ਅਧਿਆਇ 7

ਇਨਟਿਗਰਲ Integrals

❖ *Just as a mountaineer climbs a mountain – because it is there, so a good mathematics student studies new material because it is there. – JAMES B. BRISTOL* ❖

7.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

G .W. Leibnitz (1646–1716)

ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਤੇ ਕੇਂਦਰਤ ਹੈ।ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਲਈ ਮੂਲ ਪ੍ਰੇਰਣਾ ਸੀ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ, ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗਰਾਫ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨਾਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ f ਕਿਸੇ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ੀਏਬਲ ਹੈ ਅਰਥਾਤ I ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ f' ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ, ਤਾਂ ਇੱਕ ਕੁਦਰਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਿ I ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ f' ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਫਲਨ f ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਉਹ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਜਿਹਨਾਂ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਫਲਨ ਉਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ, ਇਸ ਫਲਨ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ।ਅੱਗੇ, ਉਹ ਸੂਤਰ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇਹ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਹ ਕਿਰਿਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਬਹੁਤ ਅਮਲੀ ਹਾਲਤਾਂ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦੀ ਹੈ।ਉਦਾਹਰਨ ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਕਿਸੇ ਪਲ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦਾ ਤਤਕਾਲੀ ਵੇਗ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੁਦਰਤੀ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉੱਠਦਾ ਹੈ ਕੀ ਅਸੀਂ ਉਸ ਪਲ ਤੇ ਉਸ ਵਸਤੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਅਮਲੀ ਅਤੇ ਗੈਰ ਅਮਲੀ ਹਲਾਤ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਵਰਗੀਆਂ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਯਤਨਾਂ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਹੈ।

(a) ਜਦੋਂ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਉਸ ਫਲਨ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ,

(b) ਦਿੱਤੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫਲਨ ਦੇ ਗਰਾਫ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਨਾਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਦੋ ਰੂਪਾਂ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ।ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠਾ ਰੂਪ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਮੱਧ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਨੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਇੰਜਨੀਅਰਿੰਗ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਅਮਲੀ ਔਜ਼ਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਿਆਰ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਰਥਸ਼ਾਸਤਰ, ਵਿੱਤ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਿਕਤਾ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦਿਲਚਸਪ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਕੁੱਝ ਮੁੱਢਲੇ ਗੁਣਾਂ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਤਕਨੀਕਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਾਂਗੇ।

7.2 ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (Integration as the Inverse Process of Differentiation)

ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਮੂਲ ਅਰਥਾਤ ਵਾਸਤਵਿਕ ਫਲਨ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਜਾਂ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \dots (1)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \qquad \dots (2)$$

ਅਤੇ $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \dots (3)$$

ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਵਿੱਚ ਫਲਨ $\cos x$ ਫਲਨ $\sin x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\cos x$ ਦਾ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ) $\sin x$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਨਾਲ x^2 ਅਤੇ e^x ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\frac{x^3}{3}$ ਅਤੇ e^x ਹੈ। ਇੱਥੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ C] ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਚਲ ਫਲਨ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{d}{dx}(\sin x + \text{C}) = \cos x\,,\ \frac{d}{dx}(\frac{x^3}{3} + \text{C}) = x^2 \text{ ਅਤੇ } \frac{d}{dx}(e^x + \text{C}) = e^x$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਐਂਟੀ-ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿਲੱਖਣ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਐਂਟੀ-ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਅਚਲ C ਨੂੰ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਚੁਣ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹੀ ਕਾਰਨ ਹੈ ਕਿ C ਨੂੰ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ C ਇੱਕ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਬਦਲ ਕੇ

ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਪ੍ਰਤੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਜਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਫਲਨ F ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, ਸਾਰੇ $x \in \mathrm{I}$ (ਅੰਤਰਾਲ) ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ C, (ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ) ਦੇ ਲਈ $\frac{d}{dx}[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}] = f(x)$, $x \in \mathrm{I}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, f ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ C ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇੱਕੋ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵਾਲੇ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਓ g ਅਤੇ h ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹਨ ਜਿਸਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅੰਤਰਾਲ I ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

$f(x) = g(x)$ ï $h(x)$, $\forall x \in \mathrm{I}$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ $f = g$ ï h ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਤਾਂ $\frac{df}{dx} = f' = g'$ ï h' ਨਾਲ $f'(x) = g'(x)$ ï $h'(x)$ $\forall x \in \mathrm{I}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਜਾਂ $f'(x) = 0$, ਸਾਰੇ $\forall x \in \mathrm{I}$ ਲਈ (ਪਰਿਕਲਪਨਾ ਨਾਲ)

ਜਾਂ I ਵਿੱਚ x ਦੇ ਬਾਬਤ f ਦੇ ਬਦਲਾਵ ਦੀ ਦਰ ਸਿਫਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ f ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਟਿੱਪਣੀ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਣਾ ਜਾਇਜ਼ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਵਾਰ $\{\mathrm{F} + \mathrm{C}, \mathrm{C} \in \mathbf{R}\}$, f ਦੇ ਸਾਰੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਨਵੇਂ ਸੰਕੇਤ, $\int f(x)\,dx$ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਕਿ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਪੂਰੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਏਗਾ। ਜਿਸ ਨੂੰ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ f ਦੇ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸੰਕੇਤਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $\frac{dy}{dx} = f(x)$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ $y = \int f(x)\,dx$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਸੌਖਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਸੰਕੇਤਾਂ@ਪਦਾਂ ਵਾਕਾਂਸ ਦਾ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਅਰਥਾਂ ਸਮੇਤ ਸਾਰਣੀ 7.1 ਵਿੱਚ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਨੀ 7.1

ਸੰਕੇਤ@ਪਦ@ਵਾਕਾਂਸ਼	ਅਰਥ
$\int f(x)\,dx$	f ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਇਨਟਿਗਰਲ
$\int f(x)\,dx$ ਵਿੱਚ $f(x)$	ਇਨਟੈਗਰੈਂਡ

$\int f(x)\, dx$ ਵਿੱਚ x	ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਚਲ
ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਕਰਨਾ	ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ
f ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ	ਇੱਕ ਫਲਨ F ਜਿਸਦੇ ਲਈ $F'(x) = f(x)$
ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ	ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕਿਰਿਆ
ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਅਚਲ	ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਚਲ ਫਲਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਦੇ ਸੂਤਰ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਤੁਰੰਤ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਅਸੀਂ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ **Derivatives**	ਇਨਟਿਗਰਲ (ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ) **Integrals (Antiderivatives)**
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq \text{ï}\, 1$
ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਿਆ	
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	$\int dx = x + C$
(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
(iii) $\frac{d}{dx}(\text{ï}\ \cos x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
(v) $\frac{d}{dx}(\text{ï}\ \cot x) = \text{cosec}^2 x$	$\int \text{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$
(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
(vii) $\frac{d}{dx}(\text{ï}\ \text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$	$\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = \text{ï}\ \text{cosec}\, x + C$

(viii) $\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + C$

(ix) $\frac{d}{dx}\left(-\cos^{-1}x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1}x + C$

(x) $\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(-\cot^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1}x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(-\operatorname{cosec}^{-1}x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\quad$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1}x + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ $\quad$ $\int e^x\,dx = e^x + C$

(xv) $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$

(xvi) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$ $\quad$ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

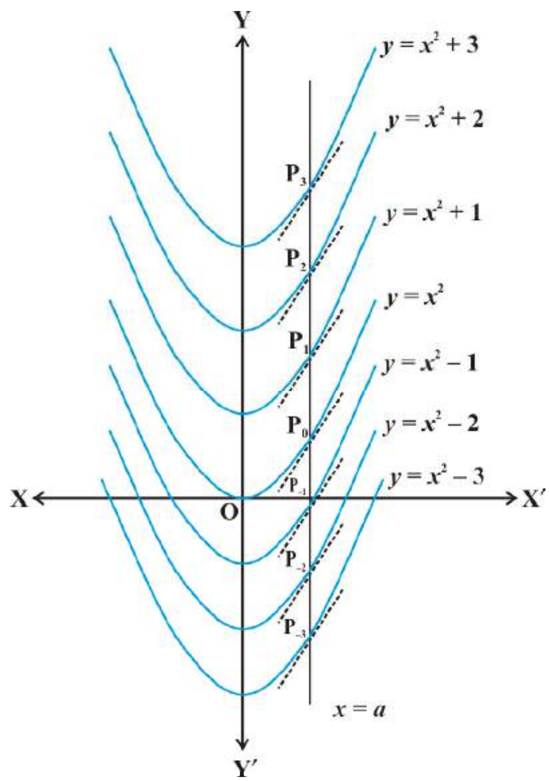
ਟਿੱਪਣੀ ਅਮਲੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਖ ਵੱਖ ਫਲਨ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਖਾਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

7.2.1 *ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਜਿਆਮਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ (Geometrical interpretation of indefinite integral)*

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $f(x) = 2x$ ਤਾਂ $\int f(x)\,dx = x^2 + C$ ਅਤੇ C ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਵਿਭਿੰਨ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਪਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਜਿਆਮਤਿਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $y = x^2 + C$, ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ, ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। C, ਨੂੰ

ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਦਾਨ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਸਭ ਦਾ ਸਥਾਪਿਤ ਰੂਪ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਧੁਰਾ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਹੈ।

ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ C = 0 ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $y = x^2$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ। C = 1 ਦੇ ਲਈ, ਵਕਰ $y = x^2 + 1$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। C = ï 1, ਦੇ ਲਈ ਵਕਰ $y = x^2$ ï 1 ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕਾਈ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ C, ਦੇ ਹਰੇਕ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਲਈ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਿਖਰ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਧਨਾਤਮਕ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ ਅਤੇ C ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹਰੇਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦਾ ਸਿਖਰ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪਾਸੇ ਵੱਲ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁੱਝ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.1

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਰੇਖਾ $x = a$ ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 7.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $a > 0$ ਲਿਆ ਹੈ। ਇਹ ਸਿੱਟਾ $a < 0$ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਜਦੋਂਕਿ ਰੇਖਾ $x = a$ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2$ ï 1, $y = x^2$ ï 2 ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ P_0, P_1, P_2, $P_{ï1}$, $P_{ï2}$ ਆਦਿ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦਾ ਮੁੱਲ $2a$ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int 2x\,dx = x^2 + C = F_C(x)$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਨਾਲ ਪਤਾ ਚਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰਾਂ $y = F_C(x)$, $C \in \mathbf{R}$, ਦੇ ਰੇਖਾ $x = a$, ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਇੱਥੇ $a \in \mathbf{R}$ ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਕਥਨ $\int f(x)\,dx = F(x) + C = y$ (ਮੰਨ ਲਉ) ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। C ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਮੈਂਬਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਵਕਰ ਨੂੰ

ਆਪਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਤਬਦੀਲ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਇਹੀ ਜਿਆਮਿਤਕ ਵਿਆਖਿਆ ਹੈ।

7.2.2 *ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ* (Some properties of indefinite integrals)

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।

(i) ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨਤੀਜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ।

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

ਅਤੇ $\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C}$, ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮਾਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ F] f ਦਾ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ ਅਰਥਾਤ

$$\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

ਤਾਂ $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੈ ਕਿ

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\int f'(x)\,dx = f(x) + \mathrm{C}$

ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਦੋ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਹੀ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

ਪ੍ਰਮਾਣ ਮੰਨ ਲਉ f ਅਤੇ g ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$$

ਜਾਂ
$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx\right] = 0$$

ਜਾਂ $\int f(x)\, dx - \int g\,(x)\, dx = \mathrm{C}$, ਜਿੱਥੇ C ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। (ਕਿਉਂ ?)

