अध्याय 2

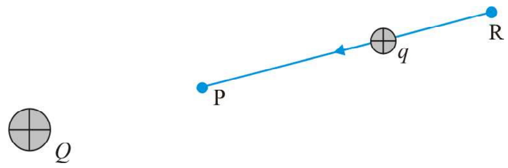
स्थिरवैद्युत विभव तथा धारिता

2.1 भूमिका

अध्याय 6 तथा 8 (कक्षा 11) में स्थितिज ऊर्जा की धारणा से आपको परिचित कराया गया था। जब कोई बाह्य बल किसी वस्तु को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक, किसी अन्य बल; जैसे–स्प्रिंग बल, गुरुत्वीय बल आदि के विरुद्ध, ले जाता है, तो उस बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य उस वस्तु में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। जब बाह्य बल हटा लिया जाता है तो वस्तु गति करने लगती है और कुछ गतिज ऊर्जा अर्जित कर लेती है, तथा उस वस्तु की उतनी ही स्थितिज ऊर्जा कम हो जाती है। इस प्रकार वस्तु की स्थितिज ऊर्जा तथा गतिज ऊर्जा का योग संरक्षित रहता है। इस प्रकार के बलों को *संरक्षी बल* कहते हैं। स्प्रिंग बल तथा गुरुत्वाकर्षण बल संरक्षी बल के उदाहरण हैं।

गुरुत्वाकर्षण बल की भाँति दो स्थिर आवेशों के बीच लगने वाला कूलॉम बल भी संरक्षी बल होता है। यह कोई आश्चर्य की बात नहीं है, क्योंकि गणितीय रूप में यह बल गुरुत्वाकर्षण बल के समान है; दोनों में दूरी की व्युत्क्रम वर्ग निर्भरता है और प्रमुख रूप से आनुपातिकता स्थिरांक में भिन्नता है। गुरुत्वाकर्षण नियम की संहतियाँ कूलॉम नियम में आवेशों द्वारा प्रतिस्थापित हो जाती हैं। इस प्रकार, गुरुत्वीय क्षेत्र में संहतियों की स्थितिज ऊर्जा की ही भाँति हम किसी स्थिरवैद्युत क्षेत्र में आवेश की स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा को परिभाषित कर सकते हैं।

आवेश विन्यास के कारण किसी स्थिरवैद्युत क्षेत्र $\mathbf{E}$ पर विचार कीजिए। सरलता की दृष्टि से पहले मूल बिंदु पर स्थित किसी आवेश Q के कारण क्षेत्र $\mathbf{E}$ पर विचार करते हैं। कल्पना कीजिए कि हम कोई परीक्षण आवेश q को आवेश Q के कारण आवेश q पर लगे प्रतिकर्षी बल के विरुद्ध, बिंदु R से बिंदु P तक लाते हैं। चित्र 2.1 के संदर्भ में ऐसा तभी होगा जब Q तथा q दोनों धनात्मक हों अथवा दोनों ऋणात्मक हों। सुनिश्चित करने के लिए, हम $Q, q > 0$ मानते हैं।



चित्र 2.1 एक परीक्षण आवेश q (>0) मूल बिंदु पर स्थित आवेश Q (>0) के कारण उस पर लगे प्रतिकर्षी बल के विरुद्ध बिंदु R से बिंदु P तक ले जाया जाता है।

यहाँ दो टिप्पणियाँ की जा सकती हैं। पहली, हम यह मानते हैं कि परीक्षण आवेश q इतना छोटा है कि यह मूल विन्यास को विक्षुब्ध नहीं करता, यानी मूल बिंदु पर स्थित आवेश Q को विक्षुब्ध नहीं करता (अन्यथा हम किसी अनिर्दिष्ट बल द्वारा आवेश Q को मूल बिंदु पर दृढ़ करें)। दूसरी, आवेश q को R से P तक लाने के लिए हम एक बाह्य बल $\mathbf{F}_{ext}$ आरोपित करते हैं जो प्रतिकर्षी वैद्युत बल $\mathbf{F}_E$ (अर्थात $\mathbf{F}_{ext} = -\mathbf{F}_E$) को यथातथ्य प्रभावहीन कर देता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जब आवेश q को R से P तक लाते हैं तो उस पर कोई नेट बल अथवा त्वरण कार्य नहीं करता–इसे अत्यंत धीमी नियत चाल से लाया जाता है। इस स्थिति में, बाह्य बल द्वारा आवेश पर किया गया कार्य वैद्युत बल द्वारा किए गए कार्य का ऋणात्मक होता है, तथा पूर्णत: आवेश q की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। यदि P पर पहुँच कर बाह्य बल को हटा दिया जाए तो वैद्युत बल आवेश q को Q से दूर भेज देगा – P पर संचित ऊर्जा (स्थितिज ऊर्जा) आवेश q को गतिज ऊर्जा प्रदान करने में खर्च हो जाती है तथा यह इस ढंग से होता है कि गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का योग संरक्षित रहता है।

इस प्रकार बाह्य बल द्वारा किसी आवेश q को बिंदु R से P तक ले जाने में किया गया कार्य

$$W_{RP} = \int_R^P \mathbf{F}_{ext} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\int_R^P \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r} \qquad (2.1)$$

यह कार्य स्थिरवैद्युत प्रतिकर्षी बल के विरुद्ध किया गया है, तथा यह स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है।

विद्युत क्षेत्र के प्रत्येक बिंदु पर q आवेश के, किसी कण में एक निश्चित स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है तथा कण पर किया गया यह कार्य इसकी स्थितिज ऊर्जा में इतनी वृद्धि कर देता है जो R तथा P बिंदुओं के बीच स्थितिज ऊर्जा के अंतर के बराबर है।

इस प्रकार, स्थितिज ऊर्जा अंतर

$$\Delta U = U_P - U_R = W_{RP} \qquad (2.2)$$

(ध्यान दीजिए, यहाँ पर यह विस्थापन विद्युत बल के विपरीत है, इसलिए विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है, अर्थात $-W_{RP}$)

अत:, दो बिंदुओं के बीच स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा अंतर को हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं – किसी यादृच्छिक आवेश विन्यास के विद्युत बल क्षेत्र में यह अंतर आवेश q को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक (बिना त्वरित किए) ले जाने के लिए आवश्यक बाह्य बल द्वारा किए जाने वाले न्यूनतम कार्य के बराबर होता है।

इस घटनाक्रम में दो महत्वपूर्ण टिप्पणियाँ की जा सकती हैं–

(i) समीकरण (2.2) का दायाँ पक्ष केवल आवेश की आरंभिक तथा अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है। इसका अर्थ यह है कि किसी स्थिरवैद्युत क्षेत्र द्वारा किसी आवेश को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य केवल आरंभिक तथा अंतिम स्थितियों (बिंदुओं) पर निर्भर करता है, उस पथ पर निर्भर नहीं करता जिससे होकर वह आवेश एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक जाता है (चित्र 2.2)। यह किसी संरक्षी बल का मूल अभिलक्षण है। स्थितिज ऊर्जा की धारणा अर्थपूर्ण नहीं रहेगी, यदि किया गया कार्य पथ पर निर्भर हो जाएगा। किसी स्थिरवैद्युत क्षेत्र द्वारा किए गए कार्य का पथ पर निर्भर न होना कूलॉम के नियम द्वारा सिद्ध किया जा सकता है। इसकी उपपत्ति हम यहाँ छोड़ रहे हैं।

(ii) समीकरण (2.2) *स्थितिज ऊर्जा अंतर* की परिभाषा भौतिकी के नियमों के अनुसार अर्थपूर्ण राशि *कार्य* के पदों में करती है। स्पष्टत:, इस प्रकार परिभाषित स्थितिज ऊर्जा किसी योज्यता स्थिरांक के अंतर्गत अनिश्चित होती है। इसका यह अर्थ है कि स्थितिज ऊर्जा का वास्तविक मान भौतिक रूप से महत्वपूर्ण नहीं होता; केवल स्थितिज ऊर्जा के अंतर का ही महत्त्व होता है। हम सदैव ही कोई यादृच्छिक स्थिरांक α हर बिंदु पर स्थितिज ऊर्जा के साथ जोड़ सकते हैं, क्योंकि इससे स्थितिज ऊर्जा अंतर के मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा :

$$(U_P + \alpha) - (U_R + \alpha) = U_P - U_R$$

इसे इस प्रकार से भी व्यक्त कर सकते हैं : स्थितिज ऊर्जा को किस बिंदु पर शून्य मानें, इस बिंदु के चयन की स्वतंत्रता होती है। एक सुविधाजनक चयन यह है कि हम अनंत पर स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा को शून्य मानें। इस चयन के अनुसार यदि हम बिंदु R को अनंत पर लें, तब समीकरण (2.2) से हमें प्राप्त होता है :

$$W_{\infty P} = U_P - U_\infty = U_P \tag{2.3}$$

चूँकि यहाँ पर बिंदु P यादृच्छिक है, समीकरण (2.3) से हमें किसी बिंदु पर आवेश q की स्थितिज ऊर्जा की परिभाषा प्राप्त होती है – *किसी बिंदु पर आवेश q की स्थितिज ऊर्जा (किसी आवेश विन्यास के कारण क्षेत्र की उपस्थिति में) बाह्य बल (वैद्युत बल के समान तथा विपरीत) द्वारा आवेश q को अनंत से उस बिंदु तक ले जाने में किए गए कार्य के बराबर होती है।*

