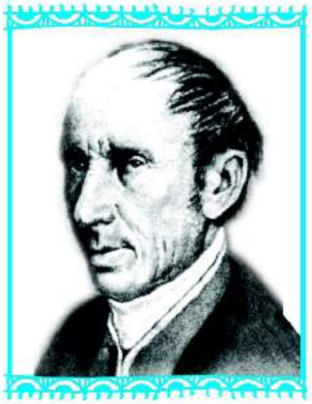
ਪਾਠ 8

ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ (Application of Integrals)

❖ *One should study Mathematics because it is only through Mathematics that nature can be conceived in harmonious form. – BIRKHOFF* ❖

8.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਿਆਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ, ਆਇਤਾਂ, ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਜਿਆਮਤੀ ਸ਼ਕਲਾਂ ਆਦਿ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਵਿਹਾਰਕ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਗਣਿਤ ਦਾ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਸੂਤਰ ਅਧਾਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਅਧਾਰੀ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਅਨੇਕ ਸਾਧਾਰਨ ਸ਼ਕਲਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਪਰ ਫਿਰ ਵੀ ਇਹ ਸੂਤਰ ਵਕਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੇ ਲਈ ਕਾਫੀ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੇ ਕੁਝ ਸੰਕਲਪਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੋਵੇਗੀ।



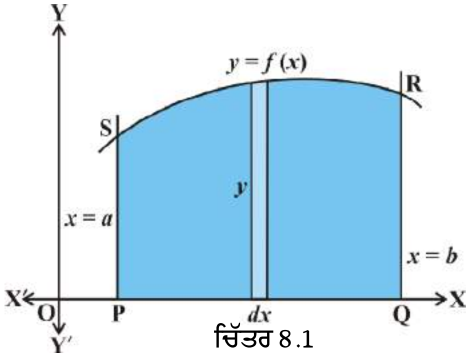
A.L. Cauchy
(1789-1857)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਜੋੜ ਦੇ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲਾਂ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਾਧਾਰਨ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ, ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ ਚੱਕਰਾਂ, ਪੇਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਇਲਿਪਸ (ਕੇਵਲ ਮਾਨਕ ਰੂਪ) ਦੀਆਂ ਚਾਪਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇਨਿਟਿਗਰਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਖਾਸ ਅਨੁਪ੍ਰਯੋਗ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਵਕਰਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

8.2 ਸਧਾਰਨ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਖੇਤਰਫਲ (Area Under Simple Curves)

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ, ਜੋੜ ਦੀ ਸੀਮਾ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਅਤੇ ਕਲਨ ਦੀ ਮੌਲਿਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤੀ ਜਾਏ, ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਆਸਾਨ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਨਾਲ ਹੋਣ ਵਾਲੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਚਿੱਤਰ 8.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵਕਰ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ

ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਬਹੁਤ ਪਤਲੀ ਅਤੇ ਲੰਬਕਾਰੀ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਗਿਣਤੀ ਵਿੱਚ ਪੱਟੀਆਂ ਨਾਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। y ਉਚਾਈ ਅਤੇ dx ਚੌੜਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਇਖਤਿਆਰੀ ਪੱਟੀ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਵਿੱਚ dA (ਅਧਾਰੀ ਪੱਟੀ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) = ydx, ਜਿੱਥੇ $y = f(x)$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.1

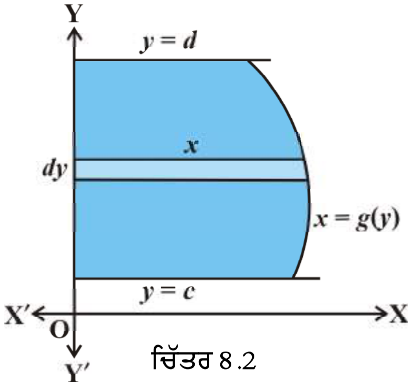
ਇਹ ਖੇਤਰਫਲ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਖੇਤਰ ਦੇ ਅੰਦਰ ਕਿਸੇ ਇਖਤਿਆਰੀ ਸਥਿਤੀ ਤੇ ਅਤੇ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿੱਚ x ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੁੱਲ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵਕਰ $y = f(x)$, ਕੋਟੀ $x = a$, $x = b$ ਅਤੇ x&ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ A ਨੂੰ, ਖੇਤਰ PQRSP ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਪਤਲੀ ਪੱਟੀਆਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ:

$$\mathrm{A} = \int_a^b d\mathrm{A} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

ਵਕਰ $x = g(y)$, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = c$, $y = d$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

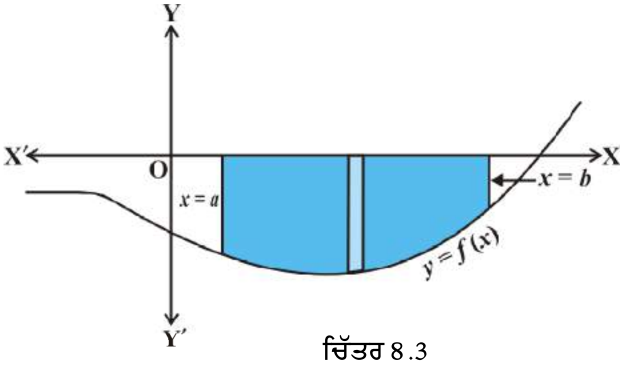
$$\mathrm{A} = \int_c^d x\,dy = \int_c^d g(y)\,dy$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8 . 2 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



