ਅਧਿਆਇ **9**

ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ
Differential Equations

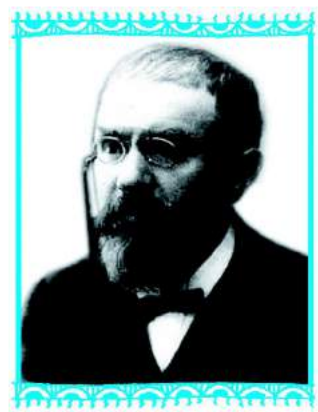
❖ *He who seeks for methods without having a definite problem in mind seeks for the most part in vain – D. HILBERT* ❖

9.1 ਭੂਮਿਕਾ (Introduction)

ਜਮਾਤ XI ਅਤੇ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 5 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਕਿ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਫਲਨ 'f' ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ; ਮਤਲਬ ਕਿਸੇ ਫਲਨ f ਦੇ ਦੱਸੇ ਹੋਏ ਹਰੇਕ ਇੱਕ ਦਰਸਾਏ x ਲਈ, $f'(x)$ ਕਿਵੇਂ ਲੱਭਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ, ਕਿ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਫਲਨ f ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਫਲਨ g ਹੈ ਤਾਂ ਫਲਨ f ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਭਿਆ (ਪਤਾ) ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਲੜੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

ਕਿਸੇ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ g ਲਈ ਫਲਨ f ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \text{ ਇੱਥੇ } y = f(x) \qquad \dots (1)$$



Henri Poincare (1854-1912)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਦੀ ਬਕਾਇਦਾ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇਗੀ।

ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭੌਤਿਕ, ਰਸਾਇਣਿਕ ਵਿਗਿਆਨ, ਜੀਵ-ਵਿਗਿਆਨ, ਰਾਜਨੀਤਕ ਭੂਗੋਲ, ਅਰਥ ਸ਼ਾਸਤਰ ਆਦਿ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਖੀਰ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਆਧੁਨਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਖੋਜਾਂ ਲਈ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੀ ਗਹਿਰਾਈ ਨਾਲ ਪੜ੍ਹਨ ਦੀ ਬਹੁਤ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਕੁਝ ਮੂਲ ਰੂਪ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਖਾਸ ਹੱਲ, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ (ਪੈਦਾ) ਕਰਨਾ, ਪਹਿਲੇ ਕੋਟੀ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਡਿਗਰੀ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਧੀਆਂ (ਤਰੀਕੇ) ਅਤੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2 ਮੌਲਿਕ ਸੰਕਲਪ (Basic Concepts)

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ

$$x^2 \text{ ï } 3x + 3 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\sin x + \cos x = 0 \qquad \ldots (2)$$

$$x + y = 7 \qquad \ldots (3)$$

ਆਉ, ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਈ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \ldots (4)$$

ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਸੁਤੰਤਰ ਅਤੇ ਨਿਰਭਰ (ਇੱਕ ਜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਵੱਧ) ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ ਜੋ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ (x) ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ (y) ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮੀਕਰਨ ਸਾਪੇਖ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਦੇ ਨਾਲ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੁਤੰਤਰ (ਅਜ਼ਾਦ) ਚਲ ਦਾ, ਨਿਰਭਰ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, (ਆਮ ਵਿਆਪਕ) ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਨ :

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \qquad \ldots (5)$$

ਇੱਕ ਆਮ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਬੇਸ਼ੱਕ, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵੀ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਆਸ਼ੰਕ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਪਰ ਇਸ ਸਤਰ ਤੇ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਆਪ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਆਮ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਤੱਕ ਹੀ ਸੀਮਿਤ ਰੱਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤੋਂ ਅੱਗੇ ਅਸੀਂ ਆਮ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਹੀ ਉਪਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

ਟਿੱਪਣੀ

1. ਅਸੀਂ ਡਿਫਰੈਸ਼ਨਲਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨਿਸ਼ਾਨਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{d^2y}{dx^2} = y'', \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$$

2. ਉੱਚੇ ਦਰਜੇ ਵਾਲੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵਾ ਦੇ ਲਈ, ਜ਼ਿਆਦਾ ਡੈਸ਼ (dashes) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਗੈਰ ਸੁਵਿਧਾਜਨ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ n ਵੇ ਕੋਟੀ ਦੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{d^ny}{dx^n}$ ਦੇ ਵਾਸਤੇ ਅਸੀਂ ਸੰਕੇਤ y_n ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2.1 *ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ (Order of a differential equation)*

ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ, ਉੱਚ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਨ ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਉੱਚ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ, ਉਸ ਵਿੱਚ ਪਾਏ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਸੁਤੰਤਰ ਚਲ ਨਾਲ, ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ :

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad \text{... (6)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \text{... (7)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + x^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 = 0 \qquad \text{...(8)}$$

ਸਮੀਕਰਨ (6)] (7) ਅਤੇ (8) ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ : ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਤੀਜੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਡੇ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਹਾਜ਼ਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1,2 ਅਤੇ 3 ਹੈ।

9.2.2 *ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ/ਕੋਟੀ (Degree of a differential equation)*

ਕਿਸੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ/ਕੋਟੀ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਮੁੱਖ ਬਿੰਦੂ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਹ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਬਹੁਪਦੀ y', y'', y''' ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} + y = 0 \qquad \text{... (9)}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx} - \sin^2 y = 0 \qquad \text{... (10)}$$

$$\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0 \qquad \text{... (11)}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (9) y''', y'' ਅਤੇ y' ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਸਮਕੀਰਣ (10) y' ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਹੈ। (ਜੇਕਰ ਇਹ y ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਕੋਟੀ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪਰ ਸਮੀਕਰਣ (11) y' ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਡੈਰੀਵੇਟਵਾਂ ਦਾ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚਤਮ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਦੀ ਦੀ ਘਾਤ (ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ)

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (6)] (7)] (8) ਅਤੇ (9) ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਹੈ, ਸਮੀਕਰਣ (10) ਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (11) ਦੀ ਘਾਤ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਹਮੇਸ਼ਾ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਨ 1. ਹੇਠ ਦਰਸਾਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $\frac{dy}{dx} - \cos x = 0$ (ii) $xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $y''' + y^2 + e^{y'} = 0$

ਹੱਲ :

(i) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{dy}{dx}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 1 ਹੈ। ਇਹ y' ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਘਾਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸੈਮੀਕਰਣ ਦੀ ਕੋਟੀ/ਡਿਗਰੀ 1 ਹੈ।

(ii) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 2 ਹੈ। ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਨ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ਦੀ ਅਧਿਕਤਮ ਘਾਤ 1 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 1 ਹੈ।

(iii) ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ y''' ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਕ੍ਰਮ 3 ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ (ਬਹੁਪਦੀ) ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦੀ ਡਿਗਰੀ ਦਰਸਾਈ ਨਹੀਂ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.1

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਡਿਗਰੀ (ਜੇਕਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0$ **2.** $y' + 5y = 0$ **3.** $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ **5.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$ **7.** $y''' + 2y'' + y' = 0$

8. $y' + y = e^x$ **9.** $y'' + (y')^2 + 2y = 0$ **10.** $y'' + 2y' + \sin y = 0$

11. ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਡਿਗਰੀ

$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

12. ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ।

(A) 2 (B) 1 (C) 0 (D) ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

9.3. ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਖਾਸ ਹੱਲ (General and Particular Solutions of a Differential Equation)

ਪਿਛਲੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਹੈ :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{... (1)}$$

$$\sin^2 x \text{ ï } \cos x = 0 \quad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਜਾਂ ਮਿਸ਼ਰਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਅਨਜਾਣ ਸਮੀਕਰਣ x ਦੇ ਸਥਾਨ ਤੇ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \quad \text{... (3)}$$

ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਪਹਿਲੀਆਂ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਉਲਟ ਇਸ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ϕ ਹੈ ਜੋ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਭਾਵ ਜਦੋਂ ਇਸ ਫਲਨ ϕ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਅਨਜਾਣ y (ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ) ਦੀ ਜਗ੍ਹਾ ਤੇ ਭਰ ਕੇ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਫਲਨ $y = \phi(x)$ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਫਲਨ (ਇਨਟਿਗਰਲ ਵਤਰ) ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਫਲਨ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

$$y = \phi(x) = a\sin(x + b) \quad \text{... (4)}$$

ਇੱਥੇ $a, b \in \mathbf{R}$. ਜੇਕਰ ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਦੋਨੋਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਫਲਨ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਕੁਝ ਖਾਸ ਕੀਮਤ $a = 2$ ਅਤੇ $b = \frac{\pi}{4}$ ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਲਾ ਫਲਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$y = \phi_1(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \qquad \dots (5)$$