कॉन्ते एलेस्सैंद्रो वोल्टा (1745 – 1827) इटालियन भौतिकीविद, पविया में प्रोफ़ेसर थे। वोल्टा ने यह स्थापित किया कि लुइगी गैल्वनी 1737–1798, द्वारा, दो असमान धातुओं के संपर्क में लटके मेंढक के मांसपेशीय ऊतकों में देखी गई 'जैव विद्युत' जैव ऊतकों का कोई विशिष्ट गुण नहीं है, बल्कि, तब भी उत्पन्न हो जाती है जब कोई गीली वस्तु दो असमान धातुओं के बीच रखी जाती है। इससे उन्होंने प्रथम, *वोल्टीय पुंज* या बैटरी का विकास किया जिसमें धातु की चकतियों (विद्युदाग्रों) के बीच गत्ते की नम चकतियाँ (विद्युत अपघट्य) रखकर एक बड़ा पुंज बनाया था।

कॉन्ते एलेस्सैंद्रो वोल्टा (1745 –1827)

2.2 स्थिरवैद्युत विभव

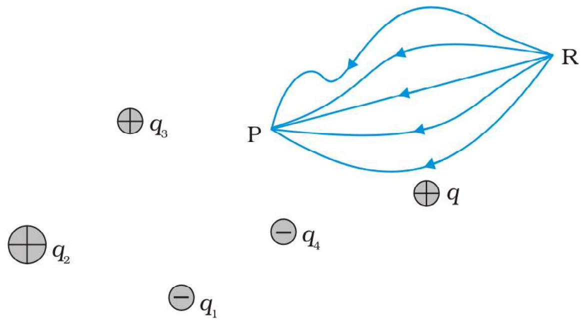
किसी व्यापक स्थिर आवेश विन्यास पर विचार कीजिए। हमने किसी परीक्षण आवेश q पर स्थितिज ऊर्जा को किए गए कार्य के पदों में परिभाषित किया था। यह कार्य स्पष्ट रूप से q के अनुक्रमानुपाती है, चूँकि आवेश q पर किसी भी बिंदु पर $q\mathbf{E}$ बल कार्य करता है, यहाँ $\mathbf{E}$ आवेश विन्यास के कारण उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र है। अत: किए गए कार्य को आवेश q से विभाजित करना सुविधाजनक होता है, क्योंकि परिणामस्वरूप जो राशि प्राप्त होती है वह q पर निर्भर नहीं करती। दूसरे शब्दों में, प्रति एकांक आवेश पर किया गया कार्य आवेश विन्यास से संबद्ध विद्युत क्षेत्र का अभिलाक्षणिक गुण होता है। इससे हमें दिए गए आवेश विन्यास के कारण स्थिरवैद्युत विभव V की धारणा प्राप्त होती है। समीकरण (2.1) से हमें प्राप्त होता है–

बाह्य बल द्वारा किसी एकांक धनावेश को बिंदु R से P तक लाने में किया गया कार्य

$$= V_P - V_R \left(= \frac{U_P - U_R}{q} \right) \tag{2.4}$$

यहाँ V_P तथा V_R क्रमश: बिंदु P तथा R के स्थिरवैद्युत विभव हैं। ध्यान दीजिए, यहाँ भी पहले की भाँति विभव का वास्तविक मान उतना महत्वपूर्ण नहीं होता जितना कि भौतिक नियमों के अनुसार विभवांतर महत्वपूर्ण होता है। यदि पहले की भाँति, हम अनंत पर विभव को शून्य चुनें (मानें), तब समीकरण (2.4) से यह उपलक्षित होता है कि–

बाह्य बल द्वारा किसी एकांक धनावेश को अनंत से किसी बिंदु तक लाने में किया गया कार्य = उस बिंदु पर स्थिरवैद्युत विभव (V)



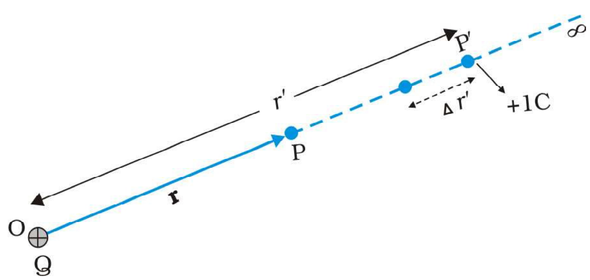
चित्र 2.2 किसी आवेश विन्यास के कारण स्थिरवैद्युत क्षेत्र द्वारा परीक्षण आवेश q पर किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता, यह केवल अंतिम तथा आरंभिक स्थितियों पर निर्भर करता है।

दूसरे शब्दों में, स्थिरवैद्युत क्षेत्र के प्रदेश के किसी बिंदु पर स्थिरवैद्युत विभव (V) वह न्यूनतम कार्य है जो किसी एकांक धनावेश को अनंत से उस बिंदु तक लाने में किया जाता है।

स्थितिज ऊर्जा के विषय में पहले की गई विशेष टिप्पणी विभव की परिभाषा पर भी लागू होती है। प्रति एकांक परीक्षण आवेश पर किया गया कार्य ज्ञात करने के लिए हमें अत्यल्प परीक्षण आवेश δq लेना होता है, इसे अनंत से उस बिंदु तक लाने में किया गया कार्य δW ज्ञात करके $\delta W/\delta q$ अनुपात का मान निर्धारित करना होता है। साथ ही पथ के प्रत्येक बिंदु पर बाह्य बल उस बिंदु पर परीक्षण आवेश पर लगने वाले स्थिरवैद्युत बल के बराबर तथा विपरीत होना चाहिए।

2.3 बिंदु आवेश के कारण विभव

मूल बिंदु पर स्थित किसी बिंदु आवेश Q पर विचार कीजिए (चित्र 2.3)। सुस्पष्टता की दृष्टि से Q को धनात्मक लीजिए। हम बिंदु P पर मूल बिंदु से स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ के साथ विभव निर्धारित करना चाहते हैं। इसके लिए हमें एकांक धनावेश को अनंत से उस बिंदु तक लाने में किया गया कार्य परिकलित करना चाहिए। $Q > 0$ के लिए, परीक्षण आवेश पर प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य धनात्मक होता है। चूँकि किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता, हम अनंत से बिंदु P तक अरीय दिशा के अनुदिश कोई सुगम पथ का चयन करते हैं।



चित्र 2.3 आवेश Q के कारण बिंदु P पर विभव, किसी एकांक धनात्मक परीक्षण आवेश को, आवेश Q ($Q > 0$) के कारण प्रतिकर्षण बल के विरुद्ध, अनंत से बिंदु P तक लाने में किए गए कार्य के बराबर होता है।

पथ के किसी मध्यवर्ती बिंदु P′ पर, किसी एकांक धनावेश पर स्थिरवैद्युत बल

$$\frac{Q \times 1}{4\pi\varepsilon_o r'^2}\hat{\mathbf{r}}' \tag{2.5}$$

यहाँ $\hat{\mathbf{r}}'$, OP′ के अनुदिश कोई एकांक सदिश है। इस बल के विरुद्ध r' से $r' + \Delta r'$ तक एकांक धनावेश को ले जाने में किया गया कार्य–

$$\Delta W = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r'^2}\Delta r' \tag{2.6}$$