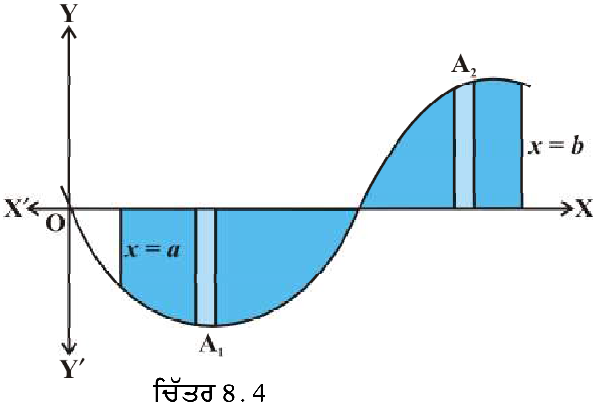
ਚਿੱਤਰ 8.2

ਟਿੱਪਣੀ : ਜਦਕਿ ਵਿਚਾਰ ਅਧੀਨ ਵਕਰ ਦੀ ਸਥਿਤੀ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਜਿਵੇਂਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.3 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਥੇ $x = a$ ਤੋਂ $x = b$ ਤੱਕ $f(x) < 0$ ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$, $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਦੇ ਸਿਰਫ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਮੁੱਲ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਜਦਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਨਿਰਪੇਖ ਮੁੱਲ ਅਰਥਾਤ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 8.3

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਕਰ ਦਾ ਕੁੱਝ ਭਾਗ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਕੁੱਝ ਭਾਗ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੋਵੇ, ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.4 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇੱਥੇ $A_1 < 0$ ਅਤੇ $A_2 > 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਵਕਰ $y = f(x)$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ A ਸੂਤਰ $A = |A_1| + A_2$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.4

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = a^2$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: ਚਿੱਤਰ 8.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਹੋਏ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ

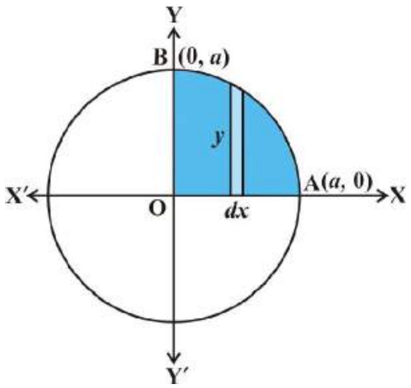
= 4 (ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀ Ordinates $x = 0$ ਅਤੇ $x = a$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰਫਲ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

[ਕਿਉਂਕਿ ਚੱਕਰ x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ y- ਧੁਰੇ ਦੋਵਾਂ ਤੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ।]

$$= 4\int_0^a y\,dx \text{ (ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ)}$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

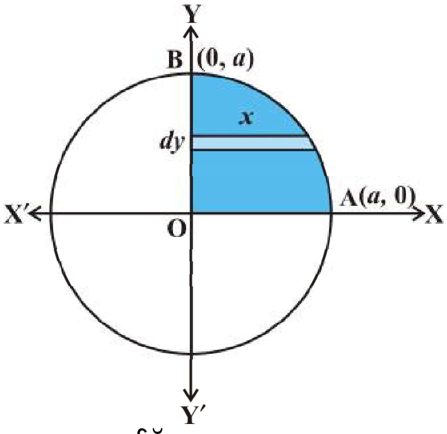
ਕਿਉਂਕਿ $x^2 + y^2 = a^2$ ਤੋਂ $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਖੇਤਰ AOBA ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ y ਨੂੰ ਧਨਾਤਮਕ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 8.5

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi a^2$$



ਚਿੱਤਰ 8.6

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.6 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰ ਦੁਆਰਾ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^a x\,dy = 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{a}\right]_0^a$$

$$= 4\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$

$$= 4\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 2. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਦਾ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8.7 ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਸ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ABA′B′A ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\begin{pmatrix}\text{ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ } x-\text{ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ } x = 0, x = a \text{ ਦੁਆਰਾ ਪਹਿਲੇ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ} \\ \text{ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ } OBA \text{ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ}\end{pmatrix}$$

(ਕਿਉਂਕਿ ਇਲਿਪਸ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਦੋਵਾਂ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ)

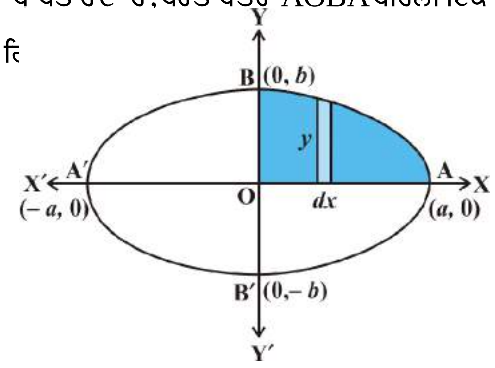
$$= 4\int_0^a y\,dx \quad \text{(ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ)}$$

ਹੁਣ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਨਾਲ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਖੇਤਰ AOBA ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ y ਧਨਾਤਮਕ ਲਿਆ ਿ

$$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{\text{ï}1}\frac{x}{a}\right]_0^a \quad \text{(ਕਿਉਂ)}$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\left(\frac{a}{2}\times 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1\right) - 0\right]$$



ਚਿੱਤਰ 8.7

$$=\frac{4b}{a}\frac{a^2}{2}\frac{\pi}{2}=\pi ab \text{ ਹੈ।}$$

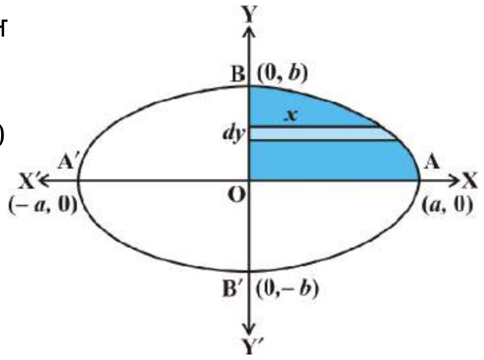
ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਅ ਇਲਿਪਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 4\int_0^b x\,dy = 4\frac{a}{b}\int_0^b \sqrt{b^2-y^2}\,dy \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

$$=\frac{4a}{b}\left[\frac{y}{2}\sqrt{b^2-y^2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{b}\right]_0^b$$

$$=\frac{4a}{b}\left[\left(\frac{b}{2}\times 0+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}1\right)-0\right]$$

$$=\frac{4a}{b}\cdot\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\pi ab \text{ gA}$$



ਚਿੱਤਰ 8.8

8.2.1 *ਇੱਕ ਵਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (The area of the region bounded by a curve and a line)*