ਜੇਕਰ ਇਸ ਫਲਨ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਮੁੜ ਤੋਂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ ਅਤੇ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ϕ_1 ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਫਲਨ ϕ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ a, b ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਫਲਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ, ϕ_1 ਜੋ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਿੱਚ ϕ_1 ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਨੂੰ ਖਾਸ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, ਹੱਲ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ a ਅਤੇ b ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ, ਜੋ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਭਾਵ ਵਿਆਪਕ

ਹੱਲ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਨੂੰ ਖਾਸ ਕੀਮਤ ਦੇਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 .ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = e^{ï\,3x}$, ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ $y = e^{ï\,3x}$ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{ï\,3x} \qquad \dots (1)$$

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਚਲ x ਦੇ ਬਾਬਤ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 9e^{ï\,3x}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 9e^{ï\,3x} + (ï\,3e^{ï\,3x})\,ï\;6.e^{ï\,3x} = 9\,e^{ï\,3x}\,ï\;9\,e^{ï\,3x} = 0 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3. ਪੜਤਾਲ ਕਿ ਫਲਨ $y = a\cos x + b\sin x$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $a, b \in \mathbf{R}$, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ

$$y = a\cos x + b\sin x \qquad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ x, ਦੇ ਬਾਬਤ ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ।

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{ï}\ a\cos x\ \text{ï}\ b\sin x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ਅਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= (\text{ï}\ a\cos x\ \text{ï}\ b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0 =$ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.2

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ (ਸਪੱਸ਼ਟ ਅਤੇ ਅਸਪੱਸ਼ਟ) ਸੰਗਤ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

1. $y = e^x + 1$: $y'' \text{ ï } y' = 0$

2. $y = x^2 + 2x + C$: $y' \text{ ï } 2x \text{ ï } 2 = 0$

3. $y = \cos x + C$: $y' + \sin x = 0$

4. $y = \sqrt{1+x^2}$: $y' = \frac{xy}{1+x^2}$

5. $y = Ax$: $xy' = y\ (x \neq 0)$

6. $y = x\sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$ ($x \neq 0$ ਅਤੇ $x > y$ ਅਰਥਾਤ $x < -y$)

7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1 - xy}\ (xy \neq 1)$

8. $y \text{ ï } \cos y = x$: $(y\sin y + \cos y + x)\, y' = y$

9. $x + y = \tan^{ï1} y$: $y^2 y' + y^2 + 1 = 0$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}\ x \in (ï\ a, a) : x + y \dfrac{dy}{dx} = 0\ (y \neq 0)$

11. ਚਾਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਕੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ :

(A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. ਤਿੰਨ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੈ।

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

9.4. ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ (Formation of a Differential Equation whose Solution is Given)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ

$$x^2 + y^2 + 2x\ ï\ 4y + 4 = 0 \quad \dots (1)$$

ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਚੱਕਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ (&1] 2) ਹੈ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਇਕਾਈ ਹੈ।

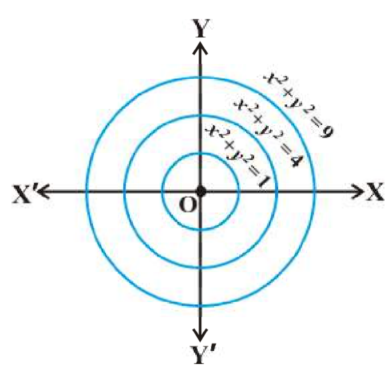
ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ x, ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y},\ (y \neq 2) \quad \dots (2)$$

ਇਹ ਇੱਕ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ (ਖੰਡ (ਭਾਗ) 9-5-1 ਦਾ ਉਦਾਹਰਨ 9 ਦੇਖੋ) ਕਿ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਮੈਂਬਰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਵਤਰ ਹੈ। ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰੀਏ :

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \dots (3)$$

r, ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕੀਮਤਾਂ ਦੇਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਦਾਹਰਣ $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$ ਆਦਿ (ਚਿੱਤਰ 9.1 ਦੇਖੋ)A ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਵਤਰਾਂ (ਚੱਕਰਾਂ) ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਭਿੰਨ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 9.1

ਸਾਡਾ ਧਿਆਨ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕੀਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੀਕਰਣਾਂ r ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੋਣੀਆਂ ਚਾਹੀਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਲ ਦੇ ਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰਾਂ ਲਈ r ਦਾ ਮਾਨ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{ਅਤੇ} \quad x + y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots (4)$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਸਮਕੇਂਦਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਆਓ ਫਿਰ ਤੋਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

$$y = mx + c \qquad \ldots (5)$$

ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) m ਅਤੇ c, ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਕੀਮਤਾਂ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਉਦਾਹਰਨ ਵਜੋਂ

$$y = x \qquad (m = 1, \quad c = 0)$$

$$y = \sqrt{3}\,x \qquad (m = \sqrt{3}, \; c = 0)$$

$$y = x + 1 \qquad (m = 1, \; c = 1)$$

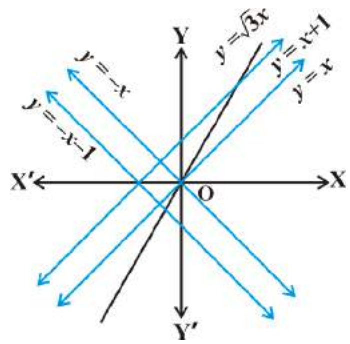
$$y = -x \qquad (m = ï\ 1, \; c = 0)$$

$$y = -x ï\ 1 \qquad (m = ï\ 1, \; c = ï\ 1)$$

ਆਦਿ (ਚਿੱਤਰ 9.2) ਵੇਖੋ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ m, c ਪ੍ਰਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਡੀ ਦਿਲਚਸਪੀ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਹਰੇਕ ਮੈਂਬਰ ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕੀਤੀ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਜਾਨਣ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ m ਅਤੇ c ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੁਲ ਦੇ ਵਿਭਿੰਨ ਮੈਂਬਰਾਂ ਲਈ m ਅਤੇ c ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਿੰਨ ਹੈ। ਇਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਵਾਰ ਕਰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ



ਚਿੱਤਰ 9.2

$$\frac{dy}{dx} = m \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \ldots (6)$$

ਸਮੀਕਰਨ (6)] ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਮੀਕਰਣ (3) ਅਤੇ (5) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਅਤੇ (6) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

9.4.1 fਦੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿ.ਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ (Procedure to form a Differential Equation that will represent a given Family of curves)

(a) ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਤਰ ਦਾ ਪਰਿਵਾਰ F_1 ਕੇਵਲ ਇਕ ਪ੍ਰਾਚਲ ਪੈਰਾਮੀਟਰ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$F_1(x, y, a) = 0 \qquad \ldots (1)$$

ਉਦਾਹਰਣ : ਪੈਰਾਬੋਲਾ $y^2 = ax$ ਦਾ ਕੁਲ $f(x, y, a) : y^2 = ax$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y', y, x,$ ਅਤੇ a ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g(x, y, y', a) = 0 \quad \dots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚੋਂ a ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$F(x, y, y') = 0 \quad \dots (3)$$

(b) ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਕੁਲ F_2 ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) a, ਅਤੇ b ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$F_2(x, y, a, b) = 0 \quad \dots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ y', x, y, a, b ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g(x, y, y', a, b) = 0 \quad \dots (5)$$

ਪਰ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਦੋ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਤੀਜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ, ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

$$h(x, y, y', y'', a, b) = 0 \quad \dots (6)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4)] (5) ਅਤੇ (6) ਤੋਂ a ਅਰਥਾਤ b ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \dots (7)$$

ਟਿੱਪਣੀ ਕਿਸੀ ਵਤਰ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਓਨਾ ਹੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿੰਨਾ, ਉਸ ਵਤਰ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4. ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ $y = mx$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ ਕਿ m ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ

$$y = mx \quad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = m$$

m ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y = \frac{dy}{dx} \cdot x$ ਭਾਵ $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰਾਚਲ m (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5. ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ $y = a\sin(x + b)$, ਜਿਸ ਵਿੱਚ a, b ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੈ, ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = a\sin(x + b)$ ... (1)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = a\cos(x+b) \qquad \text{... (2)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{ï}\ a\sin(x+b) \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1)] (2) ਅਤੇ (3) ਤੋਂ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \qquad \text{... (4)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚਲ a ਅਤੇ b ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

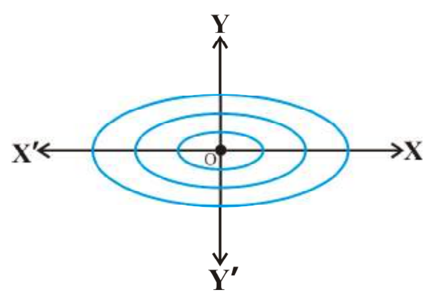
ਉਦਾਹਰਣ 6. ਅਜਿਹੇ ਐਲਿਪਸ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸੰਯੁਗਮੀ ਨਾਭ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ ਪਰ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਐਲਿਪਸ ਦੇ ਕੁਲ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.3 ਦੇਖੋ।)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $$\frac{y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{-b^2}{a^2} \qquad \text{... (2)}$$



