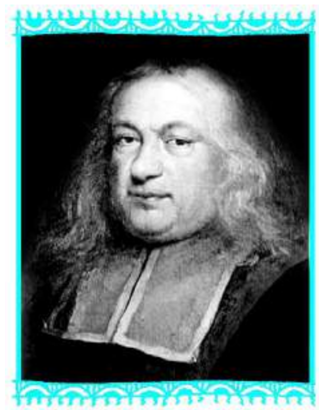
ਅਧਿਆਇ 13

ਸੰਭਾਵਨਾ Probability

❖ *The Theory of probabilities is simply the science of logic quantitatively treated – C.S. PEIRCE* ❖

13.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)



Pierre de Fermat
(1601-1665)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਅਨਿਸ਼ਚਤਿਤਾ ਦੀ ਮਾਪ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਅਸੀ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਏ.ਐਨ.ਕੌਲਮੋਗਰੋਬ (1903&1987) ਰਾਹੀਂ ਦਿੱਤਾ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਸੀ।ਅਸੀ ਸਮ&ਸੰਭਾਵੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਸਵੈਸਿੱਧ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਅਤੇ ਕਲਾਸੀਕਲ ਸਿਧਾਂਤਾ (classical theory) ਦੀ ਸਮਤੁਲਤਾ ਵੀ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਇਸ ਸਮਤੁਲਤਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਅਸੀ ਵਿਲੱਗ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਅਸੀਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਜੋੜ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (conditional probability) ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ] ਜਦੋਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਹੋਵੇ, ਅਤੇ ਇਸ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਮਦਦ ਤੋਂ ਬੇਯਜ਼&ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' theorem), ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਅਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਸਮਝਾਂਗੇ। ਅਸੀ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ (random variable) ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਧਾਰਨਾ ਨੂੰ ਵੀ ਸਮਝਾਂਗੇ ਅਤੇ ਕਿਸੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ (mean) ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਰਣ (variance) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਲੱਗ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ (discrete probability distribution) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ ਜਿਸਨੂੰ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ (binomial distribution) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਅੰਤਿਮ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਲਵਾਂਗੇ ਜਿਹਨਾ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ&ਸੰਭਾਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਦੱਸਿਆ ਨਾ ਜਾਵੇ।

13.2 ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ (Conditional Probability)

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀ ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ (sample space) ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ, ਕੀ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦੂਜੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ?

ਆਉ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੇ (fair) ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ&ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ।

ਆਉ ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਨਿਰਪੱਖ (fair) ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਿੱਕੇ ਨਿਰਪੱਖ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{8}$ ਮੰਨ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ ¶ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਆਉਣ¸ ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ¶ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਣਾ¸ ਨੂੰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ:

ਤਾਂ $E = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$

ਅਤੇ $F = \{THH, THT, TTH, TTT\}$

ਇਸ ਲਈ $P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$ (ਕਿਉਂ ?)

ਅਤੇ $P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$

$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

ਨਾਲ ਹੀ $E \cap F = \{THH\}$

ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ, ਤਾਂ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਹਨਾ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਘਟਨਾ E ਲਈ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਤੋਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਤੋਂ ਘਟਾ ਕੇ ਇਸਦਾ ਉਪ-ਸਮੂਹ F ਬਣ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾ ਵਿੱਚ, ਇਸ ਬਾਕੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਸਾਨੂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹ ਦੱਸਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਾਲਾਤ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਨਵੇਂ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਨਾਲ ਹਨ।

ਹੁਣ F ਦਾ ਉਹ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਜਿਹੜਾ E ਦੀ ਅਨੁਕੂਲ ਹੈ, THH ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

F ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$

ਜਾਂ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਤੇ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{1}{4}$

ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ P (E|F) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $P(E|F) = \frac{1}{4}$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ F ਦੇ ਉਹ ਤੱਤ ਜਿਹੜੇ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਵੀ ਸੰਗਤ ਵਿੱਚ ਹਨ] E ਅਤੇ F ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ $E \cap F$ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਘਟਿਤ ਹੋ ਚੁੱਕੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$P(E|F) = \frac{(E \cap F) \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}{F \text{ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਵੰਨਗੀ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

ਹੁਣ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਕੁਲ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ P (E|F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ%

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \qquad \ldots (1)$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ (1) ਤਾਂ ਹੀ ਮੰਨਣ ਯੋਗ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ $P(F) \neq 0$ ਭਾਵ $F \neq \phi$ (ਕਿਉਂ ?)
ਇਸਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1: ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਤੇ] E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ%

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(F) \neq 0 \text{ ਹੈ।}$$

13.2.1 ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ *(Properties of conditional probability)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਅਤੇ F ਕਿਸੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ:

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 1 $P(S|F) = P(F|F) = 1$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ਨਾਲ ਹੀ $$P(F|F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ਇਸ ਲਈ $$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ 2 ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ F ਇੱਕ ਹੋਰ ਘਟਨਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ ਕਿ $P(F) \neq 0$, ਤਾਂ,

$P[(A \cup B)|F] = P(A|F) + P(B|F)$ ï $P[(A \cap B)|F]$

ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ,

$$P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P[(A \cup B)|F)] = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

(ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਤੇ ਸੰਘ ਦੇ ਵੰਡ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ)

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) \text{ ï } P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= P(A|F) + P(B|F) \text{ ï } P(A \cap B|F)$$

ਜਦੋਂ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੇ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P[(A \cap B)|F)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad P[(A \cup B)|F)] = P(A|F) + P(B|F)$$

ਇਸ ਲਈ ਜਦੋਂ A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ, $P(A \cup B) = P(A|F) + P(B|F)$

ਗੁਣ 3 $P(E'|F) = 1$ ï $P(E|F)$

ਗੁਣ 1 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $P(S|F) = 1$

$\Rightarrow \quad P[(E \cup E')|F)] = 1$ ਕਿਉਂਕਿ $S = E \cup E'$

$\Rightarrow \quad P(E|F) + P(E'|F) = 1$ ਕਿਉਂਕਿ E ਅਤੇ E′ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ- ਜੁੜੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ

ਇਸ ਲਈ $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, ਤਾਂ $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਲੜਕਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਲੜਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ b ਲੜਕੇ ਨੂੰ ਅਤੇ g ਲੜਕੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ

$$S = \{(b,b),\ (g,b),\ (b,g),\ (g,g)\}$$

ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ:

E : ਦੋਵੇਂ ਬੱਚੇ ਲੜਕੇ ਹਨ

F : ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਲੜਕਾ ਹੈ

ਤਾਂ $E = \{(b,b)\}$ ਅਤੇ $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

ਹੁਣ $E \cap F = \{(b,b)\}$

ਇਸ ਲਈ $P(F) = \frac{3}{4}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

ਇਸ ਲਈ $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

ਉਦਾਹਰਣ 3: ਇੱਕ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੱਸ ਕਾਰਡ 1ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਿਖ ਕੇ ਰੱਖੇ ਹੋਏ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਨੂੰ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਮਿਲਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਬਕਸੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕਾਰਡ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਜਿਸਤ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ ' ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਕਾਰਡ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ $P(A|B)$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ਤਾਂ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ਅਤੇ $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

ਹੁਣ $P(A) = \frac{5}{10}, P(B) = \frac{7}{10}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$

ਤਾਂ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 1000 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 430 ਲੜਕੀਆਂ ਹਨ। ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ 430 ਵਿੱਚੋਂ 10% ਲੜਕੀਆਂ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੜਕੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ 'ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਮਾਤ XII ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ 'ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਲੜਕੀ ਹੈ' ਨੂੰ ਵਿਅਕਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ P (E|F) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043$ (ਕਿਉਂ?)

ਤਾਂ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ:

A : ' ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਆਉਣਾ'

B : ' ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣਾ'

ਜੇਕਰ B ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਘਟਨਾ A ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ 216 ਪਰਿਣਾਮ ਹਨ।

ਹੁਣ, $B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$

$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,4) & (1,2,4) \ldots (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots & (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) \ldots (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots & (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) \ldots (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots & (6,6,4) \end{Bmatrix}$$

ਅਤੇ $A \cap B = \{(6,5,4)\}$

ਹੁਣ $P(B) = \frac{6}{216}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{1}{216}$

ਤਾਂ $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$$

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਸੰਖਿਆ 4 ਦੇ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਆਉਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਘਟਿਤ ' ਸੰਖਿਆ 4 ਦਾ ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਆਉਣਾ ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ' ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੋਣਾ ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

ਅਤੇ $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $P(E) = \frac{11}{36}$] $P(F) = \frac{5}{36}$

ਅਤੇ $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

ਹੁਣ $P(E \cap F) = \frac{2}{36}$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

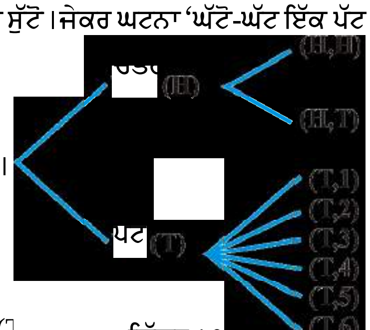
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

ਹੁਣ ਤੱਕ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਨਤੀਜੇ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਇਹ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ, ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਉਸ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਨਾ ਹੋਣ। ਸੰਭਾਵਨਾ $P(E \cap F)$ ਅਤੇ $P(F)$ ਦਾ ਪਰੀਕਲਨ ਉਸ ਅਨੁਸਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਾਲ ਇਸਨੂੰ ਸਮਝੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 7: ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲੇ ਜਾਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਵੇ ਪਰ ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟੋ। ਜੇਕਰ ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆਂ ਦਾ ਆਉਣਾ' ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

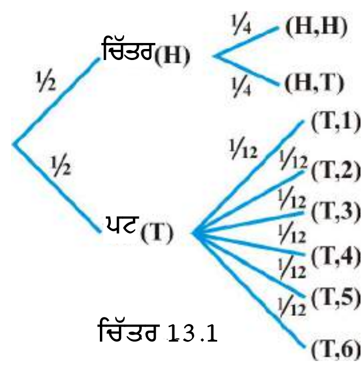
ਹੱਲ: ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਚਿੱਤਰ 13-1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਨੂੰ ਰੁਪ-ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 13.1

ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$S = \{(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T$



ਚਿੱਤਰ 13.1

ਜਿੱਥੇ (H,H) ਦਰਸ਼ਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਇਆ ਹੈ, ਅਤੇ (T, i) ਦਰਸ਼ਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਪਟ ਆਇਆ ਅਤੇ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਸੰਖਿਆਂ i ਆਈ।

çÂ Â ñ Â Æ 8 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ (H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3) (T,4), (T,5), (T,6) ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 13-2 ਤੋਂ ਸਾਫ਼ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਵੋ F ਘਟਨਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ 'ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਅਤੇ E ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ 4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$

$E = \{(T,5), T,6)\}$ ਅਤੇ $E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$

ਹੁਣ $P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$

$$= \frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

ਅਤੇ $P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ P (E) = 0.6, P (F) = 0.3 ਅਤੇ $P(E \cap F) = 0.2$] ਹੈ, ਤਾਂ P (E|F) ਅਤੇ P (F|E) ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. P(A|B) ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ P(B) = 0.5 ਅਤੇ $P(A \cap B) = 0.32$ ਹੋਵੇ।
3. ਜੇਕਰ P(A) = 0.8, P(B) = 0.5 ਅਤੇ P (B|A) = 0.4 ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$
4. $P(A \cup B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ $2\,P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ ਅਤੇ $P(A|B) = \frac{2}{5}$

5. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{6}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ ਅਤੇ $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਵਿੱਚ $P(E|F)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ:

(i) E : ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਚਿੱਤ, F : ਪਹਿਲੀ ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਚਿੱਤ

(ii) E : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ, F : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਇੱਕ ਚਿੱਤ

(iii) E : ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਟ, F : ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਪਟ

7. ਦੋ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ :

(i) E : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪਟ ਆਉਣਾ F : ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣਾ

(ii) E : ਕੋਈ ਪਟ ਨਾ ਆਉਣਾ F ਕੋਈ ਚਿੱਤ ਨਾ ਆਉਣਾ

8. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

E : ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਆਉਣਾ

F : ਪਹਿਲੀ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 6 ਅਤੇ 5 ਆਉਣਾ

9. ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਮਾਤਾ, ਪਿਤਾ ਅਤੇ ਪੁੱਤਰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਖੜੇ ਹਨ:

E : ਪੁੱਤਰ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੇ ਖੜਾ ਹੈ, F : ਪਿਤਾ ਵਿਚਕਾਰ ਖੜਾ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਕਾਲੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ :

(a) ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਕਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 5 ਆਇਆ ਹੈ।

(b) ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਲਾਲ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 4 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾਵਾਂ $E = \{1,3,5\}$, $F = \{2,3\}$, ਅਤੇ $G = \{2,3,4,5\}$ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $P(E|F)$ ਅਤੇ $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ ਅਤੇ $P(G|E)$

(iii) $P(E \cup F|G)$ ਅਤੇ $P(E \cap F|G)$

12. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਜਨਮ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਬੱਚੇ ਦਾ ਮੁੰਡਾ ਜਾਂ ਕੁੜੀ ਹੋਣਾ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆ ਦੇ ਕੁੜੀ ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ (*i*) ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ (*ii*) ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ।

13. ਇੱਕ ਅਧਿਆਪਕ ਦੇ ਕੋਲ 300 ਸੱਚ/ਝੂਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, 200 ਸੱਚ/ਝੂਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ, 500 ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਤੇ 400 ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਅਸਾਨ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀ ਬਹੁ- ਵਿਕਲਪੀ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

14. ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਖ- ਵੱਖ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ç Å Ü ō 4 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਈ ਸੰਖਿਆ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਹੈ ਤਾਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਸੁੱਟੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਆਵੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲੋ। ਘਟਨਾ 'ਘੱਟੋ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਪਾਸ਼ੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਆਉਣਾ ' ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਘਟਨਾ 'ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਪੱਟ ਆਉਣਾ' ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ।

16. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = 0$ ਤਾਂ $P(A|B)$ ਹੈ :

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ (D) 1

17. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ $P(A|B) = P(B|A) \neq 0$ ਤਾਂ

(A) $A \subset B$ (B) $A = B$ (C) $A \cap B = \phi$

(D) $P(A) = P(B)$

13.3 ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ (Multiplication Theorem on Probability)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਅਤੇ F ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਮੂਹ $E \cap F$ ਦੋਵੇਂ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ $E \cap F$ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ $E \cap F$ ਨੂੰ EF ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਕਸਰ ਅਸੀਂ ਸੰਯੁਕਤ ਘਟਨਾ EF ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੂਜੇ ਪੱਤੇ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਘਟਨਾ 'ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਾਣੀ' ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਇਛੁਕ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਘਟਨਾ EF ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਵਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ $P(E|F)$ ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਨ।

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(E \cap F) = P(F) . P(E|F) \quad \ldots (1)$$

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

ਜਾਂ $$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$ (ਕਿਉਂਕਿ $E \cap F = F \cup E$)

ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(E) \, . \, P(F|E)$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ,

$P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E) = P(F).\, P(E|F)$ ਜਦੋਂ ਕਿ $P(E) \neq 0$ ਅਤੇ $P(F) \neq 0$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਨ ਨਿਯਮ ' ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਵੇਖੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 10 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦੇ ਹਨ।ਦੋ ਗੇਂਦਾਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਗੇਂਦ ਦੂਜੀ ਦੇ ਕੱਢਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲੀ ਮੁੜ ਨਹੀਂ ਰੱਖੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨਿਆ ਕਿ E 'ਪਹਿਲੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਦੇ ਨਿਕਲਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ F 'ਦੂਜੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਨਿਕਲਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ।ਅਸੀਂ $P(E \cap F)$ ਜਾਂ P (EF) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(E) = P =$ (ਪਹਿਲੀ ਕੱਢੀ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ) $\frac{10}{15}$

ਨਾਲ ਹੀ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਵਿੱਚ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਹੈ ਭਾਵ ਘਟਨਾ E ਘਟਿਤ ਹੋਈ ਹੈ, ਹੁਣ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 9 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਅਤੇ 5 ਸਫ਼ੇਦ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ।ਇਸ ਲਈ, ਦੂਜੀ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਗੇਂਦ ਕਾਲੀ ਹੈ ਕੁਝ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਕੇਵਲ F ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ E ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਪਤਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $$P(F|E) = \frac{9}{14}$$

ਹੁਣ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ,

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E) = P(E)\, .\, P(F|E),\, P(G|EF)$$

$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

ਦੋ ਤੋਂ ਵੱਧ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ: ਜੇਕਰ E, F ਅਤੇ G ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ,

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\, P(F|E)\, P(G|E \cap F) = P(E)\, P(F|E)\, P(G|EF)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਚਾਰ ਜਾਂ ਵੱਧ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਵੀ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਉਦਾਹਰਣ ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟੀਕਰਨ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਚੰਗੀ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਪੱਤੇ ਬਗੈਰ ਬਦਲੇ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ K ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ' ਨੂੰ ਅਤੇ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਹੈ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ P (KKA) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ:

ਹੁਣ $$P(K) = \frac{4}{52}$$

ਨਾਲ ਹੀ P(K|K) ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਣ ਤੇ ਕਿ 'ਪਹਿਲਾ ਕੱਢਿਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ' ਪਰ ਦੂਜੇ ਪੱਤੇ ਦਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ (52 – 1) = 51 ਪੱਤੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਤਿੰਨ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(K|K) = \frac{3}{51}$$

ਇਸ ਲਈ P(A|KK) ਤੀਜੇ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਪੱਤੇ ਦੇ ਇੱਕੇ ਹੋਣ ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਕੱਢੇ ਜਾ ਚੁੱਕੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚ 50 ਪੱਤੇ ਹੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $$P(A|KK) = P(A|KK) = \frac{4}{50}$$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ:

$$P(KKA) = P(K)\ P(K|K)\ P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ (Independent Events)

52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਮੰਨਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕ੍ਰਮਵਾਰ% ਘਟਨਾਵਾਂ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਚਿੜੀ ਦਾ ਹੈ' ਅਤੇ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ

ਅਤੇ

$$P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad \text{rFkk} \quad P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

ਨਾਲ ਹੀ ^E ਅਤੇ F 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਚਿੜੀ ਦਾ ਇੱਕਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $$P(E \cap F) = \frac{1}{52}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$$

ਕਿਉਂਕਿ $P(E) = \frac{1}{4} = P(E|F)$, ਹੈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਘਟਨਾ E ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਇਆ।

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ ਕਿ $P(F|E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{13} = P(F)$

ਦੁਬਾਰਾ $P(F) = \dfrac{1}{13} = P(F|E)$ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਨੇ ਘਟਨਾ F ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਇਆ।

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੂਚਨਾ ਦੂਜੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਕੋਈ ਅਸਰ ਨਹੀਂ ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2: ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$P(F|\,E) = P(F) \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(E) \neq 0$$

$$P(E|\,F) = P(E) \text{ ਜਦੋਂ ਕਿ } P(F) \neq 0$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $P(E) \neq 0$ ਅਤੇ $P(F) \neq 0$ ਹੋਣਾ ਲਾਜ਼ਮੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F|E) \quad \ldots (1)$$

ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ (1) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(E \cap F) = P(E)\ P(F) \quad \ldots (2)$$

ਇਸ ਲਈ (2) ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3: ਮੰਨ ਲਓ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ

$$P(E \cap F) = P(E)\ \ P(F)$$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਆਸ਼ਰਿਤ (dependent) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ] ਜੇਕਰ ਉਹ ਅਜਾਦ ਨਾ ਹੋਣ ਭਾਵ ਜੇਕਰ $P(E \cap F) \neq P(E)\ .\ P(F)$ ਹੈ।
2. ਕਦੇ-ਕਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਭਰਮ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 'ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 'ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 'ਘਟਨਾਵਾਂ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਨਤੀਜਾ ਸਦਾ ਲਈ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਨਤੀਜੇ ਸਦਾ ਲਈ ਹੋ ਵੀ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ 'ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਅਤੇ 'ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ' ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਇਹੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹਨ। ਉਲਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲੀਆਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹ ਅਜਾਦ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

3. ਦੋ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਜਾਦ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਜੋੜਾ E ਅਤੇ F ਲਈ, ਜਿੱਥੇ E ਪਹਿਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਅਤੇ F ਦੂਜੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹਨ, ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਦੇ ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਪੂਰੇ ਕੀਤੇ ਜਾਣ, ਸੰਭਾਵਨਾ P(E) ਅਤੇ P(F) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਪਰਿਕਲਨ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $P(E \cap F) = P(E), P(F)$
4. ਤਿੰਨ ਘਟਨਾਵਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)\ P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)\ P(C)$$

ਅਤੇ $$P(A \cap B \cap C) = P(A)\ P(B)\ \ P(C)$$

ਜੇਕਰ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਵੀ ਸ਼ਰਤ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 10: ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ 3 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ', ਨੂੰ E ਤੋਂ ਅਤੇ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ', ਨੂੰ F ਤੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕੀ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

ਹੱਲ: ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ਹੁਣ $E = \{3, 6\}, F = \{2, 4, 6\}$ ਅਤੇ $E \cap F = \{6\}$

ਤਾਂ $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{6}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $P(E \cap F) = P(E) . P(F)$

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F ਅਜਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ (unbiased) ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਵੋ A ਘਟਨਾ 'ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਤੇ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ 36 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਮ- ਸੰਭਾਵੀ ਮੰਨਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ ਅਤੇ } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

ਨਾਲ ਹੀ $P(A \cap B) = P$ (ਦੋਵੇਂ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤਾ ਹੋਣਾ)

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

ਹੁਣ $$P(A) \, . \, P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।ਮੰਨ ਲਉ E ਘਟਨਾ ' ਤਿੰਨ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਤਿੰਨ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ F ਘਟਨਾ ' ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਦੋ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਅਤੇ G ਘਟਨਾ ' ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਪਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੋੜੇ (E,F), (E,G) ਅਤੇ (F,G) ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ? ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਨਿਰਭਰ ਹਨ ?