ਇਸ ਉਪਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰ, ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਉਪਰੋਕਤ ਜ਼ਿਕਰ ਕੀਤੇ ਵਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਸਿਰਫ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤੇ ਜਾਣਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਹੋਰ ਰੂਪਾਂ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਇਸ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ।

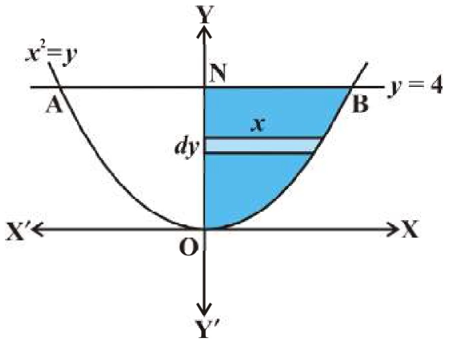
ਉਦਾਹਰਨ 3. ਵਕਰ $y = x^2$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = 4$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਨ $y = x^2$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਵਕਰ ਸਿਰਫ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਚਿੱਤਰ 8.9 ਤੋਂ, ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$2\int_0^4 x\,dy =$ 2 (ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰ, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 0$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ BOND ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$$= 2\int_0^4 \sqrt{y}\,dy \quad (\text{ਕਿਉਂ ?})$$

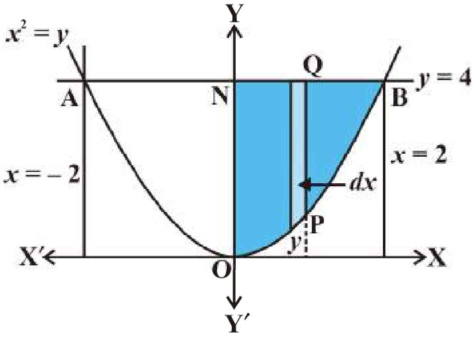
$$= 2\times\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{4}{3}\times 8=\frac{32}{3}$$



ਚਿੱਤਰ 8.9

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਲਈਆਂ ਹਨ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.9 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਦੂਜਾ ਬਦਲ : ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ PQ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.10 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ $x^2 = y$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਹਨਾਂ ਨਾਲ $x =$ ï 2 ਅਤੇ $x = 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.7

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੇਤਰ AOBA ਨੂੰ ਵਕਰਾਂ $y = x^2$, $y = 4$ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x =$ ï 2 ਅਤੇ $x = 2$ ਵਿੱਚ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਖੇਤਰ AOBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$= \int_{-2}^{2} y\,dx$ [$y =$ (ਬਿੰਦੂ Q ਦਾ y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ï ਬਿੰਦੂ P ਦਾ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ y) $= 4$ ï x^2]

$$= 2\int_{0}^{2}\left(4 - x^2\right)dx \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= 2\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left[4 \times 2 - \frac{8}{3}\right] = \frac{32}{3}$$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲੰਬਕਾਰੀ ਜਾਂ ਲੇਟਵੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਨੂੰ ਵੀ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦੇ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਪੱਟੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਨੂੰ ਤਰਜੀਹ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

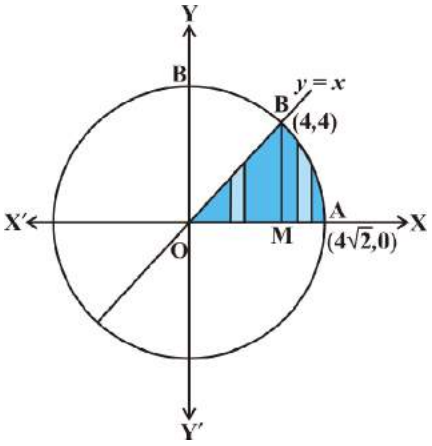
ਉਦਾਹਰਨ 3. ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 32$, ਰੇਖਾ $y = x$, ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਨ ਹਨ :

$$y = x \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ $$x^2 + y^2 = 32 \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਨ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਚੱਕਰ ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਇੱਕ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ B(4, 4) ਤੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ 8-11)A x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ BM ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.11

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ OBMO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BMAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ, ਖੇਤਰ OBMO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 y\,dx = \int_0^4 x\,dx = \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^4 = 8 \qquad \ldots (3)$$

ਦੁਬਾਰਾ ਖੇਤਰ BMAB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_4^{4\sqrt{2}} y dx = \int_4^{4\sqrt{2}} \sqrt{32 - x^2}\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x\sqrt{32 - x^2} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1}\frac{x}{4\sqrt{2}}\right]_4^{4\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2} 4\sqrt{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1} 1\right) - \left(\frac{4}{2}\sqrt{32-16} + \frac{1}{2} \times 32 \times \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 8\pi - (8 + 4\pi) = 4\pi - 8 \qquad \ldots (4)$$

ਸਮੀਕਰਨ (3) ਅਤੇ (4) ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $A = 4\pi$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 5. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x = 0$ ਅਤੇ $x = ae$, ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $b^2 = a^2 (1 - e^2)$ ਅਤੇ $e < 1$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰ BOB′RFSB ਇਲਿਪਸ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ordinates $x = 0$ ਅਤੇ $x = ae$ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (ਚਿੱਤਰ 8.12)।

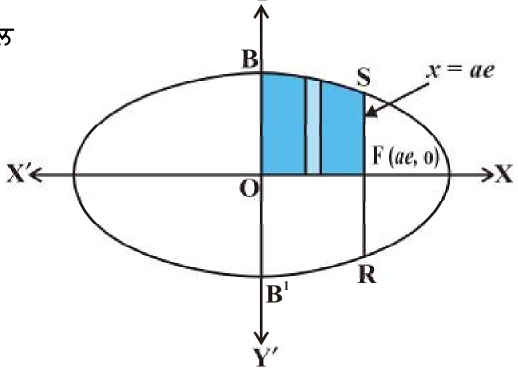
ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਖੇਤਰ BOB′RFSB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= 2\int_0^{ae} y dx = 2\frac{b}{a}\int_0^{ae}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2 - a^2e^2} + a^2\sin^{-1} e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1-e^2} + \sin^{-1} e\right]$$