ਜਾਂ $\int f(x)\, dx = \int g\,(x)\, dx + \mathrm{C}$

ਇਸ ਲਈ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ $\left\{\int f(x)\, dx + \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$

ਜਾਂ $\left\{\int g(x)\, dx + \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int f(x)\, dx$ ਅਤੇ $\int g(x)\, dx$ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਦੋ ਪਰਿਵਾਰਾਂ $\left\{\int f(x)\, dx + \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_1 \in \mathbf{R}\right\}$ ਅਤੇ $\left\{\int g(x)\, dx + \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_2 \in \mathbf{R}\right\}$ ਦੀ ਸਮਤੁਲਨਾ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ $\int f(x)\, dx = \int g(x)\, dx$, ਲਿਖ ਕੇ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਦਾ ਕੋਈ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

ਪ੍ਰਮਾਣ ਗੁਣ (i) ਨਾਲ

$$\frac{d}{dx}\left[\int [f(x) + g(x)]\, dx\right] = f(x) + g(x) \qquad \ldots (1)$$

ਦੂਜੇ ਪਾਸੇ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\, dx = f(x) + g(x) \qquad \ldots (2)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣ (ii) ਦੀ ਰੋਸ਼ਨੀ ਵਿੱਚ (1) ਅਤੇ (2) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int \left(f(x) + g(x)\right) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

(iv) ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k, ਦੇ ਲਈ $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

ਪ੍ਰਮਾਣ : ਗੁਣ (i) ਨਾਲ $\frac{d}{dx}\int k\, f(x)\, dx = k\, f(x)$

ਅਤੇ $\frac{d}{dx}\left[k \int f(x)\, dx\right] = k \frac{d}{dx}\int f(x)\, dx = k\, f(x)$

ਇਸ ਲਈ ਗੁਣ (ii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

(v) ਗੁਣ (iii) ਅਤੇ (iv) ਦਾ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ k_1, k_2, ..., k_n ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

$$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2 (x) + ... + k_n f_n (x)] \, dx$$
$$= k_1 \int f_1(x) \, dx + k_2 \int f_2 (x) \, dx + ... + k_n \int f_n (x) \, dx$$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਲੱਭਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ। ਲੋੜੀਂਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਖੋਜ, ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਨੂੰ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰਨਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1. ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\cos 2x$ (ii) $3x^2 + 4x^3$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

ਹੱਲ :

(i) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\cos 2x$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2 \cos 2x$

ਜਾਂ $\cos 2x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)$

ਇਸ ਲਈ $\cos 2x$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{2}\sin 2x$ ਹੈ।

(ii) ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਖੋਜ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $3x^2 + 4x^3$ ਹੈ।

ਹੁਣ $\frac{d}{dx}\left(x^3 + x^4\right) = 3x^2 + 4x^3$

ਇਸ ਲਈ $3x^2 + 4x^3$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $x^3 + x^4$ ਹੈ।

(iii) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0$ ਅਤੇ $\frac{d}{dx}[\log(-x)] = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0$

ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $\frac{d}{dx}\left(\log|x|\right) = \frac{1}{x}, x \neq 0$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{1}{x} dx = \log|x|$, ਜੋ ਕਿ $\frac{1}{x}$ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{x^3 - 1}{x^2} dx$ (ii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 1) \, dx$ (iii) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 2 e^x$ ï $\frac{1}{x}) \, dx$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹੈ :

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2}\, dx = \int x\, dx - \int x^{-2}\, dx \qquad \text{(ਗੁਣਾ v ਨਾਲ)}$$

$$= \left(\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1\right) - \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2\right);$$ C_1, C_2 ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਅਚਲ ਹਨ।

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{x^{-1}}{-1} - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C_1 - C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} + C,$$ ਇੱਥੇ $C = C_1$ ï C_2 ਇੱਕ ਹੋਰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ ਹੈ।

> ☛ ਟਿੱਪਣੀ ਇਸਦੇ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਆਖਰੀ ਉੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਅਚਲ ਲਿਖਾਂਗੇ।

(ii) ਇੱਥੇ

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + 1)\, dx = \int x^{\frac{2}{3}}\, dx + \int dx$$

$$= \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + x + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + x + C$$

(iii) ਇੱਥੇ $\int (x^{\frac{3}{2}} + 2e^x - \frac{1}{x})\, dx = \int x^{\frac{3}{2}}\, dx + \int 2e^x\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + 2e^x \text{ ï } \log|x| + C$$

$$= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + 2e^x \text{ ï } \log|x| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int (\sin x + \cos x)\, dx$ (ii) $\int \operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx$

(iii) $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ

$$\int (\sin x + \cos x)\, dx = \int \sin x\, dx + \int \cos x\, dx$$

= ï $\cos x + \sin x + \text{C}$

(ii) ਇੱਥੇ

$$\int (\operatorname{cosec} x\, (\operatorname{cosec} x + \cot x)\, dx = \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx$$

= ï $\cot x - \operatorname{cosec} x + \text{C}$

(iii) ਇੱਥੇ

$$\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 x\, dx - \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x - \sec x + \text{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4. $f(x)$ = $4x^3$ ï 6 ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਫਲਨ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਪਤਾ ਕਰੋ ਇੱਥੇ F(0) = 3 ਹੈ।

ਹੱਲ : $f(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ x^4 ï $6x$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\frac{d}{dx}(x^4 - 6x)$ = $4x^3$ ï 6, ਇਸ ਲਈ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F,

F(x) = x^4 ï $6x$ + C, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਇੱਥੇ C ਅਚਲ ਹੈ।

ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ F(0) = 3

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ 3 = 0 ï 6 × 0 + C

ਜਾਂ C = 3

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F (x) = x^4 ï $6x$ + 3 ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਫਲਨ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

(i) ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਕਿ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ ਤਾਂ F + C, ਜਿੱਥੇ C ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ, ਵੀ f ਦਾ ਇੱਕ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਫਲਨ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਇੱਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਪਤਾ

ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ F ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਅਚਲ ਜੋੜ ਕੇ f ਦੇ ਅਨੰਤ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ $F(x) + C, C \in \mathbf{R}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵਿਹਾਰਕ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ, ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸ਼ਰਤ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤੋਂ C ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਕਦੇ&ਕਦੇ F ਨੂੰ ਅਧਾਰੀ ਫਲਨਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਬਹੁਪਦ, ਲਘੂਗਣਕ, ਚਲ ਘਾਤ ਫਲਨ, ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਅਤੇ ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\int f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ : ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\int e^{-x^2} dx$ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਨਿਰੀਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ e^{-x^2} ਹੈ।

(iii) ਜਦੋਂ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਚਲ x, ਦੇ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਉਸ ਹਿਸਾਬ ਨਾਲ ਨਵੀਨੀਕਰਨ ਕਰ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ :

$$\int y^4\,dy = \frac{y^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5} y^5 + C$$

7.2.3 *ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਤੁਲਨਾ* (*Comparision between differentiation and integration*)

1. ਦੋਵੇਂ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਸੰਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ।
2. ਦੋਵੇਂ ਰੈਖਿਕਤਾ ਗੁਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਰਥਾਤ

   (i) $$\frac{d}{dx}\left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\right] = k_1 \frac{d}{dx} f_1(x) + k_2 \frac{d}{dx} f_2(x)$$

   (ii) $$\int \left[k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x)\right] dx = k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx$$

   ਇੱਥੇ k_1, k_2 ਅਚਲ ਹਨ।
3. ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਡਿਫਰੈਸ਼ੀਏਬਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਠੀਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੇ ਫਲਨ ਇਨਟਿਗਰੇਬਲ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਨਾਨ ਡਿਫਰੈਸ਼ੀਏਬਲ ਅਤੇ ਨਾਨ ਇਨਟਿਗਰੇਬਲ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਉੱਚ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।
4. ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਉਹ ਕਿਸੇ ਜੋੜਨ ਅਚਲ ਤੱਕ ਸੀਮਿਤ ਵਿਲੱਖਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਰਥਾਤ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਦੋ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
5. ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ P ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਘਾਤ ਬਹੁਪਦ P ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਇੱਕ ਘੱਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਫਲਨ P ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਹੁਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਘਾਤ

ਬਹੁਪਦ P ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

6. ਅਸੀਂ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਚਰਚਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਪਰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਕਦੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਉਸ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 7.7 ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।
7. ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਜ਼ਿਆਮਿਤਕ ਅਰਥ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਫਲਨ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਬਾਰਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਜਿਆਮਿਤਕ ਤੌਰ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵਕਰਾਂ, ਚਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਧੁਰੇ ਦੇ, ਲੰਬ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਕੱਟਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ, ਦੀਆਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਣ।
8. ਕੁੱਝ ਭੌਤਿਕ ਪਰਿਮਾਣਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਦਾਹਰਨ : ਕਿਸੇ ਕਣ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ t ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਗਈ ਦੂਰੀ ਜਦੋਂ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਵੇਗ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਜਦੋਂ ਵੇਗ ਪਤਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਤੈਅ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
9. ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਾ ਦਾ ਭਾਵ ਜੁੜਿਆ ਹੈ ਠੀਕ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਭਾਵ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਵੀ ਜੁੜਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਦੇ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 7.7 ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।
10. ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਉਲਟ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਉਪਭਾਗ 7.2.2 (i) ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਚੁੱਕੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 7.1

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਇਨਟਿਗਰਲ) ਨਿਰੀਖਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\sin 2x$ **2.** $\cos 3x$ **3.** e^{2x}

4. $(ax + b)^2$ **5.** $\sin 2x \text{ ï } 4\,e^{3x}$

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\int (4\,e^{3x} + 1)\,dx$ **7.** $\int x^2 (1 \text{ ï } \frac{1}{x^2})\,dx$ **8.** $\int (ax^2 + bx + c)\,dx$

9. $\int (2x^2 + e^x)\,dx$ **10.** $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ **11.** $\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\,dx$

12. $\int \frac{x^3 + 3x + 4}{\sqrt{x}}\,dx$ **13.** $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\,dx$ **14.** $\int (1 - x)\sqrt{x}\,dx$

15. $\int \sqrt{x}\,(3x^2 + 2x + 3)\,dx$ **16.** $\int (2x - 3\cos x + e^x)\,dx$

17. $\int (2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x})\, dx$

18. $\int \sec x (\sec x + \tan x)\, dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\text{cosec}^2 x}\, dx$

20. $\int \frac{2 \text{ ï } 3\sin x}{\cos^2 x}\, dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦਾ ਚੋਣ ਕਰੋ :

21. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਹੈ।

(A) $\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ (B) $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2}x^2 + C$

(C) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$ (D) $\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$

22. ਜਦੋਂ ਕਿ $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $f(2) = 0$ ਤਾਂ $f(x)$ ਹੈ :

(A) $x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$ (B) $x^3 + \frac{1}{x^4} + \frac{129}{8}$

(C) $x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{129}{8}$ (D) $x^3 + \frac{1}{x^4} - \frac{129}{8}$

7.3 ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ (Methods of Integration)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹੋ ਜਿਹੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ, ਜੋ ਕੁੱਝ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨਾਲ ਸਰਲਤਾਪੂਰਵਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਸਨ। ਇਹ ਨਿਰੀਖਣ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਵਿਧੀ ਸੀ, ਇਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ F ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ f ਹੈ ਇਸ ਤੋਂ f ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਪਰ ਨਿਰੀਖਣ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਇਹ ਵਿਧੀ ਬਹੁਤ ਫਲਨਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤਬਦੀਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਉਹਨਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹੋਰ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਮੁੱਖ ਵਿਧੀਆਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤੇ ਆਧਾਰਿਤ ਹਨ।

1. ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
2. ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ
3. ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

7.3.1 *ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by substitution)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ x ਨੂੰ t ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਲਈ $x = g(t)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int f(x)\, dx$ ਹੋਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ

ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{I} = \int f(x)\, dx \text{ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।}$$

ਹੁਣ $x = g(t)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $\dfrac{dx}{dt} = g'(t)$

ਅਸੀਂ $dx = g'(t)\, dt$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\mathrm{I} = \int f(x)\, dx = \int f\{g(t)\}\, g'(t)\, dt$

ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਇਹ ਚਲ ਬਦਲਣ ਦਾ ਸੂਤਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਉਪਲਬਧ ਔਜ਼ਾਰਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਔਜ਼ਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹਮੇਸ਼ਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਕਿ ਸਹੀ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ? ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂਕਿ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

(i) $\sin mx$ (ii) $2x \sin (x^2 + 1)$ (iii) $\dfrac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(iv) $\dfrac{\sin (\tan^{-1} x)}{1+x^2}$

ਹੱਲ :

(i) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ mx ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ m ਹੈ। ਅੰਤ $mx = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਕਿ $mdx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin mx\, dx = \dfrac{1}{m}\int \sin t\, dt$ = ï $\dfrac{1}{m} \cos t + \mathrm{C}$ = ï $\dfrac{1}{m} \cos mx + \mathrm{C}$

(ii) $x^2 + 1$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $2x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $x^2 + 1 = t$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $2x\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int 2x \sin (x^2 + 1)\, dx = \int \sin t\, dt$ = ï $\cos t + \mathrm{C}$ = ï $\cos (x^2 + 1) + \mathrm{C}$

(iii) $\sqrt{x}$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$\sqrt{x} = t$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = dt$ ਜਿਸ ਨਾਲੇ $dx = 2t\, dt$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{\tan^4 t \sec^2 t\; 2t\, dt}{t} = 2\int \tan^4 t \;\sec^2 t\, dt$

ਫਿਰ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੂਸਰਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ $\tan t = u$ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂਕਿ $\sec^2 t\, dt = du$

ਇਸ ਲਈ $2\int \tan^4 t \sec^2 t\, dt = 2\int u^4\, du = 2\frac{u^5}{5} + C$

$= \frac{2}{5}\tan^5 t + C$ (ਕਿਉਂਕਿ $u = \tan t$)

$= \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C$ (ਕਿਉਂਕਿ $t = \sqrt{x}$)

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\tan^4 \sqrt{x} \sec^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{5}\tan^5 \sqrt{x} + C$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ $\tan \sqrt{x} = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ

(iv) $\tan^{-1} x$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\frac{1}{1+x^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $\tan^{\text{ï}1} x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਤਾਂ ਕਿ $\frac{dx}{1+x^2} = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}\, dx = \int \sin t\, dt = \text{ï}\ \cos t + C = \text{ï}\ \cos(\tan^{\text{ï}1} x) + C$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁੱਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, ਤੇ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਹਵਾਲੇ ਤੋਂ ਵਰਤਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

