰ R ਘਿਰਿਆ ਹੈ ਤਦ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ, R ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਊਨਤਮ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ R ਦੇ ਕੋਨੇ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰ) ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ ਤਦ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਜੇਕਰ ਇਹ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ R ਦੇ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।
- ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਵਿਧੀ : ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਵਿਧੀ ਨਿਮਨ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ :
  (1) ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ (ਸਿਖਰਾਂ) ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(2) ਹਰੇਕ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ $Z = ax + by$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨਿ ਲਓ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : M ਅਤੇ m ਹਨ।

(3) ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਘਿਰਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ M ਅਤੇ m ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦੇ ਅਧਿਕਤਮ ਅਤੇ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਅਣਘਿਰਿਆ ਹੈ ਤਦ

(i) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ M ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜੇਕਰ $ax + by > M$ ਦੇ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਖੁੱਲਾ ਅਰਧਤਲ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਨਾਲ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਅਧਿਕਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(ii) ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ m ਹੈ ਜੇਕਰ $ax + by < m$ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਖੁੱਲਾ ਅਰਧਤਲ ਅਤੇ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਸਾਂਝਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਦੇਸ਼ ਫਲਨ ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

◆ ਜੇਕਰ ਉਪਯੁਕਤ ਖੇਤਰ ਦੇ ਦੋ ਕੋਨਾ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਹੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਦੋਵੇਂ ਹੀ ਅਧਿਕਤਮ ਜਾਂ ਨਿਊਨਤਮ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਤਦ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਵੀ ਉਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਹੱਲ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਦੂਜੇ ਵਿਸ਼ਵ ਯੁੱਧ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਯੁੱਧ ਸੰਚਾਲਨ ਦੀ ਯੋਜਨਾ ਬਣੀ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਦੁਸ਼ਮਣਾਂ ਨੂੰ ਨਿਊਨਤਮ ਲਾਗਤ ਤੇ ਅਧਿਕਤਮ ਹਾਨੀ ਪਹੁੰਚੇ, ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਹੋਂਦ ਵਿੱਚ ਆਈ।

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਣ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤਕਾਰ L.Kantoro Vich ਅਤੇ ਅਮਰੀਕੀ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ F.L.Hitch Cock ਨੇ 1941 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ। ਦੋਵਾਂ ਨੇ ਸਵਤੰਤਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਨੂੰ ਢੋਆ ਢੁਆਈ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਨਾਮ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਗਿਆ। ਸੰਨ 1945 ਵਿੱਚ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ G.Stigler ਨੇ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਤਹਿਤ ਅਨੁਕੂਲਤਮ ਆਹਾਰ ਸੰਬੰਧੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ। ਸੰਨ 1947 ਵਿੱਚ G.B. Dantzig ਨੇ ਇੱਕ ਨਿਪੁੰਨ ਵਿਧੀ ਜੋ SIMPLEX METHOOD ਦੇ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੈ ਦਾ ਸੁਝਾਅ ਦਿੱਤਾ ਜੋ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਸੀਮਤ ਤਦਬੀਰਾਂ (Steps) ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮਰੱਥ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਰੰਭਿਕ ਕੰਮ ਕਰਨ ਦੇ ਕਾਰਨ ਸੰਨ 1975 ਵਿੱਚ L.Katorovich ਅਤੇ ਅਮਰੀਕੀ ਗਣਿਤ ਅਰਥਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ T.C.Koopmans ਨੂੰ ਅਰਥ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਵਿੱਚ ਨੋਬਲ ਪੁਰਸਕਾਰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਆਗਮਨ ਅਤੇ ਜ਼ਰੂਰੀ ਸਾਫਟਵੇਅਰ ਦੇ ਆਗਮਨ ਦੇ ਨਾਲ ਕਈ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਜਟਿਲ ਸਮੱਸਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਪ੍ਰੋਗਰਾਮਿੰਗ ਮਾਡਲ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਬਹੁਤ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਰਿਹਾ ਹੈ।