ਚਿੱਤਰ 8.12

ਅਭਿਆਸ 8.1

1. ਵਕਰ $y^2 = x$, ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 1, x = 4$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਵਕਰ $y^2 = 9x, x = 2, x = 4$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $x^2 = 4y, y = 2, y = 4$ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$, ਰੇਖਾ $x = \sqrt{3}\,y$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਕਾਟਵੀਂ ਰੇਖਾ $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ ਦੁਆਰਾ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = a^2$ ਦੇ ਕੱਟੇ ਗਏ ਛੋਟੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਜੇਕਰ ਵਕਰ $x = y^2$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x = 4$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰਿਆ ਹੋਇਆ ਖੇਤਰਫਲ ਰੇਖਾ $x = a$ ਨਾਲ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ a ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਅਤੇ $y = |x|$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਵਕਰ $x^2 = 4y$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x = 4y$ ï 2 ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 12 ਅਤੇ 13 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ।

12. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 0, x = 2$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

    (A) π (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

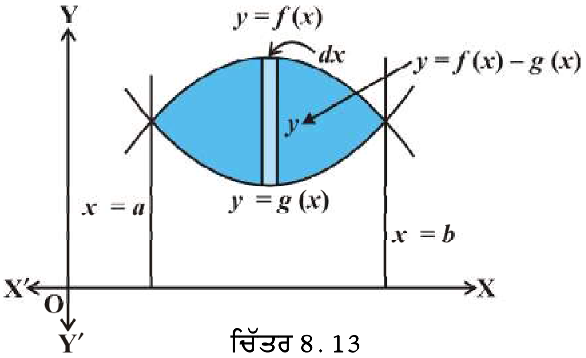
13. ਵਕਰ $y^2 = 4x$, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

    (A) 2 (B) $\frac{9}{4}$ (C) $\frac{9}{3}$ (D) $\frac{9}{2}$

8.3 ਦੋ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ (Area Between Two Curves)

ਲੈਬਨਿਜ ਦੀ ਚੇਤਨਾ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਗਿਆਨ ਦੀ ਸਚਾਈ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਬਹੁਤ ਜ਼ਿਆਦਾ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਛੋਟੀਆਂ–ਛੋਟੀਆਂ ਪੱਟੀਆਂ ਕੱਟ ਕੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰ ਕੇ, ਖੇਤਰਫਲ ਦੀ ਗਣਨਾ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਇਨਿਟਗਰੇਸ਼ਨ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ, ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਵਕਰ $y = f(x)$ ਅਤੇ $y = g(x)$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹਨ ਇੱਥੇ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \geq g(x)$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.13 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਤੋਂ y ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹੋਏ ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ।

ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਸਥਾਪਨਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਲੰਬਕਾਰੀ ਪੱਟੀਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈਣਾ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.13 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਧਾਰੀ ਪੱਟੀ ਦੀ ਉਚਾਈ $f(x)$ ï $g(x)$ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ dx ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਧਾਰੀ ਖੇਤਰਫਲ



ਚਿੱਤਰ 8.13

dA = [$f(x)$ ï $g(x)$] dx, ਅਤੇ ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

ਦੂਜਾ ਬਦਲ :

A = [ਵਕਰ $y = f(x)$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a, x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ]

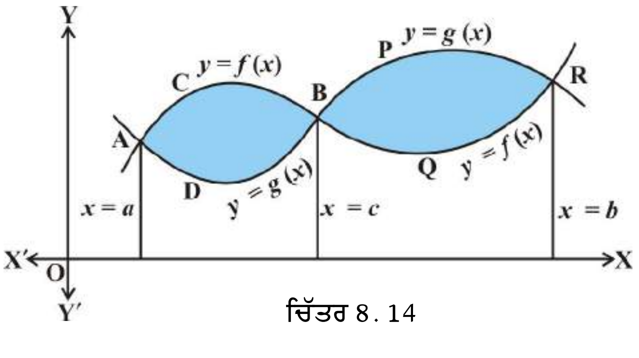
ï [ਵਕਰ $y = g(x)$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a, x = b$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ]

$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$ ਜਿੱਥੇ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \geq g(x)$

ਜਦਕਿ $[a, c]$ ਵਿੱਚ $f(x) \geq g(x)$ ਅਤੇ $[c, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \leq g(x)$ ਇੱਥੇ $a < c < b$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.14 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਰਕਾਂ ਵਿੱਚ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

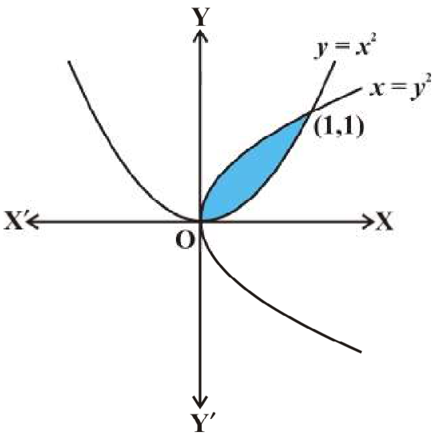
ਕੁੱਲ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ ACBDA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BPRQB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_a^c \left[f(x) - g(x)\right]dx + \int_c^b \left[g(x) - f(x)\right]dx$$



ਚਿੱਤਰ 8.14

ਉਦਾਹਰਨ 6. ਦੋ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y = x^2$ ਅਤੇ $y^2 = x$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 8.15

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.15 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ O (0, 0) ਅਤੇ A (1, 1) ਹਨ। ਇੱਥੇ $y^2 = x$ ਅਰਥਾਤ $y = \sqrt{x} = f(x)$ ਅਤੇ $y = x^2 = g(x)$, ਹਨ। ਇੱਥੇ [0, 1] ਵਿੱਚ $f(x) \geq g(x)$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right]dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

ਉਦਾਹਰਨ 7. x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 8x$ ਅਤੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