ਹੱਲ: ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, $$E = \{HHH, TTT\}, \quad F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

ਅਤੇ $$G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਨਾਲ ਹੀ $$E \cap F = \{HHH\}, \quad E \cap G = \{TTT\}, \quad F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$$

ਇਸ ਲਈ $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \; P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \; P(G) = \frac{7}{8}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{8}, \; P(E \cap G) = \frac{1}{8}, \; P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

ਨਾਲ ਹੀ $P(E) \, . \, P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \; P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$ ਅਤੇ $P(F) \cdot P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$

ਇਸ ਲਈ $$P(E \cap F) = P(E) \, . \, P(F)$$

$$P(E \cap G) \neq P(E) \, . \, P(G)$$

ਅਤੇ $$P(F \cap G) \neq P(F) \, . \, P(G)$$

ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾਵਾਂ (E ਅਤੇ F) ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ (F ਅਤੇ G) ਅਤੇ (E ਅਤੇ G) ਆਸ਼ਰਿਤ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 13: ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਦੋ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ E ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੱਲ: ਕਿਉਂਕਿ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $P(E \cap F) = P(E) \, . \, P(F)$ ... (1)

ਚਿੱਤਰ 13.3 ਦੇ ਵੈੱਨ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਇਹ ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $E \cap F$ ਅਤੇ $E \cap F'$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾਲ ਹੀ

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$$

ਕਿਉਂਕਿ $E \cap F$ ਅਤੇ $E \cap F'$ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ,

ਇਸ ਲਈ $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$

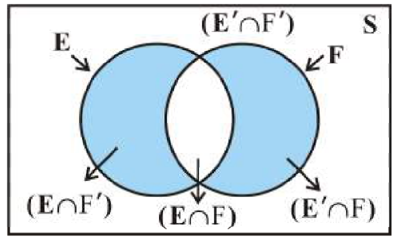
ਜਾਂ $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E) . P(F)$ (1) ਤੋਂ

$= P(E) [1 - P(F]$

$= P(E) . P(F')$

ਇਸ ਲਈ E ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ,



ਚਿੱਤਰ 13. 3

ਟਿੱਪਣੀ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ

(a) E′ ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ

(b) E′ ਅਤੇ F′ ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ

ਉਦਾਹਰਣ 14: ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ, A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= 1- P(A') \ P(B')$

ਹੱਲ: P(A ਜਾਂ B ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ- ਘੱਟ ਇੱਕ ਦਾ ਹੋਣਾ) $= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A) \ P(B)$

$= P(A) + P(B) \ [1-P(A)]$

$= P(A) + P(B) . P(A')$

$= 1- P(A') + P(B) \ P(A')$

$= 1- P(A') \ [1- P(B)]$

$= 1- P(A') \ P(B')$

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. ਜੇਕਰ $P(A) = \frac{3}{5}$] $P(B) = \frac{1}{5}$ ਅਤੇ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ $P(A \cap B)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਦੋਵੇਂ ਪੱਤਿਆਂ ਦੇ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਸੰਤਰਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕੋਂ ਬਕਸੇ ਦਾ ਨਿਰੀਖਣ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਗੈਰ ਬਦਲੇ ਤਿੰਨ ਸੰਤਰੇ ਕੱਢ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨੇ ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਸੰਤਰੇ ਚੰਗੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਕਸੇ ਨੂੰ ਵੇਚਣ ਲਈ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸਵੀਕਾਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਬਕਸੇ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ 15 ਸੰਤਰੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 12 ਚੰਗੇ ਅਤੇ 3 ਖਰਾਬ ਸੰਤਰੇ ਹਨ, ਕੀ ਵਿਕਰੀ ਲਈ ਸਵੀਕਾਰ ਹੋਣ ਲਈ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ ' ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣਾ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ 'ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 3 ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਨਿਰੀਖਣ ਕਰੋ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ?

5. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ 1, 2, 3 ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਅਤੇ 4, 5, 6 ਹਰੇ ਰੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ ' ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਤ ਹੈ' ਅਤੇ B ਘਟਨਾ ' ਸੰਖਿਆ ਲਾਲ ਰੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖੀ ਹੋਈ ਹੈ', ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕੀ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

6. ਮੰਨ ਲਉ E ਅਤੇ F ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(E) = \frac{3}{5}$, $P(F) = \frac{3}{10}$ ਅਤੇ $P(E \cap F) = \frac{1}{5}$ ਤਾਂ ਕੀ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ ?

7. A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ ਅਤੇ P(B) ਹੈ $p.p$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ (i) ਘਟਨਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ (ii) ਘਟਨਾਵਾਂ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ।

8. ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $P(A) = 0.3$ ਅਤੇ $P(B) = 0.4$. ਹੈ, ਤਾਂ

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \cup B)$

(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B | A)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ਤਾਂ P(A&ਨਹੀਂ ਅਤੇ B&ਨਹੀਂ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $P(B) = \frac{7}{12}$ ਅਤੇ P(A&ਨਹੀਂ ਅਤੇ B&ਨਹੀਂ) $= \frac{1}{4}$ ਹੈ। ਕੀ A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹੈ ?

11. A ਅਤੇ B ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $P(A) = 0.3$, ਅਤੇ $P(B) = 0.6$ ਤਾਂ

(i) P(A ਅਤੇ B) (ii) P(A ਅਤੇ B&ਨਹੀਂ)

(iii) P(A ਜਾਂ B) (iv) P(A ਅਤੇ B ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ) ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਦੋ ਗੇਂਦਾ ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬਿਨਾਂ ਬਦਲੇ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 10 ਕਾਲੀਆਂ ਅਤੇ 8 ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ (i) ਦੋਵੇਂ ਗੇਂਦਾ ਲਾਲ ਹਨ।, (ii) ਪਹਿਲੀ ਕਾਲੀ ਤੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਹੈ (iii) ਇੱਕ ਕਾਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਲਾਲ ਹੈ।

14. ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ A ਅਤੇ B ਰਾਹੀਂ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{1}{3}$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਦੋਵੇਂ, ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ:

(i) ਸਮੱਸਿਆ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਉਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇਹ ਇੱਕ ਹੱਲ ਕਰੇਗਾ।

15. ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪੱਤਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾਵਾਂ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਹੈ ?

(i) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਇੱਕਾ ਹੈ।

(ii) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਕਾਲੇ ਰੰਗ ਦਾ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਹੈ।

(iii) E : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਜਾਂ ਬੇਗਮ ਹੈ।
F : 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਪੱਤਾ ਬੇਗਮ ਜਾਂ ਗੁਲਾਮ ਹੈ।

16. ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ 60% ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਿੰਦੀ ਦਾ, 40% ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਤੇ 20% ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(a) ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਨਾ ਤਾਂ ਹਿੰਦੀ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ।

(b) ਜੇਕਰ ਉਹ ਹਿੰਦੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਵੀ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(c) ਜੇਕਰ ਉਹ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਪੜ੍ਹਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਹਿੰਦੀ ਦਾ ਅਖਬਾਰ ਵੀ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲਾ, ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਜੇਕਰ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੀ ਹੈ ?

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18. ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ

(A) A ਅਤੇ B ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀਆਂ ਹਨ (B) P(A′B′) = [1ï P(A)][1ï P(B)]

(C) $P(A) = P(B)$ (D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ (Bayes' Theorem)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਥੈਲੇ I ਅਤੇ II ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚ 2 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 3 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹਨ। ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ

4 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 5 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ çÂ ÿ æ ë ¶ù Ú ë ä ç ÆÃ ¿ Åò é Â $\frac{1}{2}$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਥੈਲੇ (ਮੰਨ ਲਉ ਥੈਲਾ I) ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਖਾਸ ਰੰਗ (ਮੰਨ ਲਉ ਸਫ਼ੇਦ) ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੋਵੇ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕਿਹੜੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ। ਪਰ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਥੈਲੇ (ਮੰਨ ਲਉ ਥੈਲੇ&II) ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਕੱਢੀ ਗਈ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਪਤਾ ਹੈ ? ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਥੈਲੇ II ਦੇ ਚੁਨਣ ਦੀ ਉਲਟ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਘਟਨਾ ਦਾ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਗਣਿਤਗ ਜਾਨ ਬੇਯਜ਼ ਨੇ ਉਲਟ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦਾ ਹਲ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਰਾਹੀਂ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਸੂਤਰ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਦੇ ਬਾਅਦ 1763 ਈ. ਵਿੱਚ ਪਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ ਸੀ। ਬੇਯਜ਼ ਦੇ ਕਥਨ ਅਤੇ ਸਬੂਤ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

13.5.1 ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ *(Partition of a sample space)*

ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2 \ldots E_n$ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ:

(a) $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3, \ldots n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = S$ ਅਤੇ

(c) $P(E_i) > 0$, ਹਰੇਕ $i = 1, 2, \ldots, n$ ਲਈ ਹੋਵੇ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, \ldots E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਗੈਰ ਸੰਯੁਕਤ ਹਨ, ਸਰਵਾਂਗੀ ਹਨ ਅਤੇ ਉਹਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਘਟਨਾ E ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਪੂਰਕ ਘਟਨਾ E′ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ $E \cap E' = \phi$ ਅਤੇ $E \cup E' = S$.

ਵੈੱਨ-ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ 13.3, ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਅਸਾਨੀ ਤੋਂ ਪ੍ਰੇਖਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਕਿਸੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S, ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਈ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\{E \cap F, E \cap F'\}$ ਸਮੂਹ E ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ।

ਸਮੂਹ $\{E' \cap F, E \cap F, E \cap F'\}$ ਸਮੂਹ $E \cup F$ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੂਹ $\{E \cap F', E \cap F, E' \cap F, E' \cap F'\}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

13.5.2 ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ *(Theorem of Total Probability)*

ਮੰਨ ਲਉ $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S, ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ A ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ,

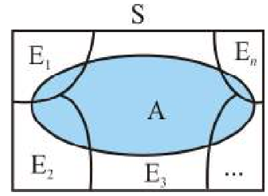
$$P(A) = P(E_1)\ P(A|E_1) + P(E_2)\ P(A|E_2) + \ldots + P(E_n)\ P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A | E_j)$$

ਉਤਪੱਤੀ: ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ13-4) ਇਸ ਲਈ,

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \quad ... (1)$$

ਅਤੇ $E_i \cap E_j = \phi \ \forall \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, ..., n$



ਚਿੱਤਰ 13.4

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਘਟਨਾ A, ਲਈ

$$A = A \cap S$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 ... E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)$$

ਨਾਲ ਹੀ $A \cap E_i$, ਅਤੇ $A \cap E_j$, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੂਹਾਂ E_i ਅਤੇ E_j ਦੇ ਉਪਸਮੂਹ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $i \neq j$ ਹੈ, ਲਈ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ $i \neq j, \ i, j = 1, 2 ..., n$ ਲਈ $A \cap E_i$ ਅਤੇ $A \cap E_j$ ਵੀ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(A) = P[(A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup .....\cup (A \cap E_n)]$

$$= P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

ਹੁਣ $P(A \cap E_i) = P(E_i) P(A|E_i)$ ਕਿਉਂਕਿ $P(E_i) \neq 0 \forall i = 1,2,..., n$

ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਰਾਹੀਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ $P(A) = P(E_1) \ P(A|E_1) + P(E_2) \ P(A|E_2) + ... + P(E_n) \ P(A|E_n)$

ਜਾਂ $P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A | E_j)$

ਉਦਾਹਰਣ 15: ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੇ ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦਾ ਠੇਕਾ ਲਿਆ ਹੈ। ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0.65 ਹੈ। ਹੜਤਾਲ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਅਤੇ ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦੇ ਸਮਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 0-80 ਅਤੇ 0-32 ਹਨ। ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ 'ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਦਾ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣਾ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ A ਅਤੇ 'ਹੜਤਾਲ ਹੋਣ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ B ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ P(A) ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(B) = 0.65, \ P(\text{ਹੜਤਾਲ ਨਹੀਂ}) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

$$P(A | B) = 0.32, \ P(A | B') = 0.80$$

ਕਿਉਂਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ B ਅਤੇ B′ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਇਸਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$= P(B) \ . \ P(A | B) + P(B') \ P(A | B')$$
$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$

$$= 0.208 + 0.28 = 0.488$$

ਇਸ ਲਈ ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਸਮੇਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪੂਰਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0·488 ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਕਥਨ ਲਿਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਬੇਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ **(Bayes' Theorem)** ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਨਾ-ਖਾਲੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਵਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ ਭਾਵ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਜੋੜਿਆ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ ਅਤੇ $E_1 \cup E_2 \cup, ..., \cup E_n = S$ ਹੈ ਅਤੇ A ਕੋਈ ਘਟਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਤਾਂ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}, \; i = 1, 2, 3, ..., n$$

ਉਤਪੱਤੀ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{P(A)} \quad \text{(ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਗੁਣਾ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)}$$

$$= \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)} \quad \text{(ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਨਿਯਮ ਤੋਂ)}$$

ਟਿੱਪਣੀ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਰਤੀ ਜਾਦੀ ਹੈ: ਘਟਨਾਵਾਂ $E_1, E_2, ... E_n$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ (hypotheses) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

$P(E_i)$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ E_i ਦੀ ਪੂਰਵਕਾਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (a priori)ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ

$P(E_i A)$ ਨੂੰ ਪਰਿਕਲਪਨਾ E_i ਦੀ ਉੱਤਰਕਾਲ ਦੀ (a posteriori) ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਕਾਰਣਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ E_i ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਘਟਨਾਵਾਂ E_i ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਘਟਦੀ ਹੈ (ਭਾਵ E_i ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਘਟਨਾ ਘਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਘਟਿਤ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ) ਇਸ ਲਈ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤਾ ਸੂਤਰ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਖਾਸ E_i (ਭਾਵ ਇੱਕ ਕਾਰਣ)ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾ A ਦਾ ਘਟਿਤ ਹੋਣਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਵਰਤੋਂ ਯੋਗ ਹੈ। ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਨੂੰ ਹੇਠ-ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16: ਦੋ ਥੈਲੇ I ਅਤੇ II ਦਿੱਤੇ ਹਨ। ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ।ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਗਈ ਹੈ ?

ਤਾਂ $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

ਨਾਲ ਹੀ $P(A|E_1) = P(\text{ਥੈਲੇ I ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{3}{7}$

ਅਤੇ $P(A|E_2) = P(\text{ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{5}{11}$

ਹੁਣ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚੋਂ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ = $P(E_2|A)$,

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ :$P(E_2|A) = \dfrac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \dfrac{35}{68}$

ਉਦਾਹਰਣ 17: ਤਿੰਨ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਬਕਸੇ I, II ਅਤੇ III ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਿੱਕੇ ਹਨ।ਬਕਸੇ I ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਸੋਨੇ ਦੇ ਹਨ, ਬਕਸੇ II ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿੱਕੇ ਚਾਂਦੀ ਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਕਸੇ III ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੋਨੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚਾਂਦੀ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਹੈ।ਇੱਕ ਇਨਸਾਨ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਕਸਾ ਚੁਣਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਵੀ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ E_1, E_2 ਅਤੇ E_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਬਕਸੇ I, II ਅਤੇ III ਦੇ ਚੋਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$

ਨਾਲ ਹੀ ਮੰਨ ਲਉ A ਘਟਨਾ 'ਕੱਢਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੈ' ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੈ।

ਤਾਂ $P(A|E_1) = P(\text{ਬਕਸੇ I ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{2}{2} = 1$

$P(A|E_2) = P(\text{ਬਕਸੇ II ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ}) = 0$

$P(A|E_3) = P(\text{ਬਕਸੇ III ਤੋਂ ਸੋਨੇ ਦਾ ਸਿੱਕਾ ਕੱਢਣਾ}) = \frac{1}{2}$

ਹੁਣ ਬਕਸੇ ਵਿੱਚ ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਵੀ ਸੋਨੇ ਦਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

= ਕੱਢਿਆ ਸਿੱਕਾ ਸੋਨੇ ਦੇ ਬਕਸੇ I ਵਿੱਚੋਂ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

= $P(E_1|A)$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)\,P(A|E_1)}{P(E_1)\,PA|E_1) + P(E_2)\,P(A|E_2) + P(E_3)\,P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 0 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 18: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦੀ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਯੋਗਤਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ।

ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪਾਜ਼ਿਟਿਵ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ 90% ਪਤਾ ਲੱਗਣ ਵਿੱਚ ਅਤੇ 10% ਪਤਾ ਨਾ ਲੱਗਣ ਦੇ ਯੋਗ ਹੈ। ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ, ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ 99% ਸਹੀ ਪਤਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਨੈਗੀਟਿਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ 1% ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਲਈ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ 0.1% ਵਿਅਕਤੀ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਹਨ, ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਤੇ ਰੋਗ ਵਿਗਿਆਨੀ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਦਾ ਸ਼ਿਕਾਰ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E ਚੁਣੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਅਸੀਂ $P(E|A)$ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ E' ਚੁਣੇ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $\{E, E'\}$ ਜਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 ï P(E) = 0.999$$

$P(A|E) = P$ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਆਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ.ਆਈ. ਵੀ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੈ) $= 90\% = \frac{9}{10} = 0.9$

ਅਤੇ $P(A|E') = P$ (ਵਿਅਕਤੀ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਆਉਣਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਨਹੀਂ ਹੈ) $= 1\% = 0.01$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E|A) = \frac{P(E)\,P(A|E)}{P(E)\,P(A|E) + P(E')\,P(A\,|\,E')}$$

$$= \frac{0.001 \times 0.9}{0.001 \times 0.9 + 0.999 \times 0.01} = \frac{90}{1089} = 0.083 \text{ (ਲਗਭਗ)}$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਐਚ. ਆਈ. ਵੀ. ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦਾ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਪੋਜ਼ੀਟਵ ਹੈ, 0.083 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 19: ਇੱਕ ਬੋਲਟ ਬਣਉਣ ਦੇ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨਾਂ A, B ਅਤੇ C ਕੁਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 25%, 35% ਅਤੇ 40% ਬੋਲਟ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾ ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਦੇ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5] 4] ਅਤੇ 2 ਪ੍ਰਤੀਸ਼ਤ ਭਾਗ ਖਰਾਬ ਹੈ। ਬੋਲਟਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਬੋਲਟ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਖਰਾਬ ਪਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਇਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ?