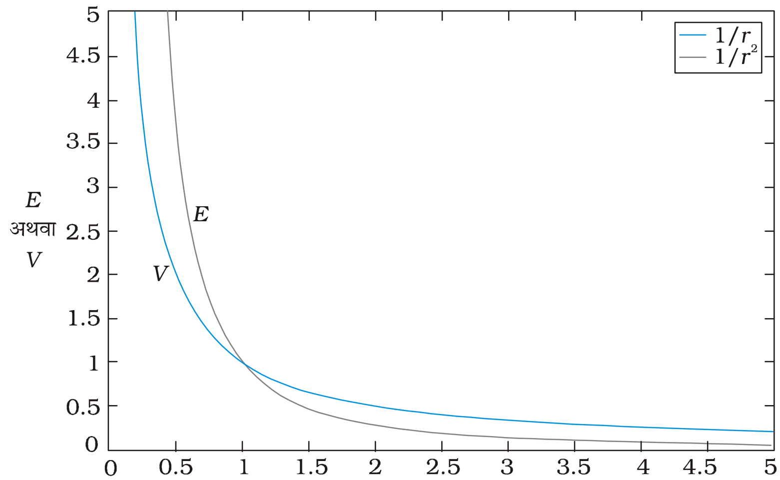
यहाँ ऋणात्मक चिह्न यह दर्शाता है कि $\Delta r' < 0$, तथा ΔW धनात्मक है। समीकरण (2.6) को $r' = \infty$ से $r' = r$ तक समाकलित करने पर बाह्य बल द्वारा किया गया कुल कार्य (W) प्राप्त होगा।

$$W = -\int_{\infty}^{r}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r'^2}dr' = \left.\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r'}\right|_{\infty}^{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{2.7}$$

परिभाषा के अनुसार यह आवेश Q के कारण P पर विभव है अतः

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{2.8}$$

समीकरण (2.8) आवेश Q के किसी भी चिह्न के लिए सत्य है यद्यपि हमने इस संबंध की व्युत्पत्ति के समय $Q > 0$ माना था। $Q < 0$, $V < 0$ के लिए, अर्थात् अनंत से उस बिंदु तक एकांक परीक्षण धनावेश को लाने के लिए किया गया कार्य (बाह्य बल द्वारा) ऋणात्मक है। यह इस कथन के तुल्य है कि एकांक धनावेश को अनंत से बिंदु P तक लाने में स्थिरवैद्युत बल द्वारा किया गया कार्य धनात्मक है [यह ऐसा ही है जैसा कि होना चाहिए, चूँकि $Q < 0$ के लिए, एकांक धनावेश पर बल आकर्षी है, अतः स्थिरवैद्युत बल तथा विस्थापन (अनंत से P तक) दोनों एक ही दिशा में हैं]। अंत में यदि हम समीकरण (2.8) पर ध्यान दें, तो पाते हैं कि यह समीकरण हमारे उस चयन से मेल खाता है जिसमें हमने अनंत पर विभव को शून्य माना था।



चित्र 2.4 किसी बिंदु आवेश Q के लिए दूरी r में परिवर्तन के साथ विभव में परिवर्तन $(Q/4\pi\varepsilon_0)\ \mathrm{m}^{-1}$ के मात्रकों में (नीला वक्र) तथा दूरी r में परिवर्तन के साथ विद्युत क्षेत्र में परिवर्तन $(Q/4\pi\varepsilon_0)\ \mathrm{m}^{-2}$ काला वक्र।

चित्र (2.4) में यह दर्शाया गया है कि किस प्रकार स्थिरवैद्युत विभव ($\propto 1/r$) तथा स्थिरवैद्युत क्षेत्र ($\propto 1/r^2$) दूरी r के साथ परिवर्तित होते हैं।

उदाहरण 2.1

(a) आवेश 4×10^{-7}C के कारण इससे 9 cm दूरी पर स्थित किसी बिंदु P पर विभव परिकलित कीजिए।

(b) अब, आवेश 2×10^{-9} C को अनंत से बिंदु P तक लाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। क्या उत्तर जिस पथ के अनुदिश आवेश को लाया गया है उस पर निर्भर करता है?

हल

(a) $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{Q}{r} = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2\ C^{-2}} \times \dfrac{4 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}}{0.09\,\mathrm{m}}$

$= 4 \times 10^4$ V

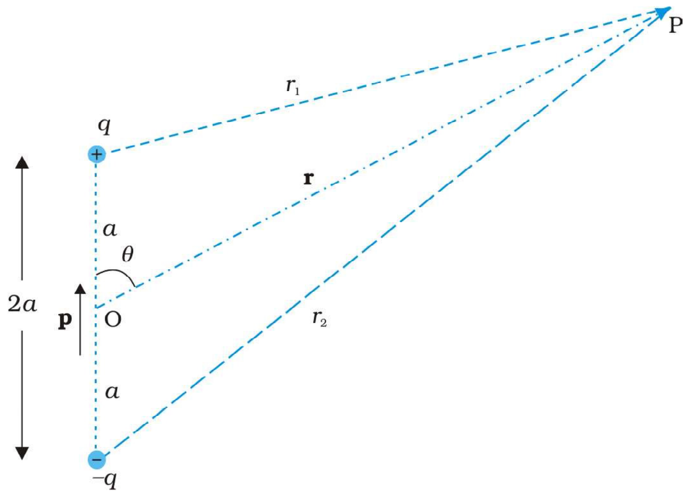
(b) $W = qV = 2 \times 10^{-9}\mathrm{C} \times 4 \times 10^4\,\mathrm{V}$

$= 8 \times 10^{-5}$ J

नहीं, कार्य पथ पर निर्भर नहीं होगा। कोई भी यादृच्छिक अत्यल्प पथ दो लंबवत विस्थापनों में वियोजित किया जा सकता है : एक **r** के अनुदिश तथा दूसरा **r** के लंबवत। बाद के प्रकरण के तदनुरूपी किया गया कार्य शून्य होगा।

2.4 वैद्युत द्विध्रुव के कारण विभव

जैसा कि हम पिछले अध्याय में जान ही चुके हैं कि वैद्युत द्विध्रुव दो बिंदु आवेशों q तथा $-q$ से मिलकर बनता है तथा इन आवेशों के बीच (लघु) पृथकन $2a$ होता है। इसका कुल आवेश शून्य होता है तथा यह द्विध्रुव सदिश **p** जिसका परिमाण $q \times 2a$ तथा दिशा $-q$ से q के अनुदिश होती है, के अभिलाक्षणिक गुण द्वारा प्रकट किया जाता है (चित्र 2.5)। हमने यह भी देखा कि किसी बिंदु पर वैद्युत द्विध्रुव का स्थिति सदिश **r** सहित विद्युत क्षेत्र मात्र r के परिमाण पर ही निर्भर नहीं



चित्र 2.5 द्विध्रुव के कारण विभव के परिकलन में सम्मिलित राशियाँ।

करता वरन् **r** तथा **p** के बीच के कोण पर भी निर्भर करता है। साथ ही, वैद्युत क्षेत्र की तीव्रता, अधिक दूरियों पर, $1/r^2$ के अनुसार नहीं घटती (जो एकल आवेश के कारण विद्युत क्षेत्र के लिए प्ररूपी है) वरन् $1/r^3$ के अनुसार घटती है। यहाँ हम किसी द्विध्रुव के कारण वैद्युत विभव का निर्धारण करेंगे तथा इसकी तुलना एक आवेश के कारण विभव से करेंगे।

पहले की ही भांति, हम द्विध्रुव के केंद्र को मूल बिंदु पर रखते हैं। अब हम यह जानते हैं कि विद्युत क्षेत्र अध्यारोपण सिद्धांत का पालन करते हैं। चूँकि विभव विद्युत क्षेत्र द्वारा किए गए कार्य से संबंधित है, स्थिरवैद्युत विभव भी अध्यारोपण सिद्धांत का पालन करता है। इस प्रकार किसी वैद्युत द्विध्रुव के कारण विभव आवेशों q तथा $-q$ के कारण विभवों का योग होता है।

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) \quad (2.9)$$

यहाँ r_1 तथा r_2 बिंदु P की क्रमशः q तथा $-q$ से दूरियाँ हैं। अब, ज्यामिति द्वारा

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta$$

$$r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta \quad (2.10)$$

हम r को a की तुलना में अत्यधिक बड़ा ($r >> a$) मानते हैं तथा केवल a/r के प्रथम कोटि के पदों को ही सम्मिलित करते हैं :

$$r_1^2 = r^2\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r} + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\cong r^2\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \quad (2.11)$$

इसी प्रकार,

$$r_2^2 \cong r^2\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right) \quad (2.12)$$

द्विपद समीकरण का उपयोग करके a/r के प्रथम कोटि के पदों को सम्मिलित करने पर

$$\frac{1}{r_1} \cong \frac{1}{r}\left(1 - \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\theta\right) \quad [2.13(a)]$$

$$\frac{1}{r_2} \cong \frac{1}{r}\left(1 + \frac{2a\cos\theta}{r}\right)^{-1/2} \cong \frac{1}{r}\left(1 - \frac{a}{r}\cos\theta\right) \quad [2.13(b)]$$

समीकरणों (2.9) तथा (2.13) तथा $p = 2qa$ का उपयोग करने पर,

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{2a\cos\theta}{r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} \quad (2.14)$$

अब, $P\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}$

यहाँ $\hat{\mathbf{r}}$ स्थिति सदिश **OP** के अनुदिश एकांक सदिश है।

तब किसी द्विध्रुव का वैद्युत विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{r}}}{r^2}; \qquad (r >> a) \tag{2.15}$$