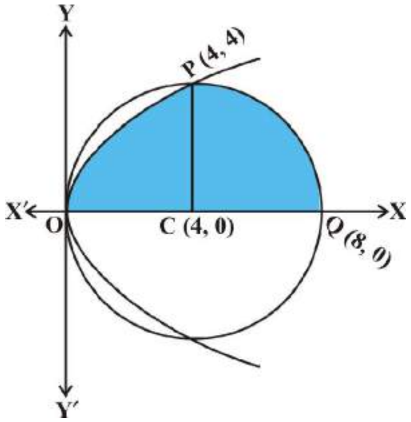
ਹੱਲ : ਚੱਕਰ ਦਾ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 + y^2 = 8x$, $(x ï 4)^2 + y^2 = 16$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ (4, 0) ਹੈ ਅਤੇ ਅਰਧਵਿਆਸ 4 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਦੇ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਕੱਟਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$x^2 + 4x = 8x$$

ਅਰਥਾਤ $x^2 ï 4x = 0$

ਅਰਥਾਤ $x (x ï 4) = 0$

ਅਰਥਾਤ $x = 0, x = 4$



ਚਿੱਤਰ 8.16

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ O(0, 0) ਅਤੇ x- ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ P(4,4) ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 8. 16 ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਇਹਨਾਂ ਦੋਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ OPQCO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= (ਖੇਤਰ OCPO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ) + (ਖੇਤਰ PCQP ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

$$= \int_0^4 y dx + \int_4^8 y dx$$

$$= 2\int_0^4 \sqrt{x}\,dx + \int_4^8 \sqrt{4^2-(x-4)^2}\,dx$$ (ਕਿਉਂ\)

$$= 2\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 + \int_0^4 \sqrt{4^2-t^2}\,dt,$$ tgk $x-4=t$

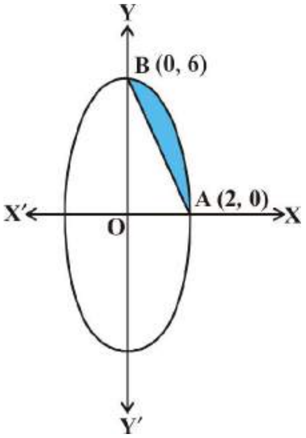
$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{t}{2}\sqrt{4^2-t^2} + \frac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^{-1}\frac{t}{4}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} + \left[\frac{4}{2}\times 0 + \frac{1}{2}\times 4^2 \times \sin^{-1}1\right] = \frac{32}{3} + \left[0 + 8\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{32}{3} + 4\pi = \frac{4}{3}(8+3\pi)$$

ਉਦਾਹਰਨ 8. ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ AOBA ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ ਇਲਿਪਸ $9x^2 + y^2 = 36$ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ OA = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ OB = 6 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ = ਲਘੂ ਚਾਪ AB ਅਤੇ ਜੀਵਾ AB ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਲਿਪਸ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਇਆ ਸਮੀਕਰਨ $9x^2 + y^2 = 36$, ਅਰਥਾਤ

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$ ਅਰਥਾਤ $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਸ਼ਕਲ ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚਿੱਤਰ ਵਰਗੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਜੀਵਾ AB ਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 8.17

$$y - 0 = \frac{6-0}{0-2}(x-2)$$

ਅਰਥਾਤ $y = -3(x-2)$

ਅਰਥਾਤ $y = -3x + 6$

ਚਿੱਤਰ 8.17 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

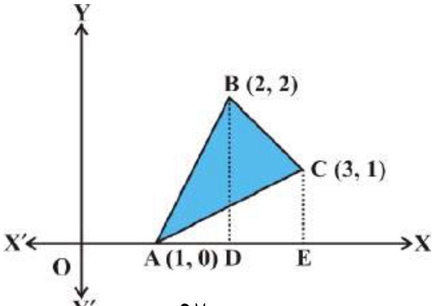
$$= 3\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx - \int_0^2 (6-3x)\,dx$$ (ਕਿਉਂ ?)

$$= 3\left[\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + \frac{4}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 3\left[\frac{2}{2}\times 0 + 2\sin^{-1}(1)\right] - \left[12 - \frac{12}{2}\right] = 3\times 2\times\frac{\pi}{2} - 6 = 3\pi - 6$$

ਉਦਾਹਰਨ 9. ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ (1, 0), (2, 2) ਅਤੇ (3, 1) ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ A(1, 0), B(2, 2) ਅਤੇ C(3, 1) ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 8.18)



ਚਿੱਤਰ 8.18

Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = Δ ABD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਸਮਲੰਬ ਚਤਰਭੁਜ BDEC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ï Δ AEC ਖੇਤਰਫਲ

ਹੁਣ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ CA ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $y = 2(x$ ï $1)$, $y = 4$ ï x, $y = \frac{1}{2}(x$ ï $1)$ ਹਨ।

çÅ Ä å ô » Δ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_1^2 2(x-1)\,dx + \int_2^3 (4-x)\,dx - \int_1^3 \frac{x-1}{2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 + \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^3$$

$$= 2\left[\left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[\left(4\times 3 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\times 2 - \frac{2^2}{2}\right)\right]$$

$$ï\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3^2}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{3}{2}$$

ਉਦਾਹਰਨ 10. ਦੋ ਚੱਕਰਾਂ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ $(x$ ï $2)^2 + y^2 = 4$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਨ ਹਨ :

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$(x\ ï\ 2)^2 + y^2 = 4 \quad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਨ (1) ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚੱਕਰ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ, ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਨ (2) ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਚੱਕਰ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ C(2, 0) ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਨ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$(x\ ï\ 2)^2 + y^2 = x^2 + y^2$$

ਅਰਥਾਤ x^2 ï $4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2$

ਅਰਥਾਤ $x = 1$ ਜਿਸ ਨਾਲ $y = \pm\sqrt{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

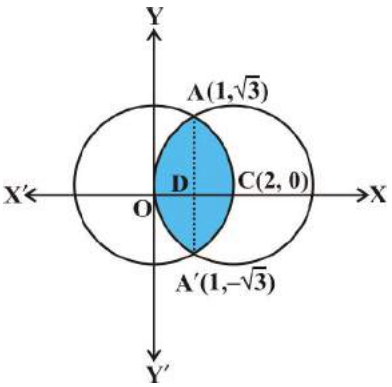
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $A(1, \sqrt{3})$ ਅਤੇ $A'(1,$ ï $\sqrt{3})$ ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.19 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ O ACA′O ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2 [ਖੇਤਰ ODCAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ] (ਕਿਉਂ ?)