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਘਟਨਾਵਾਂ B_1, B_2, B_3 ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ :

B_1 : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ A ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

B_2 : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

B_3 : ਬੋਲਟ ਮਸ਼ੀਨ C ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਘਟਨਾਵਾਂ B_1, B_2, B_3 ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਿਵੇਕਲੀ ਅਤੇ ਪਰਿਪੂਰਣ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਘਟਨਾ E ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ: E ਬੋਲਟ ਖਰਾਬ ਹੈ।

ਘਟਨਾ E, ਘਟਨਾਵਾਂ B_1 ਜਾਂ B_2 ਜਾਂ B_3 ਨਾਲ ਘਟਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ:

$$P(B_1) = 25\% = 0.25,\ \ P(B_2) = 0.35 \text{ ਅਤੇ } P(B_3) = 0.40$$

ਦੁਬਾਰਾ $P(E|B_1)$ =ਬੋਲਟ ਖਰਾਬ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਉਹ ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

$$= 5\% = 0.05$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(E|B_2) = 0.04,\ P(E|B_3) = 0.02$

ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)\,P(E|B_2)}{P(B_1)\,P(E|B_1) + P(B_2)\,P(E|B_2) + P(B_3)\,P(E+|B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02} = \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

ਉਦਾਹਰਣ 20: ਇੱਕ ਡਾਕਟਰ ਨੇ ਇੱਕ ਰੋਗੀ ਨੂੰ ਵੇਖਣ ਆਉਣਾ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਤਜ਼ਰਬਿਆਂ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੇ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ ਜਾਂ ਸਕੂਟਰ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਤੋਂ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ ਅਤੇ $\frac{2}{5}$ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ ਜਾਂ ਸਕੂਟਰ ਤੇ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$, ਅਤੇ $\frac{1}{12}$ ਹਨ, ਪਰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਤੇ ਆਉਣ ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੇਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਇਆ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਟ੍ਰੇਨ ਤੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 'ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਰੋਗੀ ਕੋਲ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ" ਦੀ ਘਟਨਾ E ਹੈ। ਜੇਕਰ ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਟ੍ਰੇਨ, ਬੱਸ, ਸਕੂਟਰ ਜਾਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ T_1, T_2, T_3, ਅਤੇ T_4 ਹੋਣ ਤਾਂ

$$P(T_1) = \frac{3}{10}, P(T_2) = \frac{1}{5}, P(T_3) = \frac{1}{10} \text{ ਅਤੇ } P(T_4) = \frac{2}{5} \quad \text{(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)}$$

$$P(E|T_1) = \text{ਡਾਕਟਰ ਦੇ ਟ੍ਰੇਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਤੇ ਦੇਰ ਨਾਲ ਪਹੁੰਚਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{1}{4}$$

ਇਸੇ ਪ੍ਰਕਾਰ $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$, $P(E|T_4) = 0$, ਕਿਉਂਕਿ ਹੋਰ ਵਾਹਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਤੇ ਉਸਨੂੰ ਦੇਰ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$P(T_1|E)$ = ਡਾਕਟਰ ਰਾਹੀਂ ਦੇਰ ਨਾਲ ਆਉਣ ਤੇ ਟ੍ਰੇਨ ਰਾਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1) + P(T_2)P(E|T_2) + P(T_3)P(E|T_3) + P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0} = \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ 4 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਵਾਰੀ ਸੱਚ ਬੋਲਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ E] 'ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟ ਕੇ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਕਿ ਉਸ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ' ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ S_1] ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਅਤੇ S_2 ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਨਹੀਂ ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ।

$$P(S_1) = \text{ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{1}{6}$$

$$P(S_2) = \text{ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣ ਦੀ ਘਟਨਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{5}{6}$$

$P(E|S_1)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਤੇ ਕਿ ਪਾਸੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸੱਚ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = \frac{3}{4}$$

$P(E|S_2)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਤੇ ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਨਹੀਂ ਹੈ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਸੱਚ ਨਾਂ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

ਹੁਣ ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$P(S_1|E)$ = ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਇਹ ਦੱਸਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ 6 ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ 6 ਹੈ

$$= \frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1)+P(S_2)P(E|S_2)} = \frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}\times\frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{8}$ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 13.3

1. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ। ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਰੰਗ ਨੋਟ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੁਬਾਰਾ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੱਢੇ ਹੋਏ ਰੰਗ ਦੀਆਂ 2 ਹੋਰ ਗੇਂਦਾਂ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਲਸ਼ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਦੂਜੀ ਗੇਂਦ ਦੀ ਲਾਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?
2. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾ ਹਨ ਅਤੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 2 ਲਾਲ ਅਤੇ 6 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਥੈਲਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਲਾਲ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦ ਪਹਿਲੇ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਹੈ ?
3. ਇਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਕਾਲਜ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 60% ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 40% ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 30% ਅਤੇ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 20% ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ A&ਗਰੇਡ ਲਿਆ। ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕਾਲਜ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਇਹ ਪਾਇਆ ਗਿਆ ਕਿ ਉਸਨੂੰ A-ਗਰੇਡ ਮਿਲਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ

ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੋਸਟਲ ਵਿੱਚ ਰਹਿਣ ਵਾਲਾ ਹੈ ?

4. ਇੱਕ ਬਹੁ&ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਉਹ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਸਦੇ ਉੱਤਰ ਜਾਨਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ।ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਤੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{4}$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ?

5. ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਰੋਗ ਦੇ ਸਹੀ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਲਈ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ 99% ਅਸਰਦਾਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਰੋਗੀ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੈ।ਪਰ 0.5% ਵਾਰੀ ਕਿਸੇ ਠੀਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਗਲਤ ਰਿਪੋਰਟ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਦੱਸਦਾ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅਬਾਦੀ ਵਿੱਚ 0·1% ਲੋਗ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹਨ ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਕੋਈ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਵਿਅਕਤੀ ਉਸ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਖ਼ੂਨ ਦੀ ਜਾਂਚ ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਰੋਗ ਹੈ ?

6. ਤਿੰਨ ਸਿੱਕੇ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।ਇੱਕੋ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਚਿੱਤ ਹੈ।ਦੂਜਾ ਸਿੱਕਾ ਪੱਖਪਾਤੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ 75% ਵਾਰੀ ਆਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤੀਜਾ ਸਿੱਕਾ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ।ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ।ਜੇਕਰ ਸਿੱਕੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਚਿੱਤ ਵਾਲੇ ਸਿੱਕੇ ਹਨ ?

7. ਇੱਕ ਬੀਮਾ ਕੰਪਨੀ 2000 ਸਕੂਟਰ ਚਾਲਕਾਂ, 4000 ਕਾਰ ਚਾਲਕਾਂ ਅਤੇ 6000 ਟਰੱਕ ਦਾ ਬੀਮਾ ਕਰਦੀ ਹੈ।ਦੁਰਘਟਨਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 0·01] 0·03 ਅਤੇ 0·15 ਹੈ।ਬੀਮਾ ਕਰਵਾਉਣ ਵਾਲੇ ਚਾਲਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦੁਰਘਟਨਾ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਸਕੂਟਰ ਚਾਲਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

8. ਇੱਕ ਕਾਰਖਾਨੇ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਮਸ਼ੀਨਾਂ ਹਨ।ਪਹਿਲੇ ਵਿਵਰਨ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ 60% ਮਸ਼ੀਨ A ਅਤੇ 40% ਮਸ਼ੀਨ B ਰਾਹੀਂ ਪੈਦਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਮਸ਼ੀਨ A ਦਾ 2% ਅਤੇ ਮਸ਼ੀਨ B ਦਾ 1% ਪੈਦਾਵਾਰ ਖਰਾਬ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਕੁੱਲ ਪੈਦਾਵਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਢੇਰ ਬਣਾ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਢੇਰ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਵਸਤੂ ਖਰਾਬ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਇਸ ਵਸਤੂ ਦੇ ਮਸ਼ੀਨ A ਰਾਹੀਂ ਬਣੇ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

9. ਦੋ ਟੋਲੀਆਂ ਇੱਕ ਨਿਗਮ ਦੇ ਨਿਦੇਸ਼ਕ ਮੰਡਲ ਵਿੱਚ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਹਨ।ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਟੋਲੀ ਦੇ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0·6 ਅਤੇ 0·4 ਹਨ।ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਟੋਲੀ ਜਿੱਤਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਉਤਪਾਦ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0·7 ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਦੂਜੀ ਟੋਲੀ ਜਿੱਤਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ 0·3 ਹੈ।ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਨਵਾਂ ਉਤਪਾਦ ਦੂਜੇ ਦਲ ਰਾਹੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

10. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਕੋਈ ਕੁੜੀ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਦੀ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ 5 ਜਾਂ 6 ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ

ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੋਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ 1] 2] 3 ਜਾਂ 4 ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਆਉਣਾ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨੋਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਉਸਤੇ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਪੱਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਉਛਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੇ 1] 2] 3 ਜਾਂ 4 ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

11. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਦੇ ਕੋਲ A, B ਅਤੇ C ਮਸ਼ੀਨ ਆਪਰੇਟਰ ਹਨ। ਪਹਿਲਾ ਆਪਰੇਟਰ A 1% ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਆਪਰੇਟਰ B ਅਤੇ C ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5% ਅਤੇ 7% ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਾਓਂਦੇ ਹਨ।ਕਾਰਜ 'ਤੇ A ਕੁੱਲ 50% ਸਮਾਂ ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ, B ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ ਦਾ 30% ਅਤੇ C ਕੁੱਲ ਸਮਾਂ ਦਾ 20% ਲਗਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਖਰਾਬ ਸਮੱਗਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ A ਰਾਹੀਂ ਬਨਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ?

12. 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਪਤਾ ਗਵਾਚ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਬਾਕੀ ਪੱਤਿਆਂ ਵਿਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਟ ਦੇ ਹਨ।ਗਵਾਚੇ ਪੱਤੇ ਦੇ ਇੱਟ ਦੇ ਹੋਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

13. A ਰਾਹੀਂ ਸੱਚ ਬੋਲਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{4}{5}$ ਹੈ।ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ A ਦੱਸਦਾ ਹੈ ਕਿ ਚਿੱਤ ਆਇਆ ਹੈ।ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $A \subset B$ ਹੈ ਅਤੇ $P(B) \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਠੀਕ ਹੈ:

(A) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

13.6 ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ (Random Variables and its Probability Distribution)

ਅਸੀਂ, ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੀ ਬਣਤਰ ਬਾਰੇ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਾਫ਼ੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਖਾਸ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੇ ਚਾਹਵਾਨ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਪਰ ਇਹਨਾਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਚਾਹਵਾਨ ਸੀ।

ਆਓ ਕੁਝ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

(i) ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਆਈਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਚਾਹਵਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 50 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(iii) 20 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਤੋਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 6 ਖਰਾਬ ਹਨ, 4 ਵਸਤੂਆਂ ਨੂੰ (ਇੱਕ ਦੇ ਬਾਅਦ ਇੱਕ) ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ 4 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਖਰਾਬ ਵਸਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਖਰਾਬ ਅਤੇ ਠੀਕ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ।

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇੱਕ ਨਿਯਮ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਸੰਗਤ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਇਹ ਵਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਵੱਖ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਚਲ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬੇ ਚਲ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ X ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X, ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ (domain) ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ (ਜਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦਾ ਸਹਿਪ੍ਰਾਂਤ (codomain) ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਉਹ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਆਉ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਦੋ ਵਾਰੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਉਛਾਲੇ ਜਾਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ਜੇਕਰ X, ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਇਸਦਾ ਮੁੱਲ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ:

$$X (HH) = 2,\ X (HT) = 1,\ X (TH) = 1,\ X (TT) = 0.$$

ਇੱਕ ਹੀ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ Y] ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਹਰੇਕ ਨਤੀਜੇ ਲਈ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਪੱਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਘਟਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ

$$Y (HH) =2,\ Y (HT) = 0,\ Y (TH) = 0,\ Y (TT) = -2.$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਵੱਖ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22: ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਦੀ ਖੇਡ ਖੇਡਦਾ ਹੈ। ਖੇਡ ਦੇ ਆਯੋਜਕ ਰਾਹੀਂ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਹਰੇਕ ਚਿੱਤ ਲਈ 2 ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਪੱਟ ਲਈ ਉਹ ਵਿਅਕਤੀ ਆਯੋਜਕ ਨੂੰ 1.50 ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ X ਵਿਅਕਤੀ ਰਾਹੀਂ ਜਿੱਤੀ ਗਈ ਜਾਂ ਹਾਰੀ ਗਈ ਰਾਸ਼ੀ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ: X ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ਤਾਂ

$$X\ (HHH) = Rs\ (2 \times 3) = Rs\ 6$$
$$X\ (HHT) = X\ (HTH) = X\ (THH) = Rs\ (2 \times 2 - 1 \times 1.50) = Rs\ 2.50$$
$$X\ (HTT) = X\ (THT) = X\ (TTH) = Rs\ (1 \times 2 - 2 \times 1.50) = -Re\ 1$$

ਅਤੇ $X\ (TTT) = -Rs\ (3 \times 1.50) = -Rs\ 4.50$

ਇੱਥੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਚਿੰਨ੍ਹ, ਖਿਡਾਰੀ ਦੀ ਹਾਨੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਦੇ ਲਈ X ਦਾ ਇੱਕ ਬੇਜੋੜ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ X ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਹੈ: $\{-1,\ 2.50,\ -4.50,\ 6\}$

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 2 ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ 1 ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਹੈ। ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਰੰਗ ਨੋਟ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਦੁਬਾਰਾ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ। ਇਹ ਦੁਬਾਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ X ਦੋ ਵਾਰੀ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ X ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਦਿਉ, ਜਿੱਥੇ ਇੱਕ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ w_1, w_2, r ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਤਾਂ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ:

$$S = \{w_1\, w_1,\ w_1\, w_2,\ w_2\, w_2,\ w_2\, w_1,\ w_1\, r,\ w_2\, r,\ r\, w_1,\ r\, w_2,\ r\, r\}$$

ਹੁਣ X = ਲਾਲ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ = ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

ਇਸ ਲਈ $X\ (\{w_1, w_1\}) = X\ (\{w_1\, w_2\}) = X\ (\{\, w_2\, w_2\}) = X\ (\{w_2\, w_1\}) = 0$

$X\ (\{w_1, r\}) = X\ (\{w_2\, r\}) = X\ (\{\, rw_1\}) = X\ (\{rw_2\}) = 1$ ਅਤੇ $X\ (\{rr\}) = 2$

ਇਸ ਲਈ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 0, 1 ਜਾਂ 2 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

13.6.1 ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ *(Probability distribution of a random variable)*

ਆਉ ਦਸ ਪਰਿਵਾਰਾਂ $f_1, f_2 \ldots f_{10}$ ਤੋਂ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚੁਨਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਚੋਣ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ $f_1, f_2 \ldots f_{10}$ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 6, 4, 5 ਮੈਂਬਰ ਹਨ।

ਆਉ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਚੁਣੀਏ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਮੈਂਬਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਨੋਟ ਕਰਕੇ, X ਤੋਂ ਦਰਸਾਈਏ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$$X(f_1) = 3,\ X(f_2) = 4,\ X(f_3) = 3,\ X(f_4) = 2,\ X(f_5) = 5,$$
$$X(f_6) = 4,\ X(f_7) = 3,\ X(f_8) = 6,\ X(f_9) = 4,\ X(f_{10}) = 5$$

ਇਸ ਲਈ 2] 3] 4] 5] 6 ਵਿੱਚੋਂ X ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ X ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ f_4 ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਹੋਵੇ। X ਦਾ ਮੁੱਲ 3 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ f_1, f_3, f_7 ਵਿਚੋਂ ਕਿਸੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ

X = 4, ਜਦੋਂ ਪਰਿਵਾਰ f_2, f_6 ਜਾਂ f_9 ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

$X = 5$, ਜਦੋਂ ਪਰਿਵਾਰ f_5 ਜਾਂ f_{10} ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਅਤੇ $X = 6$, ਜਦੋਂ ਪਰਿਵਾਰ f_8 ਨੂੰ ਚੁਣਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਮੰਨਿਆ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਣਾ ਸਮ-ਸੰਭਾਵੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਪਰਿਵਾਰ f_4 ਨੂੰ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ X ਦਾ ਮੁੱਲ 2 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{10}$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $P(X = 2) = \frac{1}{10}$

ਨਾਲ ਹੀ $f_1, f_2,$ ਜਾਂ f_7 ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਚੁਨਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$P(\{f_1, f_2, f_3\}) = \frac{3}{10}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ X ਦਾ ਮਾਨ 3 ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{3}{10}$

ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $P(X = 3) = \frac{3}{10}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$P(X = 4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) = \frac{3}{10}$, $P(X = 5) = P(\{f_5, f_{10}\}) = \frac{2}{10}$

ਅਤੇ $P(X = 6) = P(\{f_8\}) = \frac{1}{10}$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਕਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5: ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਣਾਲ਼ੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

ਜਿੱਥੇ $$p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, i = 1, 2, ..., n$$

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $x_1, x_2, ... x_n$ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਹਨ ਅਤੇ p_i $(i = 1,2, ... n)$ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮਾਨ x_i ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਭਾਵ $P(X=x_i) = p_i$

ਟਿੱਪਣੀ: ਜੇਕਰ x_i ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X, ਦਾ ਕੋਈ ਸੰਭਵ ਮੁੱਲ ਹੈ ਤਾਂ ਕਥਨ $X = x_i$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂਆਂ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ X ਦਾ x_i ਮੁੱਲ ਲੈਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ $P(X = x_i) \neq 0$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਲਈ ਸਾਰੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਚਾਹਿਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਡੇ ਗਏ। ਇੱਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ। ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ X ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ X ਦਾ ਮੁੱਲ 0, 1, ਜਾਂ 2 ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਪੱਤਿਆਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਪੱਤਿਆਂ ਦਾ ਕੱਢਣਾ ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(X = 0)$ = P(ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ)

= P(ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ) × P (ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ)

$$= \frac{48}{52} \times \frac{48}{52} = \frac{144}{169}$$

ਅਤੇ $P(X = 1)$ = P (ਇੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਜਾਂ ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ ਅਤੇ ਇੱਕਾ)

= P (ਇੱਕਾ) . P(ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ) + P (ਇੱਕਾ ਨਹੀਂ) . P (ਇੱਕਾ)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{48}{52} + \frac{48}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{24}{169}$$

ਅਤੇ $P(X = 2)$ = P (ਇੱਕਾ ਅਤੇ ਇੱਕਾ) = P(ਇੱਕਾ) × P (ਇੱਕਾ)

$$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ:

X	0	1	2
P(X)	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ, ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ (doublets) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(1,1) , (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), ਅਤੇ (6,6) ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਸੰਭਵ ਜੋੜੇ ਹਨ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ, X ਦਾ ਮੁੱਲ 0, 1, 2, ਜਾਂ 3 ਹੈ।

ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ਇੱਕ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਨਾ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ ਹੈ।

ਹੁਣ

$$P(X = 0) = P\ (\text{“ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲਾ ਜੋੜਾ” ਨਹੀਂ}) = \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$$

$$P(X = 1) = P\ (\text{‘ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲਾ ਜੋੜਾ’ ਅਤੇ ਦੋ “ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲਾ ਜੋੜੇ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ” ਦੋ})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = 3\left(\frac{1}{6}\times\frac{5^2}{6^2}\right) = \frac{75}{216}$$

$$P(X = 2) = P\ (\text{ਦੋ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਨਹੀਂ})$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$= 3\left(\frac{1}{6^2}\times\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

$$P(X = 3) = P\ (\text{ਤਿੰਨ “ਇੱਕੋ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਜੋੜੇ”}) = \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

ਇਸ ਲਈ X ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ:

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

ਪੜਤਾਲ : ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}$$

$$= \frac{125+75+15+1}{216} = \frac{216}{216} = 1$$

ਇਸ ਲਈ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਸਹੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਹੋਏ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਿਵਸ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਨ ਦੇ ਘੰਟੇ X ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। X ਦੇ ਮੁੱਲ x ਲੈਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1 & \text{ਜੇਕਰ } x = 0 \\ kx & \text{ਜੇਕਰ } x = 1 \text{ ਜਾਂ } 2 \\ k(5-x) & \text{ਜੇਕਰ } x = 3 \text{ ਜਾਂ } 4 \\ 0 & \text{ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ} \end{cases}$$

(a) k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(b) ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ ? ਕੇਵਲ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ ? ਵੱਧੋਂ-ਵੱਧ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ ?