ਚਿੱਤਰ 9.3

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

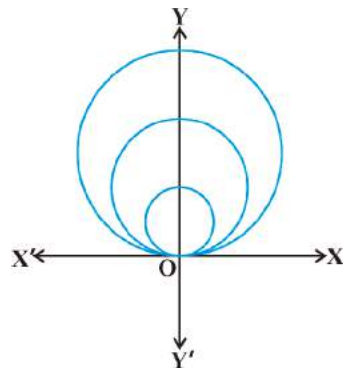
ਅਰਥਾਤ $$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \text{ ï } y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7. x&ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਛੂਹਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ, x&ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਛੂਹਣ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। $(0, a)$ ਉਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਂਬਰ ਦੇ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਰਦੇਸ਼ਕ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 9.4 ਦੇਖੋ)A ਇਸ ਲਈ ਕੁਲ C ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$x^2 + (y ï a)^2 = a^2$ ਅਰਥਾਤ $x^2 + y^2 = 2ay$ ... (1)



ਚਿੱਤਰ 9.4

ਜਿਸ ਵਿੱਚ a ਇੱਕ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2a\frac{dy}{dx}$$

ਅਰਥਾਤ $$x + y\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx}$$

ਅਰਥਾਤ $$a = \frac{x + y\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \qquad ... (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਤੋਂ a ਦਾ ਮੁੱਲ, ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$x^2 + y^2 = 2y\frac{\left[x + y\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dy}{dx}}$$

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2) = 2xy + 2y^2\frac{dy}{dx}$$

ਅਰਥਾਤ $$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 ï y^2}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8. ਅਜਿਹੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਧੁਰਾ ਜਮਾਂ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉੱਪਰ ਚਰਚਿਤ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ P ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਂਬਰ ਦੀ ਨਾਭ $(a, 0)$ ਤੇ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸਵੈ-ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.5

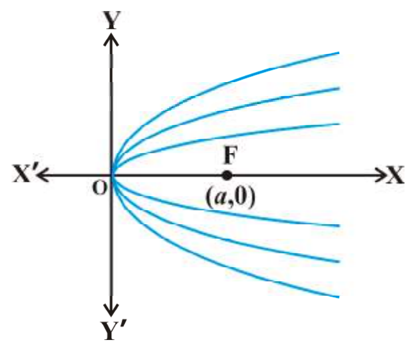
ਦੇਖੋ)। ਇਸ ਲਈ ਕੁਲ P ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$y^2 = 4ax \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਤੋਂ $4a$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :



ਚਿੱਤਰ 9.5

$$y^2 = \left(2y\frac{dy}{dx}\right)(x)$$

ਜਾਂ
$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9 .3

1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਚੱਲ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ **2.** $y^2 = a\,(b^2$ ï $x^2)$ **3.** $y = a\,e^{3x} + b\,e^{ï\,2x}$

4. $y = e^{2x}(a + bx)$ **5.** $y = e^x(a\cos x + b\sin x)$

6. y-ਧਰੇ ਦੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਅਜਿਹੇ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੇ ਕੁਲ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਸਿਖਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਜਿਸਦਾ ਧੁਰਾ ਧਨਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ।

8. ਅਜਿਹੇ ਇਲਿਪਸ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਫੋਕਸ ਸੰਯੁਗਮੀ ਨਾਭਿਆ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

9. ਅਜਿਹੇ ਹਾਇਪਰਬੋਲਾ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਫੋਕਸ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹਨ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

10. ਅਜਿਹੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਕੇਂਦਰ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 ਇਕਾਈ ਹੈ।

11. ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮਕੀਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ $y = c_1 e^x + c_2 e^{ï}$ ^{x} ਹੈ ?

(A) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (B) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (C) $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$ (D) $\frac{d^2y}{dx^2} - 1 = 0$

12. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਇੱਕ ਖਾਸ ਹੱਲ $y = x$ ਹੈ ?

(A) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = x$ (B) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + xy = x$

(C) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - x^2\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$ (D) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$

9.5. ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ/ਡਿਗਰੀ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ (Methods of Solving First order, First Degree Differential Equations)

ਇਸ ਸ਼ੈਕਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀਆਂ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

9.5.1 ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ *(Differential equations with variables separable)*

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੇਠ ਦਰਸਾਇਆ ਰੂਪ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{F}(x, y) \qquad \ldots (1)$$

ਜੇਕਰ F (x, y) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ g (x), $h(y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $g(x)$, x ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਅਤੇ $h(y)$, y ਦਾ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਅਜਿਹਾ ਹੋਣ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = h(y)\, g(x) \qquad \ldots (2)$$

ਜੇਕਰ $h(y) \neq 0$, ਤਾਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ

$$\frac{1}{h(y)}\, dy = g(x)\, dx \qquad \ldots (3)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\int \frac{1}{h(y)}\, dy = \int g(x)\, dx \qquad \ldots (4)$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਮੀਕਰਣ (4)] ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ :

$$\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(x) + \mathrm{C} \qquad \ldots (5)$$

ਇੱਥੇ $\mathrm{H}(y)$ ਅਤੇ $\mathrm{G}(x)$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\dfrac{1}{h(y)}$ ਅਤੇ $g(x)$ ਦੇ ਪ੍ਰਤੀ ਡੇਰੀਵੇਟਿਵ ਹਨ ਅਤੇ C ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{2-y}, (y \neq 2)$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{2-y} \quad (y \neq 2) \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚੋਂ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(2 - y)\, dy = (x + 1)\, dx \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int (2-y)\, dy = \int (x+1)\, dx$$

ਜਾਂ $\qquad 2y - \dfrac{y^2}{2} = \dfrac{x^2}{2} + x + \mathrm{C}_1$

ਜਾਂ $\qquad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2\,\mathrm{C}_1 = 0$

ਜਾਂ $\qquad x^2 + y^2 + 2x - 4y + \mathrm{C} = 0 \qquad \ldots (3)$

ਇੱਥੇ $\qquad \mathrm{C} = 2\mathrm{C}_1$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ ।

ਉਦਾਹਰਣ 10. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $1 + y^2 \neq 0$, ਇਸ ਲਈ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

ਅਰਥਾਤ $\qquad \tan^{-1} y = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$

ਇਹ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{dy}{dx} = -4xy^2$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $y = 1$ ਜਦੋਂ $x = 0$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ $y \neq 0$, ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{y^2} = -\,4x\,dx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\,4\int x\,dx$$

ਜਾਂ
$$-\frac{1}{y} = \text{ï}\;\; 2x^2 + \text{C}$$

ਜਾਂ
$$y = \frac{1}{2x^2 - \text{C}} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $y = 1$ ਅਤੇ $x = 0$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ C = ï 1 ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

C ਦੀ ਕੀਮਤ (2) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ $y = \frac{1}{2x^2 + 1}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12. ਬਿੰਦੂ (1] 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\,.dy = (2x^2 + 1).\,dx$ $(x \neq 0)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$dy = \left(\frac{2x^2 + 1}{x}\right)dx$$

ਜਾਂ
$$dy = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੇ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int dy = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

ਜਾਂ
$$y = x^2 + \log|x| + \text{C} \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫਰੈਂਸਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਖਾਸ ਮੈਂਬਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1] 1) ਤੋਂ ਗੁਜ਼ਰਦਾ ਹੋਵੇ।

---

* ਲੈਬਨੀਜ਼ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਸੰਕੇਤ $\frac{dy}{dx}$ ਬਹੁਤ ਲਚਕੀਲਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਿਣਤੀ ਅਤੇ ਔਪਚਾਰਿਕ ਰੁਪਾਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ dx ਅਤੇ dy ਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਤਦੇ ਹਾਂ। dx ਅਤੇ dy ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਅਲੱਗ ਸਤ੍ਰਾ ਮੰਨ ਕੇ ਅਸੀਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਮਿਣਤੀਆਂ ਦਾ ਨੇੜਲੀ ਵਿਆਖਿਆ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ : Introduction to calculus and Analysis, volume-I page 172, By Richard Courant, Fritz John Spinger ð Verlog New York.