= 2 [ਖੇਤਰ ODAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ DCAD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ]

$$= 2\left[\int_0^1 y\,dx + \int_1^2 y\,dx\right]$$

$$= 2\left[\int_0^1 \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx + \int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx\right]$$



ਚਿੱਤਰ 8.19

(ਕਿਉਂ)

$$= 2\left[\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 +$$

$$2\left[\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}\times 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[(x-2)\sqrt{4-(x-2)^2} + 4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]_0^1 + \left[x\sqrt{4-x^2} + 4\sin^{-1}\frac{x}{2}\right]_1^2$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} + 4\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) - 4\sin^{-1}(-1)\right] + \left[4\sin^{-1}1 - \sqrt{3} - 4\sin^{-1}\frac{1}{2}\right]$$

$$= \left[\left(-\sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right) + 4\times\frac{\pi}{2}\right] + \left[4\times\frac{\pi}{2} - \sqrt{3} - 4\times\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \left(-\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} + 2\pi\right) + \left(2\pi - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$$

ਅਭਿਆਸ 8 . 2

1. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $x^2 = 4y$ ਅਤੇ ਚੱਕਰ $4x^2 + 4y^2 = 9$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਵਕਰਾਂ $(x ï 1)^2 + y^2 = 1$ ਅਤੇ $x^2 + y^2 = 1$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਵਕਰਾਂ $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ ਅਤੇ $x = 3$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਸਿਖਰ $(ï 1, 0)$, $(1, 3)$ ਅਤੇ $(3, 2)$ ਹਨ।
5. ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨ $y = 2x + 1$, $y = 3x + 1$ ਅਤੇ $x = 4$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 6 ਅਤੇ 7 ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

6. ਚੱਕਰ $x^2 + y^2 = 4$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x + y = 2$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਛੋਟੇ ਭਾਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

   (A) $2 (\pi ï 2)$ (B) $\pi ï 2$ (C) $2\pi ï 1$ (D) $2 (\pi + 2)$

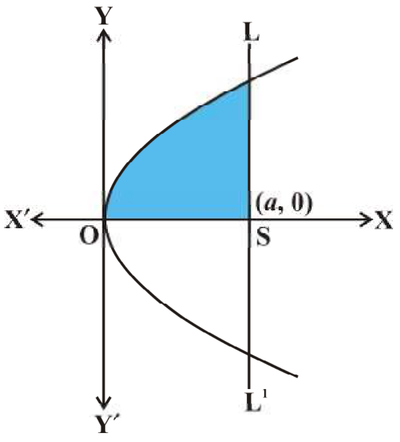
7. ਚੱਕਰ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $y = 2x$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਨਾਂ

ਉਦਾਹਰਨ 11. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਲੇਟਸ ਰੈਕਟਮ (latus-rectum) ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8 . 20 ਤੋਂ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ। ' latus-rectum LSL ਜੀਵਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ $x = a$ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਪੈਰਾਬੋਲਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਮਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8 . 20

ਖੇਤਰ OLL′O ਦਾ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = 2 (ਖੇਤਰ OLSO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ)

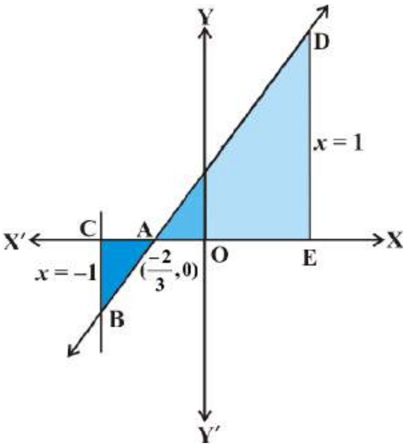
$$= 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= 2\times 2\sqrt{a}\int_0^a \sqrt{x}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{8}{3}\sqrt{a}\left[a^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{8}{3}a^2$$

ਉਦਾਹਰਨ 12. ਰੇਖਾ $y = 3x + 2$, x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ordinates x = ï 1 ਅਤੇ $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.21 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਰੇਖਾ $y = 3x + 2$, x- ਧੁਰੇ ਨੂੰ $x = \frac{-2}{3}$ ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $x \in \left(-1, \frac{-2}{3}\right)$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਗਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਹੈ ਅਤੇ $x \in \left(\frac{-2}{3}, 1\right)$ ਦੇ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਗਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 8.21

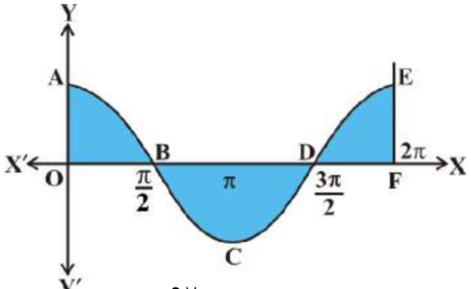
ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ ACBA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ ADEA ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \left|\int_{-1}^{\frac{-2}{3}} (3x+2)dx\right| + \int_{\frac{-2}{3}}^{1} (3x+2)dx$$

$$= \left|\left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{\frac{-2}{3}}\right| + \left[\frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{\frac{-2}{3}}^{1} = \frac{1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{13}{3}$$

ਉਦਾਹਰਨ 13. $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2\pi$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਵਕਰ $y = \cos x$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਚਿੱਤਰ 8.22 ਤੋਂ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ
= ਖੇਤਰ OABO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ BCDB ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ DEFD ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ



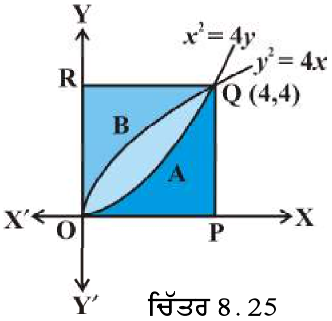
ਚਿੱਤਰ 8.22

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^{\frac{´}{2}} \cos x\,dx + \left|\int_{\frac{´}{2}}^{\frac{3´}{2}} \cos x\,dx\right| + \int_{\frac{3´}{2}}^{2´} \cos x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left|[\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right| + [\sin x]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 1 + 2 + 1 = 4$$

ਉਦਾਹਰਨ 14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਵਕਰ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$, ਰੇਖਾਵਾਂ $x = 0$, $x = 4$, $y = 4$ ਅਤੇ $y = 0$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 8.25

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਪੇਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ (0,0) ਅਤੇ (4,4) ਹਨ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 8.23 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਵਕਰਾਂ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ OAQBO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left[2 \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4$$

$$= \frac{32}{3} - \frac{16}{3} = \frac{16}{3} \qquad \text{... (1)}$$

ਦੁਬਾਰਾ ਵਕਰਾਂ $x^2 = 4y$, $x = 0$, $x = 4$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ OPQAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}\left[x^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \text{... (2)}$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਕਰ $y^2 = 4x$, y-ਧੁਰੇ $y = 0$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ OBQRO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^4 x dy = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{1}{12}\left[y^3\right]_0^4 = \frac{16}{3} \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਨਾਂ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ

ਖੇਤਰ OAQBO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ OPQAO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ਖੇਤਰ OBQRO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਅਰਥਾਤ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4x$ ਅਤੇ $x^2 = 4y$ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਖੇਤਰਫਲ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਰਗ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਬਰਾਬਰ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਨ 15. ਖੇਤਰ $\{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1, 0 \le y \le x + 1, 0 \le x \le 2\}$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਖੇਤਰ ਦਾ ਰੇਖਾ ਚਿੱਤਰ ਤਿਆਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਦਾ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹ ਖੇਤਰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਖੇਤਰਾਂ ਦਾ ਵਿਚਕਾਰਲਾ ਖੇਤਰ ਹੈ :

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \le y \le x^2 + 1\}$$

$$A_2 = \{(x, y) : 0 \le y \le x + 1\}$$

ਅਤੇ $$A_3 = \{(x, y) : 0 \le x \le 2\}$$

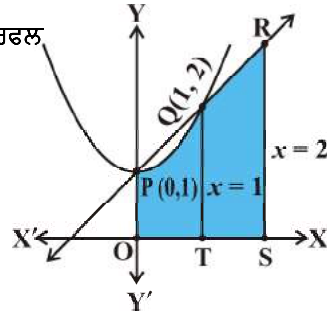
ਵਕਰਾਂ $y = x^2 + 1$ ਅਤੇ $y = x + 1$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ P(0, 1) ਅਤੇ Q(1, 2) ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 8.24 ਨਾਲ, ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰ, ਛਾਇਆ ਖੇਤਰ OPQRSTO ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

= ਖੇਤਰ OTQPO ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ + ਖੇਤਰ TSRQT ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \int_0^1 (x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x + 1)\, dx \qquad \text{(ਕਿਉਂ ?)}$$

$$= \left[\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\right]_0^1 + \left[\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\right]_1^2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{3} + 1\right) - 0\right] + \left[(2 + 2) - \left(\frac{1}{2} + 1\right)\right] = \frac{23}{6}$$



ਚਿੱਤਰ 8.24

ਅਧਿਆਇ 8 ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :
   (i) $y = x^2$; $x = 1$, $x = 2$ ਅਤੇ x- ਧੁਰਾ
   (ii) $y = x^4$; $x = 1$, $x = 5$ ਅਤੇ x- ਧੁਰਾ
2. ਵਕਰਾਂ $y = x$ ਅਤੇ $y = x^2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ ਵਿੱਚ $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 1$ ਅਤੇ $y = 4$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. $y = |x + 3|$ ਦਾ ਗਰਾਫ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ $\int_{-6}^{0} |x + 3|\, dx$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. $x = 0$ ਅਤੇ $x = 2\pi$ ਅਤੇ ਵਕਰ $y = \sin x$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 4ax$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = mx$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $4y = 3x^2$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $2y = 3x + 12$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਇਲਿਪਸ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਪੈਰਾਬੋਲਾ $x^2 = y$, ਰੇਖਾ $y = x + 2$ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਕਰ $|x| + |y| = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
    [ਸੰਕੇਤ : ਲੋੜੀਂਦਾ ਖੇਤਰ, ਰੇਖਾਵਾਂ $x + y = 1$, xï $y = 1$, ï $x + y = 1$ ਅਤੇ ï x ï $y = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰਿਆ ਹੈ।]
12. ਵਕਰਾਂ $\{(x, y) : y \geq x^2$ ਅਤੇ $y = |x|\}$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC, ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ

ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ A(2, 0), B (4, 5) ਅਤੇ C (6, 2) ਹੈ।

14. ਇੰਟੀਗ੍ਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + y = 4$, $3x$ ï $2y = 6$ ਅਤੇ x ï $3y + 5 = 0$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਖੇਤਰ $\{(x, y) : y^2 \le 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16 ਤੋਂ 20 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੀ ਚੋਣ ਕਰੋ :

16. ਵਕਰ $y = x^3$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ ordinates $x =$ ï 2, $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(A) ï 9 (B) $\frac{-15}{4}$ (C) $\frac{15}{4}$ (D) $\frac{17}{4}$

17. ਵਕਰ $y = x\,|x|$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਕੋਟੀਆਂ $x =$ ï 1 ਅਤੇ $x = 1$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ।

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{4}{3}$

[ਸੰਕੇਤ : $y = x^2$ ਜਦ ਕਿ $x > 0$ ਅਤੇ $y =$ ï x^2 ਜਦ $x < 0$]

18. $x^2 + y^2 = 16$ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜੋ ਕਿ ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = 6$ ਦੇ ਖੇਤਰ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਹੈ :

(A) $\frac{4}{3}(4\pi - \sqrt{3})$ (B) $\frac{4}{3}(4\pi + \sqrt{3})$ (C) $\frac{4}{3}(8\pi - \sqrt{3})$ (D) $\frac{4}{3}(8\pi + \sqrt{3})$