ਹੱਲ: X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੈ:

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	k	$2k$	$2k$	k

(a) ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

ਇਸ ਲਈ $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$

$\Rightarrow \quad k = 0.15$

(b) P(ਤੁਸੀਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ) = P (X ≥ 2)

$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 2k + 2k + k = 5k = 5 \times 0.15 = 0.75$

P(ਕੇਵਲ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ) = P (X = 2)

$= 2k = 2 \times 0.15 = 0.3$

P(ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਘੰਟੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹੋ) = P (X ≤ 2)

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k = 0.1 + 3k = 0.1 + 3 \times 0.15 = 0.55$

13.6.2 ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ *(Mean of a random variable)*

ਕਾਫ਼ੀ ਸਮੱਸਿਆਂਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਗੁਣ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਣਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਚਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੱਧਮਾਨ, ਮੱਧਿਕਾ ਅਤੇ ਬਹੁਲਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਮੱਧਮਾਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੱਧਮਾਨ ਕੇਂਦਰੀ ਪ੍ਰਵਰਤੀ ਦਾ ਮਾਪ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਔਸਤ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਮੰਨ ਲਉ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾ $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ਹਨ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ, ਜਿਸਨੂੰ μ , ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਸੰਖਿਆ $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ x ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਚਲ X, ਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਔਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਹਰੇਕ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਤੁੱਲ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ X ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ (Expectation) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਨੂੰ E (X) ਤੋਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

ਹੋਰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ:

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ X ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਗਤ

ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾ ਦਾ ਜੋੜ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X] ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਜਾਂ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ 36 ਮੌਲਿਕ ਘਟਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਹਨਾ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਜੋੜੇ (x_i, y_i) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $x_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ਅਤੇ $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਮੁੱਲ ਭਾਵ ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 2] 3] 4] 5] 6] 7] 8] 9] 10] 11 ਜਾਂ 12 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(X = 2) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{36}$

$$P(X = 3) = P(\{(1, 2), (2, 1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P(\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 9) = P(\{(3, 6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = P(\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = P(\{(5, 6), (6, 5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{(6, 6) = \frac{1}{36}$$

X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ:

X ਜਾਂ x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X) ਜਾਂ p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

ਇਸ ਲਈ $$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}$$

$$+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ 7 ਹੈ।

13.6.3 ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ *(Variance of a random variable)*

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਮਧਮਾਨ ਉਸ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਰਨ ਬਾਰੇ ਕੋਈ ਸੂਚਨਾ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਵਾਲੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲਾਂ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਸਮਾਨ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ X ਅਤੇ Y ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

X	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

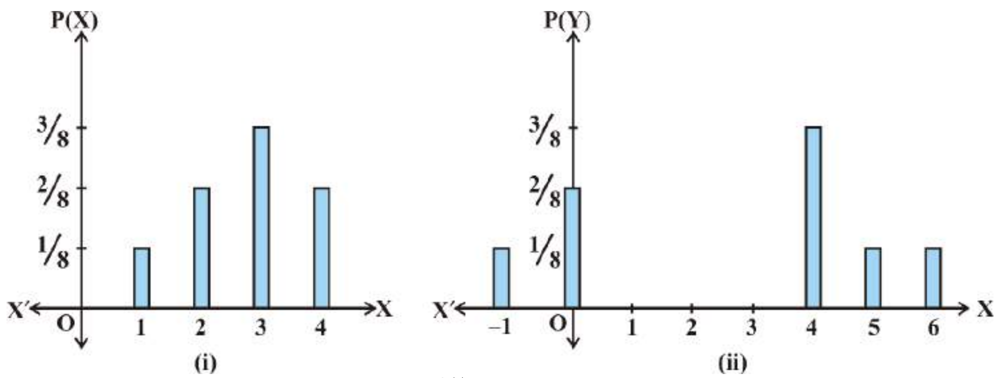
Y	ï 1	0	4	5	6
P(Y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ $$E(X) = 1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

ਅਤੇ $$E(Y) = -1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+3\times\frac{4}{8}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

ਚਲ X ਅਤੇ Y ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹਨ ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਹਨਾ ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਸਮਾਨ ਹਨ ਇਹ ਇਹਨਾ ਚਲਾਂ ਦੇ ਚਿੱਤਰਾਤਮਕ ਰੂਪ ਤੋਂ ਵੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪ੍ਰਖੇਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 13-5)A

X ਨੂੰ Y ਤੋਂ ਵੱਖ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਵ ਦੀ ਸੀਮਾ ਤੱਕ ਦੇ ਮਾਪ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੰਕੜਾ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਵਿਚਲਨ ਜਾਂ ਖਿੰਡਾਵ ਦਾ ਮਾਪ ਹੀ ਪ੍ਰਸਰਨ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 13.5

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਵਿੱਚ ਖਿੰਡਾਵ ਨੂੰ ਪ੍ਰਸਰਨ ਤੋਂ ਮਾਪਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7. ਮੰਨ ਲਉ X ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2 \ldots x_n$ ਸੰਗਤ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p(x_1)$, $p(x_2)$, ..., $p(x_n)$ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ $\mu = E(X)$, X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ। X ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ var (X) ਜਾਂ σ_x^2 ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

$$\sigma_x^2 = \operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)$$

ਜਾਂ ਭਾਵ

$$\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$$

ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ

$$\sigma_x = \sqrt{\operatorname{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \, p(x_i)}$$

ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ (standard deviation) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਹੋਰ ਸੂਤਰ:

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\operatorname{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon)^2 \, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\, x_i) \, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 \, p(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^2 \, p(x_i) - \sum_{i=1}^{n} 2\varepsilon x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\, p(x_i) + \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{n} p(x_i) - 2\varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i) + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^2 \left[\text{ਕਿਉਂਕਿ } \sum_{i=1}^{n} p\,(x_i) = 1 \text{ ਅਤੇ } \varepsilon = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathrm{P}(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\, p(x_i) - \varepsilon^2$$

ਜਾਂ $\mathrm{Var(X)} = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2\, p(x_i)) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)\right)^2$

ਜਾਂ $\mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(X^2)} - [\mathrm{E(X)}]^2$ ਜਿੱਥੇ $\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਹੈ : S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ਮੰਨ ਲਓ X, ਪਾਸੇ ਤੇ ਆਉਣ ਵਾਲੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਤਾਂ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 1, 2, 3, 4, 5, ਜਾਂ 6 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\mathrm{P(1) = P\,(2) = P\,(3) = P\,(4) = P\,(5) = P\,(6)} = \frac{1}{6}$

ਇਸ ਲਈ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ :

X	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ਹੁਣ $\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$= 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = \frac{21}{6}$$

ਨਾਲ ਹੀ $\mathrm{E(X^2)} = 1^2\times\frac{1}{6} + 2^2\times\frac{1}{6} + 3^2\times\frac{1}{6} + 4^2\times\frac{1}{6} + 5^2\times\frac{1}{6} + 6^2\times\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$

ਇਸ ਲਈ Var(X) = E (X²) ï (E(X))²

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} \quad = \frac{35}{12}$$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਤਾਸ਼ ਦੇ 52 ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿਚੋਂ ਦੋ ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਬਿਨ੍ਹਾਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਬਾਦਸ਼ਾਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢਣ ਵਿੱਚ ਬਾਦਸ਼ਾਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ X ਤੋਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਹੜਾ 0 , 1 ਜਾਂ 2 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(X = 0) = P$ (ਕੋਈ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਨਹੀਂ)

$$= \frac{^{48}C_2}{^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48 \times 47}{52 \times 51} = \frac{188}{221}$$

$P(X = 1) = P$ (ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਾਦਸ਼ਾਹ ਨਹੀਂ) $= \frac{^{4}C_1 \, ^{48}C_1}{^{52}C_2}$

$$= \frac{4 \times 48 \times 2}{52 \times 51} = \frac{32}{221}$$

ਅਤੇ $P(X = 2) = P$ (ਦੋਵੇਂ ਬਾਦਸ਼ਾਹ) $= \frac{^{4}C_2}{^{52}C_2} == \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}$

ਇਸ ਲਈ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ :

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$

$$= 0 \times \frac{188}{221} + 1 \times \frac{32}{221} + 2 \times \frac{1}{221} = \frac{34}{221}$$

ਨਾਲ ਹੀ $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \, p(x_i) = 0^2 \times \frac{188}{221} + 1^2 \times \frac{32}{221} + 2^2 \times \frac{1}{221} = \frac{36}{221}$

ਹੁਣ $Var(X) = E(X^2)$ ï $[E(X)]^2$

$$= \frac{36}{221} \text{ ï } \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$$

ਇਸ ਲਈ $\sigma_x = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{6800}}{(221)} = 0.37$ (ਲੱਗਭਗ)

ਅਭਿਆਸ 13.4

1. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਲਈ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਆਪਣਾ ਉੱਤਰ ਕਾਰਣ ਨਾਲ ਲਿਖੋ।

(i)

X	0	1	2
P(X)	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	0.1	0.5	0.2	ï 0.1	0.3

(iii)

Y	ï 1	0	1
P(Y)	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	ï 1
P(Z)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

2. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 5 ਲਾਲ ਅਤੇ 2 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਦੋ ਗੇਂਦਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀਆਂ ਗਈਆਂ। ਮੰਨ ਲਉ X ਕਾਲੀ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। X ਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ ? ਕੀ X ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ?

3. ਮੰਨ ਲਉ X ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਤੇ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 6 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। X ਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹਨ ?

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਦੋ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

(ii) ਤਿੰਨ ਸਿੱਕਿਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

(iii) ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੀ ਚਾਰ ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

5. ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ :

(i) ^4 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ' ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

(ii) ^ਪਾਸੇ ਤੇ ਸੰਖਿਆ 6 ਆਉਣਾ' ਨੂੰ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

6. 30 ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚੋਂ, ਵਿੱਚੋਂ 6 ਬਲਬ ਖਰਾਬ ਹਨ। 4 ਬਲਬ ਦਾ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਬਗੈਰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਖਰਾਬ ਬਲਬਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਗੈਰ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਟ ਆਉਣ ਤੋਂ ਤਿਗੁਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਿੱਕਾ ਦੋ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੇਠ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X)	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) k (ii) P(X < 3) (iii) P(X > 6) (iv) P(0 < X < 3)

9. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਸੰਭਾਵਨਾ ਫਲਨ P(x) ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ k ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਹੈ

$$P(x)=\begin{cases} k & \text{ਜੇਕਰ } x=0 \\ 2k & \text{ਜੇਕਰ } x=1 \\ 3k & \text{ਜੇਕਰ } x=2 \\ 0 & \text{ਜੇਕਰ} \end{cases}$$

(a) k ਦਾ ਮੁੱਲਪਤਾ ਕਰੋ।

(b) P (X < 2), P (X ≤ 2), P(X ≥ 2) ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ X, ਛੇ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ X ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਪਹਿਲੀਆਂ ਛੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ (ਬਿਨਾ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ) ਨਾਲ ਚੁਣੀਆਂ ਗਈਆਂ। ਮੰਨ ਲਉ X ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ। E(X) ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ X ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। X ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ 15 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਉਮਰ 14] 17] 15] 14] 21] 17] 19] 20] 16] 18] 20] 17] 16] 19 ਅਤੇ 20 ਸਾਲ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੇ ਚੁਣੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਚੁਣੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੀ ਉਮਰ ਨੂੰ (X)ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ। ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ, ਪ੍ਰਸਰਨ ਅਤੇ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ ਬੈਠਕ ਵਿੱਚ 70% ਭਾਗੀਦਾਰਾਂ ਨੇ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦਾ ਸਮਰਥਨ ਕੀਤਾ ਅਤੇ 30% ਭਾਗੀਦਾਰਾਂ ਨੇ ਵਿਰੋਧ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਭਾਗੀਦਾਰ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਭਾਗੀਦਾਰ ਨੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦਾ ਵਿਰੋਧ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ X = 0 ਲਿਆ ਗਿਆ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਉਸਨੇ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਦਾ ਸਮਰਥਨ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ X = 1 ਲਿਆ ਗਿਆ। E(X) ਅਤੇ var (X) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ:

16. ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਪਾਸੇ, ਜਿਸਦੇ ਤਿੰਨ ਫ਼ਲਨਾਂ 'ਤੇ 1 ਹੋਰ ਤਿੰਨ 'ਤੇ 2 ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਸੇ 'ਤੇ 5 ਲਿਖਿਆ ਹੈ, ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਹੈ :

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

17. ਮੰਨ ਲਓ ਤਾਸ਼ ਦੀ ਇੱਕ ਦੱਥੀ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਦੋ ਪੱਤੇ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਓ X ਇੱਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਤਾਂ E(X) ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ:

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

13.7 ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਅਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਵੰਡ (Bernoulli Trails and Binomial Distribution)

13.7.1 ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ

ਕਈ ਪ੍ਰਯੋਗਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕਰਤੀ ਦੋ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਾਲੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਉਛਾਲਿਆ ਹੋਇਆ ਸਿੱਕਾ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪਟ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਹਾਂ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ ਅੰਡੇ ਤੋਂ ਚੂਜ਼ਾ 'ਨਿਕਲ ਚੁੱਕਿਆ ਹੈ' ਜਾਂ 'ਨਹੀਂ ਨਿਕਲਿਆ ਹੈ ', ਇੱਕ ਫੈਸਲਾ ਹਾਂ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ ਆਦਿ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹੋ ਜਿਹਾ ਰਿਵਾਜ਼ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ 'ਸਫਲਤਾ' ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 'ਅਸਫਲਤਾ' ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਣ ਨੂੰ ਸਫਲਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ 'ਪਟ' ਆਉਣ ਨੂੰ ਅਸਫਲਤਾ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਹਰੇਕ ਵਾਰੀ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਉਛਾਲਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਇੱਕ ਪਾਸਾ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ (trial) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸਿੱਕਾ ਮੰਨ ਲਉ, ਚਾਰ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4 ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਇਹਨਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਠੀਕ ਦੋ ਹੋਣਗੇ ਭਾਵ ਸਫਲਤਾ ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ। ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਕਿਸੇ ਦੂਜੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ ਅਜ਼ਾਦ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਅਜ਼ਾਦ ਪ੍ਰੇਖਣ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਕੇਵਲ ਦੋ ਨਤੀਜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਅਕਸਰ 'ਸਫਲਤਾ' ਜਾਂ 'ਅਸਫਲਤਾ' ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਹਿਲਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8. ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਨੂੰ ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ :

(i) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (ਸੀਮਿਤ) ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ,

(ii) ਪ੍ਰੇਖਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

(iii) ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦੇ ਠੀਕ ਦੋ ਹੀ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ, ਸਫਲਤਾ ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ

(iv) ਕਿਸੇ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 50 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣਾ 50 ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਦੀ ਹਾਲਤ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰੇਖਣ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਸਫਲਤਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ) ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ (ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣਾ) ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਰੀ 50 ਉਛਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ (p) ਇੱਕ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਬਗੈਰ ਸ਼ੱਕ ਪਾਸੇ ਦੀ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਉਛਾਲਾਂ ਅਜ਼ਾਦ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪਾਸਾ ਨਿਰਪੱਖ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਛੇ ਫ਼ਲਕਾਂ ਤੇ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਲਿਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ $p = \frac{1}{2}$ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਅਤੇ $q = 1$ ï $p = \frac{1}{2}$ ਅਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 30. 7 ਲਾਲ ਅਤੇ 9 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਛੇ ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ ਦੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਯਤਨ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਗੇਂਦ ਨੂੰ :

(i) ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

(ii) ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਨਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ :

(i) ਪ੍ਰੇਖਣਾਂ ਯਤਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸੀਮਿਤ (ਨਿਸ਼ਚਿਤ) ਹੈ। ਜਦੋਂ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਫਲਤਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $p = \frac{7}{16}$ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਛੇ ਪ੍ਰੇਖਣ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਢਣਾ ਬਰਨੌਲੀ ਪ੍ਰੇਖਣ ਯਤਨ ਹਨ।

(ii) ਜਦੋਂ ਗੇਂਦਾਂ ਨੂੰ ਬਗੈਰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤੇ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ (ਭਾਵ ਲਾਲ ਗੇਂਦ ਦਾ ਕੱਢਣਾ) ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{7}{16}$ ਹੈ, ਦੂਜੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ $\frac{6}{15}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਰੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਨਹੀਂ ਹਨ।

13.7.2 *ਦੋ ਪਦੀ ਵੰਡ (Binomial Distribution)*

ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਦੇ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਸਫਲਤਾ (ਮੰਨ ਲਉ ਚਿੱਤ) ਜਾਂ ਅਸਫਲਤਾ (ਪੱਟ)ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਅਤੇ ਅਸਫਲਤਾ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ S ਅਤੇ F ਮੰਨ ਲਉ।

ਇਹ ਸੋਚੋ ਕਿ ਸਾਡੀ ਛੇ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਦੇ ਵੱਖ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦਿਲਚਸਪੀ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਛੇ ਵੱਖ ਤਰੀਕੇ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ:

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਦੋ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਅਤੇ ਚਾਰ ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ $\frac{6!}{4! \times 2!}$ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਲਿਸਟ ਬਨਾਉਣਾ ਬਹੁਤ ਲੰਬਾ ਕੰਮ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ 0] 1] 2] ---] n ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਲੰਬਾ ਅਤੇ ਸਮਾਂ ਲੈਣ ਵਾਲਾ ਕੰਮ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। n ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਜਿਸ ਤੋਂ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਲੱਗਣ ਵਾਲੇ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਸੰਭਵ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਲਿਸਟ ਬਨਾਉਣ ਤੋਂ ਬਚਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ ਤਿੰਨ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਅਤੇ ਅਸਫਲਤਾ ਦੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p ਅਤੇ q ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ

$$S = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$ ਹੈ

ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦਾ ਗਿਣਤੀ ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਹੈ ਅਤੇ 0, 1, 2, ਜਾਂ 3 ਮੁੱਲ ਲੈ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

$$P(X = 0) = P \text{ (ਕੋਈ ਸਫਲਤਾ ਨਹੀਂ)}$$
$$= P(\{FFF\}) = P(F)\, P(F)\, P(F)$$
$$= q \,.\, q \,.\, q = q^3 \quad \text{(ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰੀਖਿਅਣ ਅਜ਼ਾਦ ਹਨ)}$$
$$P(X = 1) = P \text{ (ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ)}$$
$$= P(\{SFF, FSF, FFS\})$$
$$= P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\})$$
$$= P(S)\, P(F)\, P(F) + P(F)\, P(S)\, P(F) + P(F)\, P(F)\, P(S)$$
$$= p.q.q + q.p.q + q.q.p = 3qp^2$$
$$P(X = 2) = P \text{ (ਦੋ ਸਫਲਤਾਵਾਂ)}$$
$$= P(\{SSF, SFS, FSS\})$$
$$= P(\{SSF\}) + P(\{SFS\}) + P(\{FSS\})$$
$$= P(S)\, P(S)\, P(F) + P(S)\, P(F)\, P(S) + P(F)\, P(S)\, P(S)$$
$$= p.p.q. + p.q.p + q.p.p = 3qp^2$$

ਅਤੇ $$P(X = 3) = P \text{ (ਤਿੰਨ ਸਫਲਤਾਵਾਂ)} = P(\{SSS\})$$
$$= P(S) \,.\, P(S) \,.\, P(S) = p^3$$