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 1,\ y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $C = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। C ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਭਰ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = x^2 + \log|x|$ ਦਾ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13. ਬਿੰਦੂ (ï 2, 3), ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਵ (ਢਲਾਣ) $\frac{2x}{y^2}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ ਕਿਸੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2} \qquad \text{... (1)}$$

ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਹੇਠ ਦਰਸਾਏ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$y^2\, dy = 2x\, dx \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰਲ

$$\int y^2 dy = \int 2x\, dx$$

ਜਾਂ

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x =$ ï $2, y = 3$ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $C = 5$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

C ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਲੋੜੀਂਦੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{y^3}{3} = x^2 + 5$ ਜਾਂ

$$y = (3x^2 + 15)^{\frac{1}{3}}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ 1000 ਰੁ: ਦੀ ਰਕਮ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ t ਤੇ ਮੂਲਧਨ P ਹੈ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਮੁਸ਼ਕਲ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ :

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{5}{100}\right) \times P$$

ਜਾਂ

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P}{20} \qquad \text{... (1)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dP}{P} = \frac{dt}{20} \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨੀਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\log \mathrm{P} = \frac{t}{20} + \mathrm{C}_1$$

ਜਾਂ $$\mathrm{P} = e^{\frac{t}{20}} \cdot e^{C_1}$$

ਜਾਂ $$\mathrm{P} = \mathrm{C}\, e^{\frac{t}{20}} \quad (\text{ਇੱਥੇ } e^{\mathrm{C}_1} = \mathrm{C}) \qquad \ldots (3)$$

ਹੁਣ $\mathrm{P} = 1000,$ ਜਦੋਂ $t = 0$

P ਅਤੇ t ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ $\mathrm{C} = 1000$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ
ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\mathrm{P} = 1000\, e^{\frac{t}{20}}$$

ਮੰਨ ਲਉ t ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਦੋਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ

$$2000 = 1000\, e^{\frac{t}{20}} \quad \Rightarrow \quad t = 20 \log_e 2$$

ਅਭਿਆਸ 9 .4

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2}\ (-2 < y < 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} + y = 1\,(y \neq 1)$

4. $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$

5. $(e^x + e^{-x})\, dy - (e^x - e^{-x})\, dx = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = (1+x^2)(1+y^2)$

7. $y \log y\, dx - x\, dy = 0$

8. $x^5 \dfrac{dy}{dx} = -\, y^5$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

10. $e^x \tan y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

11 ਤੋਂ 14 ਤੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. $(x^3 + x^2 + x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 + x;\ y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$

12. $x(x^2-1)\dfrac{dy}{dx}=1$; $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 2$

13. $\cos\left(\dfrac{dy}{dx}\right)=a \ (a \in \mathrm{R})$; $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$

14. $\dfrac{dy}{dx}=y\tan x$; $y = 2$ ਜੇਕਰ $x = 0$

15. ਬਿੰਦੂ (0] 0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਅਜਿਹੇ ਵਕਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y' = e^x \sin x$ ਹੈ।

16. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $xy\dfrac{dy}{dx}=(x+2)(y+2)$ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (1] &1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਵਤਰ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਬਿੰਦੂ (0, ï 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਜਿਹੀ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਲਾਣ ਅਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ y ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

18. ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ, ਸਪਰਸ਼ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ, ਬਿੰਦੂ (ï 4, ï 3). ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੀ ਢਲਾਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਵਤਰ ਬਿੰਦੂ (ï 2, 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਇੱਕ ਗੋਲਾਕਾਰ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਆਇਤਨ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਵਾ ਭਰ ਕੇ ਫੁਲਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਸਥਿਰ ਚਾਲ ਨਾਲ ਬਦਲ ਰਿਹਾ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 3 ਇਕਾਈ ਹੈ ਅਤੇ 3 ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ 6 ਇਕਾਈ ਹੈ ਤਾਂ t ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ ਇਸ ਗੁਬਾਰੇ ਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ $r\%$ ਸਲਾਨਾ ਦੇ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ 100 ਰੁ: 10 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੁੱਗਣੇ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਤਾਂ r ਦੀ ਕੀਮਤ ਪਤਾ ਕਰੋ। ($\log_e 2 = 0.6931$).

21. ਕਿਸੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਮੂਲਧਨ ਵਿੱਚ ਵਾਧਾ 5% ਸਲਾਨਾ ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ 1000 ਰੁ: ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ 10 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਇਹ ਰਕਮ ਕਿੰਨੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ($e^{0.5} = 1.648$)

22. ਕਿਸੀ ਜੀਵਾਣੂ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 1] 00] 000 ਹੈ। ਦੋ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 10% ਦਾ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 2,00,000 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਜੀਵਾਣੂਆਂ ਦਾ ਵਾਧਾ ਦਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਮੌਜੂਦ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

23. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $e^x + e^{ïy} = C$ (B) $e^x + e^y = C$

(C) $e^{ïx} + e^y = C$ (D) $e^{ïx} + e^{ïy} = C$

9.5.2 ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (Homogenous differential equations)

x ਅਤੇ y ਦੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਫਲਨਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

$F_1(x, y) = y^2 + 2xy$, $\quad F_2(x, y) = 2x ï\ 3y$,

$F_3(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right)$, $\quad F_4(x, y) = \sin x + \cos y$

ਜੇਕਰ ਉਪਰੋਕਤ ਫਲਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਅਚਲ λ ਦੇ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ λx ਅਤੇ λy ਨਾਲ ਤਬਦੀਲ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ।

$F_1(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 (y^2 + 2xy) = \lambda^2 F_1(x, y)$

$F_2(\lambda x, \lambda y) = \lambda (2x ï\ 3y) = \lambda F_2(x, y)$

$F_3(\lambda x, \lambda y) = \cos\left(\frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = \cos\left(\frac{y}{x}\right) = \lambda^0\ F_3(x, y)$

$F_4(\lambda x, \lambda y) = \sin \lambda x + \cos \lambda y \neq \lambda^n F_4(x, y)$, ਕੋਈ ਵੀ n ਦੇ ਲਈ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਫਲਨ F_1, F_2, F_3 ਨੂੰ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਪਰ ਫਲਨ F_4 ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਫਲਨ $F(x, y)$, n ਕ੍ਰਮ ਵਾਲੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫਰ ਅਚਲ λ ਦੇ ਲਈ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$

ਅਸੀਂ ਨੋਟ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ F_1, F_2, F_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, 1, 0 ਕੋਟੀ ਵਾਲੀ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ F_4 ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$F_1(x, y) = x^2\left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{2y}{x}\right) = x^2 h_1\left(\frac{y}{x}\right)$$

ਜਾਂ

$$F_1(x, y) = y^2\left(1 + \frac{2x}{y}\right) = y^2 h_2\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_2(x, y) = x^1\left(2 - \frac{3y}{x}\right) = x^1 h_3\left(\frac{y}{x}\right)$$

ਜਾਂ

$$F_2(x, y) = y^1\left(2\frac{x}{y} - 3\right) = y^1 h_4\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$F_3(x, y) = x^\circ \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x^\circ\ h_5\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$F_4(x, y) \neq x^n\, h_6\left(\frac{y}{x}\right),\ n \in \mathbf{N} \text{ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਕੀਮਤ ਲਈ}$$

ਜਾਂ $$F_4(x, y) \neq y^n\, h_7\left(\frac{x}{y}\right),\ n \in \mathbf{N}$$

ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ ਫਲਨ F (x, y), n ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ

$$F\,(x, y) = x^n g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{ਜਾਂ} \quad y^n h\left(\frac{x}{y}\right)$$

$\frac{dy}{dx} = F\,(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $F(x, y)$ ਗੈਰ ਜੀਰੋ ਕੋਟੀ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \ldots (1)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $\frac{y}{x} = v$ ਜਾਂ

$$y = v\,x \qquad \ldots (2)$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਤੋਂ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + x\frac{dv}{dx} = g\,(v)$$

ਜਾਂ $$x\,\frac{dv}{dx} = g\,(v) - v \qquad \ldots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dv}{g\,(v) - v} = \frac{dx}{x} \qquad \ldots (5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int \frac{dv}{g\,(v) - v} = \int \frac{1}{x}dx + C \qquad \ldots (6)$$

ਜੇਕਰ v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਵਿੱਚ ਭਰਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (6)] ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫਰੈਨਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dx}{dy}=\mathrm{F}(x,y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇੱਥੇ F (x, y) ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ $\frac{x}{y}=v$ ਜਾਂ $x = vy$ ਭਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ $\frac{dx}{dy}=\mathrm{F}(x,y)=h\left(\frac{x}{y}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 15. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x\,\text{ï}\,y)\,\frac{dy}{dx}=x+2y$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y}{x-y} \qquad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $\quad \mathrm{F}(x, y) = \frac{x+2y}{x-y}$

ਹੁਣ $\quad \mathrm{F}(\lambda x,\lambda y) = \frac{\lambda(x+2y)}{\lambda(x-y)}=\lambda^{\circ}\cdot \mathrm{F}(x,y)$

ਇਸ ਲਈ F(x, y) ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

ਅੰਤ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

ਬਦਲ:

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{... (2)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $g\left(\frac{y}{x}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਭਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = vx \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ y ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$v + x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v}$$

ਜਾਂ $$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{1+2v}{1-v} - v$$

ਜਾਂ $$x\,\frac{dv}{dx} = \frac{v^2+v+1}{1-v}$$

ਜਾਂ $$\frac{v-1}{v^2+v+1}dv = \frac{-dx}{x} \qquad \ldots (5)$$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\int \frac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\int \frac{2v+1}{v^2+v+1}dv - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{v^2+v+1}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x| + C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|v^2+v+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2v+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$, ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right|+\frac{1}{2}\log x^2=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2}\log\left|\left(\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+1\right)x^2\right|=\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+C_1$$