जैसा कि संकेत दिया गया है, समीकरण (2.15) केवल उन दूरियों के लिए जो द्विध्रुव के आकार की तुलना में अत्यधिक बड़ी हैं, जिसके कारण a/r के उच्च कोटि के पदों की नगण्य मानकर उपेक्षा कर दी गई है, ही सन्निकटत: सत्य है। परंतु, किसी बिंदु द्विध्रुव **p** के लिए मूल बिंदु पर समीकरण (2.15) यथार्थ है।

समीकरण (2.15) से, द्विध्रुव अक्ष ($\theta = 0, \pi$) पर विभव

$$V = \pm\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{p}{r^2} \tag{2.16}$$

(धनात्मक चिह्न $\theta = 0$ के लिए तथा ऋणात्मक चिह्न $\theta = \pi$ के लिए है)। निरक्षीय (विषुवत) समतल ($\theta = \pi/2$) में विभव शून्य है।

किसी द्विध्रुव के वैद्युत विभव तथा एकल आवेश के वैद्युत विभव के तुलनात्मक महत्वपूर्ण लक्षण समीकरणों (2.8) तथा (2.15) से स्पष्ट हैं :

(i) किसी वैद्युत द्विध्रुव के कारण विभव केवल दूरी r पर ही निर्भर नहीं करता, वरन् स्थिति सदिश **r** तथा द्विध्रुव आघूर्ण **p** के बीच के कोण पर भी निर्भर करता है। (तथापि यह **p** के परित: अक्षत: सममित होता है। अत: यदि आप **p** के परित: स्थिति सदिश **r** को, कोण θ को नियत रखते हुए, घूर्णन कराएँ, तो बिंदु P के सदृश घूर्णन के फलस्वरूप बने शंकु पर बिंदुओं पर वही विभव होगा जो बिंदु P पर है।)

(ii) अधिक दूरियों पर वैद्युत द्विध्रुव के कारण विभव $1/r^2$ के अनुपात में घटता है, न कि $1/r$ के अनुपात में, जो कि एकल आवेश के कारण विभव का एक अभिलाक्षणिक गुण है। (इसके लिए आप चित्र 2.4 में दर्शाए r व $1/r^2$ तथा $1/r$ व r के बीच वक्रों का उल्लेख कर सकते हैं जिन्हें किसी अन्य संदर्भ में खींचा गया है)।

2.5 आवेशों के निकाय के कारण विभव

किसी आवेशों $q_1, q_2, \ldots, q_n$ के ऐसे निकाय पर विचार कीजिए जिनके किसी मूल बिंदु के सापेक्ष स्थिति सदिश क्रमश: $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ हैं (चित्र 2.6)। बिंदु P पर आवेश q_1 के कारण विभव

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_{1P}}$$

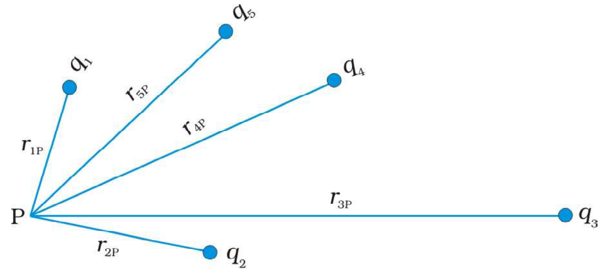
यहाँ r_{1P} बिंदु P तथा आवेश q_1 के बीच की दूरी है।

इसी प्रकार बिंदु P पर आवेश q_2 के कारण विभव V_2 तथा आवेश q_3 के कारण विभव V_3 को भी व्यक्त कर सकते हैं

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_2}{r_{2P}}, \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_3}{r_{3P}}$$

यहाँ r_{2P} तथा r_{3P} बिंदु P की क्रमश: q_2 तथा q_3 से दूरियाँ हैं। इसी प्रकार हम अन्य आवेशों के कारण बिंदु P पर विभव व्यक्त कर सकते हैं। अध्यारोपण सिद्धांत के अनुसार, समस्त आवेश विन्यास के कारण बिंदु P पर विभव V, विन्यास के व्यष्टिगत आवेशों के विभवों के बीजगणितीय योग के बराबर होता है :

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n \tag{2.17}$$



चित्र 2.6 किसी बिंदु पर आवेशों के निकाय के कारण विभव उस बिंदु पर व्यष्टिगत आवेशों के कारण विभवों के योग के बराबर होता है।

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}} + ... + \frac{q_n}{r_{nP}}\right) \tag{2.18}$$

यदि हमारे पास आवेश घनत्व ρ के अभिलाक्षणिक गुण का कोई संतत आवेश वितरण है तो पहले की भाँति उसे हम Δv साइज़ के $\rho\Delta v$ आवेशयुक्त लघु आयतन अवयवों में विभाजित कर सकते हैं। तब हम प्रत्येक आयतन अवयव के कारण विभव निर्धारित करके और समस्त योगदानों का योग करके (सही शब्दों में, समाकलित करके) समस्त आवेश वितरण के कारण विभव ज्ञात कर सकते हैं।

अध्याय 1 में हम अध्ययन कर चुके हैं कि किसी एकसमान आवेशित गोलीय खोल के कारण किसी बाहर स्थित बिंदु के लिए विद्युत क्षेत्र इस प्रकार होता है, मानो खोल का समस्त आवेश उसके केंद्र पर संकेंद्रित हो। अतः खोल के बाहर स्थित किसी बिंदु पर आवेशित कोश के कारण विभव

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r} \quad (r \geq R) \tag{2.19(a)}$$

यहाँ q गोलीय खोल पर समस्त आवेश तथा R गोलीय कोश की त्रिज्या है। कोश के भीतर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है। इससे यह ध्वनित होता है (देखिए अनुभाग 2.6) कि खोल के भीतर विभव नियत रहता है (क्योंकि खोल के भीतर आवेश को गति कराने से कोई कार्य नहीं होता), और, इसीलिए यह खोल के पृष्ठ के विभव के समान होता है।

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{R} \tag{2.19(b)}$$

उदाहरण 2.2 3×10^{-8}C तथा -2×10^{-8}C के दो आवेश एक-दूसरे से 15 cm दूरी पर रखे हैं। इन दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा के किस बिंदु पर वैद्युत विभव शून्य है? अनंत पर वैद्युत विभव शून्य लीजिए।

हल मान लीजिए धनावेश मूल बिंदु O पर रखा है। दोनों आवेशों को मिलाने वाली रेखा x-अक्ष है; तथा ऋणावेश मूल बिंदु के दाईं ओर रखा है (चित्र 2.7 देखिए)।

चित्र 2.7

मान लीजिए x-अक्ष पर वह वांछित बिंदु P है जहाँ वैद्युत विभव शून्य है। यदि बिंदु P का x-निर्देशांक x है, तो स्पष्ट रूप से x धनात्मक होना चाहिए। ($x < 0$ के लिए यह संभव नहीं हो सकता कि दो आवेशों के कारण वैद्युत विभव जुड़कर शून्य हो जाए।) यदि x मूल बिंदु O तथा A के बीच कहीं स्थित है, तो

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3\times10^{-8}}{x\times10^{-2}} - \frac{2\times10^{-8}}{(15-x)\times10^{-2}}\right] = 0$$

यहाँ x को cm में लिया गया है। अर्थात

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{15-x} = 0$$

अथवा $x = 9$ cm

यदि बिंदु x विस्तारित रेखा OA पर है, तो वांछित शर्त के अनुसार

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{x-15} = 0$$

उदाहरण 2.2

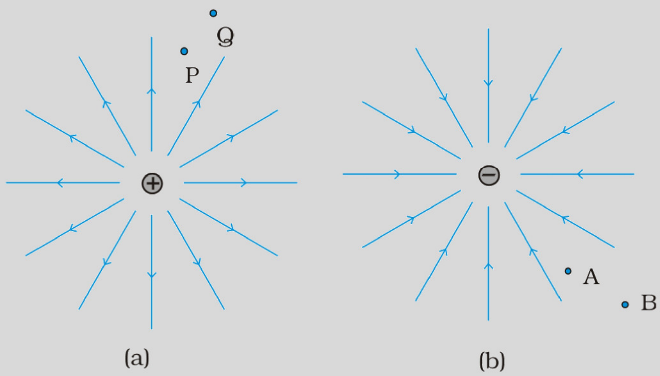
अथवा

$x = 45$ cm

इस प्रकार, धनावेश से 9 cm तथा 45 cm दूर ऋणावेश की ओर वैद्युत विभव शून्य है। ध्यान दीजिए, यहाँ परिकलनों के लिए वांछित सूत्र को अनंत पर वैद्युत विभव शून्य मानकर ही व्युत्पन्न किया गया था।

उदाहरण 2.2

उदाहरण 2.3 (a) तथा (b) में क्रमश: एकल धन तथा ऋण आवेशों की क्षेत्र रेखाएँ दर्शायी गई हैं



चित्र 2.8

(a) विभवांतर $V_P - V_Q$; $V_B - V_A$ के चिह्न बताइए।

(b) बिंदु Q और P; A और B के बीच एक छोटे से ऋण आवेश की स्थितिज ऊर्जा के अंतर का चिह्न बताइए।

(c) Q से P तक एक छोटे धनावेश को ले जाने में क्षेत्र द्वारा किए गए कार्य का चिह्न बताइए।

(d) B से A तक एक छोटे से ऋण आवेश को ले जाने के लिए बाह्य साधन द्वारा किए गए कार्य का चिह्न बताइए।

(e) B से A तक जाने में क्या एक छोटे से ऋणावेश की गतिज ऊर्जा बढ़ेगी या घटेगी?