19. y-ਧੁਰੇ $y = \cos x$ ਅਤੇ $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ :

(A) $2(\sqrt{2} - 1)$ (B) $\sqrt{2} - 1$ (C) $\sqrt{2} + 1$ (D) $\sqrt{2}$

ਸਾਰ

- ਵਕਰ $y = f(x)$, x- ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a$ ਅਤੇ $x = b\ (b > a)$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ : ਖੇਤਰਫਲ $= \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ਹੈ।
- ਵਕਰ $x = \phi(y)$, y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = c$, $y = d$ ਨਾਲ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਸੂਤਰ :

  ਖੇਤਰਫਲ: $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$ ਹੈ।
- ਦੋ ਵਕਰਾਂ $y = f(x)$, $y = g(x)$ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x = a$, $x = b$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਘਿਰੇ ਖੇਤਰ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

  ਖੇਤਰਫਲ: $= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$, ਜਿੱਥੇ $[a, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \ge g(x)$
- ਜਦਕਿ $[a, c]$ ਵਿੱਚ $f(x) \ge g(x)$ ਅਤੇ $[c, b]$ ਵਿੱਚ $f(x) \le g(x)$, $a < c < b$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

  ਖੇਤਰਫਲ $= \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦਾ ਮੂਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਵਿਕਾਸ ਕਾਲ ਤੋਂ ਹੀ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਰਾਣੇ ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤਕਾਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਕਸਿਤ (exhaustion) ਵਿਧੀ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਵਿਧੀ ਦਾ ਜਨਮ ਸਮਤਲ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਅਤੇ ਠੋਸ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਆਇਤਨ ਦੀ ਗਣਨਾ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਮੁਸ਼ਕਿਲਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ (exhaustion) ਵਿਧੀ, ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸਥਿਤੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਖੀਣਤਾ (exhaustion) ਵਿਧੀ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਵਿਕਾਸ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਕਾਲ ਵਿੱਚ ਯੂਡੋਕਸ (Eudoxus (440 ਈਸਾ ਪੂਰਵ) ਅਤੇ ਆਰਕੀਮੀਡੀਜ਼ (Archimedes (300 ਈਸਾ ਪੂਰਵ) ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਨਾਲ ਹੋਇਆ ਹੈ।

ਕਲਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਵਿਕਾਸ ਈਸਾ ਤੋਂ 17ਵੀਂ ਸਦੀ ਬਾਦ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਸੰਨ 1665 ਵਿੱਚ ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਕਲਨ ਤੇ ਆਪਣਾ ਕੰਮ ਪ੍ਰਵਾਹ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ (Theory of fluxion) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਇਸ ਸਿਧਾਂਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਵਕਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਵਕਰ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ। ਨਿਊਟਨ ਨੇ ਉਲਟ ਫਲਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਨਾਲ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਐਂਟੀ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਅਨੰਤ ਇਨਟਿਗਰਲ) ਜਾਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਉਲਟ ਵਿਧੀ (Inverse Method of tangents) ਦਾ ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ।

1684ï 86, ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਬਨਿਜ (Leibnitz) ਨੇ (Acta Eruditorum) ਵਿੱਚ ਆਰਟੀਕਲ ਛਾਪਿਆ ਜਿਸ ਨੂੰ (Calculous Summatorius) ਨਾਂ ਦਿੱਤਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਅਣਗਣਿਤ ਛੋਟੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਸੀ, ਜਿਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸੰਕੇਤ ô∫ôਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ। ਸੰਨ 1696 ਈ. ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਜੇਂ ਬਰਨੋਲੀ (J.Bernoulli) ਦੇ ਸੁਝਾਅ ਨੂੰ ਮੰਨ ਕੇ ਆਪਣੇ ਆਰਟੀਕਲ ਨੂੰ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਕਲਨ (Calculus Integrali) ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਤੋਂ ਨਿਊਟਨ ਵੱਲੋਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਉਲਟ ਵਿਧੀ (Inverse Method of tangents) ਦੇ ਸੰਗਤ ਸੀ।

ਨਿਊਟਨ ਅਤੇ ਲਿਬਨਿਜ ਦੋਨਾਂ ਨੇ ਪੂਰਨ ਤੌਰ ਤੇ ਅਜ਼ਾਦ ਰਸਤਾ ਅਪਣਾਇਆ ਜੋ ਬਿਲਕੁਲ ਵੱਖ ਸਨ। ਪਰ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਵਿਹਾਰਕ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਪਾਏ ਗਏ। ਲੈਵਨਿਜ ਨੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ।

ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੀ ਪ੍ਰਤੀਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਤੇ ਸੀਮਿਤ ਇਨਟਿਗਰਲ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੀ ਤਾਰੀਫ਼ ਕੀਤੀ।

ਸਿੱਟਾ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਲਨ ਦੀਆਂ ਆਧਾਰਭੂਤ ਧਾਰਨਾਵਾਂ, ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਅਤੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਕਲਨ ਨਾਲ ਇਸਦੇ ਸ਼ੁਰੂਆਤੀ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਪੀ. ਡੀ. ਫਰਮੈਟ, ਆਈ. ਨਿਊਟਨ ਅਤੇ ਜੀ. ਲਿਬਨਿਜ ਦੇ ਕੰਮਾਂ ਦੁਆਰਾ 17 ਵੀ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਮਾਣਿਕਤਾ, ਸੀਮਾ ਦੇ ਸੰਕਲਪ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ 19ਵੀਂ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਏ. ਐਲ. ਕੋਚੀ (A.L.Cauchy) ਵੱਲੋਂ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਲੀ ਸੋਫੀ (Lie Sophie) ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕੁਟੇਸ਼ਨ ਹੈ : "It may be said that the conceptions of differential quotient and integral which in their origin certainly go back to Archimedes were introduced in Science by the investigations of Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis... The discovery that differentiation and integration are inverse operations belongs to Newton and Leibnitz".