ਜਾਂ $$\log\left|(y^2+xy+x^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right)+2C_1$$

ਜਾਂ $$\log\left|(x^2+xy+y^2)\right|=2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+2y}{\sqrt{3}x}\right)+C$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

ਇੱਥੇ $\frac{dy}{dx}=F(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

ਇੱਥੇ $F(x, y)=\dfrac{y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$ ਹੈ।

x ਨੂੰ λx ਨਾਲ ਅਤੇ y ਨੂੰ λy ਨਾਲ ਤਬਦੀਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\mathrm{F}\,(\lambda x,\ \lambda y) = \frac{\lambda[y\cos\left(\frac{y}{x}\right)+x]}{\lambda\left(x\cos\frac{y}{x}\right)} = \lambda^0\,[\mathrm{F}(x,y)]$$

$\mathrm{F}\,(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਤੇ ਭਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = vx \qquad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots (3)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ y ਅਤੇ $\frac{dy}{dx}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v+1}{\cos v}$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v+1}{\cos v} - v$$

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos v}$$

ਜਾਂ $$\cos v\; dv = \frac{dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \cos v\; dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\sin v = \log|x| + \log|\mathrm{C}|$$

ਜਾਂ $$\sin v = \log|\mathrm{C}x|$$

v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \log|\mathrm{C}x|$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $2y\, e^{\frac{x}{y}} dx + (y - 2x\, e^{\frac{x}{y}})\, dy = 0$ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ $x = 0$ ਜਦੋਂ $y = 1$ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x\, e^{\frac{x}{y}} - y}{2y\, e^{\frac{x}{y}}} \qquad \text{... (1)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $\quad F(x, y) = \dfrac{2xe^{\frac{x}{y}} - y}{2ye^{\frac{x}{y}}}$ ਤਾਂ $F(\lambda x, \lambda y) = \dfrac{\lambda\left(2xe^{\frac{x}{y}} - y\right)}{\lambda\left(2ye^{\frac{x}{y}}\right)} = \lambda^{\circ}\, [F(x, y)]$

ਅੰਤ : $F(x, y)$ ਸਿਫਰ ਕ੍ਰਮ ਵਾਲਾ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਹੱਲ ਲੱਭਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ $x = vy$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ y ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ x ਅਤੇ $\frac{dx}{dy}$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$v + y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\, e^{v} - 1}{2e^{v}}$$

ਜਾਂ $$y\frac{dv}{dy} = \frac{2v\, e^{v} - 1}{2e^{v}} - v$$

ਜਾਂ $$y\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{2e^{v}}$$

ਜਾਂ $$2e^{v} dv = \frac{-dy}{y}$$

ਜਾਂ $$\int 2e^{v}\,.\,dv = -\int \frac{dy}{y}$$

ਜਾਂ $2\,e^{v} =$ ï $\log|y| + C$

v ਨੂੰ $\frac{x}{y}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2\,e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = C \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\,e^{0} + \log|1| = C \Rightarrow C = 2$$

C ਦੀ ਕੀਮਤ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2\,e^{\frac{x}{y}} + \log|y| = 2$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\frac{x^2 + y^2}{2xy}$ ਹੈ, x^2 ï $y^2 = cx$ ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{2y}{x}} \qquad \text{... (1)}$$

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ $y = vx$ ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

$y = vx$ ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \text{ਜਾਂ} \quad v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v}$$

ਅੰਤ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{2v}{1 - v^2}dv = \frac{dx}{x} \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{2v}{v^2 - 1}dv = -\frac{dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $\int \frac{2v}{v^2 - 1} dv = -\int \frac{1}{x} dx$

ਜਾਂ $\log |v^2 \text{ ï } 1| = \text{ï } \log |x| + \log |C_1|$

ਜਾਂ $\log |(v^2 \text{ ï } 1)(x)| = \log |C_1|$

ਜਾਂ $(v^2 \text{ ï } 1)\, x = \pm\ C_1$

v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) x = \pm C_1$$

ਜਾਂ $(y^2 \text{ ï } x^2) = \pm C_1 x$;k $x^2 \text{ ï } y^2 = Cx$

ਅਭਿਆਸ 9.5

1 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

1. $(x^2 + xy)\, dy = (x^2 + y^2)\, dx$

2. $y' = \frac{x + y}{x}$

3. $(x \text{ ï } y)\, dy \text{ ï } (x + y)\, dx = 0$

4. $(x^2 \text{ ï } y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

5. $x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - 2y^2 + xy$

6. $x\, dy \text{ ï } y\, dx = \sqrt{x^2 + y^2}\, dx$

7. $\left\{x \cos\left(\frac{y}{x}\right) + y \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\} y\, dx = \left\{y \sin\left(\frac{y}{x}\right) - x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\} x\, dy$

8. $x \frac{dy}{dx} - y + x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$

9. $y\, dx + x \log\left(\frac{y}{x}\right) dy - 2x\, dy = 0$

10. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right) dy = 0$

11 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦੇ ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਪ੍ਰਤੀਬੰਦ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਲੱਭਿਆ ਜਾਵੇ।

11. $(x + y)\, dy + (x \text{ ï } y)\, dx = 0$; $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 1$

12. $x^2\, dy + (xy + y^2)\, dx = 0$; $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 1$

13. $\left[x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right)-y\right]dx+x\,dy=0;\ y=\frac{\pi}{4}$ ਜੇਕਰ $x = 1$

14. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}+\operatorname{cosec}\left(\frac{y}{x}\right)=0;\ y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 1$

15. $2xy+y^2-2x^2\frac{dy}{dx}=0;\ y = 2$ ਜੇਕਰ $x = 1$

16. $\frac{dx}{dy}=h\left(\frac{x}{y}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਪ੍ਰਤੀ ਸਥਾਪਨ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ:

(A) $y = vx$ (B) $v = yx$ (C) $x = vy$ (D) $x = v$

17. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ?

(A) $(4x + 6y + 5)\, dy$ ï $(3y + 2x + 4)\, dx = 0$

(B) $(xy)\, dx$ ï $(x^3 + y^3)\, dy = 0$

(C) $(x^3 + 2y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$

(D) $y^2\, dx + (x^2$ ï xy ï $y^2)\, dy = 0$

9.5.3 *ਰੇਖੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ (Linear differential equations)*

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}y=\mathrm{Q},$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਅਚਲ ਭਾਵ ਸਿਰਫ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ, ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਕੁਝ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ :

$$\frac{dy}{dx}+y=\sin x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{1}{x}\right)y=e^x$$

$$\frac{dy}{dx}+\left(\frac{y}{x\log x}\right)=\frac{1}{x}$$

ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੂਜਾ ਰੂਪ ਸੈਕਿੰਡ $\frac{dx}{dy}+\mathrm{P}_1x=\mathrm{Q}_1$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P_1 ਅਤੇ Q_1 ਅਚਲ ਭਾਵ ਸਿਰਫ y ਦੇ ਫਲਨ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਹਨ :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{-2x}{y}=y^2e^{-y}$$

ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,y=\mathrm{Q} \qquad \ldots (1)$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਦੇ ਫਲਨ $g(x)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$g(x)\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}.\,g(x)\,y=\mathrm{Q}.\,g(x) \qquad \ldots (2)$$

$g(x)$ ਦੀ ਚੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ $y\,.\,g(x)$ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਬਣ ਜਾਵੇ :

ਜਾਂ $$g(x)\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}.\,g(x)\,y=\frac{d}{dx}\,[y\,.\,g(x)]$$

ਜਾਂ $$g(x)\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}.\,g(x)\,y=g(x)\,\frac{dy}{dx}+y\,g'(x)$$

$\Rightarrow$ $$\mathrm{P}.\,g(x)=g'(x)$$

ਜਾਂ $$\mathrm{P}=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਨਾਲ ਇਨਟੈਗਰਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\int \mathrm{P}dx=\int\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$$

ਜਾਂ $$\int \mathrm{P}.dx=\log\left(g(x)\right)$$

ਜਾਂ $$\mathrm{g}(x)=e^{\int \mathrm{P}\,dx}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ $g(x)=e^{\int pdx}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ x ਅਤੇ y ਦੇ ਕਿਸੇ ਫਲਨ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਫਲਨ $g(x)=e^{\int pdx}$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇਨਟੈਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ **(I.F.)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $g(x)$ ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$e^{\int pdx}\,\frac{dy}{dx}+\mathrm{P}\,e^{\int pdx}\,y=\mathrm{Q}.\,e^{\int pdx}$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int \mathrm{P}dx}\right)=\mathrm{Q}\,e^{\int \mathrm{P}dx}$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਨਾਲ ਇਨਟੈਗਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx} = \int \left(\mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right) dx$$