(i) $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$

$\cos x = t$, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂਕਿ $\sin x\, dx = \text{ï}\ dt$

ਹੁਣ $\int \tan x\, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C = -\log|\cos x| + C$

ਅਰਥਾਤ $\int \tan x\, dx = \log|\sec x| + C$

(ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

$\sin x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂਕਿ $\cos x \, dx = dt$

ਤਦ $\int \cot x \, dx = \int \frac{dt}{t}$

$$= \log |t| + C$$

$$= \log |\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x \, (\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$

$\sec x + \tan x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ $\sec x \, (\tan x + \sec x) \, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \sec x \, dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \text{cosec}\, x \, dx = \log |\text{cosec}\, x - \cot x| + C$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\int \text{cosec}\, x \, dx = \int \frac{\text{cosec}\, x \, (\text{cosec}\, x + \cot x)}{(\text{cosec}\, x + \cot x)} dx$

$\text{cosec}\, x + \cot x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ
ਤਾਂ ਜੋ $\text{ï} \; \text{cosec}\, x \, (\cot x + \text{cosec}\, x) \, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \text{cosec}\, x \, dx = \text{ï} \int \frac{dt}{t} = \text{ï} \log |t| = \text{ï} \log |\text{cosec}\, x + \cot x| + C$

$$= \text{ï} \log \left| \frac{\text{cosec}^2 x - \cot^2 x}{\text{cosec}\, x - \cot x} \right| + C$$

$$= \log |\text{cosec}\, x - \cot x| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 6. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin (x + a)} dx$ (iii) $\int \frac{1}{1 + \tan x} dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \, (\sin x) \, dx$

$$= \int (1 ï \cos^2 x) \cos^2 x \, (\sin x) \, dx$$

$t = \cos x$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $dt = ï \sin x \, dx$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin^2 x \cos^2 x \, (\sin x) \, dx = -\int (1 ï t^2) \, t^2 \, dt$

$$= -\int (t^2 ï t^4) \, dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

(ii) $x + a = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)} dx = \int \frac{\sin (t-a)}{\sin t} dt$

$$= \int \frac{\sin t \cos a - \cos t \sin a}{\sin t} dt$$

$$= \cos a \int dt ï \sin a \int \cot t \, dt$$

$$= (\cos a)\, t - (\sin a) \left[\log |\sin t| + C_1\right]$$

$$= (\cos a)\, (x + a) - (\sin a) \left[\log |\sin (x+a)| + C_1\right]$$

$$= x \cos a + a \cos a - (\sin a) \log |\sin (x+a)| - C_1 \sin a$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{\sin x}{\sin (x+a)} dx = x \cos a ï \sin a \log |\sin (x + a)| + C$

ਇੱਥੇ $C = ï C_1 \sin a + a \cos a$, ਇੱਕ ਹੋਰ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ ਹੈ।

(iii) $\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos x + \sin x}$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x ï \sin x) \, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos x ï \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad \ldots (1)$$

ਹੁਣ $\quad I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\, dx$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਹੁਣ $\cos x + \sin x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ (ï $\sin x + \cos x$) $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C_2 = \log |\cos x + \sin x| + C_2$

I ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log |\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log |\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log |\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

ਅਭਿਆਸ 7.2

1 ਤੋਂ 37 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{2x}{1 + x^2}$
2. $\frac{(\log x)^2}{x}$
3. $\frac{1}{x + x \log x}$
4. $\sin x \sin (\cos x)$
5. $\sin (ax + b) \cos (ax + b)$
6. $\sqrt{ax + b}$
7. $x\sqrt{x + 2}$
8. $x\sqrt{1 + 2x^2}$
9. $(4x + 2)\sqrt{x^2 + x + 1}$
10. $\frac{1}{x - \sqrt{x}}$
11. $\frac{x}{\sqrt{x + 4}}, x > 0$
12. $(x^3 - 1)^{\frac{1}{3}} x^5$
13. $\frac{x^2}{(2 + 3x^3)^3}$
14. $\frac{1}{x (\log x)^m}, x > 0, m \neq 1$
15. $\frac{x}{9 - 4x^2}$
16. $e^{2x + 3}$
17. $\frac{x}{e^{x^2}}$
18. $\frac{e^{\tan^{-1} x}}{1 + x^2}$
19. $\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$
20. $\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}$

21. $\tan^2 (2x \text{ ï } 3)$ **22.** $\sec^2 (7 \text{ ï } 4x)$ **23.** $\dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

24. $\dfrac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}$ **25.** $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1-\tan x)^2}$ **26.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\cos 2x$ **28.** $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$ **29.** $\cot x \log \sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ **31.** $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$ **32.** $\dfrac{1}{1+\cot x}$

33. $\dfrac{1}{1-\tan x}$ **34.** $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x \cos x}$ **35.** $\dfrac{(1+\log x)^2}{x}$

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$ **37.** $\dfrac{x^3 \sin\left(\tan^{-1}x^4\right)}{1+x^8}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 38 ਅਤੇ 39 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

38. $\int \dfrac{10x^9 + 10^x \log_e^{10}\, dx}{x^{10} + 10^x}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $10^x \text{ ï } x^{10} + C$ (B) $10^x + x^{10} + C$

(C) $(10^x - x^{10})^{\text{ï}1} + C$ (D) $\log (10^x + x^{10}) + C$

39. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x \text{ ï } \cot x + C$

(C) $\tan x \cot x + C$ (D) $\tan x \text{ ï } \cot 2x + C$

7.3.2 *ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ* (*Integration using trigonometric identities*)

ਜਦੋਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜੁੜੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁੱਝ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਤਤਸਮਕ $\cos 2x = 2\cos^2 x$ ï 1 ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ ਜਿਸ ਨਾਲ

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) ਤਤਸਮਕ $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin (x+y) + \sin (x$ ï $y)]$, ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ (ਕਿਉਂ)

ਤਦ $$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) ਤਤਸਮਕ $\sin 3x = 3\sin x$ ï $4\sin^3 x$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$

$$= \text{ ï } \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1$ ï $\cos^2 x) \sin x\, dx$

$\cos x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ï $\sin x\, dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $$\int \sin^3 x\, dx = -\int (1-t^2)\, dt = -\int dt + \int t^2\, dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ ਸਮਤੁੱਲ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 7-3

1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\sin^2 (2x + 5)$ **2.** $\sin 3x \cos 4x$ **3.** $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$

4. $\sin^3 (2x + 1)$ **5.** $\sin^3 x \cos^3 x$ **6.** $\sin x \sin 2x \sin 3x$

7. $\sin 4x \sin 8x$ **8.** $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ **9.** $\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$

10. $\sin^4 x$ **11.** $\cos^4 2x$ **12.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

13. $\dfrac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$ **14.** $\dfrac{\cos x - \sin x}{1+\sin 2x}$ **15.** $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\tan^4 x$ **17.** $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$ **18.** $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

19. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$ **20.** $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$ **21.** $\sin^{-1} (\cos x)$

22. $\dfrac{1}{\cos (x-a) \cos (x-b)}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

23. $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\tan x + \cot x + C$ (B) $\tan x + \operatorname{cosec} x + C$

(C) $-\tan x + \cot x + C$ (D) $\tan x + \sec x + C$

24. $\displaystyle\int \frac{e^x (1+x)}{\cos^2 (e^x x)} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $-\cot (ex^x) + C$ (B) $\tan (xe^x) + C$

(C) $\tan (e^x) + C$ (D) $\cot (e^x) + C$

7.4 ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ (Integrals of Some Particular Functions)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਦੂਸਰੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

(1) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$ **(2)** $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

(3) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ **(4)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

(5) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$ **(6)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਨਤੀਜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(1) ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)}$

$$= \frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a) - (x-a)}{(x-a)(x+a)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right]$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|(x-a)| - \log|(x+a)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

(2) ਉਪਰੋਕਤ (1) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{(a+x)+(a-x)}{(a+x)(a-x)}\right] = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x}\right]$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a-x} + \int \frac{dx}{a+x}\right]$

$$= \frac{1}{2a}[-\log|a-x| + \log|a+x|] + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

ਟਿੱਪਣੀ (1) ਵਿੱਚ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਭਾਗ 7.5 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

(3) ਮੰਨ ਲਓ $x = a \tan\theta$ ਤਦ $dx = a \sec^2\theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a \sec^2\theta \, d\theta}{a^2 \tan^2\theta + a^2}$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(4) ਮੰਨ ਲਓ $x = a \sec\theta$ ਤਦ $dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2}}$

$$= \int \sec\theta \, d\theta = \log\left|\sec\theta + \tan\theta\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C, \text{ ਇੱਥੇ } C = C_1 - \log|a|$$

(5) ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $x = a \sin\theta$ ਤਦ $dx = a \cos\theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}} = \int d\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

(6) ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $x = a \tan\theta$ ਤਦ $dx = a \sec^2\theta \, d\theta$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \sec^2\theta \, d\theta}{\sqrt{a^2 \tan^2\theta + a^2}}$

$$= \int \sec\theta \, d\theta = \log\left|(\sec\theta + \tan\theta)\right| + C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1}\right| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C\text{, ਇੱਥੇ } C = C_1 \text{ ï } \log|a|$$

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਪੱਖ ਨਾਲ ਉਪਯੋਗੀ ਹਨ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸਿੱਧੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

(7) ਇਨਟਿਗਰਲ $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ $x+\frac{b}{2a}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$ ਅਤੇ $\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2} = \pm k^2$ ਲਿਖਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ

$\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)$ ਦੇ ਚਿੰਨ੍ਹ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਰਹਿੰਦੇ ਹੋਏ ਇਹ ਇਨਟਿਗਰਲ $\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2\pm k^2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ (7) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(9) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, ਜਿੱਥੇ p, q, a, b, c ਅਚਲ ਹਨ, ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A ਅਤੇ B ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹੈ ਤਾਂਕਿ

$$px + q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c) + B = A\,(2ax+b) + B$$

A ਅਤੇ B, ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। A ਅਤੇ B ਦੇ ਪਤਾ ਲੱਗਣ ਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(10) $\int\frac{(px+q)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ (9) ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਪਤਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ, ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀਆਂ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-16}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{dx}{x^2-4^2} = \frac{1}{8}\log\left|\frac{x-4}{x+4}\right| + C$ [7.4 (1) ਨਾਲ]

(ii) $\int \frac{dx}{2x-x^2} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$

x ï $1 = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sin^{-1}(t) + C$ [7.4 (5) ਨਾਲ]

$= \sin^{-1}(x$ ï $1) + C$

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$ (ii) $\int \frac{dx}{3x^2+13x-10}$ (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}}$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ x^2 ï $6x + 13 = x^2$ ï $6x + 3^2$ ï $3^2 + 13 = (x$ ï $3)^2 + 4$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{1}{(x-3)^2+2^2}\,dx$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ x ï $3 = t$ rc $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{x^2-6x+13} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{t}{2} + C$ [7.4 (3) ਨਾਲ]

$= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ 7-4(7) ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦੇ ਹਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$3x^2+13x-10 = 3\left(x^2+\frac{13x}{3}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= 3\left[\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2\right] \quad \text{(ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਤੇ)}$$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{13}{6}\right)^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$

ਹੁਣ $x+\frac{13}{6} = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\displaystyle\int \frac{dx}{3x^2+13x-10} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{17}{6}\right)^2}$

$$= \frac{1}{3\times 2\times \frac{17}{6}} \log\left|\frac{t-\frac{17}{6}}{t+\frac{17}{6}}\right| + C_1 \qquad \text{[7.4 (i) ਤੋਂ]}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{x+\frac{13}{6}-\frac{17}{6}}{x+\frac{13}{6}+\frac{17}{6}}\right| + C_1 = \frac{1}{17}\log\left|\frac{6x-4}{6x+30}\right| + C_1$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right| + C, \text{ where } C = C_1 + \frac{1}{17}\log\frac{1}{3}$$

(iii) ਇੱਥੇ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left(x^2-\frac{2x}{5}\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2}} \quad \text{(ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਲਈ)}$$

ਹੁਣ $x-\frac{1}{5}=t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2x}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| t + \sqrt{t^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} \right| + C \qquad \text{[7.4 (4) ਨਾਲ]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \log \left| x - \frac{1}{5} + \sqrt{x^2 - \frac{2x}{5}} \right| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx$

ਹੱਲ :

(i) ਸੂਤਰ 7-4(9) ਦਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$x + 2 = A\frac{d}{dx}\left(2x^2+6x+5\right) + B = A\,(4x+6) + B$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$4A = 1$ ਅਤੇ $6A + B = 2$ ਅਰਥਾਤ $A = \frac{1}{4}$ ਅਤੇ $B = \frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{4x+6}{2x^2+6x+5}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+6x+5}$

$$= \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{2} I_2 \quad \text{(ਮੰਨ ਲਉ)} \qquad \ldots (1)$$

I_1 ਵਿੱਚ $2x^2 + 6x + 5 = t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $(4x + 6)\,dx = dt$ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C_1 = \log|2x^2+6x+5| + C_1$ ... (2)