ਇਸ ਲਈ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਹੈ

X	0	1	2	3
P(X)	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

ਨਾਲ ਹੀ $(q + p)^3$ ਦਾ ਦੋ-ਪਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ 0] 1] 2] ਜਾਂ 3 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: $(q + p)^3$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ ਅਤੇ ਚੌਥਾ ਪਦ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ ਕਿਉਂਕਿ $q + p = 1$ ਹੈ। ਜਿਸ ਤੋਂ ਇਹ ਅਰਥ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਾਰੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 1 ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ n-ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ 0, 1, 2 ...., n ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $(q + p)^n$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦੀ ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ, ...nਵੀਂ ਪਦ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ n &ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ x&ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ x ਸਫਲਤਾਵਾਂ (S) ਦੀ ਹਾਲਤ ਵਿੱਚ (nï x) ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ (F) ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੁਣ x ਸਫਲਤਾਵਾਂ (S) ਅਤੇ (nï x) ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ (F), $\frac{n!}{x!(n-x)!}$ ਤਰੀਕਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ x ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਅਤੇ $(n - x)$ ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਅਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ

$$= \text{P}(x \text{ ਸਫਲਤਾਵਾਂ}).\ \text{P}[(n-x)\text{ਅਸਫਲ਼ਤਾਵਾਂ}]$$

$$= \underbrace{\text{P(S).P(S)...P(S)}}_{x \text{ ਬਾਂਰ}} \cdot \underbrace{\text{P(F).P(F)...P(F)}}_{(n-x) \text{ ਬਾਰ}} = p^x q^{n-x}$$

ਇਸ ਲਈ n-ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\qquad \text{P}(x \text{ ਸਫਲਤਾਵਾਂ}) = {}^nC_x p^x q^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, ..., n$, (q = 1 ï p)

ਇਸਲਈ P (x ਸਫਲਤਾਵਾਂ) ਭਾਵ ${}^nC_x p^x q^{n-x}$, $(q + p)^n$ ਦੇ ਵਿਸਥਾਰ ਦਾ $(x + 1)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ n&ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ $(q + p)^n$ ਦੇ ਦੋ&ਪਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ X ਦੀ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ:

X	0	1	2	...	x	...	n
P (X)	${}^nC_0\, q^n$	${}^nC_1\, q^{n-1}p^1$	${}^nC_2\, q^{n-2}p^2$		${}^nC_x\, q^{n-x}p^x$		${}^nC_n\, p^n$

ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਨੂੰ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸ ਵਿੱਚ n ਅਤੇ p, ਪ੍ਰਾਚਲ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ n ਅਤੇ p ਦੇ ਮੁੱਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਸਮਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
x ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ P (X = x) ਨੂੰ P(x) ਤੋਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ
$\text{P}(x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x$, $x = 0, 1, ..., n$ (q = 1 ï p) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਨ।
ਇਸ P(x) ਨੂੰ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਦਾ ਸੰਭਾਵਨਾ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇੱਕ n-ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨਾਂ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਸਫਲਤਾ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ p, ਵਾਲੇ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਨੂੰ B(n, p) ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ 10 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਗਿਆ ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) ਠੀਕ ਛੇ ਚਿੱਤ

(ii) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਛੇ ਚਿੱਤ

(iii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਛੇ ਚਿੱਤ

ਹੱਲ: ਇੱਕ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ, ਬਾਰ ਬਾਰ ਉਛਾਲਣਾ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। 10 ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ X ਮੰਨ ਲਉ।

ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ ਇਹ ਵੰਡ $n = 10$ ਅਤੇ $p = \frac{1}{2}$ ਵਾਲੀ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P(X = x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x$

ਇੱਥੇ $n = 10,\ p = \frac{1}{2},\ \ q = 1 ï\ p = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^x = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

ਹੁਣ

(i) P(ਠੀਕ ਛੇ ਚਿੱਤ) $P(X=6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6!\times 4!}\frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$

(ii) P(ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਛੇ ਚਿੱਤ) = $P(X \geq 6)$

$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$= {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$= \left(\frac{10!}{6!\times 4!}\right) + \left(\frac{10!}{7!\times 3!}\right) + \left(\frac{10!}{8!\times 2!}\right) + \left(\frac{10!}{9!\times 1!}\right) + \left(\frac{10!}{10!}\right)\frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$

(iii) P (ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਛੇ ਚਿੱਤ) = $P(X \leq 6)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$+ P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$+ {}^{10}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$

ਉਦਾਹਰਣ 32. 10% ਖਰਾਬ ਅੰਡਿਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਤੋਂ 10 ਅੰਡੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੱਢੇ ਗਏ। ਇਸ ਗੱਲ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ 10 ਅੰਡਿਆਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਅੰਡਾ ਖਰਾਬ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ X ਖਰਾਬ ਅੰਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ਦੱਸਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਅੰਡਿਆਂ ਨੂੰ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਕੱਢਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਹੈ। ਸਾਫ਼ ਤੌਰ ਤੇ X ਦੀ ਵੰਡ $n = 10$ ਅਤੇ

$p = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ਵਾਲ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $q = 1$ ï $p = 1$ ï $\frac{1}{10} = \frac{9}{10}$

ਹੁਣ P(ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਖਰਾਬ ਅੰਡਾ) = $P(X \geq 1) = 1$ ï $P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 - \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

ਅਭਿਆਸ 13.5

1. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 6 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।'ਪਾਸੇ ਤੇ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਾ' ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

(i) ਠੀਕ 5 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ? (ii) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ 5 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ? (iii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 5 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ?

2. ਪਾਸਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜੋੜੀ ਨੂੰ 4 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਜੇਕਰ 'ਪਾਸਿਆਂ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਾ' ਇੱਕ ਸਫਲਤਾ ਹੈ, ਤਾਂ 2 ਸਫਲਤਾਵਾਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਢੇਰ ਵਿੱਚ 5% ਨੁਕਸਦਾਰ ਵਸਤੂਆਂ ਹਨ।ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ 10 ਵਸਤਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨੁਕਸਦਾਰ ਵਸਤੂਆਂ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ?

4. 52 ਤਾਸ਼ ਦੇ ਪੱਤਿਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਫੈਂਟੀ ਹੋਈ ਗੁੱਟੀ ਵਿੱਚੋਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ 5 ਪੱਤੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।ਇਸ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ

(i) ਸਾਰੇ 5 ਪੱਤੇ ਹੁਕਮ ਦੇ ਹੋਣ ?

(ii) ਸਿਰਫ਼ 3 ਪੱਤੇ ਹੁਕਮ ਦੇ ਹੋਣ ?

(iii) ਇੱਕ ਵੀ ਪੱਤਾ ਹੁਕਮ ਦਾ ਨਾ ਹੋਵੇ ?

5. ਕਿਸੇ ਫੈਕਟਰੀ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਇੱਕ ਬਲਬ ਦੀ 150 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਫ਼ਿਊਜ਼ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0-05 ਹੈ।ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 5 ਬਲਬਾਂ ਵਿੱਚੋਂ :

(i) ਇੱਕ ਵੀ ਨਹੀਂ (ii) ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ

(iii) ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ (iv) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ, 150 ਦਿਨਾਂ ਦੇ ਇਸਤੇਮਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਫ਼ਿਊਜ਼ ਹੋ ਜਾਣਗੇ।

6. ਇੱਕ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚ 10 ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਤੇ 0 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਅੰਕ ਲਿਖਿਆ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਥੈਲੇ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਗੇਂਦਾਂ ਪੁਨਰ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਇੱਕ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਗੇਂਦ 'ਤੇ ਅੰਕ 0 ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਹੋਵੇ ?

7. ਇੱਕ ਸੱਚ&ਝੂਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ 20&ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲ ਕੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।ਜੇਕਰ ਪਾਸੇ ਤੇ ਚਿੱਤ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉੱਤਰ 'ਸੱਚ' ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਪਟ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ 'ਝੂਠ' ਦਿੰਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ 12 ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

8. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X, $B\left(6,\frac{1}{2}\right)$ ਦੋ&ਪਦੀ ਵੰਡ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ X=3 ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵਾਲਾ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

(ਸੰਕੇਤ: $P(X = 3)$ ਸਾਰੇ $P(x_i)$, $x_i = 0,1,2,3,4,5,6$ ਵਿਚੋਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।)

9. ਇੱਕ ਬਹੁ&ਵਿਕਲਪੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਵਿੱਚ 5 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਤਿੰਨ ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕੇਵਲ ਅਨੁਮਾਨ ਨਾਲ ਚਾਰ ਜਾਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇਵੇਗਾ ?

10. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਲਾਟਰੀ ਦੇ 50 ਟਿਕਟ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ ਉਸਦੇ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{100}$ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ (a) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ (b) ਠੀਕ ਇੱਕ ਵਾਰੀ (c) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਦੋ ਵਾਰੀ, ਇਨਾਮ ਜਿੱਤੇਗਾ।

11. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ 7 ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਠੀਕ ਦੋ ਵਾਰੀ 5 ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਛੇ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 2 ਵਾਰੀ ਛੇ ਆਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋA

13. ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਣੀ ਵਸਤੂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ 10% ਵਸਤੂਆਂ ਨੁਕਸਦਾਰ ਹਨ। ਇਸ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ 12 ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚੋਂ 9 ਨੁਕਸਦਾਰ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ :

14 ਇੱਕ ਡੱਬੇ ਵਿੱਚ 100 ਬਲਬ ਹਨ। ਜਿਸ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਖਰਾਬ ਹਨ। 5 ਬਲਬਾਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਬਲਬ ਦਾ ਖਰਾਬ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

15. ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦਾ ਤੈਰਾਕ ਨਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{5}$ ਹੈ ਤਾਂ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ 4 ਦਾ ਤੈਰਾਕ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ:

(A) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਨਹੀਂ

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣ

ਉਦਾਹਰਣ 33. ਚਾਰ ਡੱਬਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰੰਗੀਨ ਗੇਂਦਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ :

ਡੱਬਾ	ਰੰਗ			
	ਕਾਲਾ	ਸਫ਼ੇਦ	ਲਾਲ	ਨੀਲਾ
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

ਇੱਕ ਡਿੱਬੇ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫੇਰ ਉਸ ਵਿੱਚੋਂ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਗੇਂਦ ਨੂੰ ਡੱਬੇ III ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A, E_1, E_2, E_3 ਅਤੇ E_4 ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ :

A : ਇੱਕ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢਣਾ

E_1 : ਡੱਬੇ&I ਦੀ ਚੋਣ

E_2 : ਡੱਬੇ&II ਦੀ ਚੋਣ

E_3 : ਡੱਬੇ&III ਦੀ ਚੋਣ

E_4 : ਡੱਬੇ&IV ਦੀ ਚੋਣ

ਕਿਉਂਕਿ ਡੱਬਿਆਂ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੈ:

ਇਸ ਲਈ $\quad P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

ਨਾਲ ਹੀ $\quad P(A|E_1) = \frac{3}{18}$, $P(A|E_2) = \frac{2}{8}$, $P(A|E_3) = \frac{1}{7}$ ਅਤੇ $P(A|E_4) = \frac{4}{13}$

P(ਡੱਬੇ& III ਦੀ ਚੋਣ ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਕਾਲੀ ਗੇਂਦ ਕੱਢੀ ਹੈ)

$= P(E_3|A)$ ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ ਰਾਹੀਂ

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3).P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

ਉਦਾਹਰਣ 34. ਦੋ&ਪੱਦੀ ਵੰਡ $B\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਨ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ X ਉਹ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਵੰਡ $B\left(4,\frac{1}{3}\right)$ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $$n = 4,\ p = \frac{1}{3} \text{ ਅਤੇ } q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$P(X = x) = {}^4C_x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \left(\frac{1}{3}\right)^x,\ x = 0, 1, 2, 3, 4$$

ਭਾਵ X ਦੀ ਵੰਡ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ:

x_i	$P(x_i)$	$x_i\ P(x_i)$
0	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^4$	0
1	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$
2	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$
3	${}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$
4	${}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

ਹੁਣ ਮੱਧਮਾਨ $(\mu) = \sum_{i=1}^{n} x_i\ p(x_i)$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2.{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3.{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4.{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4\times\frac{2^3}{3^4} + 2\times 6\times\frac{2^2}{3^4} + 3\times 4\times\frac{2}{3^4} + 4\times\frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{3^4} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 35. ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਾਨੇਬਾਜ਼ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਸਹੀ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{3}{4}$ ਹੈ। ਉਹ ਘੱਟੋ–ਘੱਟ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਚਲਾਵੇ ਕਿ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਤੇ ਘੱਟੋ–ਘੱਟ ਇੱਕ ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਲੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 0·99 ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਨਿਸ਼ਾਨੇਬਾਜ਼ n ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਚਲਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਬਿਨਾ ਸ਼ੱਕ n ਵਾਰੀ ਗੋਲੀ ਚਲਾਉਣਾ n ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਹਨ।

p = ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਾਨਾ ਸਹੀ ਲੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{3}{4}$ ਅਤੇ q = ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਨੂੰ ਗੋਲੀ ਨਾ ਲੱਗਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ = $\frac{1}{4}$

ਤਾਂ $P(X=x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x = {}^nC_x \left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x \frac{3^x}{4^n}$

ਹੁਣ ਦਿੱਤਾ ਹੈ

P(ਘੱਟੋ–ਘੱਟ ਇੱਕ ਗੋਲੀ ਨਿਸ਼ਾਨੇ ਨੂੰ ਲੱਗਣਾ) > 0.99

ਭਾਵ $P(x \geq 1) > 0.99$

ਇਸ ਲਈ 1 ï $P(x = 0) > 0.99$

ਜਾਂ $1 - {}^nC_0 \frac{1}{4^n} > 0.99$

ਜਾਂ ${}^4C_0 \frac{1}{4^n} < 0.01$ ਭਾਵ $\frac{1}{4^n} < 0.01$

ਜਾਂ $4^n > \frac{1}{0.01} = 100$ ... (1)

ਅਸਮਾਨਤਾ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੇ n ਦਾ ਘੱਟੋ–ਘੱਟ ਮੁੱਲ 4 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਨਿਸ਼ਾਨੇਬਾਜ਼ ਨੂੰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ 4 ਗੋਲੀਆਂ ਚਲਾਉਣੀਆਂ ਪੈਣਗੀਆਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 36. A ਅਤੇ B ਵਾਰੀ ਸਿਰ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਸੁੱਟਦੇ ਹਨ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਕਿ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਛੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਕੇ ਖੇਡ ਜਿੱਤ ਨਹੀਂ ਲੈਂਦਾ। ਜੇਕਰ A ਤੋਂ ਖੇਡ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਜਿੱਤਣ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ: ਮੰਨ ਲਉ S ਸਫਲਤਾ (ਪਾਸੇ ਤੇ 6 ਆਉਣਾ) ਨੂੰ ਅਤੇ F ਅਸਫਲਤਾ (ਪਾਸੇ ਤੇ 6 ਨਾ ਆਉਣਾ) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $P(S) = \frac{1}{6},\ P(F) = \frac{5}{6}$

P(A ਦੇ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟਣ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ) $= P(S) = \frac{1}{6}$

A ਨੂੰ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਦਾ ਮੌਕਾ ਤਾਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ A ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਅਤੇ B ਨੂੰ ਦੂਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਅਸਫਲਤਾ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

P(A ਦਾ ਤੀਜੀ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ) $= P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ P(A ਦਾ ਪੰਜਵੀਂ ਉਛਾਲ ਵਿੱਚ ਜਿੱਤਣਾ) $= P\,(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)$

ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੋਰ, ਇਸ ਲਈ P(A ਦਾ ਜਿੱਤਣਾ) $= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

P(B ਜਿੱਤਣਾ) = 1 ï P(A ਜਿੱਤਣਾ) $= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ($a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{nï1} + \ldots$, ਜਿੱਥੇ $r| < 1$,) ਤਾਂ ਇਸ ਅਨੰਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{a}{1-r}\cdot$ ਹੈ। (ਵੇਖੋ ਜਮਾਤ XI ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦਾ A.1.3)

ਉਦਾਹਰਣ 37. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਮਸ਼ੀਨ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ 90% ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਲਗਾਈ ਜਾਂਦੀ ਤਾਂ ਇਹ ਮਾਤਰ 40% ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਤਜਰਬਾ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ 80% ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਠੀਕ ਸਥਾਪਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ 2 ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤਾਂ ਬਣਾਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਮਸ਼ੀਨ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਹੈ।

Ô ਮ੍ਹ : ਮੰਨ ਲਉ A ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਮਸ਼ੀਨ ਦੋ ਸਵੀਕਾਰ ਯੋਗ ਵਸਤੂਆਂ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਮੰਨ ਲਉ B_1 ਸਹੀ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B_2 ਗਲਤ ਕਾਰਜ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦੀ ਘਟਨਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $P(B_1) = 0.8,\ P(B_2) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$ ਅਤੇ $P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$

ਇਸ ਲਈ $P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. A ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) \neq 0$ ਹੈ $P(B|A)$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ :

(i) A, ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪਸਮੂਹ ਹੈ (ii) $A \cap B = \phi$

2. ਇੱਕ ਸ਼ਾਦੀਸ਼ੁਦਾ ਜੋੜੇ ਦੇ ਦੋ ਬੱਚੇ ਹਨ :

(i) ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਮੁੰਡਾ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਮੁੰਡਾ ਹੈ।

(ii) ਦੋਵੇਂ ਬੱਚਿਆਂ ਦੇ ਕੁੜੀ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਵੱਡਾ ਬੱਚਾ ਕੁੜੀ ਹੈ।

3. ਸੋਚੋ ਕਿ 5% ਮਰਦਾਂ ਅਤੇ 0.25% ਔਰਤਾਂ ਦੇ ਵਾਲ ਧੌਲੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਧੌਲੇ ਵਾਲਾਂ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਗਿਆ। ਇਸ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਮਰਦ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? ਇਹ ਮੰਨੋ ਕਿ ਮਰਦਾਂ ਅਤੇ ਔਰਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ 90% ਵਿਅਕਤੀ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ਕਿ 10 ਇਨਸਾਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣੇ ਗਏ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ 6 ਇਨਸਾਨ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਨਾਲ ਕੰਮ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਹੋਣਗੇ ?

5. ਇੱਕ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ 25 ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਗੇਂਦਾਂ ਚਿੰਨ੍ਹ 'X' ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 15 ਚਿੰਨ੍ਹ 'Y'. ਵਾਲੀਆਂ ਹਨ। ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਕੱਢੀ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨੋਟ ਕਰਕੇ ਉਸਨੂੰ ਕਲਸ਼ ਵਿੱਚ ਪੁਨਰ&ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ 6 ਗੇਂਦਾਂ ਕੱਢੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਸਾਰੀਆਂ ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'X' ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇ।

(ii) 2 ਤੋਂ ਵੱਧ ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'Y' ਅੰਕਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ।

(iii) ਘੱਟੋ&ਘੱਟ1 ਗੇਂਦ ਤੇ ਚਿੰਨ੍ਹ 'Y' ਅੰਕਿਤ ਹੋਵੇ।

(iv) 'X' ਅਤੇ 'Y' ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਅੰਕਿਤ ਗੇਂਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

6. ਇੱਕ ਬਾਧਾ ਦੌੜ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗੀ ਨੂੰ 10 ਬਾਧਾਵਾਂ ਪਾਰ ਕਰਨੀਆਂ ਹਨ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕਿ ਉਹ ਹਰੇਕ ਬਾਧਾ ਨੂੰ ਪਾਰ ਕਰੇਗਾ $\frac{5}{6}$ ਹੈ। ਇਸਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਹ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਬਾਧਾਵਾਂ ਨੂੰ ਗਿਰਾ ਦੇਵੇਗਾ (ਨਹੀਂ ਪਾਰ ਕਰੇਗਾ) ?

7. ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਬਾਰ&ਬਾਰ ਉਛਾਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਉਸ ਤੇ 6 ਦਾ ਅੰਕ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦਾ। ਇਸਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਪਾਸੇ ਤੇ ਤੀਜਾ 6 ਦਾ ਅੰਕ ਉਸਨੂੰ ਛੇਂਵੀਂ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

8. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੀਪ ਸਾਲ ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਸਾਲ ਵਿੱਚ 53 ਮੰਗਲਵਾਰ ਹੋਣਗੇ ?

9. ਇੱਕ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਸਫਲ ਹੋਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ ਉਸਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਤੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੇ 6 ਯਤਨਾਂ ਵਿੱਚ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ 4 ਸਫਲ ਹੋਣਗੇ।

10. ਇੱਕ ਇਨਸਾਨ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਸਿੱਕੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰੀ ਉਛਾਲੇ ਕਿ ਘੱਟੋ&ਘੱਟ ਇੱਕ ਚਿੱਤ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ 90% ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇ ?

11. ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਰਪੱਖ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਉਛਾਲਣ ਦੇ ਬਾਅਦ 6 ਆਉਣ 'ਤੇ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ ਆਉਣ ਤੇ ਉਹ ਇੱਕ ਰੁਪਿਆ ਹਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਇੱਕ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦਾ ਹੈ, ਕਿ ਉਹ ਪਾਸੇ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਵਾਰੀ ਸੁੱਟੇਗਾ ਪਰ ਜਦੋਂ ਵੀ 6 ਆਏਗਾ ਉਹ ਖੇਡ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਊਗਾ। ਉਸਦੇ ਰਾਹੀਂ ਜਿੱਤੀ ਜਾ ਹਾਰੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਪੂਰਵ ਅਨੁਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਮੰਨ ਲਉ ਸਾਡੇ ਕੋਲ A, B, C ਅਤੇ D ਬਕਸੇ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਸੰਗਮਰਮਰ ਦੀ ਲਾਲ, ਸਫ਼ੇਦ ਅਤੇ ਕਾਲੀਆਂ ਟੁਕੜੀਆਂ ਦਾ ਵਿਵਰਨ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ। ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਕਸਾ ਚੁਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਟੁਕੜਾ ਕੱਢਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਟੁਕੜਾ ਲਾਲ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸਨੂੰ ਬਾਕਸ A_ ਬਾਕਸ B] ਬਾਕਸ C ਤੋਂ ਕੱਢੇ ਜਾਣ ਦੀ ਕੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ ?

ਬਾਕਸ	ਸੰਗਮਰਮਰ ਦੇ ਟੁਕੜਿਆਂ ਦਾ ਰੰਗ		
	ਲਾਲ	ਸਫ਼ੇਦ	ਕਾਲਾ
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

13. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਰੋਗੀ ਨੂੰ ਦਿਲ ਦਾ ਦੌਰਾ ਪੈਣ ਦਾ ਸੰਯੋਗ 40% ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਧਿਆਨ ਅਤੇ ਯੋਗ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਦਿਲ ਦਾ ਦੌਰਾ ਪੈਣ ਦੇ ਖਤਰੇ ਨੂੰ 30% ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦਵਾਈ ਰਾਹੀਂ ਖਤਰੇ ਨੂੰ 25% ਘੱਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਰੋਗੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਿਕਲਪ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ ਵਿਕਲਪਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਰੋਗੀਆਂ ਤੋਂ ਬੇਤਰਤੀਬੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਹੋਇਆ ਰੋਗੀ ਦਿਲ ਦੇ ਦੌਰੇ ਤੋਂ ਪੀੜਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਰੋਗੀ ਰਾਹੀਂ ਧਿਆਨ ਅਤੇ ਯੋਗ ਵਿਧੀ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਜੇਕਰ 2 ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਇੱਕ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਇੱਕ ਹੋਣ ਤਾਂ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਹੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਕੀ ਹੈ ? (ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਡਿਟਰਮੀਨੈਂਟ ਦਾ ਹਰੇਕ ਤੱਤ ਅਜ਼ਾਦੀ ਨਾਲ ਚੁਣਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਦੀ ਚੋਣ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ $\frac{1}{2}$ ਹੈ।)

15. ਇੱਕ ਇਲੈਕਟ੍ਰਾਨਿਕ ਅਸੈਂਬਲੀ ਦੇ ਦੋ ਸਹਾਇਕ ਬਟਨ A ਅਤੇ B ਹਨ। ਪਹਿਲਾਂ ਦੇ ਨਿਰੀਖਣਾਂ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਪਤਾ ਹਨ :

P(A ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ) = 0.2

P (ਸਿਰਫ਼ B ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ) = 0.15

P(A ਅਤੇ B ਦੇ ਅਸਫਲ ਹੋਣ ਦੀ) = 0.15

ਤਾਂ, ਹੇਠਲੀ ਸੰਭਾਵਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) P (A ਅਸਫਲ/ B ਅਸਫਲ ਹੋ ਚੁੱਕਾ ਹੋਵੇ)

(ii) P (ਕੇਵਲ A ਅਸਫਲ)

16. ਥੈਲੇ 1 ਵਿੱਚ 3 ਲਾਲ ਅਤੇ 4 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਥੈਲੇ II ਵਿੱਚ 4 ਲਾਲ ਅਤੇ 5 ਕਾਲੀਆਂ ਗੇਂਦਾਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ 1 ਤੋਂ ਥੈਲੇ 2 ਵਿੱਚ ਭੇਜੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੇਂਦ ਥੈਲੇ 2 ਵਿੱਚੋਂ ਕੱਢੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਕੱਢੀ ਹੋਈ ਗੇਂਦ ਲਾਲ ਰੰਗ ਦੀ ਹੈ। ਭੇਜੀ ਹੋਈ ਗੇਂਦ ਦਾ ਰੰਗ ਕਾਲਾ ਸੀ ਇਸ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ:

17. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $P(A) \neq 0$ ਅਤੇ $P(B/A) = 1$, ਤਾਂ

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

18. ਜੇਕਰ $P(A/B) > P(A)$, ਹੈ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਹੀ ਹੈ :

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) . P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

19. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਇਹੋ ਜਿਹੀ ਦੋ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ ਕਿ :

P(A) + P(B) ï P(A ਅਤੇ B) = P(A), ਤਾਂ

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਦੇ ਮੁੱਖ ਬਿੰਦੂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ:

- ਘਟਨਾ E ਦੀ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਘਟਨਾ F ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਹੇਠ ਪ੍ਰਕਾਰ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ : $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$, $P(F) \neq 0$
- $0 \leq P(E|F) \leq 1$, P (E′| F) = 1 ï P (E|F)

  P (E ∪ F|G) = P (E|G) + P (F|G) ï P (E ∩ F|G)
- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E)$, $P(E) \neq 0$

  ਜਾਂ $P(E \cap F) = P(F)\ (E|F)$, $P(F) \neq 0$
- ਜੇਕਰ E ਅਤੇ F ਅਜ਼ਾਦ ਘਟਨਾਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ

  $P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

  ਅਤੇ $P(E|F) = P(E)$, $P(F) \neq 0$

  $P(F|E) = P(F)$, $P(E) \neq 0$

- ਕੁੱਲ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ :
ਮੰਨ ਲਉ $\{E_1, E_2, ...E_n\}$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਭਾਜਨ ਹੈ ਅਤੇ $E_1, E_2, ...E_n$, ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਗੈਰ&ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ A ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇੱਕ ਘਟਨਾ ਹੈ, ਤਾਂ
$P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n)\, P(A|E_n)$
- ਬੇਯਜ਼ ਪ੍ਰਮੇਯ: ਜੇਕਰ $E_1, E_2, ...E_n$ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ S ਦੇ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ $E_1, E_2, ..., E_n$ ਜੋੜਵਾਰ ਨਾ ਜੁੜੇ ਹਨ ਅਤੇ $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ ਅਤੇ A ਇੱਕ ਗੈਰ&ਸਿਫ਼ਰ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਘਟਨਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)}$$

- ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਵੰਨਗੀ ਸਮੂਹ ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮਾਨ ਫਲਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਹੈ :

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

ਜਿੱਥੇ $p_i > 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ i = 1, 2, ..., n$

- ਮੰਨ ਲਉ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2, x_3, ... ,x_n$ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ ਹਨ। X ਦਾ ਮੱਧਮਾਨ μ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹੜਾ ਕਿ ਸੰਖਿਆ $\sum_{i=1} x_i p_i$ ਹੈ। ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦੇ ਮੱਧਮਾਨ ਨੂੰ X, ਦਾ ਪੂਰਵ-ਅਨੁਮਾਨ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜਿਸਨੂੰ E (X) ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਮੰਨ ਲਉ X ਇੱਕ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ ਹੈ ਜਿਸਦੇ ਸੰਭਾਵੀ ਮੁੱਲ $x_1, x_2, ..., x_n$ ਹਨ, ਜਿਹਨਾ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ $p_1, p_2, ..., p_n$ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ μ = E (X), X ਦਾ ਮਧਮਾਨ ਹੈ।
X, ਦਾ ਪ੍ਰਸਰਨ var (X) ਜਾਂ σ_x^2 ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਹੇਠਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ:

$$\sigma_x^2 = \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon)^2\, p(x_i)$$

ਜਾਂ ਸਮਤੁਲਤਾ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ $\sigma_x^2 = E(X ï\ \mu)^2$

ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ $\sigma_x = \sqrt{\text{var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon)^2\, p(x_i)}$

ਨੂੰ ਬੇਤਰਤੀਬ ਚਲ X ਦਾ ਮਾਨਕ ਵਿਚਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- var (X) = E (X^2) ï [E(X)]^2

- ਕਿਸੇ ਬੇਤਰਤੀਬ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇ ਯਤਨਾਂ ਨੂੰ ਬਰਨੌਲੀ ਯਤਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਕਰਦੇ ਹਨ:
  - (i) ਯਤਨਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।
  - (ii) ਯਤਨ ਅਜ਼ਾਦ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।
  - (iii) ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਦੇ ਠੀਕ ਦੋ ਹੀ ਨਤੀਜੇ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ: ਸਫਲਤਾ ਅਤੇ ਅਸਫਲਤਾ।
  - (iv) ਕਿਸੇ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹਰੇਕ ਯਤਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਰਾਬਰ ਰਹਿਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ।
- ਦੋ ਪਦੀ ਵੰਡ B (n, p), ਲਈ P $(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x} p^x$ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਇੱਕ ਪਾਸੇ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ (ਮੌਕਾ) ਦੇ ਮਾਪ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਸੰਦਰਭ ਦਾਤੇ ਤੇ ਦੈਵੀ ਸੁਖਾਂਤ ਨਾਟਕ ਤੇ ਇੱਕ ਵਿਆਖਿਆ ਵਿੱਚ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਜੇਰਨੀਮੋਂਕਾਰਡਨ (1501–1576) ਨੇ ਜੂਏ ਦੇ ਖੇਡ ਤੇ ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਨਿਬੰਧ ਜਿਸਦਾ ਨਾਂ 'ਲਿਬਰ ਡੇ ਲੂਡੋ ਅਲਕਾਏ' ਲਿਖਿਆ ਸੀ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ 1663 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਇਸ ਨਿਬੰਧ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਦੋ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਣ ਤੇ ਹਰੇਕ ਘਟਨਾ ਦੇ ਅਨੁਕੂਲ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਹੈ। ਗੈਲੀਲੀਉ (1564–1642) ਨੇ ਤਿੰਨ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਦੇ ਮਾਪ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਹੈਰਾਨੀ ਵਾਲੀ ਟਿੱਪਣੀ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਗੈਲੀਲੀਉ ਨੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਸੀ ਕਿ ਜਦੋਂ ਤਿੰਨ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਆਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 10 ਹੋਣਾ ਜੋੜ 9 ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੰਭਾਵੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜੋੜ ਨੂੰ 10 ਹੋਣ ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋੜ 9 ਦੇ ਨਤੀਜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ।

ਇਸ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਯੋਗਦਾਨ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਹ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਲੇਖ ਸਤਾਰਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਦੋ ਮਹਾਨ ਗਣਿਤਗਾਂ ਪਾਸਕਲ (1623–1662) ਅਤੇ ਪਿਅਰੇ ਦ ਫ਼ਰਮਾਂ (1601–1665) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ–ਵਿਹਾਰ ਤੋਂ ਹੋਇਆ। ਇੱਕ ਫ਼ਰਾਂਸੀਸੀ ਜੁਆਰੀ ਸ਼ੇਵੇਲਿਅਰ ਡੇ ਮੇਰੇ ਨੇ ਸਿਧਾਂਤਿਕ ਤਰਕ ਅਤੇ ਜੂਏ ਵਿੱਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰੇਖਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰਵਿਰੋਧ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਲਈ ਪਾਸਕਲ ਤੋਂ ਪੁੱਛਿਆ। ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ 1654 ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਕੋਲ ਪਾਸਕਲ ਅਤੇ ਫ਼ਰਮਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ ਵਿਹਾਰ ਦੀ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਨੀਂਵ ਰੱਖੀ ਗਈ। ਪਾਸਕਲ ਨੇ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਦੋਂ ਕਿ ਫ਼ਰਮਾਂ ਨੇ ਸੰਚਯ ਦੀ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ।

ਮਹਾਨ ਹਾਲੈਂਡ ਨਿਵਾਸੀ ਵਿਗਿਆਨੀ ਹਿਯਜੇਨ (1629–1695) ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਅਤੇ ਫ਼ਰਮਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੋਏ ਪੱਤਰ ਵਿਹਾਰ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਪੁਸਤਕ 'ਡੇ ਰੇਸ਼ਿਯੋਸਿਨਿਸ ਇਨ ਲੂਡੋ ਅਲਾਇ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੰਯੋਗ ਦੇ ਖੇਡ ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਰੋਚਕ ਪਰ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਸਮੱਸਿਆਂਵਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਦਿੱਤੇ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਅੱਗੇ ਮਹਾਨ ਕਾਰਜ ਜੈਕਬ ਬਰਨੌਲੀ (1654&1705) ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ 'ਆਰਸ ਕੰਜੇਕਟੇਂਡੀ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਿਹੜਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਭਤੀਜੇ ਨਿਕਾਲਸ ਬਰਨੌਲੀ ਨੇ 1713 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ

ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਸੰਭਾਵਨਾ ਵੰਡ 'ਦੋ-ਅਧਾਰੀ ਵੰਡ' ਦੀ ਖੋਜ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਵੀ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਭਾਵਨਾ ਤੇ ਅੱਗੇ ਖਾਸ ਕਾਰਜ 'ਅਬਰਾਹਮ ਡੇ ਮੋਵਿਅਰ' (1667 & 1754) ਦੀ ਪੁਸਤਕ 'ਦੀ ਡਾਕਟ੍ਰਿਨ ਆਫ ਚਾਂਸ' ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 1718 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਥਾਮਸ ਬੇਜ਼ (1702&1761) ਨੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਨਾਂ ਤੇ ਮਸ਼ਹੂਰ ਪ੍ਰਮੇਯ 'ਬੇਯਜ਼-ਪ੍ਰਮੇਯ' ਨੂੰ ਵਿਉਤਪੱਤੀ ਕਰਨ ਲਈ ਬਾਸ਼ਰਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕੀਤਾ। ਮਸ਼ਹੂਰ ਖਗੋਲਸ਼ਾਸਤਰੀ 'ਪਿਅਰੇ ਸਾਈਮਨ ਡੇ ਲਾਪਲਾਸ' (1749&1827) ਨੇ ਵੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਕਾਰਜ ਕੀਤਾ ਅਤੇ 1812 ਵਿੱਚ ਇੱਕ 'ਥਿਊਰੀ ਐਨਾਲਿਟਿਕ ਡੇਸ ਪ੍ਰਾਬੇਬਿਨਿਟੀਜ਼' ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ। ਇਸਦੇ ਬਾਅਦ ਰੂਸੀ ਗਣਿਤਗਾਂ ਸ਼ੇਬੀਸ਼ੇਵ (1821&1894), ਮਾਰਕੋਵ (1856&1922), ਏ. ਲਿਆਪੋਨੋ (1821&1918), ਅਤੇ ਏ. ਐਨ. ਕਾਲਮੋਗ੍ਰੋਵ (1903&1987) ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਸਾਰਥਕ ਯੋਗਦਾਨ ਦਿੱਤਾ। ਕਾਲਮੋਗ੍ਰੋਵ ਨੇ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦਾ ਸਮੂਹ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ। ਜਿਸਨੂੰ 1933 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪੁਸਤਕ 'ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਅਧਾਰਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ' ਵਿੱਚ ਸੰਭਾਵਨਾ ਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਸ਼੍ਰੇਸ਼ਠ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ।

ਉੱਤਰਮਾਲਾ

ਅਭਿਆਸ 7.1

1. $-\frac{1}{2}\cos 2x$
2. $\frac{1}{3}\sin 3x$
3. $\frac{1}{2}e^{2x}$
4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$
5. $-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{4}{3}e^{3x}$
6. $\frac{4}{3}e^{3x}+x+C$
7. $\frac{x^3}{3}-x+C$
8. $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$
9. $\frac{2}{3}x^3+e^x+C$
10. $\frac{x^2}{2}+\log|x|-2x+C$
11. $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$
12. $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+8\sqrt{x}+C$
13. $\frac{x^3}{3}+x+C$
14. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$
15. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$
16. $x^2-3\sin x+e^x+C$
17. $\frac{2}{3}x^3+3\cos x+\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$
18. tan x + sec x + C
19. tan x ï x + C
20. 2 tan x ï 3 sec x + C
21. C
22. A

ਅਭਿਆਸ 7.2

1. log (1 + x^2) + C
2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$
3. $\log|1+\log x|+C$
4. cos (cos x) + C
5. $-\frac{1}{4a}\cos 2(ax+b)+C$
6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$
7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$
8. $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$
9. $\frac{4}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}+C$
10. $2\log|\sqrt{x}-1|+C$
11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}(x^3-1)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}(x^3-1)^{\frac{4}{3}}+C$

13. $-\frac{1}{18(2+3x^3)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$

15. $-\frac{1}{8}\log|9-4x^2|+C$

16. $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$

18. $e^{\tan^{-1}x}+C$

19. $\log(e^x+e^{-x})+C$

20. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$

21. $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$

23. $\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$

25. $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$

27. $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$

28. $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$

30. ï $\log|1+\cos x|+C$

31. $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$

33. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34. $2\sqrt{\tan x}+C$

35. $\frac{1}{3}(1+\log x)^3+C$

36. $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos(\tan^{-1}x^4)+C$

38. D

39. B

ਅਭਿਆਸ 7.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$

2. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

8. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

12. x ï $\sin x + C$

13. 2 (sin$x$ + x cosα) + C

14. $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x-\frac{1}{2}\sec 2x+C$

16. $\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

17. $\sec x$ ï $\operatorname{cosec} x + C$

18. $\tan x + C$

19. $\log|\tan x|+\frac{1}{2}\tan^2 x+C$

20. $\log|\cos x+\sin x|+C$

21. $\frac{\pi x}{2}-\frac{x^2}{2}+C$

22. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right|+C$

23. A

24. B

ਅਭਿਆਸ 7.4

1. $\tan^{-1}x^3+C$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{1+4x^2}\right|+C$

3. $\log\left|\frac{1}{2-x+\sqrt{x^2-4x+5}}\right|+C$

4. $\frac{1}{5}\sin^{\text{ï}1}\frac{5x}{3}+C$

5. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\,x^2+C$

6. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1+x^3}{1-x^3}\right|+C$

7. $\sqrt{x^2-1}-\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

8. $\frac{1}{3}\log\left|x^3+\sqrt{x^6+a^6}\right|+C$

9. $\log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right|+C$

10. $\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C$

11. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right)+C$

12. $\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)+C$

13. $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

14. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

15. $\log\left|x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)(x-b)}\right|+C$

16. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

17. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

18. $\frac{5}{6}\log\left|3x^2+2x+1\right|-\frac{11}{3\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

19. $6\sqrt{x^2-9x+20}+34\log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right|+C$

20. $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

21. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

22. $\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

23. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

24. B

25. B

ਅਭਿਆਸ 7.5

1. $\log\frac{(x+2)^2}{|x+1|}+C$

2. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

6. $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

9. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $-\log|x-1|+\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\tan^{-1}x+C$

14. $3\log|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$

15. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

16. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

17. $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

18. $x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

19. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

21. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

22. B

23. A

ਅਭਿਆਸ 7.6

1. $-x\cos x+\sin x+C$

2. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

3. $e^x(x^2-2x+2)+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^2}{2}\log 2x - \frac{x^2}{4} + C$

6. $\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$

7. $\frac{1}{4}(2x^2 - 1)\sin^{-1}x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C$

8. $\frac{x^2}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$

9. $(2x^2 - 1)\frac{\cos^{ï1}x}{4} - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C$

10. $\left(\sin^{ï1}x\right)^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x - 2x + C$

11. $ï\left[\sqrt{1ïx^2}\cos^{ï1}x + x\right] + C$

12. $x\tan x + \log|\cos x| + C$

13. $x\tan^{-1}x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C$

14. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + C$

15. $\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\log x - \frac{x^3}{9} - x + C$

16. $e^x \sin x + C$

17. $\frac{e^x}{1+x} + C$

18. $e^x \tan\frac{x}{2} + C$

19. $\frac{e^x}{x} + C$

20. $\frac{e^x}{(x-1)^2} + C$

21. $\frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C$

22. $2x\tan^{ï1}x\ ï\ \log(1+x^2) + C$

23. A

24. B

ਅਭਿਆਸ 7.7

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\frac{x}{2} + C$

2. $\frac{1}{4}\sin^{-1}2x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-4x^2} + C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6} + \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1} - \frac{3}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + C$