हल

(a) चूँकि $V \propto \frac{1}{r}$, $V_P > V_Q$; इस प्रकार, $(V_P - V_Q)$ धनात्मक है। तथा V_A से V_B कम ऋणात्मक है। इसलिए, $V_B > V_A$ अथवा $(V_B - V_A)$ धनात्मक है।

(b) कोई लघु ऋणावेश धनावेश की ओर आकर्षित होगा। ऋणावेश स्थितिज उच्च ऊर्जा से निम्न स्थितिज ऊर्जा की ओर गति करते हैं। अत: Q और P के बीच किसी लघु ऋणावेश की स्थितिज ऊर्जा के अंतर का चिह्न धनात्मक है।

इसी प्रकार, $(\text{स्थितिज ऊर्जा})_A > (\text{स्थितिज ऊर्जा})_B$ है। अत: स्थितिज ऊर्जा अंतर का चिह्न धनात्मक है।

(c) किसी लघु धनावेश को Q से P तक ले जाने में बाह्य एजेंसी को विद्युत क्षेत्र के विरुद्ध कार्य करना होता है। अत:, विद्युत क्षेत्र द्वारा किया गया कार्य ऋणात्मक है।

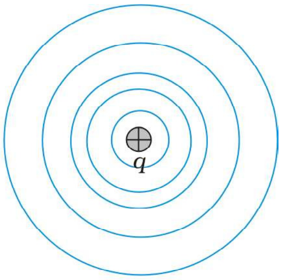
(d) किसी लघु ऋणावेश को B से A तक ले जाने में बाह्य एजेंसी को कार्य करना होता है जो धनात्मक है।

(e) ऋणावेश पर प्रतिकर्षी बल लगने के कारण वेग घटता है अत: B से A तक जाने में गतिज ऊर्जा घट जाती है।

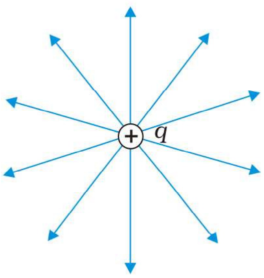
उदाहरण 2.3

भौतिकी

वैद्युत विभव, समविभव पृष्ठ
http://video.mit.edu/watch/4-electrostatic-potential-electric-energy-ev-conservative-field-equipotential-surfaces-12584/



(a)



(b)

चित्र 2.9 किसी एकल आवेश q के लिए (a) समविभव पृष्ठ संकेंद्री गोलीय पृष्ठ होते हैं जिनके केंद्र पर आवेश स्थित होता है, तथा (b) यदि $q > 0$ है, तो क्षेत्र रेखाएँ आवेश से आरंभ होने वाली अरीय रेखाएँ होती हैं।

2.6 समविभव पृष्ठ

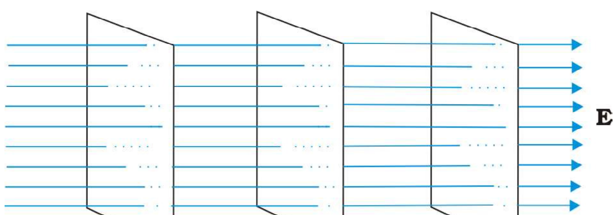
कोई समविभव पृष्ठ ऐसा पृष्ठ होता है जिसके पृष्ठ के हर बिंदु पर विभव नियत रहता है। किसी एकल आवेश q के लिए, समीकरण (2.8) द्वारा वैद्युत विभव–

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q}{r}$$

इससे यह प्रकट होता है कि यदि r नियत है तो V नियत रहता है। इस प्रकार किसी एकल आवेश के लिए समविभव पृष्ठ संकेंद्री गोले होते हैं जिनके केंद्र पर वह आवेश स्थित होता है।

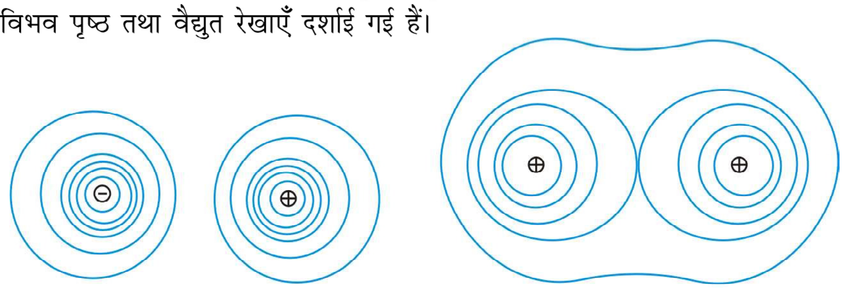
अब किसी एकल आवेश q के लिए विद्युत क्षेत्र रेखाएँ आवेश से आरंभ होने वाली अथवा उस आवेश पर समाप्त होने वाली (यह निर्भर करता है कि आवेश q धनात्मक है अथवा ऋणात्मक) अरीय रेखाएँ होती हैं। स्पष्ट है, किसी समविभव पृष्ठ के किसी भी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र सदैव ही उस बिंदु पर अभिलंबवत होता है। यह व्यापक रूप से सत्य है : *किसी भी आवेश विन्यास के लिए किसी भी बिंदु से गुजरने वाला समविभव पृष्ठ उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र के अभिलंबवत होता है।* इस प्रकथन की व्युत्पत्ति सरल है।

यदि विद्युत क्षेत्र समविभव पृष्ठ के अभिलंबवत नहीं है; तो इस क्षेत्र का पृष्ठ के अनुदिश कोई शून्येतर घटक होगा। किसी एकांक परीक्षण आवेश का क्षेत्र के इस घटक की विरुद्ध दिशा में गति कराने के लिए कुछ कार्य करना आवश्यक होगा। परंतु यह किसी समविभव पृष्ठ की परिभाषा के विरुद्ध है : समविभव पृष्ठ के किन्हीं भी दो बिंदुओं के बीच कोई विभवांतर नहीं होता, तथा इस पृष्ठ पर किसी परीक्षण आवेश को गति कराने के लिए कोई कार्य करना आवश्यक नहीं होता। अतः किसी समविभव पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर विद्युत क्षेत्र पृष्ठ के अभिलंबवत होता है। समविभव पृष्ठ किसी आवेश विन्यास के चारों ओर की विद्युत क्षेत्र रेखाओं के दृश्यों के वैकल्पिक दृश्य प्रस्तुत करते हैं।



चित्र 2.10 किसी एकसमान विद्युत क्षेत्र के लिए समविभव पृष्ठ।

किसी अक्ष के अनुदिश, मान लीजिए x-अक्ष के अनुदिश किसी एकसमान विद्युत क्षेत्र **E** के लिए, समविभव पृष्ठ x-अक्ष के अभिलंबवत, अर्थात y-z तल के समांतर तल होते हैं (चित्र 2.10)। चित्र 2.11 में (a) किसी वैद्युत द्विध्रुव तथा (b) में दो सर्वसम धनावेशों के कारण समविभव पृष्ठ तथा वैद्युत रेखाएँ दर्शाई गई हैं।



(a) (b)

चित्र 2.11(a) किसी वैद्युत द्विध्रुव तथा
(b) दो सर्वसम धनावेशों के क्षेत्र के लिए कुछ समविभव पृष्ठ।