ਅਤੇ $$\mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{2x^2+6x+5} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+3x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

ਹੁਣ $x+\frac{3}{2}=t$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\times\frac{1}{2}}\tan^{-1}2t+\mathrm{C}_2 \qquad \text{[7.4 (3) ਨਾਲ]}$$

$$= \tan^{-1}2\left(x+\frac{3}{2}\right)+\mathrm{C}_2 = \tan^{-1}(2x+3)+\mathrm{C}_2 \qquad \ldots (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਦੀ ਵਰਤੋਂ (1) ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}\,dx = \frac{1}{4}\log\left|2x^2+6x+5\right|+\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3)+\mathrm{C},$$

ਜਿੱਥੇ $\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}_1}{4}+\frac{\mathrm{C}_2}{2}$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ 7.4 (10) ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ $x+3$

$x+3 = \mathrm{A}\,\frac{d}{dx}(5-4x-x^2)+\mathrm{B}$ = A (ï 4 ï 2x) + B

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ï 2A = 1 ਅਤੇ ï 4 A + B = 3,

ਅਰਥਾਤ A = $-\frac{1}{2}$ ਅਤੇ B = 1

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-4-2x)\,dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}+\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\ \mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2 \qquad \ldots (1)$$

I_1, ਵਿੱਚ 5 ï 4x ï x^2 = t, ਰੱਖਣ ਤੇ (ï 4 ï 2x) $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $$\mathrm{I}_1 = \int \frac{(-4-2x)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+\mathrm{C}_1$$

$$= 2\sqrt{5-4x-x^2} + C_1 \qquad \text{... (2)}$$

ਹੁਣ $\quad I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ

$x + 2 = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dt$

ਇਸ ਲਈ $\quad I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \sin^{-1}\frac{t}{3} + C_2$ [7.4 (5) ਨਾਲ]

$$= \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C_2 \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਨਾਂ (2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ (1) ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} = -\sqrt{5\text{ ï }4x\text{ ï }x^2} + \sin^{-1}\frac{x+2}{3} + C$$ ਜਿੱਥੇ $C = C_2 - \frac{C_1}{2}$

ਅਭਿਆਸ 7.4

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 23 ਤੱਕ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{3x^2}{x^6+1}$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ **3.** $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$ **5.** $\frac{3x}{1+2x^4}$ **6.** $\frac{x^2}{1-x^6}$

7. $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ **8.** $\frac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ **9.** $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

10. $\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ **11.** $\frac{1}{9x^2+6x+5}$ **12.** $\frac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$

13. $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ **14.** $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ **15.** $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$

16. $\frac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ **17.** $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ **18.** $\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}$

19. $\dfrac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}$ **20.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ **21.** $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

22. $\dfrac{x+3}{x^2-2x-5}$ **23.** $\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 24 ਤੋਂ 25 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

24. $\int \dfrac{dx}{x^2+2x+2}$ ਬ੍ਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $x \tan^{-1}(x+1) + C$ (B) $\tan^{-1}(x+1) + C$

(C) $(x+1)\tan^{-1}x + C$ (D) $\tan^{-1}x + C$

25. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9x-4x^2}}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{9}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{8}\right)+C$ (B) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{8x-9}{9}\right)+C$

(C) $\dfrac{1}{3}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{8}\right)+C$ (D) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}\left(\dfrac{9x-8}{9}\right)+C$

7.5 ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by Partial Fractions)

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, ਦੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $P(x)$ ਅਤੇ $Q(x)$, ਚਲ x ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਅਤੇ $Q(x) \neq 0$. ਜਦਕਿ $P(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $Q(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ, ਤਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਣਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਅਣਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ ਕਿ $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ਅਣਉਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, ਇੱਥੇ $T(x)$ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ।ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਸੇ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਹਰ ਨੂੰ ਇੱਕ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹਾਂ, ਇੱਥੇ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਧੀ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਨ ਦੇ ਨਾਂ ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਬਾਅਦ ਪਹਿਲਾਂ ਪਤਾ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸਰਲਤਾ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਾਰਣੀ 7.2 ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਕਿ ਵੱਖ ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਰਲ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

	ਸਾਰਣੀ 7.2	
ਲੜੀ ਨੰ:	ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਦਾ ਰੂਪ	ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀ ਕਿਸਮਾਂ
1.	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$
2.	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$
4.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$
5.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

ਇੱਥੇ $x^2 + bx + c$ ਦਾ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡੀਕਰਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ A, B ਅਤੇ C ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਉੱਚਿਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ [ਸਾਰਣੀ 7.2 (i)], ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}, \text{ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ} \qquad \text{--- (1)}$$

ਇੱਥੇ A ਅਤੇ B ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉੱਚਿਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$1 = \mathrm{A}\,(x + 2) + \mathrm{B}\,(x + 1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = 0$$

ਅਤੇ $$2\mathrm{A} + \mathrm{B} = 1$$

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ A = 1 ਅਤੇ B = ï 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\frac{1}{(x+1)\,(x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{\text{ï } 1}{x+2}$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{dx}{(x+1)\,(x+2)} = \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \log|x+1| - \log|x+2| + \mathrm{C} = \log\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + \mathrm{C}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਥਨ ਜੋ x ਦੇ ਸਾਰੇ (ਯੋਗ) ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਕੁਝ ਲੇਖਕ ਸੰਕੇਤ ≡ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਇੱਕ ਤਤਸਮਕ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਕੇਤ = ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਇਹ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ x ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $x^2 + 1$ ਨੂੰ x^2 ï $5x + 6$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)\,(x-3)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $$\frac{5x-5}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{\mathrm{A}}{x-2} + \frac{\mathrm{B}}{x-3}$$

ਜਦੋਂ ਕਿ 5x ï 5 = A (x ï 3) + B (x ï 2)

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ A + B = 5 ਅਤੇ 3A + 2B = 5

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ A = ï 5 ਅਤੇ B = 10 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2}\,dx + 10\int \frac{dx}{x-3}$$

= *x* ï 5 log |*x* ï 2| + 10 log |*x* ï 3| + C

ਉਦਾਹਰਣ 13. $\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਸਾਰਣੀ 7.2 (4) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਕਿਸਮ ਦਾ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}$$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਜਦੋਂ ਕਿ 3*x* ï 2 = A (*x* + 1) (*x* + 3) + B (*x* + 3) + C $(x + 1)^2$

$= A (x^2 + 4x + 3) + B (x + 3) + C (x^2 + 2x + 1)$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਾਂ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ A + C = 0, 4A + B + 2C = 3 ਅਤੇ 3A + 3B + C = ï 2 ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A = \frac{11}{4}, B = \frac{-5}{2}$ ਅਤੇ $C = \frac{-11}{4}$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4(x+1)} - \frac{5}{2(x+1)^2} - \frac{11}{4(x+3)}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{3x-2}{(x+1)^2(x+3)} = \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= \frac{11}{4}\log|x+1| + \frac{5}{2(x+1)} - \frac{11}{4}\log|x+3| + C$$

$$= \frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right| + \frac{5}{2(x+1)} + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 14. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $x^2 = y$ ਰੱਖੋ

ਤਾਂ
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$$

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਜਦੋਂ ਕਿ
$$y = A(y+4) + B(y+1)$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $A + B = 1$ ਅਤੇ $4A + B = 0$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$A = -\frac{1}{3} \quad \text{Vkj} \quad B = \frac{4}{3}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x^2+4}$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਨਾ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਾਲੇ ਹਿੱਸੇ ਲਈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਦਾਹਰਨ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸੁਮੇਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਰਤਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. $\displaystyle\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $y = \sin\phi$

ਤਦ
$$dy = \cos\phi \; d\phi$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\, d\phi = \int \frac{(3y ï 2)\, dy}{5 - (1 - y^2) - 4y}$$

$$= \int \frac{3y-2}{y^2-4y+4}\,dy = \int \frac{3y-2}{(y-2)^2} = \text{I} \qquad \text{(ਮੰਨ ਲਉ)}$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ $\quad \dfrac{3y-2}{(y-2)^2} = \dfrac{\text{A}}{y-2} + \dfrac{\text{B}}{(y-2)^2}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ [ਸਾਰਣੀ 7.2 (2) ਨਾਲ]

ਇਸ ਲਈ $\quad 3y$ ï 2 = A (y ï 2) + B

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ A = 3 ਅਤੇ B ï 2A = ï 2, ਜਿਸ ਨਾਲ ਅਸੀਂ A = 3 ਅਤੇ B = 4 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\text{I} = \int \left[\frac{3}{y-2} + \frac{4}{(y-2)^2}\right] dy = 3\int \frac{dy}{y-2} + 4\int \frac{dy}{(y-2)^2}$$

$$= 3\log|y-2| + 4\left(-\frac{1}{y-2}\right) + \text{C} = 3\log|\sin\phi - 2| + \frac{4}{2-\sin\phi} + \text{C}$$

$$= 3\log(2-\sin\phi) + \frac{4}{2-\sin\phi} + \text{C}$$ (ਕਿਉਂਕਿ 2 ï $\sin\phi$ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ)

ਉਦਾਹਰਣ 16. $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1\,dx}{(x+2)(x^2+1)}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਉੱਚਿਤ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਹੈ। ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ ਨੂੰ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤੋੜਦੇ ਹਾਂ [ਸਾਰਣੀ 2.2(5)]A

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{\text{A}}{x+2} + \frac{\text{B}x+\text{C}}{(x^2+1)}$$

ਇਸ ਲਈ $\quad x^2 + x + 1 = \text{A}(x^2+1) + (\text{B}x + \text{C})(x+2)$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ A + B =1, 2B + C = 1 ਅਤੇ A + 2C = 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\text{A} = \dfrac{3}{5}, \text{B} = \dfrac{2}{5}, \text{C} = \dfrac{1}{5}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} = \frac{3}{5(x+2)} + \frac{1}{5}\left(\frac{2x+1}{x^2+1}\right)$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx = \frac{3}{5}\int\frac{dx}{x+2} + \frac{1}{5}\int\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{5}\int\frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= \frac{3}{5}\log|x+2| + \frac{1}{5}\log|x^2+1| + \frac{1}{5}\tan^{-1}x + C$$

ਅਭਿਆਸ 7.5

1 ਤੋਂ 21 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{x}{(x+1)(x+2)}$ **2.** $\frac{1}{x^2-9}$ **3.** $\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ **5.** $\frac{2x}{x^2+3x+2}$

6. $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$ **7.** $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$ **8.** $\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$

9. $\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$ **10.** $\frac{2x-3}{(x^2-1)(2x+3)}$ **11.** $\frac{5x}{(x+1)(x^2-4)}$

12. $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$ **13.** $\frac{2}{(1-x)(1+x^2)}$ **14.** $\frac{3x-1}{(x+2)^2}$

15. $\frac{1}{x^4-1}$ **16.** $\frac{1}{x(x^n+1)}$ [ਸੰਕੇਤ : ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਨੂੰ x^{n-1} ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਅਤੇ $x^n = t$ ਰੱਖੋ]

17. $\frac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ [ਸੰਕੇਤ : $\sin x = t$ ਰੱਖੋ]

18. $\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}$ **19.** $\frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$ **20.** $\frac{1}{x(x^4-1)}$

21. $\dfrac{1}{(e^x - 1)}$ [ਸੰਕੇਤ : $e^x = t$ ਰੱਖੋ]

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 22 ਅਤੇ 23 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

22. $\int \dfrac{x\,dx}{(x-1)(x-2)}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\log\left|\dfrac{(x-1)^2}{x-2}\right| + \text{C}$ (B) $\log\left|\dfrac{(x-2)^2}{x-1}\right| + \text{C}$

(C) $\log\left|\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2\right| + \text{C}$ (D) $\log|(x-1)(x-2)| + \text{C}$

23. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\log|x| - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + \text{C}$ (B) $\log|x| + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + \text{C}$

(C) $-\log|x| + \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) + \text{C}$ (D) $\dfrac{1}{2}\log|x| + \log(x^2+1) + \text{C}$

7.6 ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ (Integration by Parts)

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਕਿ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਕਿ ਇੱਕ ਚਲ x (ਮੰਨ ਲਉ) ਦੇ u ਅਤੇ v ਦੋ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਏਬਲ ਫਲਨ ਹਨ ਤਾਂ ਡਿਫਰੈਸੇਸ਼ਨ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਿਯਮ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

ਭਾਵ
$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $u = f(x)$ ਅਤੇ $\dfrac{dv}{dx} = \text{g}(x)$ ਤਦ

$$\frac{du}{dx} = f'(x) \text{ ਅਤੇ } v = \int g(x)\,dx$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int[\int g(x)\,dx\; f'(x)]\,dx$$

ਭਾਵ
$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\int g(x)\,dx - \int[f'(x)\int g(x)\,dx]\,dx$$

ਜੇ ਅਸੀਂ f ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ g ਨੂੰ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਮੁੱਲ ਲਈਏ ਤਾਂ ਸੂਤਰ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ = (ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ) × (ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ) ð [(ਪਹਿਲਾਂ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਗੁਣਾਂਕ) × (ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ)] ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ

ਉਦਾਹਰਣ 17. $\int x\cos x\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $f(x) = x$ (ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ) ਅਤੇ $g(x) = \cos x$ (ਦੂਜਾ ਫਲਨ) ਰੱਖੋ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int x\cos x\,dx = x\int\cos x\,dx - \int[\frac{d}{dx}(x)\int\cos x\,dx]\,dx$$

$$= x\sin x - \int\sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਅਸੀਂ $f(x) = \cos x$ ਅਤੇ $g(x) = x$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ

$$\int x\cos x\,dx = \cos x\int x\,dx - \int[\frac{d}{dx}(\cos x)\int x\,dx]\,dx$$

$$= (\cos x)\frac{x^2}{2} + \int\sin x\,\frac{x^2}{2}\,dx$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int x\cos x\,dx$, ਤੁਲਾਨਾਤਮਕ ਰੂਪ ਨਾਲ x ਦੀ ਜ਼ਿਆਦਾ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਜ਼ਿਆਦਾ ਔਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੀ ਉੱਚਿਤ ਚੋਣ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਇਹ ਜ਼ਿਕਰਯੋਗ ਹੈ, ਕਿ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੋ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਉਦਾਹਰਣਾਂ $\int\sqrt{x}\sin x\,dx$ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\sqrt{x}\,\sin x$ ਹੈ।
2. ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਅਸੀਂ ਕੋਈ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ

ਨਹੀਂ ਜੋੜਿਆ ਸੀ। ਜੇ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਫਲਨ $\cos x$ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ $\sin x + k$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ, ਜਿੱਥੇ k ਕੋਈ ਅਚਲ ਹੈ, ਤਦ ਇਹ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਿੱਚ ਆਖਰੀ ਉੱਤਰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਜੋੜਨਾ ਗੈਰ-ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

$$\int x \cos x \, dx = x(\sin x + k) - \int (\sin x + k)\, dx$$

$$= x(\sin x + k) - \int \sin x \, dx - \int k \, dx$$

$$= x(\sin x + k) + \cos x - kx + C = x \sin x + \cos x + C$$

3. ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫਲਨ x ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ ਜਾਂ x ਦਾ ਬਹੁਪਤਦ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ ਵੀ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਉਲਟ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਜਾਂ ਲਘੂਗਣਕ ਫਲਨ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. $\int \log x \, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾਉਣ ਵਿੱਚ ਅਯੋਗ ਹਾਂ, ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ $\log x$ ਹੈ। ਅਸੀਂ $\log x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਦੂਸਰੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ x ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int (\log x \cdot 1)\, dx = \log x \int 1\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(\log x) \int 1\, dx\right] dx$$

$$= \log x \, . \, x - \int \frac{1}{x}\, x\, dx = x \log x - x + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 19. $\int x e^x dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : x ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ e^x ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਉ।

ਦੂਸਰੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ $= e^x$

ਇਸ ਲਈ $$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 . e^x dx = xe^x - e^x + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 20. $\int \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ $= \sin^{-1} x$, ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ $= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$t = 1$ ï x^2 ਰੱਖੋ ਤਦ

ਹੁਣ $dt =$ ï $2x\,dx$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$ ï $\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x \sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x\left(-\sqrt{1-x^2}\right) - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) dx$

$$= -\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x + x + C = x - \sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1}x + C$$

ਵਿਕਲਪ sinï¹$x = \theta$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਤੇ ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵੀ ਇਸ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. $\int e^x \sin x\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : e^x ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ $\sin x$ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ। ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I = \int e^x \sin x\,dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x\,dx$$

= ï $e^x \cos x + I_1$ (ਮੰਨ ਲਉ) ... (1)

I_1 ਵਿੱਚ e^x ਅਤੇ $\cos x$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I_1 = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

I_1 ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$ ਅਤੇ $2I = e^x$ ($\sin x$ ï $\cos x$)

ਇਸ ਲਈ $I = \int e^x \sin x\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

ਵਿਕਲਪ : $\sin x$ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ e^x ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਣ ਤੇ ਵੀ ਉਪਰੋਕਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

7.6.1 $\int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx$ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $I = \int e^x [f(x) + f'(x)]\,dx = \int e^x f(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$

$= I_1 + \int e^x f'(x)\,dx$, ਜਿੱਥੇ $I_1 = \int e^x f(x)\,dx$ ... (1)

I_1 ਵਿੱਚ $f(x)$ ਅਤੇ e^x ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। $I_1 = f(x)\,e^x - \int f'(x)\,e^x dx + C$

I_1 ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C = e^x f(x) + C$$

ਇਸ ਲਈ $\int e^x \left(f(x) + f'(x)\right) dx = e^x f(x) + C$

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$ (ii) $\int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx$

ਹੱਲ :

(i) ਇੱਥੇ $I = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx$

ਹੁਣ $f(x) = \tan^{-1}x$, ਲਓ, ਤਦ $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ $e^x [f(x) + f'(x)]$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $I = \int e^x (\tan^{-1}x + \frac{1}{1+x^2})\, dx = e^x \tan^{-1}x + C$

(ii) ਦਿੱਤਾ ਹੈ $I = \int \frac{(x^2+1)\, e^x}{(x+1)^2}\, dx = \int e^x [\frac{x^2-1+1+1)}{(x+1)^2}]\, dx$

$$= \int e^x [\frac{x^2-1}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx = \int e^x [\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}]\, dx$$

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ਹੁਣ $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ $e^x [f(x) + f'(x)]$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x\, dx = \frac{x-1}{x+1} e^x + C$

ਅਭਿਆਸ 7.6

1 ਤੋਂ 22 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

1. $x \sin x$ **2.** $x \sin 3x$ **3.** $x^2 e^x$ **4.** $x \log x$

5. $x \log 2x$ **6.** $x^2 \log x$ **7.** $x \sin^{-1}x$ **8.** $x \tan^{-1} x$

9. $x \cos^{-1} x$ **10.** $(\sin^{-1}x)^2$ **11.** $\frac{x \cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ **12.** $x \sec^2 x$

13. $\tan^{-1}x$ **14.** $x (\log x)^2$ **15.** $(x^2 + 1) \log x$

16. e^x (sin$x$ + cos$x$) **17.** $\dfrac{x\,e^x}{(1+x)^2}$ **18.** $e^x\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\right)$

19. $e^x\left(\dfrac{1}{x}\text{ ï }\dfrac{1}{x^2}\right)$ **20.** $\dfrac{(x-3)\,e^x}{(x-1)^3}$ **21.** $e^{2x}\sin x$

22. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 23 ਅਤੇ 24 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

23. $\int x^2 e^{x^3} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{3}e^{x^3}+\text{C}$ (B) $\dfrac{1}{3}e^{x^2}+\text{C}$

(C) $\dfrac{1}{2}e^{x^3}+\text{C}$ (D) $\dfrac{1}{2}e^{x^2}+\text{C}$

24. $\int e^x \sec x\,(1+\tan x)\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $e^x\cos x$ + C (B) $e^x\sec x$ + C

(C) $e^x\sin x$ + C (D) $e^x\tan x$ + C

7.6.2 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਕਿਸਮਾਂ (Integrals of some more types)*

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਕੁੱਝ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖਾਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।ਜਿਵੇਂ ਕਿ

(i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\text{I}=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਅਤੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$\text{I} = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \text{I} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

ਅਰਥਾਤ $2I = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

ਅਰਥਾਤ $I = \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੂਸਰੇ ਦੋ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਅਚਲ ਫਲਨ 1 ਨੂੰ ਦੂਜਾ ਫਲਨ ਲੈ ਕੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$

ਵਿਕਲਪ : ਇਨਟਿਗਰਲ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : $x = a\sec\theta$, $x = a\tan\theta$ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ $x = a\sin\theta$, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 4}\, dx$

ਹੁਣ $x + 1 = y$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dy$, ਤਦ

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{y^2 + 2^2}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}y\sqrt{y^2 + 4} + \frac{4}{2}\log\left| y + \sqrt{y^2 + 4} \right| + C \quad \text{[7.6.2 (ii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ]}$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 2\log\left| x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 24. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - (x+1)^2}\, dx$

ਹੁਣ $x + 1 = y$ ਰੱਖਣ ਤੇ $dx = dy$, ਤਦ

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\, dx = \int \sqrt{4 - y^2}\, dy$

$$= \frac{1}{2} y \sqrt{4-y^2} + \frac{4}{2} \sin^{-1} \frac{y}{2} + C \text{ [7.6.2 (iii) ਦੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ]}$$

$$= \frac{1}{2} (x+1) \sqrt{3-2x-x^2} + 2 \sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

ਅਭਿਆਸ 7.7

1 ਤੋਂ 9 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

1. $\sqrt{4-x^2}$ **2.** $\sqrt{1-4x^2}$ **3.** $\sqrt{x^2+4x+6}$

4. $\sqrt{x^2+4x+1}$ **5.** $\sqrt{1-4x-x^2}$ **6.** $\sqrt{x^2+4x-5}$

7. $\sqrt{1+3x-x^2}$ **8.** $\sqrt{x^2+3x}$ **9.** $\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 10 ਅਤੇ 11 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

10. $\int \sqrt{1+x^2}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right| + C$ (B) $\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

(C) $\frac{2}{3}x\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$ (D) $\frac{x^2}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}x^2 \log\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C$

11. $\int \sqrt{x^2-8x+7}\, dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ :

(A) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(B) $\frac{1}{2}(x+4)\sqrt{x^2-8x+7} + 9\log\left|x+4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

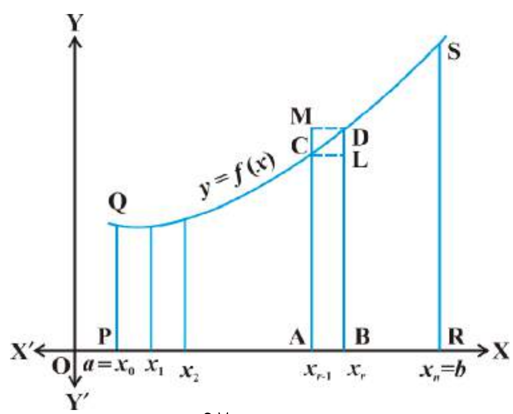
(C) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - 3\sqrt{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

(D) $\frac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x+7} - \frac{9}{2}\log\left|x-4+\sqrt{x^2-8x+7}\right| + C$

7.7 *ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ* (Definite Integral)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਜਾ ਚੁੱਕਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਵਿਧੀਆਂ ਤੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਮੁੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ $\int_a^b f(x)\,dx$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ çÜ ¾ ¶ b] ਇਨਟਿਰਗਲ ਦੀ ਉੱਚ ਸੀਮਾ ਅਤੇ a, ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਜਾਂ ਜਦੋਂ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ F ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਅਰਥਾਤ F(b) ï F(a) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਵਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਰੂਪਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਵੱਖ&ਵੱਖ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

7.7.1 *ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ (Definite integral as the limit of a sum)*



ਚਿੱਤਰ 7.2

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ f ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਫਲਨ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲ ਗੈਰ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਫਲਨ ਦਾ ਗਰਾਫ x- ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇੱਕ ਵਕਰ ਹੈ।

ਵਕਰ $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਹੈ। ਇਸ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਇਸ ਵਕਰ, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਦੇ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ PRSQP ਨੂੰ ਲਵੋ। (ਚਿੱਤਰ 7.2 ਦੇਖੋ)A

ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਨੂੰ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{r ï 1}, x_r], ... [x_{n ï 1}, x_n]$, ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ, n ਸਮਾਨ ਉੱਪਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡੋ ਜਿੱਥੇ $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$, ... , $x_r = a + rh$ ਅਤੇ $x_n = b = a + nh$ ਅਰਥਾਤ $n = \frac{b-a}{h}$ ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $n \to \infty$ ਤਾਂ $h \to 0$

ਅਧਿਐਨ ਅਧੀਨ ਖੇਤਰ PRSQP, n ਉਪਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਜਿੱਥੇ ਹਰੇਕ ਉਪਖੇਤਰ ਉਪਅੰਤਰਾਲਾਂ

ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ। $[x_{r ï 1}, x_r]$, $r = 1, 2, 3,$ é , n ਤੇ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 7.2 ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਆਇਤ (ABLC) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ਖੇਤਰ (ABDCA) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ < ਆਇਤ (ABDM) ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ... (1)

ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਜਦਕਿ $x_r - x_{rï 1} \to 0$ ਅਰਥਾਤ $h \to 0$, ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਨ (1) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਤਿੰਨਾਂ ਖੇਤਰਫਲ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਲਗਭਗ ਸਮਾਨ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਫਲਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$$s_n = h\,[f(x_0) + \text{é} + f(x_{n-1})] = h\sum_{r=0}^{n-1} f(x_r) \qquad \text{... (2)}$$

ਅਤੇ
$$\text{S}_n = h[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)] = h\sum_{r=1}^{n} f(x_r) \qquad \text{... (3)}$$

ਇੱਥੇ s_n ਅਤੇ S_n ਉਪਅੰਤਰਾਲਾਂ $[x_{rï 1}, x_r]$ r = 1, 2, 3, é , n, ਤੇ ਬਣੀਆਂ ਹੇਠਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਅਤੇ ਉੱਪਰਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਅਸਮਾਨਤਾਂ (1) ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖਦਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਇਖਤਿਆਰੀ ਉਪ ਅੰਤਰਾਲ $[x_{rï 1}, x_r]$ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$s_n < \text{ਖੇਤਰਫਲ PRSQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} < \text{S}_n \qquad \text{... (4)}$$