5. $\frac{5}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + C$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5}-\frac{9}{2}\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right|+C$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x-x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x}-\frac{9}{8}\log\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x}\right|+C$

9. $\frac{x}{6}\sqrt{x^2+9}+\frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$

10. A

11. D

ਅਭਿਆਸ 7.8

1. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

2. $\frac{35}{2}$

3. $\frac{19}{3}$

4. $\frac{27}{2}$

5. $e-\frac{1}{e}$

6. $\frac{15+e^8}{2}$

ਅਭਿਆਸ 7.9

1. 2

2. $\log\frac{3}{2}$

3. $\frac{64}{3}$

4. $\frac{1}{2}$

5. 0

6. e^4 (e ï 1)

7. $\frac{1}{2}\log 2$

8. $\log\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right)$

9. ´ / 2

10. ´ / 4

11. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$

12. ´ / 4

13. $\frac{1}{2}\log 2$

14. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

15. $\frac{1}{2}$(e ï 1)

16. 5ï $\frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4}-\log\frac{3}{2}\right)$

17. $\frac{\pi^4}{1024}+\frac{\pi}{2}+2$ **18.** 0 **19.** $3\log 2+\frac{3\pi}{8}$

20. $1+\frac{4}{´}-\frac{2\sqrt{2}}{´}$ **21.** D **22.** C

ਅਭਿਆਸ 7.10

1. $\frac{1}{2}\log 2$ **2.** $\frac{64}{231}$ **3.** $\frac{´}{2}$ ï $\log 2$

4. $\frac{16\sqrt{2}}{15}(\sqrt{2}+1)$ **5.** $\frac{´}{4}$ **6.** $\frac{1}{\sqrt{17}}\log\frac{21+5\sqrt{17}}{4}$

7. $\frac{´}{8}$ **8.** $\frac{e^2(e^2-2)}{4}$ **9.** D

10. B

ਅਭਿਆਸ 7.11

1. $\frac{´}{4}$ **2.** $\frac{´}{4}$ **3.** $\frac{´}{4}$ **4.** $\frac{´}{4}$

5. 29 **6.** 9 **7.** $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8. $\frac{´}{8}\log 2$ **9.** $\frac{16\sqrt{2}}{15}$ **10.** $\frac{´}{2}\log\frac{1}{2}$ **11.** $\frac{´}{2}$

12. π **13.** 0 **14.** 0 **15.** 0

16. ï $\pi \log 2$ **17.** $\frac{a}{2}$ **18.** 5 **20.** C

21. C

ਅਧਿਆਇ 7 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2}{1-x^2}\right|+C$ **2.** $\frac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

3. ï $\frac{2}{a}\sqrt{\frac{(a-x)}{x}}+C$ **4.** ï $\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}+C$

5. $2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log(1 + x^{\frac{1}{6}}) + C$

6. $-\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{4}\log(x^2+9) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{3} + C$

7. $\sin a \log|\sin(x-a)| + x\cos a + C$

8. $\frac{x^3}{3} + C$

9. $\sin^{-1}\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C$

10. $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$

11. $\frac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right| + C$

12. $\frac{1}{4}\sin^{-1}(x^4) + C$

13. $\log\left(\frac{1+e^x}{2+e^x}\right) + C$

14. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x - \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$

15. $-\frac{1}{4}\cos^4 x + C$

16. $\frac{1}{4}\log(x^4+1) + C$

17. $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)} + C$

18. $\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}} + C$

19. $\frac{2(2x-1)}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x} + \frac{2\sqrt{x-x^2}}{\pi} - x + C$

20. $-2\sqrt{1-x} + \cos^{-1}\sqrt{x} + \sqrt{x-x^2} + C$

21. $e^x \tan x + C$

22. $-2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + 3\log|x+2| + C$

23. $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x - \sqrt{1-x^2}\right] + C$

24. $-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3}\right] + C$

25. $e^{\frac{\pi}{2}}$

26. $\frac{\pi}{8}$

27. $\frac{\pi}{6}$

28. $2\sin^{-1}\frac{(\sqrt{3}-1)}{2}$

29. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

30. $\frac{1}{40}\log 9$

31. $\frac{\pi}{2} - 1$

32. $\frac{\pi}{2}(\pi - 2)$

33. $\frac{19}{2}$

40. $\frac{1}{3}\left(e^2 - \frac{1}{e}\right)$

41. A

42. B

43. D

44. B

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. $\frac{14}{3}$

2. $16-4\sqrt{2}$

3. $\frac{32-8\sqrt{2}}{3}$

4. 12π

5. 6π

6. $\frac{´}{3}$

7. $\frac{a^2}{2}\left(\frac{´}{2}-1\right)$

8. $(4)^{\frac{2}{3}}$

9. $\frac{1}{3}$

10. $\frac{9}{8}$

11. $8\sqrt{3}$

12. A

13. B

ਅਭਿਆਸ 8.2

1. $\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{9}{4}\sin^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3}$

2. $\left(\frac{2´}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. $\frac{21}{2}$

4. 4

5. 8

6. B

7. B

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) $\frac{7}{3}$ (ii) 624.8

2. $\frac{1}{6}$

3. $\frac{7}{3}$

4. 9

5. 4

6. $\frac{8}{3}\frac{a^2}{m^3}$

7. 27

8. $\frac{3}{2}(´ - 2)$

9. $\frac{ab}{4}(\pi-2)$ **10.** $\frac{9}{2}$ **11.** 2 **12.** $\frac{1}{3}$

13. 7 **14.** $\frac{7}{2}$ **15.** $\frac{9\pi}{8}-\frac{9}{4}\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3\sqrt{2}}$

16. D **17.** C **18.** C **19.** B

ਅਭਿਆਸ 9.1

1. ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ **2.** ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 1

3. ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **4.** ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ

5. ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **6.** ਕ੍ਰਮ 3; ਘਾਤ 2

7. ਕ੍ਰਮ 3; ਘਾਤ 1 **8.** ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 1

9. ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1 **10.** ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1

11. D **12.** A

ਅਭਿਆਸ 9.2

11. D **12.** D

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. $y'' = 0$ **2.** $xy\,y'' + x(y')^2 - y\,y' = 0$

3. $y'' - y' - 6y = 0$ **4.** $y'' - 4y' + 4y = 0$

5. $y'' - 2y' + 2y = 0$ **6.** $2xyy' + x^2 = y^2$

7. $xy' - 2y = 0$ **8.** $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$

9. $xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$ **10.** $(x^2 - 9)(y')^2 + x^2 = 0$

11. B **12.** C

ਅਭਿਆਸ 9.4

1. $y = 2\tan\frac{x}{2} - x + C$ **2.** $y = 2\sin(x + C)$

3. $y = 1 + Ae^{-x}$ **4.** $\tan x \tan y = C$

5. $y = \log(e^x + e^{-x}) + C$ **6.** $\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$

7. $y = e^{cx}$ **8.** $x^{-4} + y^{-4} = C$

9. $y = x\sin^{-1}x + \sqrt{1 - x^2} + C$ **10.** $\tan y = C(1 - e^x)$

11. $y = \frac{1}{4}\log\left[(x+1)^2 (x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + 1$

12. $y = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{3}{4}$ **13.** $\cos\left(\frac{y-2}{x}\right) = a$

14. $y = \sec x$ **15.** $2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$

16. $y - x + 2 = \log(x^2(y+2)^2)$ **17.** $y^2 - x^2 = 4$

18. $(x+4)^2 = y + 3$ **19.** $(63t + 27)^{\frac{1}{3}}$

20. 6.93% **21.** Rs 1648

22. $\dfrac{2\log 2}{\log\left(\frac{11}{10}\right)}$ **23.** A

ਅਭਿਆਸ 9.5

1. $(x-y)^2 = Cx\, e^{\frac{-y}{x}}$ **2.** $y = x\log|x| + Cx$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C$ **4.** $x^2 + y^2 = Cx$

5. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\sqrt{2}y}{x-\sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C$ **6.** $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$

7. $xy\cos\left|\frac{y}{x}\right| = C$ **8.** $x\left[1 - \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right] = C\sin\left(\frac{y}{x}\right)$

9. $cy = \log\frac{y}{x} - 1$ **10.** $ye^{\frac{x}{y}} + x = C$

11. $\log(x^2+y^2) + 2\tan^{-1}\frac{y}{x} = \frac{\pi}{2} + \log 2$

12. $y + 2x = 3x^2 y$ **13.** $\cot\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$

14. $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \log|ex|$ **15.** $y = \frac{2x}{1-\log|x|}\,(x \neq 0, x \neq e)$

16. C **17.** D

ਅਭਿਆਸ 9.6

1. $y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C\, e^{-2x}$

2. $y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$

3. $xy = \frac{x^4}{4} + C$

4. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + C$

5. $y = (\tan x - 1) + C\, e^{-\tan x}$

6. $y = \frac{x^2}{16}(4\log|x| - 1) + Cx^{-2}$

7. $y\log x = \frac{-2}{x}(1+\log|x|) + C$

8. $y = (1+x^2)^{-1}\ \log|\sin x| + C(1+x^2)^{-1}$

9. $y = \frac{1}{x} - \cot x + \frac{C}{x\sin x}$

10. $(x + y + 1) = C\, e^y$

11. $x = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}$

12. $x = 3y^2 + Cy$

13. $y = \cos x - 2\cos^2 x$

14. $y(1 + x^2) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

15. $y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x$

16. $x + y + 1 = e^x$

17. $y = 4 - x - 2e^x$

18. C

19. D

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) ਕ੍ਰਮ 2; ਘਾਤ 1

(ii) ਕ੍ਰਮ 1; ਘਾਤ 3

(iii) ਕ੍ਰਮ 4; ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ

3. $y' = \frac{2y^2 - x^2}{4xy}$

5. $(x + yy')^2 = (x - y)^2\,(1 + (y')^2)$

6. $\sin^{-1}y + \sin^{-1}x = C$

8. $\cos y = \frac{\sec x}{\sqrt{2}}$

9. $\tan^{-1} y + \tan^{-1}(e^x) = \frac{\pi}{2}$

10. $e^{\frac{x}{y}} = y + C$

11. $\log|x - y| = x + y + 1$

12. $y e^{2\sqrt{x}} = (2\sqrt{x} + C)$

13. $y\sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}\ (\sin x \neq 0)$

14. $y = \log\left|\frac{2x+1}{x+1}\right|, x \neq -1$

15. 31250

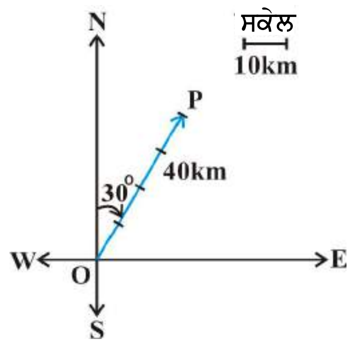
16. C

17. C

18. C

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਵੈਕਟਰ $\overline{OP}$ ਲੋੜੀਂਦੇ ਵਿਸਥਾਪਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



2. (i) ਸਕੇਲਰ (ii) ਵੈਕਟਰ (iii) ਸਕੇਲਰ (iv) ਸਕੇਲਰ (v) ਸਕੇਲਰ (vi) ਵੈਕਟਰ

3. (i) ਸਕੇਲਰ (ii) ਸਕੇਲਰ (iii) ਵੈਕਟਰ (iv) ਵੈਕਟਰ (v) ਸਕੇਲਰ

4. (i) ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਇੱਕੋ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਹਨ।

(ii) ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{d}$ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

(iii) ਵੈਕਟਰ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ।

5. (i) ਸੱਚ (ii) ਝੂਠ (iii) ਝੂਠ (iv) ਝੂਠ

ਅਭਿਆਸ 10.2

1. $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=\sqrt{62}, |\vec{c}|=1$

2. ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।

3. ਸੰਭਾਵੀ ਉੱਤਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।

4. $x = 2, y = 3$

5. -7 ਅਤੇ 6; $-7\hat{i}$ ਅਤੇ $6\hat{j}$

6. $-4\hat{j}-\hat{k}$

7. $\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{6}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{6}}\hat{k}$

8. $\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

9. $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$

10. $\frac{40}{\sqrt{30}}\hat{i}-\frac{8}{\sqrt{30}}\hat{j}+\frac{16}{\sqrt{30}}\hat{k}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$

13. $-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}$ **15.** (i) $-\frac{1}{3}\hat{i}+\frac{4}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$ (ii) $-3\hat{i}+3\hat{k}$

16. $3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ **18.** (C) **19.** (B), (C), (D)

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. $\frac{\pi}{4}$ **2.** $\cos^{-1}\left(\frac{5}{7}\right)$ **3.** 0

4. $\frac{60}{\sqrt{114}}$ **6.** $\frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{7}},\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$ **7.** $6|\vec{a}|^2+11\vec{a}.\vec{b}-35|\vec{b}|^2$

8. $|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=1$ **9.** $\sqrt{13}$ **10.** 8

12. ਵੈਕਟਰ $\vec{b}$ ਕੋਈ ਵੀ ਵੈਕਟਰ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। **13.** $\frac{-3}{2}$

14. ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}$ ਲਵੋ।

15. $\cos^{-1}\left(\frac{10}{\sqrt{102}}\right)$ **18.** (D)

ਅਭਿਆਸ 10.4

1. $19\sqrt{2}$ **2.** $\pm\frac{2}{3}\hat{i}\mp\frac{2}{3}\hat{j}\mp\frac{1}{3}\hat{k}$ **3.** $\frac{\pi}{3};\ \frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}$

5. $3,\frac{27}{2}$ **6.** ਜਾਂ $|\vec{a}|=0$ ਜਾਂ $|\vec{b}|=0$

8. ਨਹੀਂ, ਕੋਈ ਵੀ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਵੈਕਟਰਾਂ ਨੂੰ ਲਵੋ।

9. $\frac{\sqrt{61}}{2}$ **10.** $15\sqrt{2}$ **11.** (B) **12.** (C)

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}$

2. $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1; \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3. $\frac{-5}{2}\hat{i}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

4. ਨਹੀਂ, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨਾਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉ।

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **6.** $\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\hat{i}+\frac{\sqrt{10}}{2}\hat{j}$ **7.** $\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{i}-\frac{3}{\sqrt{22}}\hat{j}+\frac{2}{\sqrt{22}}\hat{k}$

8. $2:3$ **9.** $3\vec{a}+5\vec{b}$ **10.** $\frac{1}{7}(3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k});\ 11\sqrt{5}$

12. $\frac{1}{3}(160\hat{i}-5\hat{j}-70\hat{k})$ **13.** $\lambda = 1$ **16.** (B)

17. (D) **18.** (C) **19.** (B)

ਅਭਿਆਸ 11.1

1. $0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ **2.** $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ **3.** $\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{-2}{11}$

5. $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{17}$; $\frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}$; $\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$

ਅਭਿਆਸ 11.2

4. $\vec{r}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})$ ਜਿੱਥੇ λ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

5. $\vec{r}=2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$ ਅਤੇ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਰੂਪ $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-4}{-1}$ ਹੈ।

6. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+5}{6}$

7. $\vec{r}=(5\hat{i}-4\hat{j}+6\hat{k})+\lambda(3\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k})$

8. ਰੇਖਾ ਦੀ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $\vec{r}=\lambda(5\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k})$;

ਰੇਖਾ ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $\frac{x}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$

9. ਰੇਖਾ ਦਾ ਵੈਕਟਰ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $\vec{r}=3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k}+\lambda(11\hat{k})$

ਰੇਖਾ ਦੀ ਕਾਰਟੀਜ਼ੀਅਨ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ $\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+5}{11}$

10. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$, (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$

11. (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$ (ii) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

12. $p = \frac{70}{11}$ **14.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **15.** $2\sqrt{29}$

16. $\frac{3}{\sqrt{19}}$ **17.** $\frac{8}{\sqrt{29}}$

ਅਭਿਆਸ 11.3

1. (a) 0, 0, 1; 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}; \frac{5}{\sqrt{14}}$ (d) 0, 1, 0; $\frac{8}{5}$

2. $\vec{r} \cdot \left(\frac{3\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{70}}\right) = 7$

3. (a) $x + y - z = 2$ (b) $2x + 3y - 4z = 1$

(c) $(s - 2t)x + (3 - t)y + (2s + t)z = 15$

4. (a) $\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ (b) $\left(0, \frac{18}{25}, \frac{24}{25}\right)$

(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (d) $\left(0, \frac{-8}{5}, 0\right)$

5. (a) $[\vec{r} - (\hat{i} - 2\hat{k})] \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 0$; $x + y - z = 3$

(b) $[\vec{r} - (\hat{i} + 4\hat{j} + 6\hat{k})] \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$; $x - 2y + z + 1 = 0$

6. (a) ਬਿੰਦੂ ਇੱਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਤਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਨੰਤ ਹੋਵੇਗੀ।

(b) $2x + 3y - 3z = 5$

7. $\frac{5}{2}$, 5, −5 **8.** $y = 3$ **9.** $7x - 5y + 4z - 8 = 0$

10. $\vec{r} \cdot (38\hat{i} + 68\hat{j} + 3\hat{k}) = 153$ **11.** $x - z + 2 = 0$

12. $\cos^{-1}\left(\frac{15}{\sqrt{731}}\right)$

13. (a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)$ (b) ਤਲ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹਨ।

(c) ਤਲ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। (d) ਤਲ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(e) 45^o

14. (a) $\frac{3}{13}$ (b) $\frac{13}{3}$

(c) 3 (d) 2

ਅਧਿਆਇ 11 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

3. $90°$ **4.** $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$ **5.** 0^o

6. $k=\frac{-10}{7}$ **7.** $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k})$

8. $x+y+z=a+b+c$ **9.** 9

10. $\left(0, \frac{17}{2}, \frac{-13}{2}\right)$ **11.** $\left(\frac{17}{3}, 0, \frac{23}{3}\right)$ **12.** $(1, -2, 7)$

13. $7x - 8y + 3z + 25 = 0$ **14.** $p = \frac{3}{2}$ ਜਾਂ $\frac{11}{6}$

15. $y - 3z + 6 = 0$ **16.** $x + 2y - 3z - 14 = 0$

17. $33x + 45y + 50z - 41 = 0$ **18.** 13

19. $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}+\lambda(-3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k})$

20. $\vec{r} = \hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}+\lambda(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k})$ **22.** D

23. B

ਅਭਿਆਸ 12.1

1. (0, 4) ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = 16

2. (4, 0) ਤੇ ਘੱਟ-ਘੱਟ Z = −12

3. $\left(\frac{20}{19}, \frac{45}{19}\right)$ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ Z = $\frac{235}{19}$

4. $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ Z = 7

5. (4, 3) ਤੇ $Z = 18$

6. (6, 0) ਅਤੇ (0, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $Z = 6$.

7. (60, 0) ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $Z = 300$;
   (120, 0) ਅਤੇ (60, 30) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $Z = 600$;

8. (0, 50) ਅਤੇ (20, 40) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਸਥਿਤ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ $Z = 100$.
   (0, 200) ਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ $Z = 400$

9. Z ਦਾ ਕੋਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

10. ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਸੰਗਤ ਖੇਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ Z ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 12.2

1. $\left(\frac{8}{3}, 0\right)$ ਅਤੇ $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ = Rs 160 .

2. ਕੇਕਾਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ = 30 ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਅਤੇ 10 ਹੋਰ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।

3. (i) 4 ਟੈਨਿਸ ਰੈਕਟ ਅਤੇ 12 ਕ੍ਰਿਕਟ ਦੇ ਬੱਲੇ
   (ii) ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 200

4. ਨੱਟ ਦੇ ਤਿੰਨ ਪੈਕਿਟ ਅਤੇ ਬੋਲਟ ਦੇ ਤਿੰਨ ਪੈਕਿਟ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 73.50

5. 30 ਪੈਕਿਟ A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪੇਚ ਅਤੇ 20 ਪੈਕਿਟ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪੇਚਾਂ ਦੇ ਅਤੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 410

6. 4 ਅਧਾਰ ਲੈਂਪ ਅਤੇ 4 ਕਾਠ ਦੇ ਢੱਕਣ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 32

7. A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 8 ਚਿੰਨ੍ਹ ਅਤੇ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 20 ਚਿੰਨ੍ਹ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 160

8. 200 ਡੈਸਕਟਾਪ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਅਤੇ 50 ਪੋਰਟੇਬਲ ਨਮੂਨੇ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 1150000

9. $Z = 4x + 6y$ ਦਾ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਅਨੁਮਾਨ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ $3x + 6y \geq 80$, $4x + 3y \geq 100$, $x \geq 0$ ਅਤੇ $y \geq 0$, ਜਿੱਥੇ x ਅਤੇ y ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੋਜ F_1 ਅਤੇ F_2 ਦੀ ਇਕਾਈਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ; ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਮੁੱਲ = Rs 104

10. ਰਸਾਇਣਕ ਖਾਦ F_1 ਦੇ 100 kg ਅਤੇ ਰਸਾਇਣਕ ਖਾਦ F_2 ਦੇ 80 kg; ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਮੁੱਲ = Rs 1000

11. (D)

ਅਧਿਆਇ 12 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. P ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 40 ਪੈਕਿਟ ਅਤੇ Q ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 15 ਪੈਕਿਟ; ਵਿਟਾਮਿਨ A ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅਨੁਮਾਨ = 285 ਇਕਾਈ
2. P ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 3 ਬੈਗ ਅਤੇ Q ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ 6 ਬੈਗ; ਘੋਲ ਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕੀਮਤ = Rs 1950
3. ਘੋਲ ਦੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕੀਮਤ Rs 112 (X ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ 2kg ਅਤੇ Y ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ 4 kg).
5. ਐਗਜ਼ੀਕਿਊਟਿਵ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ 40 ਟਿਕਟਾਂ ਅਤੇ ਇਕੋਨਾਮੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ 160 ਟਿਕਟਾਂ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 136000.
6. A ਤੋਂ : 10, 50 ਅਤੇ 40 ਇਕਾਈ; B ਤੋਂ : 50, 0 ਅਤੇ 0 ਇਕਾਈ D, E ਅਤੇ F ਤੱਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਤੇ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਕੀਮਤ = Rs 510
7. A ਤੋਂ : 500, 3000 ਅਤੇ 3500 ਲੀਟਰ; B ਤੋਂ 4000, 0 ਅਤੇ 0 ਲੀਟਰ ਤੇਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ; D, E ਅਤੇ F ਨੂੰ ਭੇਜੀ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਕੀਮਤ = Rs 4400
8. P ਦੇ 40 ਬੈਗ ਅਤੇ Q ਦੇ 100 ਬੈਗ; ਨਾਈਟ੍ਰੋਜ਼ਨ ਦੀ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਰਾਸ਼ੀ = 470 kg.
9. P ਦੇ 140 ਬੈਗ ਅਤੇ Q ਦੇ 50 ਬੈਗ; ਨਾਈਟ੍ਰੋਜ਼ਨ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰਾਸ਼ੀ = 595 kg.
10. A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ 800 ਗੁੱਡੀਆਂ ਅਤੇ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ 400 ਗੁੱਡੀਆਂ; ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਲਾਭ = Rs 16000

ਅਭਿਆਸ 13.1

1. $P(E|F)=\frac{2}{3}, P(F|E)=\frac{1}{3}$

2. $P(A|B)=\frac{16}{25}$

3. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98

4. $\frac{11}{26}$

5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{6}{7}$

7. (i) 1 (ii) 0

8. $\frac{1}{6}$

9. 1

10. (a) $\frac{1}{3}$, (b) $\frac{1}{9}$

11. (i) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (iii) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$

12. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{3}$ **13.** $\frac{5}{9}$

14. $\frac{1}{15}$ **15.** 0 **16.** C **17.** D

ਅਭਿਆਸ 13.2

1. $\frac{3}{25}$ **2.** $\frac{25}{102}$ **3.** $\frac{44}{91}$

4. A ਅਤੇ B ਆਜ਼ਾਦ ਹਨ।

6. E ਅਤੇ F ਆਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

7. (i) $p=\frac{1}{10}$ (ii) $p=\frac{1}{5}$

8. (i) 0.12 (ii) 0.58 (iii) 0.3 (iv) 0.4

9. $\frac{3}{8}$ **10.** A ਅਤੇ B ਆਜ਼ਾਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

11. (i) 0.18 (ii) 0.12 (iii) 0.72 (iv) 0.28

12. $\frac{7}{8}$ **13.** (i) $\frac{16}{81}$, (ii) $\frac{20}{81}$, (iii) $\frac{40}{81}$

14. (i) $\frac{2}{3}$, (ii) $\frac{1}{2}$ **15.** (i), (ii) **16.** (a) $\frac{1}{5}$, (b) $\frac{1}{3}$, (c) $\frac{1}{2}$

17. D **18.** B

ਅਭਿਆਸ 13.3

1. $\frac{1}{2}$ **2.** $\frac{2}{3}$ **3.** $\frac{9}{13}$ **4.** $\frac{12}{13}$

5. $\frac{22}{133}$ **6.** $\frac{4}{9}$ **7.** $\frac{1}{52}$ **8.** $\frac{1}{4}$

9. $\frac{2}{9}$ **10.** $\frac{8}{11}$ **11.** $\frac{5}{34}$ **12.** $\frac{11}{50}$

13. A **14.** C

ਅਭਿਆਸ 13.4

1. (ii), (iii) ਅਤੇ (iv)   **2.** X = 0, 1, 2; ਹਾਂ   **3.** X = 6, 4, 2, 0

4. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(ii)

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(iii)

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

5. (i)

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ii)

X	0	1
P(X)	$\frac{25}{36}$	$\frac{11}{36}$

6.

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

7.

X	0	1	2
P(X)	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

8. (i) $k = \frac{1}{10}$ (ii) $P(X < 3) = \frac{3}{10}$ (iii) $P(X > 6) = \frac{17}{100}$

(iv) $P(0 < X < 3) = \frac{3}{10}$

9. (a) $k = \frac{1}{6}$ (b) $P(X < 2) = \frac{1}{2}, P(X \leq 2) = 1, P(X \geq 2) = \frac{1}{2}$

10. 1.5 **11.** $\frac{1}{3}$ **12.** $\frac{14}{3}$

13. Var(X) = 5.833, S.D = 2.415

14.

X	14	15	16	17	18	19	20	21
P(X)	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$

ਮੱਧਮਾਨ = 17.53, Var(X) = 4.78 ਅਤੇ S.D(X) = 2.19

15. E(X) = 0.7 ਅਤੇ Var (X) = 0.21 **16.** B **17.** D

ਅਭਿਆਸ 13.5

1. (i) $\frac{3}{32}$ (ii) $\frac{7}{64}$ (iii) $\frac{63}{64}$

2. $\frac{25}{216}$ **3.** $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

4. (i) $\frac{1}{1024}$ (ii) $\frac{45}{512}$ (iii) $\frac{243}{1024}$

5. (i) $(0.95)^5$ (ii) $(0.95)^4 \times 1.2$ (iii) 1 ï $(0.95)^4 \times 1.2$

(iv) 1 ï $(0.95)^5$

6. $\left(\frac{9}{10}\right)^4$ **7.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left[20C_{12} + {}^{20}C_{13} + ... + {}^{20}C_{20}\right]$

9. $\frac{11}{243}$

10. (a) $1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{50}$ (b) $\frac{1}{2}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$ (c) $1 - \frac{149}{100}\left(\frac{99}{100}\right)^{49}$

11. $\frac{7}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^5$ **12.** $\frac{35}{18}\left(\frac{5}{6}\right)^4$ **13.** $\frac{22 \times 9^3}{10^{11}}$

14. C **15.** A

ਅਧਿਆਇ 13 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. (i) 1 (ii) 0

2. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

3. $\frac{20}{21}$

4. $1-\sum_{r=7}^{10} {}^{10}C_r (0.9)^r (0.1)^{10-r}$

5. (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (ii) $7\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (iii) $1-\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (iv) $\frac{864}{3125}$

6. $\frac{5^{10}}{2\times 6^9}$

7. $\frac{625}{23328}$

8. $\frac{2}{7}$

9. $\frac{31}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^4$

10. $n \geq 4$

11. $\frac{-91}{54}$

12. $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$

13. $\frac{14}{29}$

14. $\frac{3}{16}$

15. (i) 0.5 (ii) 0.05

16. $\frac{16}{31}$

17. A

18. C

19. B

ਪੂਰਕ ਪਾਠ ਸਮਗਰੀ

ਅਧਿਆਇ 7

7.6.3. $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx.$

ਅਸੀਂ ਅਚਲ A ਅਤੇ B ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$px + q = \text{A}\left[\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)\right]+\text{B}$$

$$= \text{A}(2ax + b) + \text{B}$$

ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ µ

$$2a\text{A} = p \text{ ਅਤੇ } \text{A}b + \text{B} = q$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, A ਅਤੇ B ਦੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਇਨਟੇਗਰਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈµ

$$\text{A}\int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx+\text{B}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

$$= \text{AI}_1+\text{BI}_2 \text{, ਜਿੱਥੇ}$$

$$\text{I}_1 = \int (2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx \text{ ਹੈ।}$$

$ax^2 + bx + c = t$, ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $(2ax + b)\text{d}x = \text{d}t$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $$\text{I}_1 = \frac{2}{3}(ax^2+bx+c)^{\frac{3}{2}}+\text{C}_1$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $$\text{I}_2 = \int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪੰਨੇ 328 ਤੇ 7.6.2 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੇ ਇਨਟੇਗਰਲ ਸੂਤਰ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਆਖਿਰਕਾਰ ਪਤਾ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25 . $\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ µ

$$x = A\left[\frac{d}{dx}\left(1+x-x^2\right)\right]+B$$

$$= A\ (1 ï\ 2x) + B$$

ਦੋਵੇਂ ਪੱਖਾਂ ਵਿੱਚ, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ï 2A = 1 ਅਤੇ A + B = 0 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਅਸੀਂ $A = -\frac{1}{2}$ ਅਤੇ $B=\frac{1}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਇਨਟੇਗਰਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ : µ

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}I_2 \qquad (1)$$

$I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$1 + x$ ï $x^2 = t$ ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $(1$ ï $2x)dx = dt$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $I_1 = \int (1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C_1$

$= \frac{2}{3}\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C_1$, ਜਿੱਥੇ C_1 ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

ਅੱਗੇ, $I_2 = \int\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇਹ ਇਨਟੇਗਰਲ = $\int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$

$x-\frac{1}{2}=t$ ਰੱਖੋ। ਤਾਂ $dx = dt$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $I_2 = \int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-t^2}\,dt$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\sin^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C_2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{2}\sqrt{\frac{5}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}+\frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2$$

$$= \frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2,$$

ਜਿੱਥੇ C_2 ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ।

(1) ਵਿੱਚ I_1 ਅਤੇ I_2 ਦੇ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ µ

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1+x-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2}$$

$$+\frac{5}{16}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C,$$ ਜਿੱਥੇ

$$C = -\frac{C_1+C_2}{2}$$ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅਚਲ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.7 ਦੇ ਆਖਿਰ ਵਿੱਚ, ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰੋ :

12. $x\sqrt{x+x^2}$ **13.** $(x+1)\sqrt{2x^2+3}$ **14.** $(x+3)\sqrt{3-4x-x^2}$

ਉੱਤਰ

12. $\frac{1}{3}(x^2+x)^{\frac{3}{2}}-\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8}+\frac{1}{16}\log|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}|+C$

13. $\frac{1}{6}(2x^2+3)^{\frac{3}{2}}+\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+3}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right|+C$

14. $-\frac{1}{3}(3-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right)+\frac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2}+C$

10.7 ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ

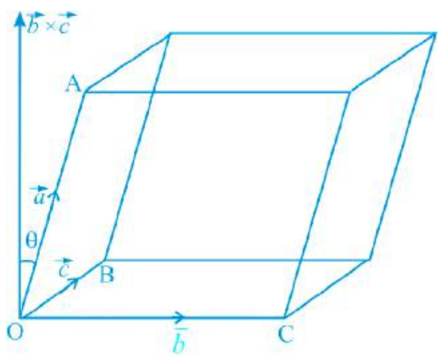
ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ। $\vec{a}$ ਅਤੇ $(\vec{b} \times \vec{c})$ ਦੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਭਾਵ, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ਨੂੰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਦਾ ਇਸ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ (ਜਾਂ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$) ਰਾਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : µ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

ਪ੍ਰੇਖਣ

1. ਕਿਉਂਕਿ $(\vec{b} \times \vec{c})$ ਇੱਕ ਵੈਕਟਰ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ ਭਾਵ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ ਇੱਕ ਸਕੇਲਰ ਰਾਸ਼ੀ ਹੈ।

2. ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤੋਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜੁੜਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਆਇਤਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਵੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 10.28)।



ਚਿੱਤਰ 10.28

ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫ਼ਲਕ ਦੇ ਅਧਾਰ ਨੂੰ ਬਨਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $|\vec{b} \times \vec{c}|$ ਹੈ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਸਮਿਲਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਤੱਲ ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\vec{a}$ ਦਾ ਪ੍ਰੇਖਪਣ ਹੀ ਇਸ ਦੀ ਉਚਾਈ ਹੈ, ਜਿਹੜੀ $\vec{b} \times \vec{c}$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ $\vec{a}$ ਦਾ ਘਟਕ ਹੈ। ਭਾਵ ਇਹ $\dfrac{|\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c})|}{|(\vec{b} \times \vec{c})|}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮਾਂਤਰ ਛੇ ਫ਼ਲਕ ਦਾ ਆਇਤਨ

$$\frac{|\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c})|}{|(\vec{b} \times \vec{c})|} |\vec{b} \times \vec{c}| = |\vec{a} . (\vec{b} \times \vec{c})| \text{ ਹੈ।}$$

3. ਜੇਕਰ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$, ਹੈ, ਤਾਂ

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= (b_2c_3 - b_3c_2)\,\hat{i} + (b_3c_1 - b_1c_3)\,\hat{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\,\hat{k}$$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. ਜੇਕਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ ਹਨ, ਤਾਂ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

(ਤਿੰਨਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੇ ਚੱਕਰੀ ਕ੍ਰਮ ਬਦਲਣ ਤੋਂ ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਮੁੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਦਲਾਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।)

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਪਾਠਕ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ µ

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_2c_1 - a_1c_2)$$

$$= \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}]$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਪਾਠਕ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ ਕਿ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$ ਹੈ।

5. ਤੀਹਰੀ ਸਕੇਲਰ ਗੁਣਨਫਲ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ਵਿੱਚ, ਡੋਟ (dot) ਅਤੇ ਕਰਾਸ (cross) ਨੂੰ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ,

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$$

6. $= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] =$ ï $[\vec{a}, \vec{c},\vec{b}]$. ਅਸਲ ਵਿੱਚ,

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$= \vec{a}.(\text{ï } \vec{c}\times\vec{b})$$

$$= \text{ï } (\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{b}))$$

$$= \text{ï } \left[\vec{a},\vec{c},\vec{b}\right]$$

7. $[\vec{a},\vec{a},\vec{b}]=0.$ ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ

$$[\vec{a},\vec{a},\vec{b}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{a},]$$

$$= [\vec{b},\vec{a},\vec{a}]$$

$$= \vec{b}.(\vec{a}\times\vec{a})$$

$$= \vec{b}.\vec{0}=0. \qquad (\text{ਕਿਉਂਕਿ } \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0})$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਤੇ ਦਿੱਤੇ 7 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਨਤੀਜਾ, ਦੋਵੇਂ ਬਰਾਬਰ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਹਾਲਤਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ।

10.7.1 ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦਾ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣਾ

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਾਂਤਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ, ਤਾਂ $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{0}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=0$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜੇਕਰ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੋਵੇਗਾ, ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ ਹੈ।

ਉਲਟ ਤੌਰ ਤੇ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਵਿੱਚੋਂ ਦੋਵੇਂ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਵੈਕਟਰ ਹਨ, ਅਸੀਂ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\vec{a}$ ਅਤੇ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਦੋਵੇਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਵੈਕਟਰ ਹਨ। ਪਰ $\vec{b}\times\vec{c}$ ਦੋਵੇਂ ਵੈਕਟਰਾਂ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$] $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ ਇਹ ਸਮਤਲੀ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\vec{a} = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ $\vec{a}$ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਵੈਕਟਰਾਂ ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$] ਦੇ ਸਮਤਲੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ $(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਾਂਤਰ ਵੈਕਟਰ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣਗੇ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਦੋ ਵੈਕਟਰ ਜਿਹੜਾ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਵੈਕਟਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਵੀ ਇਸ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਚਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਮਤਲਤਾ ਦੀ ਚਰਚਾ, ਤਿੰਨ ਵੈਕਟਰਾਂ ਦੀ ਸਮਤਲਤਾ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ, ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ਅਤੇ $\overrightarrow{AD}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\vec{a} = 2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = 3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, μ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10.$

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = \hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ μ $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

ਇਸ ਲਈ : ਪ੍ਰਮੇਯ 1 ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਵੈਕਟਰ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\vec{a} = \hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c} = \lambda\hat{i}+7\hat{j}+3\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ λ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$,

ਅਰਥਾਤ
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ \lambda & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow \quad 1(-3+7) - 3(6+\lambda) + 1(14+\lambda) = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda = 0.$

ਉਦਾਹਰਣ 29. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰਾਂ $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}, -(\hat{j}+\hat{k}), 3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਤਿੰਨੋਂ ਵੈਕਟਰ $\overline{AB}, \overline{AC}$ ਅਤੇ $\overline{AD}$ ਸਮਤਲੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਅਰਥਾਤ $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\overline{AB} = -(\hat{j}+\hat{k}) - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -4\hat{i}-6\hat{j}-2\hat{k}$

$\overline{AC} = (3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}) - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$

ਅਤੇ $\overline{AD} = 4(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}) - (4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -8\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

ਇਸ ਲਈ, A, B, C ਅਤੇ D ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 30. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = 2\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ:

$$\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}\right] = (\vec{a}+\vec{b}).((\vec{b}+\vec{c})\times(\vec{c}+\vec{a}))$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a})$$

$$= (\vec{a}+\vec{b}).(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a})$$

(ਕਿਉਂਕਿ $\vec{c}\times\vec{c}=\vec{0}$ ਹੈ।)

$$=\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{a}.(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}.(\vec{b}\times\vec{a})+\vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a})$$

$$=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{a},\vec{c},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{b},\vec{c},\vec{a}\right]$$

$$=2\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]$$ (ਕਿਉਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 31. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right]=\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ :

$$\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{d}\right] = \vec{a}.(\vec{b}\times(\vec{c}+\vec{d}))$$

$$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{d})$$

$$= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{d})$$

$$= \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]+\left[\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right]$$

ਅਭਿਆਸ 10.5

1. ਜੇਕਰ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$ ਹੈ, ਤਾਂ $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right]$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਉੱਤਰ : 24)

2. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ ਅਤੇ $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

3. ਜੇਕਰ ਵੈਕਟਰ $\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $3\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ ਅਤੇ $\hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ λ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ਉੱਤਰ $\lambda = 15$)

4. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}$ ਅਤੇ $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ਹੈ। ਤਾਂ,

(a) ਜੇਕਰ $c_1=1$ ਅਤੇ $c_2=2$ ਹਨ, ਤਾਂ c_3 ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਤੋਂ $\vec{a},\vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋ ਜਾਣ।

(ਉੱਤਰ $c_3 = 2$)

(b) ਜੇਕਰ $c_2 = -1$ ਅਤੇ $c_3 = 1$ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ c_1 ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਨੂੰ ਸਮਤਲੀ ਨਹੀਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

5. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਸਥਿਤੀ ਵੈਕਟਰਾਂ $4\hat{i}+8\hat{j}+12\hat{k}, 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}, 3\hat{i}+5\hat{j}+4\hat{k}$ ਅਤੇ $5\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$ ਵਾਲੇ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ ਸਮਤਲੀ ਹਨ।

6. ਜੇਕਰ ਚਾਰ ਬਿੰਦੂ A(3, 2, 1), B(4, x, 5), C(4, 2, −2) ਅਤੇ D(6, 5, −1) ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। (ਉੱਤਰ $x = 5$)

7. ਜੇਕਰ $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}$ ਅਤੇ $\vec{c}+\vec{a}$ ਸਮਤਲੀ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵੈਕਟਰ $\vec{a}, \vec{b}$ ਅਤੇ $\vec{c}$ ਸਮਤਲੀ ਹੋਣਗੇ।