2.6.1 विद्युत क्षेत्र तथा वैद्युत विभव में संबंध

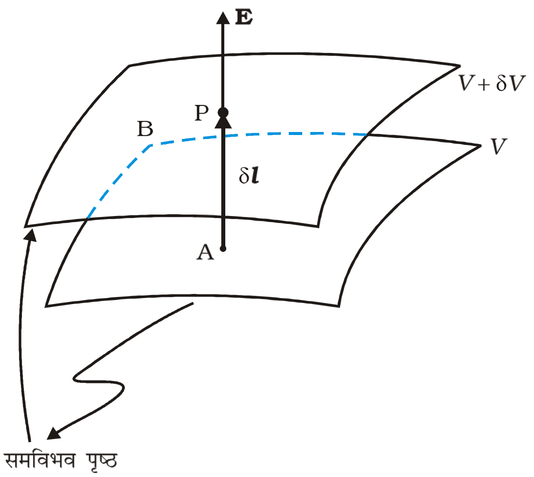
एक-दूसरे के पास रखे दो समविभव पृष्ठों A तथा B (चित्र 2.12) जिनके विभवों के मान क्रमश: V तथा $V + \delta V$ हैं, यहाँ δV विद्युत क्षेत्र **E** की दिशा में V में परिवर्तन है। मान लीजिए पृष्ठ B पर कोई बिंदु P है। मान लीजिए पृष्ठ A की बिंदु P से लंबवत दूरी δl है। यह भी मानिए कि विद्युत क्षेत्र के विरुद्ध कोई एकांक धनावेश इस लंब के अनुदिश पृष्ठ B से पृष्ठ A पर ले जाया जाता है। इस प्रक्रिया में किया गया कार्य $|\mathbf{E}|\,\delta l$ है।

यह कार्य विभवांतर $V_A - V_B$ के बराबर है।

इस प्रकार

$$|\mathbf{E}|\,\delta l = V - (V + \delta V) = -\delta V$$

अर्थात $$|\mathbf{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} \qquad (2.20)$$



चित्र 2.12 विभव से क्षेत्र पर।

स्पष्ट है कि δV ऋणात्मक है, $\delta V = -|\delta V|$ हम समीकरण (2.20) को दुबारा इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$|\mathbf{E}| = -\frac{\delta V}{\delta l} = +\frac{|\delta V|}{\delta l} \qquad (2.21)$$

इस प्रकार हम विद्युत क्षेत्र तथा वैद्युत विभव से संबंधित दो महत्वपूर्ण निष्कर्षों पर पहुँचते हैं –

(i) *विद्युत क्षेत्र उस दिशा में होता है जहाँ विभव में सर्वाधिक ह्रास होता है।*

(ii) *किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण, उस बिंदु पर समविभव पृष्ठ के अभिलंबवत विभव के परिमाण में प्रति एकांक विस्थापन परिवर्तन द्वारा व्यक्त किया जाता है।*

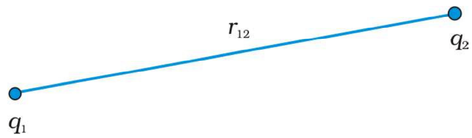
2.7 आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

पहले हम एक सरल प्रकरण पर विचार करते हैं जिसमें किसी मूल बिंदु के सापेक्ष $\mathbf{r}_1$ तथा $\mathbf{r}_2$ स्थिति सदिशों वाले दो आवेश q_1 तथा q_2 हैं। आइए इस विन्यास के निर्माण में किए गए कार्य (बाह्य) का परिकलन करें। इसका अर्थ यह है कि पहले आरंभ में हम दोनों आवेशों q_1 तथा q_2 को अनंत पर मानें तथा बाद में बाह्य एजेंसी द्वारा उन्हें इनकी वर्तमान स्थितियों तक लाने में किए गए कार्य का परिकलन करें। मान लीजिए, हम पहले आवेश q_1 को अनंत से बिंदु $\mathbf{r}_1$ तक लाते हैं। चूँकि इस स्थिति में कोई बाह्य क्षेत्र नहीं है, जिसके विरुद्ध कार्य करने की आवश्यकता पड़े, अत: q_1 को अनंत से $\mathbf{r}_1$ तक लाने में किया गया कार्य शून्य है। यह आवेश दिक्स्थान में एक विभव V_1 उत्पन्न करता है

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1}{r_{1P}}$$

यहाँ r_{1P} दिक्स्थान के किसी बिंदु P की q_1 की स्थिति से दूरी है। विभव की परिभाषा से, आवेश q_2 को अनंत से बिंदु $\mathbf{r}_2$ तक लाने में किया गया कार्य $\mathbf{r}_2$ पर q_1 द्वारा विभव का q_2 गुना होता है–

$$q_2 \text{ पर किया गया कार्य } = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



चित्र 2.13 आवेशों q_1 तथा q_2 के निकाय की स्थितिज ऊर्जा आवेशों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती तथा उनके बीच की दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

यहाँ r_{12} बिंदु 1 तथा 2 के बीच की दूरी है।

चूँकि स्थिरवैद्युत बल संरक्षी है, यह कार्य निकाय की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। अतः दो आवेशों q_1 तथा q_2 के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.22}$$

स्पष्ट है, कि यदि पहले q_2 को उसकी वर्तमान स्थिति पर लाया जाता और तत्पश्चात q_1 को लाया जाता, तो भी स्थितिज ऊर्जा U इतनी ही होती। अधिक व्यापक रूप में, समीकरण (2.22) में दर्शाया गया स्थितिज ऊर्जा के लिए व्यंजक, सदैव ही अपरिवर्तित रहता है, चाहे निर्दिष्ट स्थानों पर आवेशों को किसी भी प्रकार से लाया जाए। यह स्थिरवैद्युत बलों के लिए कार्य की पथ-स्वतंत्रता के कारण होता है।

समीकरण (2.22) q_1 तथा q_2 के किसी भी चिह्न के लिए सत्य है। यदि $q_1 q_2 > 0$ है, तो स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है। यह अपेक्षित भी है, क्योंकि सजातीय आवेशों ($q_1 q_2 > 0$) के लिए, स्थिरवैद्युत बल प्रतिकर्षी होता है तथा आवेशों को अनंत से किसी परिमित दूरी तक इस प्रतिकर्षी बल के विरुद्ध लाने में धनात्मक कार्य करना पड़ता है। इसके विपरीत, विजातीय आवेशों ($q_1 q_2 < 0$) के लिए स्थिरवैद्युत बल आकर्षी होता है। इस प्रकरण में, आवेशों को उनकी दी गई स्थितियों से अनंत तक इस आकर्षी बल के विरुद्ध ले जाने में धनात्मक कार्य करना पड़ता है। दूसरे शब्दों में, उत्क्रमित पथ (अनंत से वर्तमान स्थितियों तक) के लिए कार्य के ऋणात्मक परिमाण की आवश्यकता होती है जिसके कारण स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होती है।

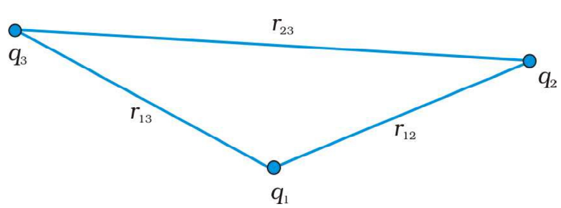
समीकरण (2.22) को आसानी से आवेशों के कितनी भी संख्या के निकाय के लिए व्यापक बनाया जा सकता है। आइए, अब हम तीन आवेशों q_1, q_2 तथा q_3 जो क्रमशः $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ तथा $\mathbf{r}_3$ पर स्थित हैं, के निकाय की स्थितिज ऊर्जा परिकलित करें। पहले q_1 को अनंत से $\mathbf{r}_1$ तक लाने में कोई कार्य नहीं होता। तत्पश्चात हम q_2 को अनंत से $\mathbf{r}_2$ तक लाते हैं। पहले की ही भाँति इस चरण में किया गया कार्य

$$q_2 V_1(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1 q_2}{r_{12}} \tag{2.23}$$

आवेश q_1 तथा q_2 अपने चारों ओर विभव उत्पन्न करते हैं, किसी बिंदु P पर यह विभव

$$V_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1}{r_{1P}} + \frac{q_2}{r_{2P}}\right) \tag{2.24}$$

आवेश q_3 को अनंत से बिंदु $\mathbf{r}_3$ तक लाने में किया गया कार्य $\mathbf{r}_3$ पर $V_{1,2}$ का q_3 गुना होता है।



चित्र 2.14 चित्र में दिए गए संकेतों सहित समीकरण (2.26) में तीन आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा दी गई है।

$$\text{अतः} \quad q_3 V_{1,2}(\mathbf{r}_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \tag{2.25}$$

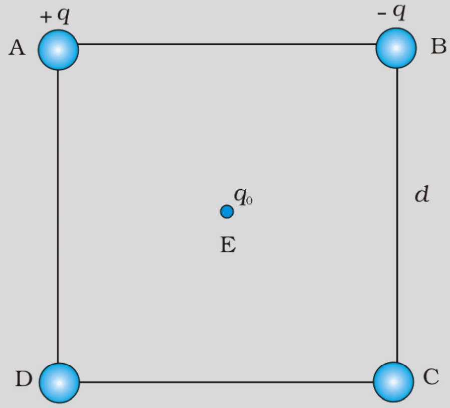
आवेशों को उनकी दी गई स्थितियों पर एकत्र करने में किया गया कुल कार्य विभिन्न चरणों [समीकरण (2.23) तथा समीकरण (2.25)] में किए गए कार्यों का योग करने पर प्राप्त होता है।