ਜਦੋਂ $n \to \infty$] ਤਾਂ ਆਇਤਕਾਰ ਪੱਟੀਆਂ ਤੰਗ ਹੁੰਦੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ (2) ਅਤੇ (3) ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲ ਹੀ ਵਕਰ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

ਸੰਕੇਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\lim_{n\to\infty} \text{S}_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \text{ਖੇਤਰ PRSQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ} = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{... (5)}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਇਹ ਪਤਾ ਲਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ, ਵਕਰ ਦੇ ਹੇਠਲੀਆਂ ਆਇਤਾਂ ਅਤੇ ਵਕਰ ਦੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਆਇਤਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੀਮਿਤ ਮੁੱਲ ਵੀ ਹੈ। ਸੁਵਿਧਾ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਉਪਅੰਤਰਾਲ ਦੇ ਖੱਬੇ ਕਿਨਾਰੇ ਤੇ ਵਕਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਉਚਾਈ ਵਾਲੇ ਆਇਤਾਂ ਨੂੰ ਲਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ (5) ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\,[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n ï 1)\,h]$$

ਜਾਂ
$$\int_a^b f(x)dx = (b ï a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+(n ï 1)\,h] \qquad \text{... (6)}$$

ਜਿੱਥੇ
$$h = \frac{b ï a}{n} \to 0 \text{ ਜੇਕਰ } n \to \infty$$

ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਅੰਜਕ (6) ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਫਲਨ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਉਸ ਚਲ ਤੇ ਨਹੀਂ, ਜਿਸਦਾ ਅਸੀਂ ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚੋਣ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇ x ਦੇ ਥਾਂ ਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਚਲ ਨੂੰ t ਅਰਥਾਤ u ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਸਿਰਫ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_a^b f(t)\,dt$ ਅਰਥਾਤ $\int_a^b f(u)\,du$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਚਲ ਇੱਕ ਬਣਾਉਟੀ/ ਫਰਜ਼ੀ (dummy) ਚਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਜੋੜਫਲ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\int_0^2 (x^2+1)\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+...+f(a+(n-1)h]$$

ਇੱਥੇ $$h = \frac{b-a}{n}$$

ਇਸ ਉਦਾਹਰਨ ਵਿੱਚ $a=0,\ b=2,\ f(x)=x^2+1,\ h=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$

ਇਸ ਲਈ
$$\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(0)+f\left(\frac{2}{n}\right)+f\left(\frac{4}{n}\right)+...+f\left(\frac{2(n-1)}{n}\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(\frac{2^2}{n^2}+1\right)+\left(\frac{4^2}{n^2}+1\right)+...+\left(\frac{(2n-2)^2}{n^2}+1\right)\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[(\underbrace{1+1+...+1}_{n\text{ ਪਦ}})+\frac{1}{n^2}(2^2+4^2+...+(2n-2)^2\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2^2}{n^2}(1^2+2^2+...+(n-1)^2\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{4}{n^2}\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{2}{3}\frac{(n-1)\ (2n-1)}{n}\right]$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right] = 2\left[1+\frac{4}{3}\right] = \frac{14}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\int_0^2 e^x\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ

$$\int_0^2 e^x \, dx =$$

$$(2 - 0) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^0 + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \ldots + e^{\frac{2n-2}{n}} \right]$$

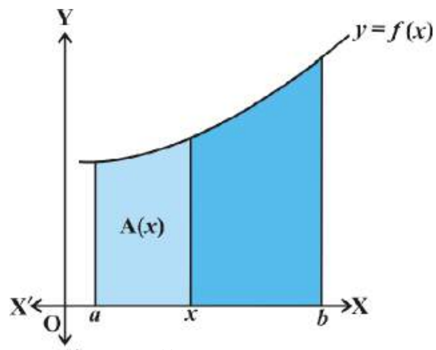
ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ

ਇੱਥੇ $a = 1,\ r = e^{\frac{2}{n}}$, ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_0^2 e^x \, dx = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{e^{\frac{2n}{n}} - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right]$$

$$= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{e^2 - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right]$$

$$= \frac{2\,(e^2 - 1)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{e^{\frac{2}{n}} - 1}{\frac{2}{n}} \right] \cdot 2} = e^2 - 1 \qquad \left[\lim_{h\to 0} \frac{(e^h - 1)}{h} = 1 \text{ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ} \right]$$



ਚਿੱਤਰ 7.3

ਅਭਿਆਸ 7.8

ਜੋੜਾਂ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_a^b x \, dx$ **2.** $\int_0^5 (x+1) \, dx$ **3.** $\int_2^3 x^2 \, dx$

4. $\int_1^4 (x^2 - x) \, dx$ **5.** $\int_{-1}^1 e^x \, dx$ **6.** $\int_0^4 (x + e^{2x}) \, dx$

7.8 ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Calculus)

7.8.1 *ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ (Area function)*

ਅਸੀਂ $\int_a^b f(x) \, dx$ ਨੂੰ ਵਕਰ $y = f(x)$, x-ਧੁਰੇ, ਅਤੇ ਕੋਟੀ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $[a, b]$ ਵਿੱਚ x ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਾਂ $\int_a^x f(x) \, dx$ ਚਿੱਤਰ 7.3 ਵਿੱਚ ਹਲਕਾ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ $x \in [a,$

$b]$ ਦੇ ਲਈ $f(x) > 0$ ਹੈ। ਹੇਠਾਂ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਕਥਨ ਹੋਰ ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ x ਦੇ ਮੁੱਲ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਛਾਇਆ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ, x ਦਾ ਇੱਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਇਸ ਫਲਨ ਨੂੰ $A(x)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਫਲਨ $A(x)$ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਹ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$\mathbf{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਦੋ ਆਧਾਰਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਹਨ। ਪਰ ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਸਿਰਫ ਇਸ ਦਾ ਕਥਨ ਦੱਸਾਂਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਮਾਣ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

7.8.2 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ* (First fundamental theorem of integral calculus)

ਪ੍ਰਮੇਯ 1 : ਮੰਨ ਲਉ f ਇੱਕ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $A(x)$ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਹੈ, ਤਾਂ $x \in [a, b]$ ਸਾਰੇ ਦੇ ਲਈ $A'(x) = f(x)$

7.8.3 *ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ* (Second fundamental theorem of integral calculus)

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ f ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ। ਤਾਂ $\int_a^b f(x)\,dx = [\mathbf{F}(x)]_a^b = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 2 ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\int_a^b f(x)\,dx$ = (f ਦੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਦਾ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ b ਤੇ ਮੁੱਲ) ï (ਉਸੇ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਾ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ a ਤੇ ਮੁੱਲ)।
2. ਇਹ ਪ੍ਰਮੇਯ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਸਾਨੂੰ ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਆਸਾਨ ਵਿਧੀ ਦਿੰਦੀ ਹੈ।
3. ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਹੈ। ਇਹ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਨੂੰ ਮਜ਼ਬੂਤ ਕਰਦੀ ਹੈ।
4. $\int_a^b f(x)\,dx$ ਵਿੱਚ, $[a, b]$ ਦੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਯੋਗ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_{-2}^{3} x(x^2 ï 1)^{\frac{1}{2}}\,dx$ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਨਾ ਗਲਤ ਹੈ

ਕਿਉਂਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[-2, 3]$ ਦੇ ਭਾਗ $-1 < x < 1$ ਦੇ ਲਈ $f(x) = x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਫਲਨ f ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕਦਮ **(Steps for calculating $\int_a^b f(x)\,dx$)**

(i) ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ $\int f(x)\,dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ $F(x)$ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ C ਨੂੰ ਲੈਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $F(x)$ ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ $F(x) + C$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x) + C]_a^b = [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਇਖਤਿਆਰੀ ਅਚਲ, ਗਾਇਬ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(ii) $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਕਿ $\int_a^b f(x)\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\int_2^3 x^2\,dx$ (ii) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ (iii) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)}$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\,dt$

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_2^3 x^2\,dx$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} = F(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$I = F(3) - F(2) = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\,dx$ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

$30 - x^{\frac{3}{2}} = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx = dt$ ਅਰਥਾਤ $\sqrt{x}\,dx = -\frac{2}{3}dt$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\int \frac{\sqrt{x}}{(30 - x^{\frac{3}{2}})^2}\, dx = -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right] = \mathrm{F}(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}(9) - \mathrm{F}(4) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - x^{\frac{3}{2}})}\right]_4^9 = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{(30 - 27)} - \frac{1}{30 - 8}\right] = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{22}\right] = \frac{19}{99}$$

(iii) ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\mathrm{I} = \int_1^2 \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)}$

ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)} = -\log|x+1| + 2\log|x+2| = \mathrm{F}(x)$

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$\mathrm{I} = \mathrm{F}(2) - \mathrm{F}(1) = [-\log 3 + 2\log 4] - [-\log 2 + 2\log 3]$

$$= -3\log 3 + \log 2 + 2\log 4 = \log\left(\frac{32}{27}\right)$$

(iv) ਮੰਨ ਲਉ, $\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2t \cos 2t\, dt$. ਹੁਣ $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$\sin 2t = u$ ਰੱਖਣ ਤੇ $2\cos 2t\, dt = du$ ਭਾਵ $\cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\, du$

ਇਸ ਲਈ $\int \sin^3 2t \cos 2t\, dt = \frac{1}{2}\int u^3 du$

$$= \frac{1}{8}[u^4] = \frac{1}{8}\sin^4 2t = \mathrm{F}(t)$$ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ

ਇਸ ਲਈ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ

$$\mathrm{I} = \mathrm{F}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{F}(0) = \frac{1}{8}\left[\sin^4\frac{\pi}{2} - \sin^4 0\right] = \frac{1}{8}$$

ਅਭਿਆਸ 7.9

1 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx$ **2.** $\int_{2}^{3}\frac{1}{x}\,dx$ **3.** $\int_{1}^{2}(4x^3-5x^2+6x+9)\,dx$

4. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 2x\,dx$ **5.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$ **6.** $\int_{4}^{5}e^x\,dx$ **7.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

8. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{cosec} x\,dx$ **9.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **10.** $\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$ **11.** $\int_{2}^{3}\frac{dx}{x^2-1}$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$ **13.** $\int_{2}^{3}\frac{x\,dx}{x^2+1}$ **14.** $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{5x^2+1}\,dx$ **15.** $\int_{0}^{1}x\,e^{x^2}\,dx$

16. $\int_{1}^{2}\frac{5x^2}{x^2+4x+3}$ **17.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x+x^3+2)\,dx$

18. $\int_{0}^{\pi}(\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2})\,dx$ **19.** $\int_{0}^{2}\frac{6x+3}{x^2+4}\,dx$

20. $\int_{0}^{1}(x\,e^x+\sin\frac{\pi x}{4})\,dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 21 ਅਤੇ 22 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

21. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{\pi}{3}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{12}$

22. $\int_{0}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{4+9x^2}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{12}$ (C) $\frac{\pi}{24}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

7.9 ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $\int_a^b f(x)\,dx$, ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਕਦਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ :

1. ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਬਾਰੇ, ਸੀਮਾਵਾਂ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਅਤੇ $y = f(x)$ ਅਰਥਾਤ $x = g(y)$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇੱਕ ਜਾਣੀ ਪਛਾਣੀ ਕਿਸਮ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਏ।
2. ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਚਲ ਦੀ ਜ਼ਿਕਰ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਨਵੇਂ ਇਨਟਿਗਰੈਂਡ ਦਾ, ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।
3. ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੀ ਥਾਂ ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਮੂਲ ਚਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।
4. ਕਦਮ (3) ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਉੱਤਰ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਉੱਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਵਾਲੇ ਮੁੱਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

> **ਟਿੱਪਣੀ** ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਤੇਜ਼ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਕਦਮ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੇ ਬਾਅਦ ਕਦਮ (3) ਨੂੰ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਚਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਸੀਮਾਵਾਂ ਨੂੰ ਨਵੇਂ ਚਲ ਅਨੁਸਾਰ ਬਦਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧੇ ਆਖਰੀ ਕਦਮ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰ ਸਕੀਏ।

ਆਉ ਇਸ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਨਾਲ ਸਮਝਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 29. $\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $t = x^5 + 1$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dt = 5x^4\,dx$

ਇਸ ਲਈ
$$\int 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x^5+1)^{\frac{3}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ
$$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - \left((-1)^5+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ਵਿਕਲਪ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਤਾਂ ਬਦਲੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦਾ ਨਵੀਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਮੰਨ ਲਉ $t = x^5 + 1$. ਤਦ $dt = 5x^4\,dx$ ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ

ਜਦ $x = -1$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 1$ ਤਾਂ $t = 2$

ਇਸ ਲਈ ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ x, ï 1 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਿਵੇਂ&ਤਿਵੇਂ t] 0 ਤੋਂ 2 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-1}^{1} 5x^4\sqrt{x^5+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} ï\ 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ਉਦਾਹਰਣ 30. $\int_0^1 \frac{\tan^{ï\,1} x}{1+x^2}\,dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = \tan^{ï\,1}x$, ਤਦ $dt = \frac{1}{1+x^2}dx$. ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 1$ ਤਾਂ $t = \frac{\pi}{4}$ ਇਸ ਲਈ ਜਿਵੇਂ&ਜਿਵੇਂ x, 0 ਤੋਂ 1 ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ ਤਿਵੇਂ&ਤਿਵੇਂ t, 0 l $\frac{\pi}{4}$ ਤੱਕ ਬਦਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_0^1 \frac{\tan^{ï\,1} x}{1+x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,dt \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^2}{16} ï\ 0\right] = \frac{\pi^2}{32}$$

ਅਭਿਆਸ 7.10

1 ਤੋਂ 8 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\phi}\cos^5\phi\,d\phi$ **3.** $\int_0^1 \sin^{ï\,1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$ ($x + 2 = t^2$ ਰੱਖੋ) **5.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

6. $\int_0^2 \frac{dx}{x+4 ï\ x^2}$ **7.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **8.** $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} ï\ \frac{1}{2x^2}\right)e^{2x}dx$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 9 ਤੋਂ 10 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

9. ਇਨਟਿਗਰਲ $\int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 6 (B) 0 (C) 3 (D) 4

10. ਜਦੋਂ ਕਿ $f(x) = \int_0^x t\sin t\,dt$, ਤਦ $f'(x)$ ਹੈ :

(A) $\cos x + x\sin x$ (B) $x\sin x$ (C) $x\cos x$ (D) $\sin x + x\cos x$

7.10 ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ (Some Properties of Definite Integrals)

ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਸੂਚੀ ਬੰਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਗੁਣ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਦੀ ਉਪਯੋਗੀ ਹੋਣਗੇ।

P_0 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$

P_1 : $\int_a^b f(x)\,dx = \text{ï} \int_b^a f(x)\,dx$, ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$] a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

P_3 : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

P_4 : $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ P_4, P_3 ਦੀ ਇੱਕ ਖਾਸ ਸਥਿਤੀ ਹੈ)

P_5 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P_6 : $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, ਜਦੋਂ $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$, ਜਦਕਿ $f(2a \text{ ï } x) = \text{ï } f(x)$

P_7 : (i) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, ਜਦਕਿ ਇੱਕ ਜਿਸਤ f ਫਲਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(\text{ï}$ $x) = f(x)$

(ii) $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$, ਜਦੋਂ ਕਿ f ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਅਰਥਾਤ ਜਦਕਿ $f(\text{ï}\,x) = \text{ï}\,f(x)$

ਇੱਕ&ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

P_0 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ $x = t$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਸਿੱਧੇ ਤੌਰ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

P_1 ਦੀ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ। ਤਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ , ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦ $a = b$, ਤਾਂ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

P_2 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ f ਦਾ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ F ਹੈ, ਤਦ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) \text{ ï } F(a) \qquad \dots (1)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) \text{ ï } F(a) \qquad \dots (2)$$

ਅਤੇ

$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) \text{ ï } F(c) \qquad \dots (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

ਇਸ ਤੋਂ ਗੁਣਧਰਮ P_2 ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

P_3 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $t = a + b - x$. ਤਦ $dt = -\,dx$. ਜਦ $x = a$ ਤਦ, $t = b$ ਅਤੇ ਜਦ $x = b$ ਤਦ $t = a$. ਇਸ ਲਈ

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)\,dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)\,dt \quad (P_1 \text{ ਤੋਂ})$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)\,dx \quad (P_0 \text{ ਤੋਂ})$$

P_4 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : $t = a - x$ ਰੱਖੋ ਅਤੇ P_3 ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੱਧੋ। ਹੁਣ $dt = -\,dx$, ਜਦ $x = a$, $t = 0$

P_5 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : P_2, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੂਸਰੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $t = 2a - x$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰੋ, ਤਦ $dt = -\,dx$ ਅਤੇ ਜਦ $x = a$, ਤਦ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 2a$, ਤਦ $t = 0$ ਅਤੇ $x = 2a - t$ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦੂਸਰਾ ਇਨਟਿਗਰਲ

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt = \int_0^a f(2a-x)\,dx \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

P_6 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ : P_5, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad \text{... (1)}$$

ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(2a - x) = f(x)$, ਜਦ (1) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

ਅਤੇ ਜਦੋਂ ਕਿ $f(2a - x) = -f(x)$, ਜਦ (1) ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P_7 ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣ

P_2 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $t = -x$ ਰੱਖਣ ਤੇ

$dt = -dx$ ਜਦ $x = -a$ ਤਦ $t = a$ ਅਤੇ ਜਦ $x = 0$, ਤਦ $t = 0$ ਅਤੇ $x = -t$ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad (P_0 \text{ ।}) \qquad \ldots (1)$$

(i) ਹੁਣ ਜਦੋਂ ਕਿ f ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ ਤਦ $f(-x) = f(x)$ ਤਾਂ (1) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

(ii) ਜਦਕਿ f ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਤਦ $f(-x) = -f(x)$ ਤਾਂ (1) ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿ

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 31. $\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $[-1, 0]$ ਤੇ $x^3 - x \geq 0$ ਅਤੇ $[0, 1]$ ਅਤੇ $x^3 - x \leq 0$ ਤੇ $[1, 2]$ ਅਤੇ $x^3 - x \geq 0$ ਤਦ ਅਸੀਂ ਨਾਲ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int_{-1}^{2} \left| x^3 - x \right| dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 -(x^3 - x)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx \qquad (P_2 \text{ ਤੋਂ})$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_0^1 (x - x^3)\,dx + \int_1^2 (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + (4 - 2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 32. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sin^2 x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ
$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\, dx \qquad [P_7 \text{ (1) ਨਾਲ}]$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 33. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ
$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)\, dx}{1+\cos^2(\pi - x)} \qquad (P_4 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x} - I$$

ਅਰਥਾਤ
$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

ਅਰਥਾਤ
$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x\, dx}{1+\cos^2 x}$$

$\cos x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $-\sin x\, dx = dt$

ਜਦੋਂ $x = 0$ ਤਦ $t = 1$ ਅਤੇ ਜਦ $x = \pi$ ਤਦ $t = -1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I = \frac{-\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} \qquad (P_1 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \pi\int_0^{1} \frac{dt}{1+t^2} \text{ ਕਿਉਂਕਿ } \frac{1}{1+t^2} \text{ ਜਿਸਤ ਫਲਨ ਹੈ} \qquad (P_7 \text{ ਨਾਲ})$$

$$= \pi\left[\tan^{-1} t\right]_0^1 = \pi\left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1} 0\right] = \pi\left[\frac{\pi}{4} - 0\right] = \frac{\pi^2}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 34. $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x \, dx$ ਅਤੇ $f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$

ਤਦ $f(\text{ï}\ x) = \sin^5 (\text{ï}\ x) \cos^4 (\text{ï}\ x) = \text{ï}\ \sin^5 x \cos^4 x = \text{ï}\ f(x)$, ਅਰਥਾਤ f ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਫਲਨ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $I = 0$ [P_7 (ii) ਨਾਲ]

ਉਦਾਹਰਣ 35. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$ ... (1)

ਤਦ $$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^4 (\frac{\pi}{2} - x) + \cos^4 (\frac{\pi}{2} - x)} dx$$ (P_4 ਨਾਲ)

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx$$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

ਇਸ ਲਈ $$I = \frac{\pi}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 36. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1 + \sqrt{\tan x}} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$ ... (1)

ਤਦ $$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}\, dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)} + \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - x\right)}}$$ (P_3 ਨਾਲ)

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx \qquad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $2I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

ਇਸ ਲਈ $I = \frac{\pi}{12}$

ਉਦਾਹਰਣ 37. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

ਤਦ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx$ (P_4 ਨਾਲ)

I, ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \cos x + \log 2 - \log 2)\, dx$$ ($\log 2$ ਜੋੜਨ ਅਤੇ ਘਟਾਉਣ ਤੇ)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2\, dx$$ (ਕਿਉਂ ?)

ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ $2x = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ $2\, dx = dt$ ਜਦ $x = 0$ ਤਾਂ $t = 0$ ਅਤੇ ਜਦ $x = \frac{\pi}{2}$ ਤਾਂ $t = \pi$

ਇਸ ਲਈ $2I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t\, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$ [P_6 ਨਾਲ ਕਿਉਂਕਿ $\sin(\pi$ ï $t) = \sin t$)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2$$ (ਚਲ t ਨੂੰ x ਵਿੱਚ ਬਦਲਣ ਤੇ)

$$= I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

ਇਸ ਲਈ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx = \frac{ï\ \pi}{2}\log 2$

ਅਭਿਆਸ 7.11

ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ 1 ਤੋਂ 19 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$ **3.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x\, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x+\cos^{\frac{3}{2}} x}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^5 x+\cos^5 x}$ **5.** $\int_{-5}^{5} |x+2|\, dx$ **6.** $\int_2^8 |x-5|\, dx$

7. $\int_0^1 x(1-x)^n\, dx$ **8.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx$ **9.** $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x)\, dx$ **11.** $\int_{\frac{\text{ï}\,\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

12. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x}$ **13.** $\int_{\frac{\text{ï}\,\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$ **14.** $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-\cos x}{1+\sin x\cos x}\, dx$ **16.** $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\, dx$ **17.** $\int_0^{a} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\, dx$

18. $\int_0^4 |x-1|\, dx$

19. ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\int_0^a f(x)g(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$, ਜਦੋਂ ਕਿ f ਅਤੇ g ਨੂੰ $f(x) = f(a\ \text{ï}\ x)$ ਅਤੇ $g(x) + g(a\ \text{ï}\ x) = 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 20 ਅਤੇ 21 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

20. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + x\cos x + \tan^5 x + 1)\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 0 (B) 2 (C) π (D) 1

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{4+3\sin x}{4+3\cos x}\right) dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 2 (B) $\frac{3}{4}$ (C) 0 (D) ï 2

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 38. $\int \cos 6x \sqrt{1+\sin 6x}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $t = 1 + \sin 6x$, ਰੱਖਣ ਤੇ $dt = 6 \cos 6x\, dx$

ਇਸ ਲਈ $$\int \cos 6x\sqrt{1+\sin 6x}\, dx = \frac{1}{6}\int t^{\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{6}\times\frac{2}{3}(t)^{\frac{3}{2}} + \text{C} = \frac{1}{9}(1+\sin 6x)^{\frac{3}{2}} + \text{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 39. $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ $\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx = \int \frac{(1-\frac{1}{x^3})^{\frac{1}{4}}}{x^4}\, dx$

ਹੁਣ $$1-\frac{1}{x^3} = 1\text{ï}\ x^{\text{ï}\,3} = t, \text{ ਰੱਖਣ ਤੇ } \frac{3}{x^4}dx = dt$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \frac{(x^4 - x)^{\frac{1}{4}}}{x^5}\, dx = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{4}}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}} + \text{C} = \frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}} + \text{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 40. $\int \frac{x^4\, dx}{(x-1)\,(x^2+1)}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ $$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)} = (x+1) + \frac{1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$= (x+1) + \frac{1}{(x-1)\,(x^2+1)} \qquad \dots (1)$$

ਹੁਣ $$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\text{A}}{(x-1)} + \frac{\text{B}x+\text{C}}{(x^2+1)}$$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ... (2)

$$1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$
$$= (A + B)x^2 + (C - B)x + A - C$$

ਇਸ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ $A + B = 0, C - B = 0$ ਅਤੇ $A - C = 1$, ਜਿਸ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $A = \frac{1}{2}, B = C = -\frac{1}{2}$

A, B ਅਤੇ C ਦਾ ਮੁੱਲ (2) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)} \qquad \ldots (3)$$

(3) ਅਤੇ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} = (x+1) + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

ਇਸ ਲਈ

$$\int \frac{x^4}{(x-1)(x^2+x+1)} dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 41. $\int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int \left[\log(\log x) + \frac{1}{(\log x)^2}\right] dx$

$$= \int \log(\log x)\, dx + \int \frac{1}{(\log x)^2} dx$$

ਆਉ, ਪਹਿਲੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਦ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$I = x\log(\log x) - \int \frac{1}{x\log x} x\, dx + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \int \frac{dx}{\log x} + \int \frac{dx}{(\log x)^2} \qquad \ldots (1)$$

ਫਿਰ $\int \frac{dx}{\log x}$, ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, 1 ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਵੋ ਅਤੇ ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰੋ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int \frac{dx}{\log x} = \left[\frac{x}{\log x} - \int x\left\{-\frac{1}{(\log x)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right] \quad \ldots (2)$$

(2) ਅਤੇ (1), ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਤਾਂ

$$\text{I} = x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} - \int \frac{dx}{(\log x)^2} + \int \frac{dx}{(\log x)^2}$$

$$= x\log(\log x) - \frac{x}{\log x} + \text{C}$$

ਉਦਾਹਰਨ 41. $\int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਿਆ ਹੈ ਕਿ $\text{I} = \int \left[\sqrt{\cot x} + \sqrt{\tan x}\right] dx = \int \sqrt{\tan x}(1 + \cot x)\, dx$