ਜਾਂ $$y = e^{-\int \mathrm{P}\,dx} \cdot \int \left(\mathrm{Q} \cdot e^{\int \mathrm{P}\,dx}\right) dx + \mathrm{C}$$

ਇਹ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੇ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਕਦਮ

(i) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P, Q ਅਚਲ ਜਾਂ ਸਿਰਫ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ।

(ii) ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ (I.F.) = $e^{\int \mathrm{P}\,dx}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

$$y \text{ . (I.F.)} = \int (\mathrm{Q} \times \text{I.F.})\, dx + \mathrm{C}$$

ਜੇਕਰ ਪਹਿਲੀ ਕੋਟੀ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ P_1 ਅਤੇ Q_1 ਅਚਲ ਜਾਂ ਕੇਵਲ y ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ ਤਾਂ I.F. = $e^{\int \mathrm{P}_1\,dy}$ ਅਤੇ

$$x \text{ . (I.F.)} = \int (\mathrm{Q}_1 \times \text{I.F.})\, dy + \mathrm{C}$$ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ:

ਉਦਾਹਰਣ 19. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} - y = \cos x$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q} \text{ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ } \mathrm{P} = \text{ï}\, 1 \text{ ਅਤੇ } \mathrm{Q} = \cos x$$

ਇਸ ਲਈ $\text{I.F.} = e^{\int -1\,dx} = e^{-x}$

ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ I.F. ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x} y = e^{-x} \cos x$$

ਜਾਂ $$\frac{d}{dx}\left(y e^{-x}\right) = e^{-x} \cos x$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਨਾਲ ਇਟਿਗਰੇਸ਼ਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y\,e^{-x} = \int e^{-x}\cos x\,dx + \mathrm{C} \qquad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ $\quad \mathrm{I} = \int e^{-x}\cos x\,dx$

$$= \cos x\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) - \int(-\sin x)\,(-e^{-x})\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \int \sin x\,e^{-x}\,dx$$

$$= -\cos x\,e^{-x} - \left[\sin x(\text{ï}\,e^{-x}) - \int \cos x\,(-e^{-x})\,dx\right]$$

$$= -\cos x\,e^{-x} + \sin x\,e^{-x} - \int \cos x\,e^{-x}\,dx$$

ਜਾਂ $\quad$ I = ï $e^{\text{ï}x}\cos x + \sin x\, e^{\text{ï}x}$ ï I

ਜਾਂ $\quad$ 2I = ($\sin x$ ï $\cos x$) $e^{\text{ï}x}$

ਜਾਂ $\quad \mathrm{I} = \dfrac{(\sin x - \cos x)\,e^{-x}}{2}$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$y\,e^{-x} = \left(\frac{\sin x - \cos x}{2}\right)e^{-x} + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $\quad y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \mathrm{C}e^{x}$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2\ (x \neq 0)$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨੋਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ x ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x$$

ਇਹ $\dfrac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ $\mathrm{P} = \dfrac{2}{x}$ ਅਤੇ $\mathrm{Q} = x$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad$ I.F. = $e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = e^{\log x^2} = x^2$ ਜਿਵੇਂ ਕਿ [ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ $f(x) = f(x)$]

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

$$y \,.\, x^2 = \int (x)\,(x^2)\,dx + \mathrm{C} \;=\; \int x^3 dx + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$y = \frac{x^2}{4} + \mathrm{C}\,x^{-2}$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 21. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y\,dx$ ï $(x + 2y^2)\,dy = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$$

ਇਹ $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1 x = \mathrm{Q}_1$,ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਇੱਥੇ $\mathrm{P}_1 = -\frac{1}{y}$ ਅਤੇ $\mathrm{Q}_1 = 2y$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $\mathrm{I.F} = e^{\int -\frac{1}{y}dy} = e^{-\log y} = e^{\log (y)^{-1}} = \frac{1}{y}$

ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

ਇਸ ਲਈ $$x\frac{1}{y} = \int (2y)\left(\frac{1}{y}\right)dy + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{y} = \int 2dy + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$\frac{x}{y} = 2y + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $$x = 2y^2 + \mathrm{C}y$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 22. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{dx}{dy} + y\cot x = 2x + x^2 \cot x \; (x \neq 0)$$

ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \frac{\pi}{2}$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਇੱਥੇ P = cot x ਅਤੇ Q = $2x + x^2 \cot x$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$$

ਇਸ ਲਈ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$y \,.\, \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \sin x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = \int 2x \sin x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = \sin x\left(\frac{2x^2}{2}\right) - \int \cos x\left(\frac{2x^2}{2}\right) dx + \int x^2 \cos x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = x^2 \sin x - \int x^2 \cos x\, dx + \int x^2 \cos x\, dx + \text{C}$$

ਜਾਂ $$y \sin x = x^2 \sin x + \text{C} \qquad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ $y = 0$ ਅਤੇ $x = \frac{\pi}{2}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$0 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{C}$$

ਜਾਂ $$\text{C} = \frac{-\pi^2}{4}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y \sin x = x^2 \sin x - \frac{\pi^2}{4}$$

ਜਾਂ $$y = x^2 - \frac{\pi^2}{4 \sin x} \quad (\sin x \neq 0)$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23. ਬਿੰਦੂ (0| 1) ਵਿੱਚ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ x ਭੁਜਾ ਅਤੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ y ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (ਅੰਕ) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਵਤਰ ਦੀ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ $\frac{dy}{dx}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{dy}{dx} = x + xy$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} - xy = x \qquad \dots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1)] $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇੱਥੇ P = ï x ਅਤੇ Q = x ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\text{I.F.} = e^{\int -x\,dx} = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$y . e^{\frac{-x^2}{2}} = \int (x)\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right) dx + \mathrm{C} \qquad \text{... (2)}$$

ਮੰਨ ਲਉ $\qquad \mathrm{I} = \int (x)\, e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$

ਮੰਨ ਲਉ $\qquad \frac{-x^2}{2} = t$, ਤਾਂ ï $x\,dx = dt$ ਜਾਂ $x\,dx$ = ï dt

ਇਸ ਲਈ $\qquad \mathrm{I} = -\int e^t\, dt = -e^t$ = ï $e^{\frac{-x^2}{2}}$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$y\, e^{\frac{-x^2}{2}} = -e^{\frac{-x^2}{2}} + \mathrm{C}$$

ਜਾਂ $\qquad y = -1 + \mathrm{C}\, e^{\frac{x^2}{2}} \qquad$ ... (3)

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਪਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਰਿਵਾਰ ਦੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਮੈਂਬਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0] 1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦਾ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

1 = ï 1 + C . e^0 ਜਾਂ C = 2

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$y = -1 + 2\, e^{\frac{x^2}{2}}$$

ਇਹ ਵਤਰਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.6

1 ਤੋਂ 12 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ, ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$ $\qquad$ **2.** $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$ $\qquad$ **3.** $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$

4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad$ **5.** $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$

7. $x \log x \dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{2}{x} \log x$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx\ (x \neq 0)$

9. $x\dfrac{dy}{dx} + y - x + xy \cot x = 0 \ \ (x \neq 0)$

10. $(x + y)\dfrac{dy}{dx} = 1$

11. $y\, dx + (x - y^2)\, dy = 0$

12. $(x + 3y^2)\dfrac{dy}{dx} = y \ \ (y > 0)$.

13 ਤੋਂ 15 ਤੱਕ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਲਈ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

13. $\dfrac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x;\ y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \dfrac{\pi}{3}$

14. $(1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = \dfrac{1}{1 + x^2};\ y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 1$

15. $\dfrac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x;\ y = 2$ ਜੇਕਰ $x = \dfrac{\pi}{2}$

16. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਤੇ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਢਲਾਣ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

17. ਬਿੰਦੂ $(0, 2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ ਇਸ ਵਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਦੇ ਢਲਾਣ ਦੇ ਨਤੀਜੇ ਤੋਂ 5 ਜ਼ਿਆਦਾ ਹੈ।

18. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(A) e^{-x} (B) e^{-y} (C) $\dfrac{1}{x}$ (D) x

19. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(1 - y^2)\dfrac{dx}{dy} + yx = ay\,(-1 < y < 1)$ ਦਾ ਇਨਟਿਗਰੇਟ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(A) $\dfrac{1}{y^2 - 1}$ (B) $\dfrac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$ (C) $\dfrac{1}{1 - y^2}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$

ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ

ਉਦਾਹਰਣ 24. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਫਲਨ $y = c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \sin bx$, ਜਿੱਥੇ c_1, c_2 ਸਵੈ ਇੱਛ ਅਚਲ ਹੈ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2a\frac{dy}{dx} + \left(a^2 + b^2\right)y = 0$$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਹੈ :

$$y = e^{ax}\left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right] \quad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}\left[\text{ï } bc_1 \sin bx + bc_2 \cos bx\right] + \left[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx\right]e^{ax}.a$$