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}\right) \tag{2.26}$$

यहाँ फिर, स्थिरवैद्युत बल की संरक्षी प्रकृति के कारण (अथवा तुल्य रूप में, कार्य की पथ-स्वतंत्रता) स्थितिज ऊर्जा U को अंतिम व्यंजक, समीकरण (2.26), विन्यास को किस प्रकार संयोजित किया गया है, उसके क्रम पर निर्भर नहीं करता। *स्थितिज ऊर्जा विन्यास की*

वर्तमान अवस्था का अभिलाक्षणिक गुण होता है, यह इस बात पर निर्भर नहीं करता कि इस विन्यास को किस प्रकार प्राप्त किया गया है।

उदाहरण 2.4 चित्र 2.15 में दर्शाए अनुसार चार आवेश भुजा d वाले किसी वर्ग ABCD के शीर्षों पर व्यवस्थित किए गए हैं। (a) इस व्यवस्था को एक साथ बनाने में किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। (b) कोई आवेश q_0 वर्ग के केंद्र E पर लाया जाता है तथा चारों आवेश अपने शीर्षों पर दृढ़ रहते हैं। ऐसा करने के लिए कितना अतिरिक्त कार्य करना पड़ता है?



चित्र 2.15

हल

(a) चूँकि किया गया कार्य आवेशों की अंतिम व्यवस्था पर निर्भर करता है, उन्हें किस प्रकार एक साथ लाया गया है, पर निर्भर नहीं करता, हम आवेशों को A, B, C, तथा D पर रखने के एक ढंग के लिए आवश्यक कार्य का परिकलन करेंगे। मान लीजिए पहले आवेश $+q$ को A पर लाया जाता है, तत्पश्चात आवेशों $-q$, $+q$ तथा $-q$ को क्रमश: B, C तथा D पर लाया जाता है। किए गए कुल कार्यों का परिकलन निम्नलिखित चरणों में किया जा सकता है :

(i) आवेश $+q$ को A पर लाने में किया गया कार्य जब कहीं भी कोई आवेश नहीं है: यह शून्य है।

(ii) आवेश $-q$ को B पर लाने में किया गया कार्य जब $+q$ शीर्ष A पर है। यह (B पर आवेश) × (A पर आवेश $+q$ के कारण बिंदु B पर स्थिरवैद्युत विभव)

$$= -q \times \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o d}\right) = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o d}$$

(iii) आवेश $+q$ को C पर लाने में किया गया कार्य जब $+q$ शीर्ष A पर तथा $-q$ शीर्ष B पर है। यह (C पर आवेश) × (A तथा B पर आवेशों के कारण C पर विभव)

$$= +q\left(\frac{+q}{4\pi\varepsilon_o d\sqrt{2}} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o d}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o d}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(iv) आवेश $-q$ को D पर लाने में किया गया कार्य जब $+q$ शीर्ष A पर, $-q$ शीर्ष B पर तथा $+q$ शीर्ष C पर हैं। यह (D पर आवेश) × (A, B तथा C पर आवेशों के कारण D पर विभव)

$$= -q\left(\frac{+q}{4\pi\varepsilon_o d} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o d\sqrt{2}} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_o d}\right)$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o d}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

उदाहरण 2.4

चारों चरणों (i), (ii), (iii) एवं (iv) के कार्यों को जोड़ने पर, आवश्यक कुल कार्य

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o d}\left\{(0)+(1)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$$= \frac{-q^2}{4\pi\varepsilon_o d}\left(4-\sqrt{2}\right)$$

यह कार्य केवल आवेशों की व्यवस्था पर निर्भर करता है, इस बात पर निर्भर नहीं करता कि इन्हें कैसे व्यवस्थित किया गया है। परिभाषा के अनुसार यह आवेशों की कुल स्थिरवैद्युत ऊर्जा है।

(विद्यार्थी अपनी इच्छानुसार आवेशों को किसी भी अन्य क्रम में लेकर इसी कार्य/ऊर्जा को परिकलित करने का प्रयास कर सकते हैं और यह देखकर अपने को संतुष्ट कर सकते हैं कि हर प्रकरण में ऊर्जा समान रहती है।)

(b) जबकि चारों आवेश A, B, C तथा D पर हैं, आवेश q_0 को बिंदु E पर लाने में किया गया अतिरिक्त कार्य q_0 × (A, B, C तथा D पर हैं आवेशों के कारण E पर स्थिरवैद्युत विभव) के बराबर है। स्पष्ट रूप से बिंदु E पर स्थिरवैद्युत विभव शून्य है, क्योंकि A तथा C पर आवेशों के कारण विभव B तथा D द्वारा निरस्त हो जाते हैं। अत: बिंदु E तक किसी भी आवेश को लाने में कोई कार्य करना नहीं पड़ता है।

2.8 बाह्य क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा

2.8.1 एकल आवेश की स्थितिज ऊर्जा

अनुभाग 2.7 में विद्युत क्षेत्र के स्रोत का विशेष उल्लेख किया गया–आवेश तथा उनकी स्थितियाँ–तथा उन आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा निर्धारित की गई। इस अनुभाग में हम इससे संबंधित परंतु भिन्न प्रश्न पूछते हैं। किसी दिए गए क्षेत्र में किसी आवेश q की स्थितिज ऊर्जा क्या होती है? वास्तव में, यह प्रश्न आरंभ बिंदु था जो हमें स्थिरवैद्युत विभव की धारणा की ओर ले गया था (देखिए अनुभाग 2.1 तथा 2.2)। परंतु यही प्रश्न हम फिर दुबारा यह स्पष्ट करने के लिए पूछ रहे हैं कि किस रूप में यह अनुभाग 2.7 में की गई चर्चा से भिन्न है।

यहाँ प्रमुख अंतर यह है कि अब हम यहाँ पर किसी *बाह्य क्षेत्र* में आवेश (अथवा आवेशों) की स्थितिज ऊर्जा के विषय में चर्चा कर रहे हैं। इसमें बाह्य क्षेत्र **E** उन दिए गए आवेशों द्वारा उत्पन्न नहीं किया जाता जिनकी स्थितिज ऊर्जा का हम परिकलन करना चाहते हैं। विद्युत क्षेत्र **E** उस स्रोत द्वारा उत्पन्न किया जाता है जो दिए गए आवेश (आवेशों) की दृष्टि से बाह्य होता है। बाह्य स्रोत ज्ञात हो सकता है परंतु प्राय: ये स्रोत अज्ञात अथवा अनिर्दिष्ट होते हैं, जो कुछ भी यहाँ निर्दिष्ट होता है वह है विद्युत क्षेत्र **E** अथवा बाह्य स्रोतों के कारण स्थिरवैद्युत विभव V। हम यह मानते हैं कि आवेश q बाह्य क्षेत्र उत्पन्न करने वाले स्रोतों को सार्थक रूप से प्रभावित नहीं करता। यदि q अत्यधिक छोटा है, तो यह सत्य है अथवा कुछ अनिर्दिष्ट बलों के प्रभाव में बाह्य स्रोतों को दृढ़ रखा जा सकता है। यदि q परिमित है तो भी इसके बाह्य स्रोतों पर प्रभाव की उन परिस्थितियों में उपेक्षा की जा सकती है, जिनमें बहुत दूर अनंत पर स्थित अत्यधिक प्रबल स्रोत हमारी रुचि के क्षेत्र में कोई परिमित क्षेत्र **E** उत्पन्न करता है। फिर ध्यान दीजिए, हमारी रुचि किसी बाह्य क्षेत्र में, दिए गए आवेश q (तत्पश्चात आवेशों के किसी निकाय) की स्थितिज ऊर्जा निर्धारित करने में है; हमें बाह्य विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करने वाले स्रोत की स्थितिज ऊर्जा में कोई रुचि नहीं है।

बाह्य विद्युत क्षेत्र **E** तथा तदनुरूपी बाह्य विभव V का मान एक बिंदु से दूसरे बिंदु पर जाने में परिवर्तित हो सकता है। परिभाषा के अनुसार, किसी बिंदु P पर विभव V एकांक धनावेश को अनंत से उस बिंदु P तक लाने में किए गए कार्य के बराबर होता है (हम निरंतर ही अनंत पर विभव

को शून्य मानते रहेंगे)। अतः किसी आवेश q को अनंत से बाह्य क्षेत्र के किसी बिंदु P तक लाने में किया गया कार्य $q\,V$ होता है। यह कार्य आवेश q में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। यदि बिंदु P का किसी मूल बिंदु के सापेक्ष कोई स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ है, तो हम यह लिख सकते हैं कि:

किसी बाह्य क्षेत्र में आवेश q की $\mathbf{r}$ पर स्थितिज ऊर्जा

$$= qV(\mathbf{r}) \tag{2.27}$$

यहाँ $V(\mathbf{r})$ बिंदु $\mathbf{r}$ पर बाह्य विभव है।

इस प्रकार, यदि आवेश $q = e = 1.6\times10^{-19}$ C का कोई इलेक्ट्रॉन किसी विभवान्तर ΔV=1 वोल्ट द्वारा त्वरित किया जाता है, तो वह ऊर्जा $q\Delta V = 1.6\times10^{-19}$J अर्जित करेगा। ऊर्जा के इस मात्रक को 1 *इलेक्ट्रॉन वोल्ट,* अर्थात 1 eV=1.6×10^{-19}J के रूप में परिभाषित करते हैं। eV पर आधारित मात्रकों का सर्वाधिक उपयोग आण्विक, नाभिकीय तथा कण भौतिकी में किया जाता है, (1 keV = 10^3eV = 1.6×10^{-16}J, 1 MeV = 10^6eV = 1.6×10^{-13}J, 1 GeV = 10^9eV = 1.6×10^{-10}J तथा 1 TeV = 10^{12}eV = 1.6×10^{-7}J) [इसे भौतिकी भाग I कक्षा 11 पृष्ठ 119 सारणी 6.1 में पहले ही परिभाषित किया जा चुका है।]

2.8.2 किसी बाह्य क्षेत्र में दो आवेशों के निकाय की स्थितिज ऊर्जा

अब हम यह पूछते हैं : किसी बाह्य क्षेत्र में क्रमशः $\mathbf{r}_1$ तथा $\mathbf{r}_2$ पर स्थित दो आवेशों q_1 तथा q_2 की स्थितिज ऊर्जा क्या होती है? इस विन्यास का निर्माण करने में किए गए कार्य का परिकलन करने के लिए आइए यह कल्पना करें कि पहले हम आवेश q_1 को अनंत से $\mathbf{r}_1$ तक लाते हैं। समीकरण (2.27) के अनुसार, इस चरण में किया गया कार्य $q_1\,V(\mathbf{r}_1)$ है। अब हम आवेश q_2 को $\mathbf{r}_2$ तक लाने में किए जाने वाले कार्य पर विचार करते हैं। इस चरण में केवल बाह्य क्षेत्र $\mathbf{E}$ के विरुद्ध ही कार्य नहीं होता, वरन् q_1 के कारण क्षेत्र के विरुद्ध भी कार्य करना होता है। अतः

q_2 पर बाह्य क्षेत्र के विरुद्ध किया गया कार्य

$$= q_2\,V(\mathbf{r}_2)$$

q_2 पर q_1 के कारण क्षेत्र के विरुद्ध किया गया कार्य

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}}$$

यहाँ r_{12} आवेशों q_1 तथा q_2 के बीच की दूरी है। ऊपर हमने समीकरण (2.27) तथा (2.22) का उपयोग किया है। क्षेत्रों के लिए अध्यारोपण सिद्धांत द्वारा हम q_2 पर दो क्षेत्रों ($\mathbf{E}$ तथा q_1 के कारण क्षेत्र) के विरुद्ध किए गए कार्यों को जोड़ते हैं। अतः

q_2 को $\mathbf{r}_2$ तक लाने में किया गया कार्य

$$= q_2 V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_o r_{12}} \tag{2.28}$$

इस प्रकार,

निकाय की स्थितिज ऊर्जा

= विन्यास के निर्माण में किया गया कार्य

$$= q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} \tag{2.29}$$

उदाहरण 2.5

(a) दो आवेशों 7 μC तथा –2 μC जो क्रमशः (–9 cm, 0, 0) तथा (9 cm, 0, 0) पर स्थित हैं, के ऐसे निकाय, जिस पर कोई बाह्य क्षेत्र आरोपित नहीं है, की स्थिरवैद्युत स्थितिज की ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

(b) दोनों आवेशों को एक-दूसरे से अनंत दूरी तक पृथक करने के लिए कितने कार्य की आवश्यकता होगी?

उदाहरण 2.5

(c) माना कि अब इस आवेश निकाय को किसी बाह्य विद्युत क्षेत्र $E = A\,(1/r^2)$; $A = 9 \times 10^5\ \text{C m}^{-2}$ में रखा गया है। इस विन्यास की स्थिरवैद्युत ऊर्जा का परिकलन करें।

हल

(a) $U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_1 q_2}{r} = 9 \times 10^9 \times \dfrac{7 \times (-2) \times 10^{-12}}{0.18} = -0.7\ \text{J}$

(b) $W = U_2 - U_1 = 0 - U = 0 - (-0.7) = 0.7\ \text{J}$

(c) दो आवेशों की पारस्परिक अन्योन्य ऊर्जा अपरिवर्तित रहती है। साथ ही यहाँ पर दो आवेशों की बाह्य विद्युत क्षेत्र के साथ अन्योन्य क्रिया की ऊर्जा भी है। अतः हम यह पाते हैं कि

$$q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) = A\frac{7\mu\text{C}}{0.09\text{m}} + A\frac{-2\mu\text{C}}{0.09\text{m}}$$

तथा नेट स्थिरवैद्युत ऊर्जा का मान है

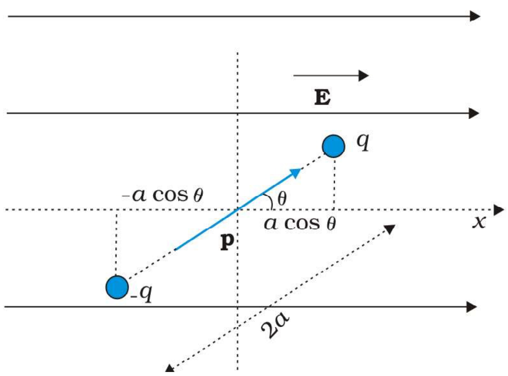
$$q_1 V(\mathbf{r}_1) + q_2 V(\mathbf{r}_2) + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} = A\frac{7\,\mu\text{C}}{0.09\,\text{m}} + A\frac{-2\,\mu\text{C}}{0.09\,\text{m}} - 0.7\,\text{J}$$

$$= 70 - 20 - 0.7 = 49.3\,\text{J}$$

उदाहरण 2.5

2.8.3 बाह्य क्षेत्र में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा

चित्र 2.16 में दर्शाए अनुसार किसी एकसमान विद्युत क्षेत्र **E** में रखे आवेशों $q_1 = +q$ तथा $q_2 = -q$ के द्विध्रुव पर विचार कीजिए।



चित्र 2.16 किसी विद्युत द्विध्रुव की एकसमान बाह्य क्षेत्र में स्थितिज ऊर्जा।

जैसाकि हमने पिछले अध्याय में देखा, एकसमान विद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव किसी नेट बल का अनुभव नहीं करता; परंतु एक बल आघूर्ण का अनुभव करता है जो इस प्रकार है :

$$\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \qquad (2.30)$$

यह इसमें घूर्णन की प्रवृत्ति उत्पन्न करेगा (जब तक **p** तथा **E** एक-दूसरे के समांतर अथवा प्रतिसमांतर नहीं हैं)। मान लीजिए कोई बाह्य बल आघूर्ण $\tau_{\text{बाह्य}}$ इस प्रकार लगाया जाता है कि वह इस बल आघूर्ण को ठीक-ठीक उदासीन कर देता है और इसे कागज़ के तल *बिना किसी कोणीय त्वरण* के अत्यंत सूक्ष्म कोणीय चाल से कोण θ_0 से कोण θ_1 पर घूर्णित कर देता है। इस बाह्य बल आघूर्ण द्वारा किया गया कार्य

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_{\text{बाह्य}}(\theta)d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} pE\sin\theta\, d\theta$$

$$= pE(\cos\theta_0 - \cos\theta_1) \qquad (2.31)$$

यह कार्य निकाय में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित हो जाता है। तब हम स्थितिज ऊर्जा $U(\theta)$ को द्विध्रुव के किसी झुकाव θ से संबद्ध कर सकते हैं। अन्य स्थितिज ऊर्जाओं की भाँति यहाँ हमें उस कोण के चयन की स्वतंत्रता है जिस पर विभव स्थितिज ऊर्जा U शून्य माना जाए। प्राकृतिक चयन के अनुसार $\theta_0 = \pi/2$ लिया जाना चाहिए। (इसका स्पष्टीकरण चर्चा के अंत में दिया गया है।) तब हम यह लिख सकते हैं,

$$U(\theta) = pE\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\theta\right) = -pE\cos\theta = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \qquad (2.32)$$