ਹੁਣ $\tan x = t^2$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

ਅਰਥਾਤ $dx = \dfrac{2t\, dt}{1+t^4}$

ਹੁਣ $\text{I} = \displaystyle\int t\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\frac{2t}{(1+t^4)}\, dt$

$$= 2\int \frac{(t^2+1)}{t^4+1}\, dt = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)} = 2\int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 2}$$

ਤਦ $t - \dfrac{1}{t} = y$, ਰੱਖਣ ਤੇ $\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right) dt = dy$

ਤਦ $\text{I} = 2\displaystyle\int \frac{dy}{y^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} + \text{C} = \sqrt{2}\tan^{-1}\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{2}} + \text{C}$

$$= \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\, t}\right) + \text{C} = \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + \text{C}$$

ਉਦਾਹਰਣ 43. $\int \frac{\sin 2x \cos 2x \, dx}{\sqrt{9 \text{ ï } \cos^4(2x)}}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int \frac{\sin 2x \cos 2x}{\sqrt{9 \text{ ï } \cos^4 2x}} dx$

ਹੁਣ $\cos^2(2x) = t$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਤਾਂ ਕਿ $4 \sin 2x \cos 2x \, dx = \text{ï } dt$

ਇਸ ਲਈ $$I = \text{ï } \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{9 \text{ ï } t^2}} = \text{ï } \frac{1}{4} \sin^{\text{ï}1}\left(\frac{t}{3}\right) + C = -\frac{1}{4} \sin^{-1}\left[\frac{1}{3}\cos^2 2x\right] + C$$

ਉਦਾਹਰਣ 44. $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin(\pi x)| dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $f(x) = |x \sin \pi x| = \begin{cases} x \sin \pi x, -1 \le x \le 1 & \text{ਦੇ ਲਈ} \\ -x \sin \pi x, 1 \le x \le \frac{3}{2} & \text{ਦੇ ਲਈ} \end{cases}$

ਇਸ ਲਈ $$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} - x \sin \pi x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x \sin \pi x \, dx - \int_{1}^{\frac{3}{2}} x \sin \pi x \, dx$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x| dx = \left[\frac{\text{ï } x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{-x \cos \pi x}{\pi} + \frac{\sin \pi x}{\pi^2}\right]_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi}\right] = \frac{3}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ 45. $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $I = \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x) \, dx}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)}$

(P_4 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - \int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} - I$$

ਇਸ ਲਈ $$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

ਅਰਥਾਤ $$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$$

(P_6 ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ)

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 + \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \right]$$

($\tan x = t$ ਅਤੇ $\cot x = u$ ਰੱਖੋ।)

$$= \pi \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosec^2 x\, dx}{a^2 \cot^2 x + b^2} \right]$$

$$= \pi \left[\int_0^{1} \frac{dt}{a^2 + b^2 + t^2} - \int_1^{0} \frac{dt}{a^2 u^2 + b^2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{bt}{a} \right]_0^1 - \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{au}{b} \right]_1^0$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \frac{b}{a} + \tan^{-1} \frac{a}{b} \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2ab}$$

ਅਭਿਆਸ 7 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1 ਤੋਂ 24 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਫਲਨਾਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰੋ।

1. $\frac{1}{x - x^3}$

2. $\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}$

3. $\frac{1}{x\sqrt{ax - x^2}}$ [ਸੰਕੇਤ : $x = \frac{a}{t}$ ਰੱਖੋ]

4. $\frac{1}{x^2 (x^4 + 1)^{\frac{3}{4}}}$

5. $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ [ਸੰਕੇਤ: $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}\left(1 + x^{\frac{1}{6}}\right)}$, $x = t^6$ ਰੱਖੋ]

6. $\dfrac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$ **7.** $\dfrac{\sin x}{\sin(x-a)}$ **8.** $\dfrac{e^{5\log x}-e^{4\log x}}{e^{3\log x}-e^{2\log x}}$

9. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$ **10.** $\dfrac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}$ **11.** $\dfrac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$ **13.** $\dfrac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$ **14.** $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

15. $\cos^3 x\ e^{\log \sin x}$ **16.** $e^{3\log x}(x^4+1)^{-1}$ **17.** $f'(ax+b)[f(ax+b)]^n$

18. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x\sin(x+\alpha)}}$ **19.** $\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}$, $(x\in[0,1])$

20. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ **21.** $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$ **22.** $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

23. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ **24.** $\dfrac{\sqrt{x^2+1}\left[\log(x^2+1)-2\log x\right]}{x^4}$

25 ਤੋਂ 33 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

25. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ **26.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx$ **27.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 x\,dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

28. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$ **29.** $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}$ **30.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

31. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\tan^{-1}(\sin x)\,dx$ **32.** $\int_0^{\pi}\dfrac{x\tan x}{\sec x+\tan x}dx$

33. $\int_1^4\left(|x-1|+|x-2|+|x-3|\right)dx$

ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਕਰੋ (ਪ੍ਰਸ਼ਨ 34 ਤੋਂ 39 ਤੱਕ)A

34. $\int_1^3\dfrac{dx}{x^2(x+1)}=\dfrac{2}{3}+\log\dfrac{2}{3}$ **35.** $\int_0^1 x e^x dx=1$

36. $\int_{-1}^1 x^{17}\cos^4 x\,dx=0$ **37.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\dfrac{2}{3}$

38. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\,dx = 1 - \log 2$ **39.** $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$

40. ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\int_0^1 e^{2-3x} dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

41 ਤੋਂ 44 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

41. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\tan^{ï1}(e^x) + C$ (B) $\tan^{ï1}(e^{-x}) + C$
(C) $\log(e^x\ ï\ e^{-x}) + C$ (D) $\log(e^x + e^{-x}) + C$

42. $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{ï\,1}{\sin x + \cos x} + C$ (B) $\log|\sin x + \cos x| + C$

(C) $\log|\sin x - \cos x| + C$ (D) $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$

43. ਜਦੋਂ ਕਿ $f(a + b\ ï\ x) = f(x)$, ਤਾਂ $\int_a^b x\,f(x)\,dx$ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

(A) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b-x)\,dx$ (B) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(b+x)\,dx$

(C) $\frac{b-a}{2}\int_a^b f(x)\,dx$ (D) $\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$

44. $\int_0^1 \tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{1+x-x^2}\right) dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ।

(A) 1 (B) 0 (C) ï 1 (D) $\frac{\pi}{4}$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਫਲਨ ਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਅਰਥਾਤ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਪਰੰਤੂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਹੈ ਜੋ ਡਿਫਰੈਨਸੇਸ਼ਨ ਦੀ ਉਲਟ ਹੈ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$. ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\int f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਅਨੰਤ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ C ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦਾ ਅਚਲ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਚਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

- ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ, ਜਿਆਮਿਤਕ ਤੌਰ ਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਲਈ ਇੱਕ ਵਕਰ ਨੂੰ y&ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਆਪਣੇ ਸਮਾਂਤਰ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਜਾਂ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ, ਸਮਿਤੀ ਬਦਲ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
- ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ।

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2. ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k, ਦੇ ਲਈ $\int k\, f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

   ਜ਼ਿਆਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ ਕਿ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, ਫਲਨ ਹੈ, ਅਤੇ $k_1, k_2, \ldots, k_n$, ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ

   $$\int [k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + \ldots + k_n f_n(x)]\,dx$$
   $$= k_1 \int f_1(x)\,dx + k_2 \int f_2(x)\,dx + \ldots + k_n \int f_n(x)\,dx$$

- ਕੁੱਝ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਇਨਟਿਗਰਲ

(i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{C}$, $n \neq -1$. ਖਾਸ ਤੌਰ ਤੇ $\int dx = x + \mathrm{C}$

(ii) $\int \cos x\, dx = \sin x + \mathrm{C}$

(iii) $\int \sin x\, dx = -\cos x + \mathrm{C}$

(iv) $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + \mathrm{C}$

(v) $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + \mathrm{C}$

(vi) $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + \mathrm{C}$

(vii) $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + \mathrm{C}$

(viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + \mathrm{C}$

(ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + \mathrm{C}$

(x) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$

(xi) $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + \mathrm{C}$

(xii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + \mathrm{C}$

(xiii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\mathrm{cosec}^{-1} x + \mathrm{C}$

(xiv) $\int e^x dx = e^x + \mathrm{C}$

(xv) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + \mathrm{C}$

(xvi) $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + \mathrm{C}$

◆ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਫਲਨ $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ਦੋ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ $P(x)$ ਅਤੇ $Q(x)$, ਚਲ x ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਅਤੇ $Q(x) \neq 0$. ਜੇ ਬਹੁਪਦ $P(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਬਹੁਪਦ $Q(x)$, ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ $P(x)$ ਨੂੰ $Q(x)$ ਨਾਲ ਵੰਡ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕੇ ਇੱਥੇ $T(x)$, ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $P_1(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $Q(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਬਹੁਪਦ ਹੋਣ ਦੇ ਕਾਰਨ $T(x)$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੀ ਅਪੂਰਨ ਭਿੰਨਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਇਸਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

1. $\frac{px+q}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$, $a \neq b$

2. $\frac{px+q}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

3. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

4. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}$

5. $\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$,

   ਇੱਥੇ $x^2 + bx + c$ ਦੇ ਅੱਗੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ।

◆ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਦੁਆਰਾ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੇ ਚਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਾਅ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਮੌਲਿਕ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਵਿੱਚ ਬਦਲਦੇ ਹਾਂ, ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਜਦ ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਫਲਨ ਮੌਜੂਦ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਨਟਿਗਰਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਤਤਸਮਕਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਤਪਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

(i) $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + C$ (ii) $\int \cot x \, dx = \log |\sin x| + C$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

- ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਫਲਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਨਟਿਗਰਲ

(i) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

(ii) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$ (iii) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$ (v) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(vi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$

- ਅੰਸ਼ਾਂ ਰਾਹੀਂ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨਾਂ f_1 ਅਤੇ f_2, ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\int f_1(x) \,.\, f_2(x)\, dx = f_1(x) \int f_2(x)\, dx - \int \left[\frac{d}{dx} f_1(x) \,.\, \int f_2(x)\, dx \right] dx,$$ ਅਰਥਾਤ ਦੋ

ਫਲਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ = ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ × ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ï {ਪਹਿਲਾ ਦਾ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਗੁਣਾਂਕ × ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ} ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਫਲਨ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦਾ ਉਚਿਤ ਚੋਣ ਵਿੱਚ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਫਲਨ ਨੂੰ ਦੂਜੇ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

- $\int e^x [f(x) + f'(x)]\, dx = \int e^x f(x)\, dx + C$

- ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਕੁੱਝ ਖਾਸ ਕਿਸਮਾਂ

(i) $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$

(ii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$

(iii) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

(iv) $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ਵਰਗੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

(v) $\int \frac{px + q\, dx}{ax^2 + bx + c}$ ਅਰਥਾਤ $\int \frac{px + q\, dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ਵਰਗੀਆਂ ਕਿਸਮਾਂ ਦੇ ਇਨਟਿਗਰਲ ਨੂੰ ਮਾਨਕ/ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$px + q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) + \mathrm{B} = \mathrm{A}\,(2ax + b) + \mathrm{B}$, A ਅਤੇ B ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

- ਅਸੀਂ $\int_a^b f(x)\, dx$ ਨੂੰ ਵਕਰ, $y = f(x)$, $a \le x \le b$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ordinates $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $[a, b]$ ਵਿੱਚ x ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਤਦ $\int_a^x f(x)\, dx$ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ $\mathrm{A}(x)$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ ਦਾ ਸੰਕਲਪ ਸਾਨੂੰ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵੱਲ ਪ੍ਰੇਰਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

7.8.2 ਇਨਇਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ **(First fundamental theorem of integral calculus)**

ਪ੍ਰਮੇਯ 1. ਮੰਨ ਲਉ ਖੇਤਰਫਲ ਫਲਨ $\mathrm{A}(x) = \int_a^x f(x)\, dx$, ਸਾਰੇ $\forall\ x \ge a$, ਦੇ ਲਈ, ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ f ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਲਗਾਤਾਰ ਮੰਨਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਦ $\mathrm{A}'(x) = f(x)$ ਸਾਰੇ $\forall\ x \in [a, b]$ ਦੇ ਲਈ।

- ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ $[a, b]$ ਤੇ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ f, x ਇੱਕ ਲਗਾਤਾਰ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ F ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਫਲਨ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $\frac{d}{dx}\mathrm{F}(x) = f(x)$, f ਦੇ ਪ੍ਰਾਂਤ ਦੇ ਸਾਰੇ x ਦੇ ਲਈ ਹੈ।

ਤਦ $\int_a^b f(x)\, dx = \left[\mathrm{F}(x) + \mathrm{C}\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$

ਇਸ ਨੂੰ ਵਿਸਥਾਰ $[a, b]$ ਤੇ f ਦਾ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਇੱਥੇ a ਅਤੇ b ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀਆਂ ਸੀਮਾਵਾਂ ਅਖਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, a ਨੂੰ ਹੇਠਲੀ ਸੀਮਾ ਅਤੇ b ਨੂੰ ਉਪਰਲੀ ਸੀਮਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।