ਜਾਂ
$$\frac{dy}{dx} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx] \quad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ x, ਨਾਲ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{ax}[(bc_2 + ac_1)(-\sin bx \,.\, b) + (ac_2 - bc_1)(\cos bx \,.\, b)]$$

$$+ [(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]\,e^{ax}.a$$

$$= e^{ax}[(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}$ ਅਤੇ y ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ
$$= e^{ax}[a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2)\sin bx + (a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1)\cos bx]$$

$$-2ae^{ax}[(bc_2 + ac_1)\cos bx + (ac_2 - bc_1)\sin bx]$$

$$+(a^2 + b^2)e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

$$= e^{ax}\begin{bmatrix}\left(a^2c_2 - 2abc_1 - b^2c_2 - 2a^2c_2 + 2abc_1 + a^2c_2 + b^2c_2\right)\sin bx \\ +(a^2c_1 + 2abc_2 - b^2c_1 - 2abc_2 - 2a^2c_1 + a^2c_1 + b^2c_1)\cos bx\end{bmatrix}$$

$$= e^{ax}[0 \times \sin bx + 0 \cos bx] = e^{ax} \times 0 = 0$$ = ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25. ਦੂਜੇ ਚੌਥਾਈ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰੇਸ਼ਕ ਅੰਕ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਚੌਥਾਈ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ C ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕੁਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਮੈਂਬਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਬਿੰਦੂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (ï a, a) ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 9.6 ਦੇਖੋ)A

ਕੁਲ C ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$(x + a)^2 + (y \text{ ï } a)^2 = a^2 \quad \ldots (1)$$

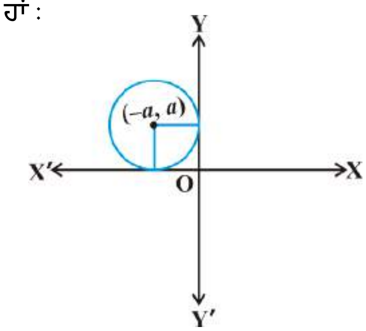
ਜਾਂ $$x^2 + y^2 + 2ax \text{ ï } 2ay + a^2 = 0 \quad \ldots (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ x ਦੇ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2a - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

ਜਾਂ $$x + y\frac{dy}{dx} = a\left(\frac{dy}{dx} - 1\right)$$

ਜਾਂ $$a = \frac{x + y\,y'}{y' - 1}$$



ਚਿੱਤਰ 9.6

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ a ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\left[x + \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 + \left[y - \frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2 = \left[\frac{x + y\,y'}{y' - 1}\right]^2$$

ਜਾਂ $$[x\,y' - x + x + y\,y']^2 + [y\,y' - y - x - y\,y']^2 = [x + y\,y']^2$$

ਜਾਂ $$(x + y)^2 \; y'^2 + [x + y]^2 = [x + y\,y']^2$$

ਜਾਂ $$(x + y)^2 \,[(y')^2 + 1] = [x + y\,y']^2$$

ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਕੁਲ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 26. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜਦੋਂ $x = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dy}{dx} = e^{(3x+4y)}$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = e^{3x} \cdot e^{4y} \qquad \ldots (1)$$

ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{e^{4y}} = e^{3x} dx$$

ਇਸ ਲਈ $$\int e^{-4y} dy = \int e^{3x} dx$$

ਜਾਂ $$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + \text{C}$$

ਜਾਂ 4 e^{3x} + 3 $e^{ï\ 4y}$ + 12 C = 0 ... (2)

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਜਾਂ $y = 0$ ਪ੍ਰਤੀਸਥਾਪਨ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$4 + 3 + 12\,\text{C} = 0 \text{ ਅਤੇ } \text{C} = \frac{-7}{12}$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ C ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

4 e^{3x} + 3 $e^{ï\ 4y}$ ï 7 = 0, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 27. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ

$$(x\,dy \text{ ï } y\,dx)\, y \sin\left(\frac{y}{x}\right) = (y\,dx + x\,dy)\, x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\left[x\,y\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dy = \left[xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx$$

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy\cos\left(\frac{y}{x}\right) + y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\sin\left(\frac{y}{x}\right) - x^2\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ x^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)\sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) - \cos\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots (1)$$

ਸਾਫ ਤੌਰ ਤੇ; ਸਮੀਕਰਣ (1)] $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਸਮਰੂਪੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ

$$y = vx \qquad \text{... (2)}$$

ਭਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜਾਂ $$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

ਜਾਂ $$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2 \sin v}{v\sin v - \cos v}$$ [ਸਮੀਕਰਣ (1)ਅਤੇ (2)ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ]

ਜਾਂ $$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

ਜਾਂ $$\left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right) dv = \frac{2\,dx}{x}$$

ਇਸ ਲਈ $$\int \left(\frac{v\sin v - \cos v}{v\cos v}\right) dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\int \tan v\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = 2\int \frac{1}{x}\,dx$$

ਜਾਂ $$\log|\sec v| - \log|v| = 2\log|x| + \log|C_1|$$

 जਾਂ $$\log\left|\frac{\sec v}{v\,x^2}\right| = \log|C_1|$$

ਜਾਂ $$\frac{\sec v}{v\,x^2} = \pm C_1 \qquad \text{... (3)}$$

ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ v ਨੂੰ $\frac{y}{x}$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{\sec\left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right)(x^2)} = C]$$ ਜਿੱਥੇ $C = \pm C_1$

ਜਾਂ $$\sec\left(\frac{y}{x}\right) = C\,xy$$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 28. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ
$(\tan^{-1}y - x)\, dy = (1 + y^2)\, dx$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨਿਮਨ ਲਿਖਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \qquad \ldots (1)$$

ਸਮੀਕਰਣ (1)] $\frac{dx}{dy} + \mathrm{P}_1\, x = \mathrm{Q}_1$, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਰੇਖੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1}{1+y^2} \text{ ਅਤੇ } \mathrm{Q}_1 = \frac{\tan^{-1}y}{1+y^2} \text{ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ}$$

$$\text{I.F.} = e^{\int \frac{1}{1+y^2}dy} = e^{\tan^{-1}y}$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ :

$$x\, e^{\tan^{-1}y} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy + \mathrm{C} \qquad \ldots (2)$$

ਮੰਨ ਲਉ $\qquad \mathrm{I} = \int \left(\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}\right) e^{\tan^{-1}y}\, dy$

$\tan^{-1} y = t$ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\left(\frac{1}{1+y^2}\right) dy = dt$

ਇਸ ਲਈ $\qquad \mathrm{I} = \int t\, e^t\, dt,\ \mathrm{I} = t\, e^t - \int 1 \,.\, e^t\, et,\ \mathrm{I} = t\, e^t - e^t = e^t\,(t - 1)$

ਜਾਂ $\qquad \mathrm{I} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1)$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚੋਂ I ਦੀ ਕੀਮਤ ਭਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ

$$x \,.\, e^{\tan^{-1}y} = e^{\tan^{-1}y}(\tan^{-1}y - 1) + \mathrm{C} \text{ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ}$$

ਜਾਂ $\qquad x = (\tan^{-1}y - 1) + \mathrm{C}\, e^{-\tan^{-1}y}$

ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਕੋਟੀ (ਜੇਕਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+5x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-6y=\log x$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+7y=\sin x$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4}-\sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0$

2. ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਲਈ ਪਰਖ ਕਰੋ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਫਲਨ (ਅਸਪਸ਼ਟ ਜਾਂ ਸਪਸ਼ਟ) ਸੰਗਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

(i) $xy = a\,e^x + b\,e^{ï x} + x^2$: $x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-xy+x^2-2=0$

(ii) $y = e^x\,(a\cos x + b\sin x)$: $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+2y=0$

(iii) $y = x\sin 3x$: $\frac{d^2y}{dx^2}+9y-6\cos 3x=0$

(iv) $x^2 = 2y^2\log y$: $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}-xy=0$

3. $(x$ ï $a)^2 + 2y^2 = a^2$, ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਵਤਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰੋ ਜਦ ਕਿ a ਇੱਕ ਸਵੈ ਇਛਤ ਅਚਲ ਹੈ।

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ x^2 ï $y^2 = c\,(x^2+y^2)^2$ ਇੱਥੇ c ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ] $(x^3$ ï $3x\,y^2)\,dx = (y^3$ ï $3x^2y)\,dy$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ।

5. ਪਹਿਲੇ ਚੌਥਾਈ ਚੱਕਰ ਵਿੱਚ ਅਜਿਹੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਪਰਿਵਾਰ ਦੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਸਪਰਸ਼ ਕਰਦੀ ਹੈ।

6. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx}+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0$] ਜਦੋਂਕਿ $x\neq 1$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਦਰਸਾਉ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{dy}{dx}+\frac{y^2+y+1}{x^2+x+1}=0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ $(x + y + 1) = A\,(1$ ï x ï y ï $2xy)$ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ A ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚਲ (ਪੈਰਾਮੀਟਰ) ਹੈ।

8. ਬਿੰਦੂ $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਵਤਰ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\sin x\cos y\,dx + \cos x\sin y\,dy = 0$ ਹੈ।

9. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(1 + e^{2x})\,dy + (1 + y^2)\,e^x\,dx = 0$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $y = 1$ ਜੇਕਰ $x = 0$.

10. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $y\, e^{\frac{x}{y}} dx = \left(x\, e^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dy \; (y \neq 0)$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x$ ï $y)\,(dx + dy) = dx$ ï dy ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ y = ï 1, ਜੇਕਰ $x = 0$ (ਸੰਕੇਤ x ï $y = t$ ਰੱਖੋ)A

12. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\left[\dfrac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right]\dfrac{dx}{dy} = 1 \; (x \neq 0)$ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \; (x \neq 0)$ ਦਾ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = \dfrac{\pi}{2}$.

14. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $(x + 1)\dfrac{dy}{dx} = 2\, e^{\text{ï} y}$ ï 1 ਦਾ ਇੱਕ ਖਾਸ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $y = 0$ ਜੇਕਰ $x = 0$.

15. ਕਿਸੇ ਪਿੰਡ ਦੀ ਜੰਨ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਵਾਧੇ ਦੀ ਦਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੇਂ ਉਸ ਪਿੰਡ ਦੇ ਬਸਿੰਦਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਨ 1999 ਵਿੱਚ ਪਿੰਡ ਦੀ ਜੰਨਸੰਖਿਆ 20,000 ਸੀ, ਅਤੇ ਸੰਨ 2004 ਵਿੱਚ 25,000 ਸੀ, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸੰਨ 2009 ਵਿੱਚ ਪਿੰਡ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

16. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y} = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $xy = C$ (B) $x = Cy^2$ (C) $y = Cx$ (D) $y = Cx^2$

17. $\dfrac{dx}{dy} + P_1 x = Q_1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $y\, e^{\int P_1\, dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dy}\right) dy + C$

(B) $y \,.\, e^{\int P_1\, dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dx}\right) dx + C$

(C) $x\, e^{\int P_1\, dy} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dy}\right) dy + C$

(D) $x\, e^{\int P_1\, dx} = \int \left(Q_1 e^{\int P_1\, dx}\right) dx + C$

18. ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ $e^x\, dy + (y\, e^x + 2x)\, dx = 0$ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਹੈ :

(A) $x\, e^y + x^2 = C$ (B) $x\, e^y + y^2 = C$ (C) $y\, e^x + x^2 = C$ (D) $y\, e^y + x^2 = C$

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਜ਼ਾਦ ਚਾਲ (ਚਲਾਂ)ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ ਚਲ ਦਾ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਵੇ, ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ, ਉਸ ਡਿਫਰੈਸਨਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਘਾਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਘਾਤ (ਜੇਕਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ) ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਸ਼ਾਮਿਲ ਉੱਚ ਕ੍ਰਮ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਦੀ ਉੱਚਤਮ ਘਾਤ (ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ) ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਫਲਨ, ਉਸ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਹੱਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉੱਨੇ ਹੀ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੋਣ, ਜਿੰਨਾ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਵਿਆਪਕ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚਲਾਂ ਤੋਂ ਮੁਕਤ ਖਾਸ ਹੱਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਕਿਸੀ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਫਲਨ ਤੋਂ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਉਸ ਫਲਨ ਦਾ ਸਿਲਸਿਲੇਵਾਰ ਉਨੀ ਹੀ ਵਾਰ ਡੈਰੀਵੈਟਿਵ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨੇ ਉਸ ਫਲਨ ਵਿੱਚ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹੈ ਅਤੇ ਤਾਂ ਸਵੈ ਇੱਛਤ ਅਚੱਲਾਂ ਨੂੰ ਖਤਮ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।
- ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਅਜਿਹੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਲੱਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਭਾਵ y ਵਾਲੇ ਪਦ dy ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਅਤੇ x ਵਾਲੇ ਪਦ dx ਦੇ ਨਾਲ ਰਹਿਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸਨੂੰ $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ ਜਾਂ $\frac{dx}{dy} = g(x, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $f(x, y)$ ਅਤੇ $g(x, y)$ ਜ਼ੀਰੋ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਸਮਰੂਪ ਫਲਨ ਹੈ, ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- $\frac{dy}{dx} + \mathrm{P}y = \mathrm{Q}$, ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ P ਅਤੇ Q ਅਚਲ ਜਾਂ ਕੇਵਲ x ਦੇ ਫਲਨ ਹੈ, ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਟਿੱਪਣੀ

ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿਗਿਆਨ ਦੀ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ। ਰੋਚਕ ਤੱਤ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਮੌਜੂਦਗੀ ਨਵੰਬਰ 11,1675 ਨੇ Gottfried Wilthelm Freiherr Leibnitz (1646-1716) ਨੇ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$, ਨੂੰ ਲਿਖਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਤੁਤ ਕੀਤਾ

ਅਤੇ ਉਸ ਦੇ ਦੋਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ $\int$ ਅਤੇ dy ਤੋਂ ਜਾਣੂੰ ਕਰਵਾਇਆ। ਦਰਅਸਲ Leibnitz ਅਜਿਹੇ ਵਕਰ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਮਗਨ ਸੀ ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਪਰਸ਼ ਰੇਖਾ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਹੋਵੇ, ਇਸ ਸਮੱਸਿਆ ਨੇ ਸੰਨ 1691 ਚਲਾ ਨੂੰ ਵੱਖ ਕਰਨ ਵਿਧੀ ਦੀ ਅਗਵਾਈ ਦਾ ਮਾਰਗ ਦਰਸ਼ਨ ਕਰਵਾਇਆ। ਇੱਕ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਪਹਿਲੀ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਸੂਤਰੀਕਰਨ ਕੀਤਾ। ਉਹ ਅੱਗੇ ਵਧੇ ਅਤੇ ਥੋੜ੍ਹੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ 'ਪਹਿਲੇ ਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕੀਤੀ। ਕਿੰਨਾਂ ਹੈਰਾਨੀਜਨਕ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਖੋਜ ਇਕੱਲੇ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੁਆਰਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜਨਮ ਦੇ ਪੰਜੀ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਪੂਰੀ ਹੋਈ ।

ਆਰੰਭ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ 'ਹੱਲ' ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਇਨਟੈਗਰਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਇਹ ਸ਼ਬਦ ਸੰਨ 1690 ਵਿੱਚ : James Bernoulli, (1654 & 1705) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਚਲਣ ਵਿੱਚ ਲਗਾਇਆ ਗਿਆ। ਸ਼ਬਦ 'ਹੱਲ' ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਡੈਰੀਵੇਟਿਵ ਪ੍ਰਯੋਗ Joseph Louis Lagrange (1736&1813)] ਦੁਆਰਾ ਸੰਨ 1774 ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਹ ਘਟਨਾ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜਨਮ ਤੋਂ ਲੱਗਭਗ 100 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਘਟਿਤ ਹੋਈ। ਇਹ Jules Henri Poincare (1854 & 1912)] ਸੀ, ਜਿਸ ਨੇ ਸ਼ਬਦ 'ਹੱਲ' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਲਈ ਸਖਤ ਵਕਾਲਤ ਕੀਤੀ ਸੀ ਇਸ ਲਈ ਆਧੁਨਿਕ ਸ਼ਬਦਾਵਲੀ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ ਹੱਲ ਨੂੰ ਆਪਣਾ ਉੱਚਿਤ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ। ਚਲਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਨਾਮਕਰਨ John Bernoulli (1667&1748)] James Bernoulli ਦੇ ਭਰਾ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਮਈ 20, 1715 ਨੂੰ Leibnitz ਨੂੰ ਲਿਖੀ ਆਪਣੀ ਚਿੱਠੀ ਵਿੱਚ, ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਦੀ ਖੋਜ ਕੀਤੀ।

$$x^2 y'' = 2y$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਤਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ, ਪੈਰਾਬੋਲਾ, ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਅਤੇ ਘਣਾਕਾਰ ਵਕਰ ਦੇ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਮਾਰਗਦਰਸ਼ਨ ਕਰਵਾਉਂਦੇ ਹੈ। ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਜਿਹੇ ਸਰਲ ਦਿਖਾਈ ਦੇਣ ਵਾਲੇ ਡਿਫਰੈਂਸ਼ਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੇਕ ਰੂਪ ਧਾਰਨ ਕਰਦੇ ਹਨ। 20ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਅੱਧ ਵਿੱਚ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾ ਦੇ ਗੁਣਾਤਮਕ ਸੁਭਾਅ ਅਤੇ ਸਿਰਲੇਖ ਦੇ ਡਿਫ਼ਰੈਂਸ਼ੀਅਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਕਠਿਨਾਈ ਕੁਦਰਤ ਦੀ ਖੋਜ ਲਈ ਧਿਆਨ ਆਕਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਇਸ ਨੇ ਸਾਰੀਆਂ ਖੋਜਾਂ ਲਈ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਮੁੱਖ ਸਥਾਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ।