ਗਣਿਤ

(ਗਿਆਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ 2016 ..... 10,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

ਸੰਯੋਜਕ : ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਚਿੱਤਰਕਾਰ : ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ (ਆਰਟਿਸਟ)
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਮੁੱਲ : ₹ 198.00

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8, ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ-160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ. ਨੋਵਾ ਪਬਲੀਕੇਸ਼ਨਜ਼, ਸੀ-51, ਫੋਕਲ ਪੁਆਇੰਟ ਐਕਸਟੈਨਸ਼ਨ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁੱਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਯੋਗਦਾਨ ਬਹੁਤ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਤਾਂ ਪ੍ਰਫੁੱਲਿਤ ਹੋਵੇਗੀ ਹੀ ਸਗੋਂ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ (ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ.) ਵੱਲੋਂ ਗਿਆਰ੍ਹਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਦਮ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਵਿੱਚ ਇਕਸਾਰਤਾ ਲਿਆਉਣ ਲਈ ਚੁੱਕਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਪੱਧਰ ਦੇ ਇਮਤਿਹਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਔਕੜ ਨਾ ਆਵੇ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਪਰਸਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਪ੍ਰਧਾਨ, ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੀ ਸਲਾਹਕਾਰ ਕਮੇਟੀ

ਜੇ. ਵੀ. ਨਾਰਲੀਕਾਰ, ਇਮੇਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਅੰਤਰ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ ਕੇਂਦਰ ਖਗੋਲ ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਖਗੋਲ ਭੌਤਿਕੀ, (IUCCA), ਗਣੇਸ਼ ਖੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ।

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ. ਕੇ. ਜੈਨ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਦਿੱਲੀ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਦਿੱਲੀ।

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕਮ ਸਿੰਘ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

ਮੈਂਬਰ

— ਆਸ਼ੂਤੋਸ਼ ਕੇ. ਵਲਝਵਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਏ. ਕੇ. ਰਾਜਪੂਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਉਦੈ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਸ. ਕੇ. ਐਸ. ਗੌਤਮ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਐਮ. ਬੀ. ਤ੍ਰਿਪਾਠੀ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਰਾਜ ਪ੍ਰਤਿਭਾ ਵਿਕਾਸ ਵਿਦਿਯਾਲਯ, ਸੂਰਜਮਲ ਬਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ।
— ਪ੍ਰਦਿੱਤੋ ਹਰੇ, ਵਰਿਸ਼ਟ ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਸਰਲਾ ਬਿਡ੍ਰਲਾ ਅਕੈਡਮੀ ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਬੀ. ਐੱਸ. ਪੀ. ਰਾਜੂ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਕੁਮਾਰ ਸਿੰਹਾ, ਪੀ. ਜੀ. ਟੀ., ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਸਕੂਲ, ਚਾਣਕਯਪੁਰੀ ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੰਜੇ ਮੁਦਗਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ. ਆਈ. ਈ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸੀ. ਆਰ. ਪ੍ਰਦੀਪ, ਸਹਾਇਕ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਵਿਭਾਗ, ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨ ਸੰਸਥਾਨ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।
— ਸੁਜਾਤਾ ਵਰਮਾ, ਰੀਡਰ, ਏ. ਗਾ. ਮੁ. ਵਿ. ਵਿ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।
— ਸਨੇਹਾ ਟਾਇਟਸ, ਗਣਿਤ ਅਧਿਆਪਕ, ਆਦਿਤੀ ਮਾਲਯਾ ਸਕੂਲ ਇਲਹਾਰਿਕਾ, ਬੰਗਲੌਰ, ਕਰਨਾਟਕਾ।

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

— ਬੀ. ਪੀ. ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ. ਈ. ਐਸ. ਐਮ., ਐਨ. ਸੀ. ਈ. ਆਰ. ਟੀ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ।

PSEB ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਸੋਧ ਕਮੇਟੀ

ਮੈਂਬਰ

- ਸ. ਅਵਤਾਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਕੰਨਿਆ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਖੰਨਾ ਰੋਡ, ਸਮਰਾਲਾ, (ਲੁਧਿਆਣਾ)।
- ਸ੍ਰੀ ਆਰ. ਕੇ. ਗੋਇਲ, ਰਿਟਾਇਰਡ (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਾਹਮਣੇ ਮਨਸਾ ਦੇਵੀ ਮੰਦਿਰ, ਚੱਕਰੀਆਂ ਰੋਡ, ਮਾਨਸਾ।
- ਸ੍ਰੀ ਵੈਭਵ ਵਿਆਸ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਗੌਰਮਿੰਟ ਮਲਟੀਪਰਪਜ਼ ਸਕੂਲ ਪਾਸੀ ਰੋਡ, ਪਟਿਆਲਾ।
- ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।
- ਸ੍ਰੀ ਨੀਰਜ ਸ਼ਰਮਾ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਮਹਿੰਦਰਗੰਜ ਰਾਜਪੁਰਾ, ਪਟਿਆਲਾ।
- ਸ. ਵਿਕਰਮ ਸੇਠੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਕਰਨੀਖੇੜਾ, (ਫਾਜ਼ਿਲਕਾ)।
- ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਸ਼ੈਲੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਫੇਜ਼-3ਬੀ-1, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ।
- ਸ੍ਰੀਮਤੀ ਬੰਬੀਤਾ ਭੰਡਾਰੀ, (ਲੈਕਚਰਾਰ), ਸਰਕਾਰੀ ਸੀਨੀਅਰ ਸੈਕੰਡਰੀ ਸਕੂਲ, ਸਹੌੜਾ, ਐੱਸ. ਏ. ਐੱਸ. ਨਗਰ)।

ਵਿਸ਼ਾ ਸੂਚੀ

ਅਧਿਆਇ 1

ਸਮੂਹ (Sets)

❖*In these days of conflict between ancient and modern studies; there must surely be something to be said for a study which did not begin with Pythagoras and will not end with Einstein; but is the oldest and the youngest. — G.H. HARDY* ❖

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

Georg Cantor (1845-1918)

ਵਰਤਮਾਨ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਮੂਲਭੂਤ (Fundamental) ਹੈ। ਅੱਜ ਕੱਲ੍ਹ ਇਸ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਗਣਿਤ ਦੀ ਹਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਖਾ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸੰਬੰਧ (Relation) ਅਤੇ ਫ਼ਲਨ (Function) ਨੂੰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਜਿਮਾਇਤੀ (Geometry), ਅਨੁਕ੍ਰਮ (Sequence) ਅਤੇ ਸੰਭਾਵਨਾ (Probability) ਆਦਿ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਦੇ ਗਿਆਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਮੂਹ (Set) ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਵਿਕਾਸ ਜਰਮਨ ਦੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ Georg Cantor (1845-1918) ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਉਸਦੀ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਨਾਲ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਜਾਣ ਪਹਿਚਾਣ ਹੋਈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ (Sets) ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਕੁੱਝ ਮੁੱਢਲੀਆਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

1.2 ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਨਿਰੂਪਣ (Sets and their Representations)

ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅਕਸਰ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਇਕੱਠ (ਸੰਗ੍ਰਹਿ) ਦੀ ਗੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤਾਸ਼ ਦੀ ਗੱਠੀ, ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਭੀੜ, ਕ੍ਰਿਕਟ ਟੀਮ ਆਦਿ। ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵੀ ਅਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿਆਂ (ਇਕੱਠਾਂ) ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਬਿੰਦੂਆਂ, ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਦਿ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੰਗ੍ਰਹਿਆਂ (ਇੱਕਠਾਂ) ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ :

(i) 10 ਤੋਂ ਘੱਟ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਭਾਵ 1, 3, 5, 7, 9

(ii) ਭਾਰਤ ਦੀਆਂ ਨਦੀਆਂ

(iii) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਸਵਰ, ਭਾਵ a, e, i, o, u

(iv) ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ

(v) ਸੰਖਿਆ 210 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ, ਭਾਵ 2, 3, 5 ਅਤੇ 7

(vi) ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 5x + 6 = 0$, ਦੇ ਹੱਲ (ਭਾਵ ਮੂਲ) ਅਰਥਾਤ 2 ਅਤੇ 3

ਉਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ (Well defined) ਇੱਕ ਇਕੱਠ (ਸੰਗ੍ਰਹਿ) ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਤੈਅ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਖ਼ਾਸ ਵਸਤੂ ਇਸ ਇੱਕਠ (ਸੰਗ੍ਰਹਿ) ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਨੀਲ ਨਦੀ ਭਾਰਤ ਦੀਆਂ ਨਦੀਆਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਗੰਗਾ ਨਦੀ ਇਸ ਇਕੱਠ ਦਾ ਹਿੱਸਾ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਅਸੀਂ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

N : ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

Z : ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ) ਦਾ ਸਮੂਹ

Q : ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
R : ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
Z^+ : ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਪੂਰਨ ਅੰਕਾਂ) ਦਾ ਸਮੂਹ
Q^+ : ਧਨਾਤਮਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ
R^+ : ਧਨਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਮੂਹਾਂ ਲਈ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਇਸਤੇਮਾਲ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕਰਦੇ ਰਹਾਂਗੇ।

ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਪੰਜ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚਰਚਿਤ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਜਾਂ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦਾ ਇਕੱਠ (Collection) ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਚਰਚਿਤ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਾਂ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਰਨ ਦਾ ਮਾਪਦੰਡ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਤੋਂ ਦੂਸਰੇ ਵਿਅਕਤੀ ਅਨੁਸਾਰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇਕੱਠ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਵਸਤੂਆਂ ਦੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇਕੱਠ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਤੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ :

(i) ਵਸਤੂਆਂ (Objects), ਤੱਤਾਂ (elements) ਅਤੇ ਹਿੱਸੇਦਾਰ (members) ਸਮਾਨ ਅਰਥ ਵਾਲੇ ਸ਼ਬਦ ਹਨ।

(ii) ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਵੱਡੇ ਅੱਖਰਾਂ ਭਾਵ A, B, C, X, Y, Z, ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਛੋਟੇ ਅੱਖਰਾਂ ਭਾਵ $a, b, c, x, y, z,$ ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a, ਸਮੂਹ A ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a, ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਹੈ। ਯੂਨਾਨੀ ਨਿਸ਼ਾਨ $\in$ (epsilon) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸ਼ਬਦ "ਹਿੱਸਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਿੱਚ ਹੈ" ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $a \in A$। ਜੇਕਰ b, ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $b \notin A$ ਅਤੇ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ ਕਿ "b ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ".

ਇਸ ਲਈ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਸਵਰਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ V ਲਈ, $a \in V$ ਪਰ $b \notin V$। 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ P ਲਈ $3 \in P$ ਪਰ $15 \notin P$।

ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਦੋ ਤਰੀਕੇ ਹਨ :

(i) ਰੋਸਟਰ ਜਾਂ ਸਾਰਣੀਬੱਧ ਰੂਪ (Roster or tabular form)

(ii) ਸਮੂਹ-ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ (Set-builder form)

(i) ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਦੂਸਰੇ ਨਾਲੋਂ ਅਰਧ ਵਿਰਾਮ (ਕੋਮੇ) ਨਾਲ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਬਰੈਕਟ (ਘੁੰਡੀਦਾਰ) { } ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ 7 ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ {2, 4, 6} ਲਿਖਾਂਗੇ। ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾ ਰਹੀਆਂ ਹਨ:

(a) 42 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}

ਟਿੱਪਣੀ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਕੋਈ ਮਾਇਨੇ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦੀ। ਇਸ ਲਈ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅਸੀਂ {1, 3, 7, 21, 2, 6, 14, 42} ਵੀ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

(b) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਵਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{a, e, i, o, u\}$.

(c) ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ {1, 3, 5, . . .} ਨਾਲ ਦਰਸਾਵਾਂਗੇ। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ, ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਅਨੰਤ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਲੱਗਿਆਂ ਇਹ ਗੱਲ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀ ਜਾਵੇ ਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਨੂੰ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਨਹੀਂ ਲਿਖਦੇ। ਭਾਵ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸ਼ਬਦ 'SCHOOL' ਵਿੱਚ ਵਰਤੇ ਅੱਖਰਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ{S, C, H, O, L} ਜਾਂ {H, O, L, C, S} ਲਿਖਾਂਗੇ। ਇੱਥੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਕੋਈ ਮਾਇਨੇ ਨਹੀਂ ਰੱਖਦੀ।

(ii) ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਾਂਝੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਸਮੂਹ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਸਮੂਹ $\{a, e, i, o, u\}$, ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਾਂਝੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ ਅਤੇ ਹੋਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੇ ਅੱਖਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੂਹ ਨੂੰ V ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

V = {x : x ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ}

ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਵਰਨਣ ਕਰਨ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ x (ਕਈ ਹੋਰ ਚਿੰਨ੍ਹ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ y, z ਆਦਿ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ) ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਦੁਬਿੰਦੀ (colon) " : ". ਦਾ ਚਿੰਨ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਦੁਬਿੰਦੀ ਦੇ ਚਿੰਨ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਸਮੂਹ ਵਿਚਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਧਰਮ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਸਾਰੇ ਕਥਨ ਨੂੰ ਘੁੰਢੀਦਾਰ (ਵਿਚਕਾਰਲੀ) ਬਰੈਕਟ ({ }) ਦੇ ਅੰਦਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਸਮੂਹ V ਦੇ ਵਰਨਣ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ "ਸਾਰੇ ਅੱਖਰ x ਦਾ ਸਮੂਹ ਜਿੱਥੇ ਕਿ x ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ।" ਇਸ ਵਰਨਣ ਵਿੱਚ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਬਰੈਕਟ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ "ਸਾਰਿਆਂ x ਦੇ ਸਮੂਹ", ਦੁਬਿੰਦੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ "ਜਿੱਥੇ ਕਿ" ਦੇ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ :

A = {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $3 < x < 10$} ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਵੇਗਾ। "ਸਾਰਿਆਂ x ਦਾ ਸਮੂਹ ਜਿਥੇ ਕਿ x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ x, 3 ਅਤੇ 10 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4, 5, 6, 7, 8 ਅਤੇ 9 ਸਮੂਹ A ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ (a), (b) ਅਤੇ (c) ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A, B ਅਤੇ C ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ A, B ਅਤੇ C ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

A= {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 42 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ}

B= {y : y ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ}

C= {z : z ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + x - 2 = 0$ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਨ ਨੂੰ ਅਸੀਂ

$(x - 1)\ (x + 2) = 0$ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $x = 1, -2$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $\{1, -2\}$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸਮੂਹ {x : x ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 < 40$} ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਲੋੜੀਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਸਮੂਹ $A = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ A ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

A = {x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ}

ਦੂਸਰੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

A = {x : $x = n^2$, ਜਿੱਥੇ ਕਿ $n \in \mathbf{N}$}

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਸਮੂਹ $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\}$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਦਾ ਅੰਸ਼ ਉਸਦੇ ਹਰ ਤੋਂ 1 ਛੋਟਾ ਹੈ। ਇਹ ਵੀ ਕਿ, ਅੰਸ਼ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ 1 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਪਰ 6 ਤੋਂ ਵੱਧ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਾਂਗੇ :

$$\left\{x : x = \frac{n}{n+1}, \text{ ਜਿੱਥੇ ਕਿ } n \text{ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ } 1 \le n \le 6\right\}$$

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਏ ਸਮੂਹਾਂ ਨਾਲ ਮਿਲਾਨ ਕਰੋ :

(i) {P, R, I, N, C, A, L} (a) { x : x ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 18 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।}

(ii) { 0 } (b) { x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 - 9 = 0$}

(iii) {1, 2, 3, 6, 9, 18} (c) {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x + 1 = 1$}

(iv) {3, –3} (d) {x : x ਸ਼ਬਦ PRINCIPAL ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ (d), ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ PRINCIPAL ਦੇ ਨੌਂ ਅੱਖਰ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋ ਅੱਖਰ P ਅਤੇ I ਦੁਹਰਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ (i) ਦਾ ਸਹੀ ਮਿਲਾਨ (d) ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ (ii) ਦਾ ਮਿਲਾਨ (c) ਨਾਲ ਕਿਉਂਕਿ $x + 1 = 1$ ਤੋਂ $x = 0$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 1, 2 ,3, 6, 9, 18 ਸਾਰੇ 18 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ (iii) ਦਾ ਮਿਲਾਨ (a) ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਖ਼ਰ ਵਿੱਚ $x^2 - 9 = 0$ ਤੋਂ $x = 3, -3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ (iv) ਦਾ ਮਿਲਾਨ (b) ਨਾਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ।

(i) J ਅੱਖਰ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਣ ਵਾਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਮਹੀਨਿਆਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ।

(ii) ਭਾਰਤ ਦੇ ਦਸ ਸੱਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਪ੍ਰਤਿਭਾਸ਼ਾਲੀ ਲੇਖਕਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ (ਇੱਕਠ)।

(iii) ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਵਧੀਆ ਗਿਆਰਾਂ ਬੱਲੇਬਾਜ਼ਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(iv) ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(v) 100 ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(vi) ਲੇਖਕ ਮੁਨਸ਼ੀ ਪ੍ਰੇਮ ਚੰਦ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੇ ਨਾਵਲਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(vii) ਸਾਰੀਆਂ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(viii) ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਾਰੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ।

(ix) ਸੰਸਾਰ ਦੇ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਧ ਖ਼ਤਰਨਾਕ ਜਾਨਵਰਾਂ ਦਾ ਇੱਕਠ।

2. ਜੇਕਰ A = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ਹੋਵੇ ਤਾਂ $\in$ ਜਾਂ $\notin$ ਚਿੰਨ੍ਹ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ :

(i) 5 ... A (ii) 8 ... A (iii) 0 ... A

(iv) 4 ... A (v) 2 ... A (vi) 10 ... A

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) A = {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $-3 < x < 7$}

(ii) B = {x : x ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(iii) C = {x : x ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 8 ਹੈ}

(iv) D = {x : x, 60 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(v) E = ਸ਼ਬਦ TRIGONOMETRY ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(vi) F = ਸ਼ਬਦ BETTER ਦੇ ਸਾਰੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) {3, 6, 9, 12} (ii) {2, 4, 8, 16, 32} (iii) {5, 25, 125, 625}

(iv) {2, 4, 6, . . .} (v) {1,4,9, . . .,100}

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕਰੋ :

(i) A = {x : x ਇਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}

(ii) B = {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $-\frac{1}{2} < x < \frac{9}{2}$}

(iii) C = {x : x ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x^2 \leq 4$ ਹੈ}

(iv) D = {x : x ਸ਼ਬਦ "LOYAL" ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

(v) E = {x : x ਸਾਲ ਦਾ ਮਹੀਨਾ ਹੈ ਜਿਸਦੇ 31 ਦਿਨ ਨਹੀਂ ਹਨ}

(vi) F = {x : x ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਨਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਨ ਹੈ ਜੋ k ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉਂਦਾ ਹੈ}

6. ਖੱਬੇ ਹੱਥ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਮਿਲਾਨ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨਾਲ ਕਰੋ।

(i)	{1, 2, 3, 6}	(a)	{x : x, 6 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}
(ii)	{2, 3}	(b)	{x : x, 10 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}
(iii)	{M,A,T,H,E,I,C,S}	(c)	{x : x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ 6 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ}
(iv)	{1, 3, 5, 7, 9}	(d)	{x : x ਸ਼ਬਦ MATHEMATICS ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

1.3 ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ (The Empty Set)

ਮੰਨ ਲਓ ਸਮੂਹ

A = { x : x ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਿਹਾ ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ}

ਅਸੀਂ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ ਜਾ ਕੇ ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ XI ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਗਿਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ A ਵਿਚਲੇ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰਾ ਸਮੂਹ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

B = { x : x ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ ਜੋ ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ X ਅਤੇ XI ਦੋਹਾਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਿਹਾ ਹੈ}

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇੱਕੋ ਸਮੇਂ ਦੋਹਾਂ ਜਮਾਤਾਂ ਗਿਆਰ੍ਹਵੀਂ ਅਤੇ ਦਸਵੀਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਪੜ੍ਹ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ B ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਨੂੰ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਸਮੂਹ (null set or void set) ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ, B ਇੱਕ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ A ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਚਿੰਨ੍ਹ ϕ ਜਾਂ{ } ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਕੁਝ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ :

(i) ਮੰਨ ਲਓ A = {x : $1 < x < 2$, x ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}। ਇੱਥੇ A ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 1 ਅਤੇ 2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ।

(ii) B = {x : $x^2 - 2 = 0$ ਅਤੇ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} ਇੱਥੇ B ਇੱਕ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 - 2 = 0$ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ x ਨਾਲ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

(iii) C = {x : x, 2 ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ}। ਇੱਥੇ C ਇੱਕ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਰਫ਼ 2 ਹੀ ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

(iv) D = { x : $x^2 = 4$, x ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ }। ਇੱਥੇ D ਇੱਕ ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $x^2 = 4$ ਕਿਸੇ ਵੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ x ਨਾਲ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

1.4 ਸੀਮਿਤ ਅਤੇ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ (Finite and Infinite Sets)

ਮੰਨ ਲਓ A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {a, b, c, d, e, g}

ਅਤੇ C = { ਮੌਜੂਦਾ ਸਮੇਂ ਦੁਨੀਆਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਹਿੱਸਿਆਂ ਵਿੱਚ ਰਹਿ ਰਹੇ ਆਦਮੀ}

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ 5 ਤੱਤ ਅਤੇ B ਵਿੱਚ 6 ਤੱਤ ਹਨ। C ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹਨ ? ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਨੂੰ C ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਪਰ ਇਹ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿਹੜੀ ਬਹੁਤ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇੱਕ ਸਮੂਹ S ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੇ ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ n (S) ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਜੇਕਰ n (S) ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇ ਤਾਂ S ਇੱਕ ਨਾਂ ਖ਼ਾਲੀ (non-empty) ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਅਣਗਿਣਤ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ A, B ਅਤੇ C ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ n(A) = 5, n(B) = 6 ਅਤੇ n(C) = ਕੋਈ ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 2 ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਜੋ ਖ਼ਾਲੀ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਜਿਸ ਦੇ ਤੱਤ ਗਿਣਨਯੋਗ ਹੋਣ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਕਰੀਏ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ W ਹਫ਼ਤੇ ਵਿੱਚ ਅਉਣ ਵਾਲੇ ਦਿਨਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਤਾਂ W ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ, S ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 16 = 0$ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ S ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(iii) ਮੰਨ ਲਉ, G ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ G ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ { } ਬਰੈਕਟ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ { } ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਅਣਗਿਣਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਉਸਦੇ ਕੁੱਝ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੀ ਬਣਤਰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਆਖਿਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $\{1, 2, 3 \ldots\}$ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਹ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਤ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਸਾਰੇ ਅਸੀਮਤ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਰੋਸਟਰ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ। ਉਦਹਾਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ, ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤ ਕਿਸੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਨਮੂਨੇ ਦੇ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸੀਮਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਅਸੀਮਿਤ, ਦੱਸੋ :

(i) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ $(x - 1)(x - 2) = 0\}$

(ii) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ $x^2 = 4\}$

(iii) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ $2x - 1 = 0\}$

(iv) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ x ਅਭਾਜ ਹੈ$\}$

(v) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ x ਟਾਂਕ ਹੈ$\}$

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ = $\{1, 2\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(ii) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ = $\{2\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(iii) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ = ϕ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(iv) ਦਿੱਤਾ ਸਮੂਹ, ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ।

(v) ਕਿਉਂਕਿ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ।

1.5 ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹ (Equal Sets)

ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਜੇਕਰ A ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, B ਦਾ ਤੱਤ ਵੀ ਹੋਵੇ ਅਤੇ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, A ਦਾ ਤੱਤ ਵੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ। ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਉਹੀ ਹੋਣਗੇ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 3 ਦੋ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਬਿਲਕੁਲ ਉਹੀ ਹੋਣ ਅਤੇ ਅਸੀਂ $A = B$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $A \neq B$.

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ਅਤੇ $B = \{3, 1, 4, 2\}$ ਤਾਂ $A = B$

(ii) ਮੰਨ ਲਉ A ਉਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ P, 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ A ਅਤੇ P ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਕਿਉਂਕਿ ਸਿਰਫ਼ 2, 3 ਅਤੇ 5 ਹੀ 30 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹ ਸਾਰੇ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੇ ਵੀ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਜਾਂ ਵੱਧ ਤੱਤ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਆਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਸਮੂਹ $A = \{1, 2, 3\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 2, 1, 3, 3\}$ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ A ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ B ਵਿੱਚ ਅਤੇ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ A ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਲੱਗਿਆ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਤੱਤ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾਉਂਦੇ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਜੇਕਰ ਹਨ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ ?

$A = \{0\}$, $B = \{x : x > 15$ ਅਤੇ $x < 5\}$,

$C = \{x : x - 5 = 0\}$, $D = \{x : x^2 = 25\}$,

$E = \{x : x$ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 - 2x - 15 = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੱਲ ਹੈ$\}$

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $0 \in A$ ਅਤੇ 0 ਕਿਸੇ ਵੀ ਹੋਰ ਸਮੂਹ B, C, D ਅਤੇ E, ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $A \neq B$, $A \neq C$, $A \neq D$, $A \neq E$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $B = \phi$ ਹੈ, ਪਰ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੂਹ ਖ਼ਾਲੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $B \neq C$, $B \neq D$, $B \neq E$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $C = \{5\}$ ਪਰ $-5 \in D$, ਇਸ ਲਈ $C \neq D$.

ਕਿਉਂਕਿ $E = \{5\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $C = E$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $D = \{-5, 5\}$ ਹੈ ਅਤੇ $E = \{5\}$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $D \neq E$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੀ ਜੋੜਾ ਹੈ ਜੋ C ਅਤੇ E ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਨੂੰ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰੋ।

(i) X, ਸ਼ਬਦ "ALLOY" ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਤੇ B, ਸ਼ਬਦ "LOYAL" ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ।

(ii) $A = \{n : n \in Z$ ਅਤੇ $n^2 \leq 4\}$ ਅਤੇ $B = \{x : x \in R$ ਅਤੇ $x^2 - 3x + 2 = 0\}$

ਹੱਲ : (i) ਸਾਡੇ ਕੋਲ $X = \{A, L, L, O, Y\}$, $B = \{L, O, Y, A, L\}$ ਹੈ ਤਾਂ X ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਤੱਤ ਦੇ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਆਉਣ ਨਾਲ ਸਮੂਹ ਬਦਲਦਾ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ

$$X = \{A, L, O, Y\} = B$$

(ii) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$ ਕਿਉਂਕਿ $0 \in A$ ਅਤੇ $0 \notin B$, ਇਸ ਲਈ A ਅਤੇ B ਸਮੂਹ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ :

(i) ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਜੋ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

(ii) ਜਿਸਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(iii) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, $x < 5$ ਅਤੇ $x > 7\}$

(iv) $\{y : y$ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ$\}$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਤ ਹਨ :

(i) ਸਾਲ ਦੇ ਮਹੀਨਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(ii) $\{1, 2, 3, \ldots\}$

(iii) $\{1, 2, 3, \ldots, 99, 100\}$

(iv) 100 ਤੋਂ ਵੱਧ ਸਾਰੀਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(v) 99 ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

3. ਦੱਸੋ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ ਸਮੂਹ ਸੀਮਿਤ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਅਸੀਮਿਤ :

(i) x – ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(ii) ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(iii) 5 ਦੇ ਗੁਣਜ ਵਾਲੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(iv) ਧਰਤੀ ਤੇ ਰਹਿਣ ਵਾਲੇ ਜਾਨਵਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

(v) ਉਹਨਾਂ ਚੱਕਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ (0,0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੇ ਹਨ।

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ A = B ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ :

(i) A = { a, b, c, d } B = { d, c, b, a }

(ii) A = { 4, 8, 12, 16 } B = { 8, 4, 16, 18}

(iii) A = {2, 4, 6, 8, 10} B = { $x : x$ ਇਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $x \leq 10$ ਹੈ}

(iv) A = { $x : x$, 10 ਦਾ ਗੁਣਜ ਹੈ}, B = { 10, 15, 20, 25, 30, . . . }

5. ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ? ਕਾਰਨ ਦੱਸੋ।

(i) A = {2, 3}, B = {$x : x$ ਸਮੀਕਰਨ $x^2 + 5x + 6 = 0$ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ}

(ii) A = { $x : x$ ਸ਼ਬਦ FOLLOW ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

B = { $y : y$ ਸ਼ਬਦ WOLF ਦਾ ਇੱਕ ਅੱਖਰ ਹੈ}

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਬਰਾਬਰ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

A = { 2, 4, 8, 12}, B = { 1, 2, 3, 4}, C = { 4, 8, 12, 14}, D = { 3, 1, 4, 2}

E = {–1, 1}, F = { 0, a}, G = {1, –1}, H = { 0, 1}

1.6 ਉਪ ਸਮੂਹ (Sub-sets)

ਮੰਨ ਲਓ ਸਮੂਹ X = ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਤੇ Y = ਤੁਹਾਡੀ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ Y ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, X ਦਾ ਤੱਤ ਵੀ ਹੈ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ Y, X ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। Y, X ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਚਿੰਨ੍ਹ $Y \subset X$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। $\subset$ ਚਿੰਨ "ਉਪ ਸਮੂਹ" ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਜਾਂ "ਵਿੱਚ ਹੈ" ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 4 ਇੱਕ ਸਮੂਹ A ਨੂੰ ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ ਜੇਕਰ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ, B ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, $A \subset B$ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $a \in A$, ਤਾਂ $a \in B$ ਹੋਵੇ। ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਚਿੰਨ "$\Rightarrow$" ਜਿਸਦਾ ਮਤਲਬ "ਭਾਵ ਹੈ" ਜਾਂ "ਇਸਤੋਂ" ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਚਿੰਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਉਪ ਸਮੂਹ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$A \subset B$ ਜੇਕਰ $a \in A \Rightarrow a \in B$

ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ, "A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ a, A ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ ਭਾਵ ਹੈ a, B ਦਾ ਵੀ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ।" ਜੇਕਰ A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਾਂ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਲਿਖਾਂਗੇ $A \not\subset B$।

ਸਾਨੂੰ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਕਿ A ਨੂੰ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਲਈ A ਦੇ ਸਾਰੇ (ਭਾਵ ਹਰ ਇੱਕ) ਤੱਤ B ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੋਣ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ A ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ B ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, A ਵਿੱਚ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਫਿਰ $B \subset A$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣਗੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A \subset B$ ਅਤੇ $B \subset A \Leftrightarrow A = B$, ਜਿੱਥੇ "$\Leftrightarrow$" ਦੋ ਤਰਫਾ ਸ਼ਰਤ (two way implications) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ 'ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ ਜੇਕਰ' ਪੜਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਛੋਟੇ-ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਨੂੰ "iff" ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ)।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਨਿਕਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇਕ ਸਮੂਹ A ਆਪਣੇ ਆਪ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਭਾਵ $A \subset A$. ਕਿਉਂਕਿ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ϕ ਹਰ ਇਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **Q** ਦਾ ਸਮੂਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ **R** ਦੇ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ $\mathbf{Q} \subset R$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

(ii) ਜੇਕਰ ਸਮੂਹ A, 56 ਦੇ ਸਾਰੇ ਭਾਜਕਾਂ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ B, 56, ਦੇ ਸਾਰੇ ਅਭਾਜ ਭਾਜਕਾਂ ਦਾ ਹੈ, ਤਾਂ B, A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ ਅਸੀਂ $B \subset A$ ਲਿਖਾਂਗੇ।

(iii) ਜੇਕਰ A = {1, 3, 5} ਅਤੇ B = {$x : x$ ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ} ਤਾਂ $A \subset B$ ਅਤੇ $B \subset A$ । ਇਸ ਲਈ A = B.

(iv) ਮੰਨ ਲਉ A = { *a, e, i, o, u*} ਅਤੇ B = { *a, b, c, d*} ਤਾਂ A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ B ਵੀ A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਅਤੇ $A \neq B$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ A ਨੂੰ B ਦਾ ਉਚਿਤ ਉਪ ਸਮੂਹ ਕਹਾਂਗੇ ਅਤੇ B ਨੂੰ A ਦਾ ਸੁਪਰ ਸਮੂਹ (superset) ਕਹਾਂਗੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜੇਕਰ

A = {1, 2, 3} ਅਤੇ B = {1, 2, 3, 4} ਹੋਵੇ ਤਾਂ A, B ਦਾ ਉਚਿਤ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ ਇੱਕ ਹੀ ਤੱਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ ਇਕ ਤੱਤ (Singleton) ਸਮੂਹ ਆਖਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ { *a* } ਇੱਕ ਤੱਤ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਮੰਨ ਲਉ ਸਮੂਹ

$$\phi, A = \{1, 3\}, \quad B = \{1, 5, 9\}, \quad C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹ $\subset$ ਜਾਂ $\not\subset$ ਲਗਾਉ :

(i) $\phi \ldots B$ (ii) $A \ldots B$ (iii) $A \ldots C$ (iv) $B \ldots C$

ਹੱਲ : (i) $\phi \subset B$ ਕਿਉਂਕਿ ϕ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ।

(ii) $A \not\subset B$ ਕਿਉਂਕਿ $3 \in A$ ਪਰ $3 \notin B$

(iii) $A \subset C$ ਕਿਉਂਕਿ $1, 3 \in A$ ਅਤੇ C ਵਿੱਚ ਵੀ ਹਨ।

(iv) $B \subset C$, ਕਿਉਂਕਿ, B ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ, C ਦੇ ਵਿੱਚ ਮੌਜੂਦ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਮੰਨ ਲਓ A = { *a, e, i, o, u*} ਅਤੇ B = { *a, b, c, d*}. ਕੀ A, B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ? ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?) ਕੀ B, A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ? ਨਹੀਂ (ਕਿਉਂ ਨਹੀਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਮੰਨ ਲਓ A, B ਅਤੇ C ਤਿੰਨ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੇਕਰ $A \in B$ ਅਤੇ $B \subset C$, ਕੀ $A \subset C$ ਠੀਕ ਹੈ ? ਜੇਕਰ ਨਹੀਂ, ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਓ।

ਹੱਲ : ਨਹੀਂ, ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1\}$, $B = \{\{1\}, 2\}$ ਅਤੇ $C = \{\{1\}, 2, 3\}$। ਇੱਥੇ $A \in B$ ਕਿਉਂਕਿ $A = \{1\}$ ਅਤੇ $B \subset C$ ਪਰ $A \not\subset C$। ਕਿਉਂਕਿ $1 \in A$ ਪਰ $1 \notin C$ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦਾ ਇੱਕ ਤੱਤ ਕਦੇ ਵੀ ਆਪਣਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ।

1.6.1 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ (Subsets of set of real numbers)

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਗ 1.6 ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ **R** ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੇ ਨਾਮ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\mathbf{Q} = \{x : x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbf{Z}$ ਅਤੇ $q \neq 0\}$

ਜਿਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ " **Q** ਉਹ ਸਾਰੀਆਂ x ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿਥੇ x ਬਰਾਬਰ ਹੈ $\frac{p}{q}$ ਅਤੇ p, q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ q ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।" **Q** ਦੇ ਮੈਂਬਰ -5 (ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ $-\frac{5}{1}$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ), $\frac{5}{7}$, $3\frac{1}{2}$ (ਜਿਸਨੂੰ $\frac{7}{2}$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ) ਅਤੇ $-\frac{11}{3}$ ।

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ **T**, ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਤਾਂ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਪਰ ਪਰਿਮੇਯ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ $\mathbf{T} = \{x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x \notin \mathbf{Q}\}$।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਤੋਂ ਹੇਠ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਬਣਦੇ ਹਨ :

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \mathbf{T} \subset \mathbf{R}, \mathbf{N} \not\subset \mathbf{T}.$$

1.6.2 R ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਵਿੱਚ (Intervals as subsets of R) ਮੰਨ ਲਉ $a, b \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $a < b$ ਤਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ $\{y : a < y < b\}$ ਨੂੰ ਖੁਲ੍ਹਾ ਅੰਤਰਾਲ (open interval) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ (a, b) ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂ ਇਸ ਸਮੂਹ (a, b) ਦੇ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਪਰ a, b ਖੁਦ ਇਸ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਹ ਅੰਤਰਾਲ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣ ਨੂੰ ਬੰਦ ਅੰਤਰਾਲ (closed interval) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ $[a, b]$ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $[a, b] = \{x : a \le x \le b\}$

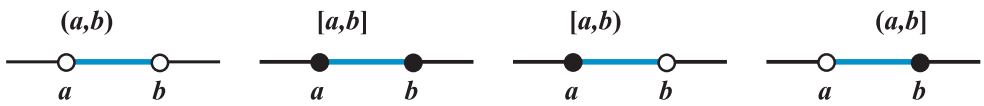
ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲ ਵੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਇੱਕ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਬੰਦ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਖੁੱਲੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਭਾਵ

$[a, b) = \{x : a \le x < b\}$ ਇੱਕ a ਤੋਂ b ਦਾ ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ a ਹੈ, ਪਰ b ਨਹੀਂ ਹੈ।

$(a, b] = \{x : a < x \le b\}$ ਇੱਕ a ਤੋਂ b ਦਾ ਖੁੱਲ੍ਹਾ ਅੰਤਰਾਲ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ b ਹੈ, ਪਰ a ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਮਦਦ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਤਰੀਕੇ ਨਾਲ ਵੀ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ $A = (-3, 5)$ ਅਤੇ $B = [-7, 9]$, ਤਾਂ $A \subset B$। ਸਮੂਹ $[0, \infty)$, ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਦਕਿ $(-\infty, 0)$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ $(-\infty, \infty)$ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੇ ਵਿੱਚ, ਜੋ ਕਿ $-\infty$ ਤੋਂ ∞ ਤੱਕ ਹੈ, ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ ਤੇ, ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ **R** ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.1

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ ਵਿੱਚ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਸਮੂਹ $\{x : x \in \mathbf{R}, -5 < x \le 7\}$ ਜੋ ਕਿ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $(-5, 7]$ ਤੋਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਰਾਲ $[-3, 5)$ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ $\{x : -3 \le x < 5\}$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆ $(b - a)$ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਅੰਤਰਾਲ (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ ਜਾਂ $(a, b]$ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

1.7 ਘਾਤ ਸਮੂਹ (Power Set)

ਮੰਨ ਲਓ ਸਮੂਹ $\{1, 2\}$, ਹੁਣ ਇਸ ਸਮੂਹ $\{1, 2\}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ϕ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ϕ, $\{1, 2\}$ ਦਾ ਵੀ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\{1\}$ ਅਤੇ $\{2\}$ ਵੀ $\{1, 2\}$ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਹਰ ਇਕ ਸਮੂਹ ਆਪਣੇ ਆਪ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $\{1, 2\}$ ਵੀ $\{1, 2\}$ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੂਹ $\{1, 2\}$ ਦੇ ਕੁੱਲ ਚਾਰ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਜੋ ਕਿ ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$ ਅਤੇ $\{1, 2\}$ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ $\{1, 2\}$ ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 5 ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਇਕੱਠ ਨੂੰ A ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਨੂੰ P(A) ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। P(A) ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ, ਇਕ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਉਪਰੋਕਤ ਤੋਂ ਜੇਕਰ $A = \{1, 2\}$ ਤਾਂ

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \text{ ਹੈ।}$$

ਇਹ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ $n[P(A)] = 4 = 2^2$

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ A ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਕਿ $n(A) = m$, ਤਾਂ ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $n[P(A)] = 2^m$।

1.8 ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ (Universal Set)

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਖਾਸ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਮੂਲਭੂਤ (basic) ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤ ਅਤੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਨਾ ਪੈਂਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸੰਗਿਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ ਸਾਡੀ ਰੁਚੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ

ਸਮੂਹ ਆਦਿ। ਇਸ ਮੂਲਭੂਤ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ U ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਅੱਖਰਾਂ A, B ਅਤੇ C ਆਦਿ ਦੁਆਰਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਲਈ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ **R**, ਵੀ ਇੱਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮਨੁੱਖੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਸੰਸਾਰ ਦੀ ਸਾਰੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਦਾ ਸਮੂਹ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਭਿਆਸ 1.3

1. ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਵਿੱਚ ਚਿੰਨ੍ਹਾਂ $\subset$ ਜਾਂ $\not\subset$ ਦਾ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ ਤਾਂ ਜੋ ਕਥਨ ਸਹੀ ਹੋਣ :

(i) $\{ 2, 3, 4 \} \ldots \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$ (ii) $\{ a, b, c \} \ldots \{ b, c, d \}$

(iii) $\{x : x$ ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦੀ XI ਜਮਾਤ ਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ $\} \ldots \{x : x$ ਤੁਹਾਡੇ ਸਕੂਲ ਦਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹੈ$\}$

(iv) $\{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਉਸੇ ਹੀ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਅਰਧ ਵਿਆਸ 1 ਇਕਾਈ ਹੈ।$\}$

(v) $\{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਆਇਤ ਹੈ$\}$

(vi) $\{x : x$ ਕਿਸੇ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਉਸੇ ਹੀ ਸਮਤਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ$\}$

(vii) $\{x : x$ ਇਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\} \ldots \{x : x$ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

2. ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਝੂਠ :

(i) $\{ a, b \} \not\subset \{ b, c, a \}$ (ii) $\{ a, e \} \subset \{ x : x$ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਵਰਣਮਾਲਾ ਦਾ ਇੱਕ ਸਵਰ ਹੈ$\}$

(iii) $\{ 1, 2, 3 \} \subset \{ 1, 3, 5 \}$ (iv) $\{ a \} \subset \{ a, b, c \}$

(v) $\{ a \} \in \{ a, b, c \}$

(vi) $\{ x : x$ ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\} \subset \{ x : x$ ਇੱਕ 36 ਨੂੰ ਭਾਗ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

3. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{ 1, 2, \{ 3, 4 \}, 5 \}$ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਠੀਕ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂ ?

(i) $\{3, 4\} \subset A$ (ii) $\{3, 4\} \in A$ (iii) $\{\{3, 4\}\} \subset A$

(iv) $1 \in A$ (v) $1 \subset A$ (vi) $\{1, 2, 5\} \subset A$

(vii) $\{1, 2, 5\} \in A$ (viii) $\{1, 2, 3\} \subset A$ (ix) $\phi \in A$

(x) $\phi \subset A$ (xi) $\{\phi\} \subset A$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਲਿਖੋ :

(i) $\{a\}$ (ii) $\{a, b\}$ (iii) $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ

5. P(A) ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ਜੇਕਰ if $A = \phi$?

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿਤਿਆਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰਾਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (ii) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(iii) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (iv) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅੰਤਰਾਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) $(-3, 0)$ (ii) $[6, 12]$ (iii) $(6, 12]$ (iv) $[-23, 5)$

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਲਈ ਪ੍ਰਸਤਾਵਿਤ ਕਰੋਗੇ :

(i) ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ (ii) ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ

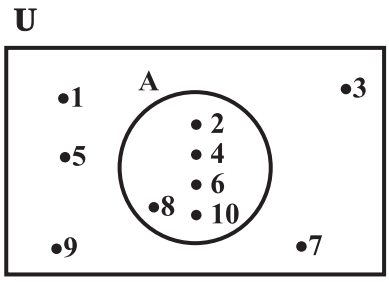
9. ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ ਅਤੇ $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, ਲਈ ਤਿੰਨਾਂ ਸਮੂਹਾਂ A, B ਅਤੇ C ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਸ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) ϕ

(iii) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

1.9 ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ (Venn Diagrams)

ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ **ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਨਾਮ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤਰੀ John-Venn (1834 ਈ. ਤੋਂ 1883 ਈ.) ਦੇ ਨਾਮ ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ। ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਆਇਤ ਅਤੇ ਬੰਦ ਵਕਰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਚੱਕਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਆਇਤ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਚੱਕਰਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

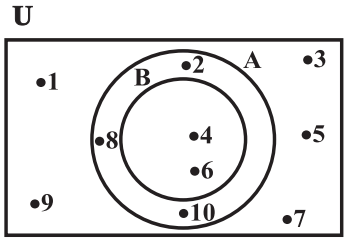


ਚਿੱਤਰ 1.2

ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਤੱਤਾਂ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰੀ ਚੱਕਰਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 1.2 ਅਤੇ 1.3)

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 1 ਚਿੱਤਰ 1.2 ਵਿੱਚ U = {1,2,3, ..., 10} ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ A = {2,4,6,8,10} ਇੱਕ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਦ੍ਰਿਸ਼ਟਾਂਤ 2 ਚਿੱਤਰ 1.3 ਵਿੱਚ U = {1,2,3, ..., 10} ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ A = {2,4,6,8,10} ਅਤੇ B = {4, 6} ਉਪ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $B \subset A$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.3

ਪਾਠਕ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੇਖਣਗੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ (Union), ਕਾਟ (intersection) ਅਤੇ ਅੰਤਰ (difference) ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

1.10 ਸਮੂਹਾਂ 'ਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ (Operations on Sets)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ, ਘਟਾਉ, ਗੁਣਾ ਅਤੇ ਭਾਗ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਇਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਈ ਸੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 5 ਅਤੇ 13 ਤੇ ਜੋੜ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 18 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆ 5 ਅਤੇ 13 ਤੇ ਗੁਣਾ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 65 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਕੁਝ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਕਰਨ ਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਮੂਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਸਮੂਹਾਂ ਤੇ ਹੋਣ ਵਾਲੀਆਂ ਕੁਝ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ (Properties) ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਉਲੇਖ ਕਿਸੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

1.10.1 ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ (Union of sets) : ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ। A ਅਤੇ B ਦੀ ਸੰਘ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਅਤੇ B ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਇੱਕ ਹੀ ਵਾਰ ਲਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਸੰਘ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਚਿੰਨ੍ਹ '$\cup$' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੇ ਰੂਪ ਅਸੀਂ $A \cup B$ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ "A ਸੰਘ B" ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਮੰਨ ਲਓ A = { 2, 4, 6, 8} ਅਤੇ B = { 6, 8, 10, 12} ਤਾਂ $A \cup B$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A \cup B$ = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}, $A \cup B$ ਲਿਖਣ ਲੱਗਿਆਂ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ (elements) 6 ਅਤੇ 8 ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਾਰ ਹੀ ਲਿਖੇ ਜਾਣਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਮੰਨ ਲਓ A = { *a, e, i, o, u* } ਅਤੇ B = { *a, i, u* } ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $A \cup B = A$

ਹੱਲ : ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $A \cup B$ = { *a, e, i, o, u* } = A

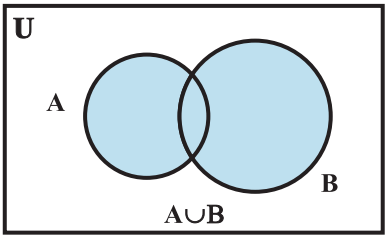
ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਸਪਸ਼ਟ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਦੀ ਉਸਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ B ਨਾਲ ਸੰਘ, ਸਮੂਹ A ਹੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ $B \subset A$, ਤਾਂ $A \cup B = A$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਮੰਨ ਲਓ X = {ਰਾਮ, ਗੀਤਾ, ਅਕਬਰ} ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਸਕੂਲ ਦੀ ਹਾਕੀ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ Y = {ਗੀਤਾ, ਡੇਵਿਡ, ਅਸ਼ੋਕ} XI ਜਮਾਤ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ ਸਕੂਲ ਦੀ ਫੁੱਟਬਾਲ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਹਨ। $X \cup Y$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਸਮੂਹ ਦੀ ਵਿਆਖਿਆ ਵੀ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $X \cup Y$ = {ਰਾਮ, ਗੀਤਾ, ਅਕਬਰ, ਡੇਵਿਡ, ਅਸ਼ੋਕ}. ਇਹ ਜਮਾਤ XI ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਾਂ ਤਾਂ ਹਾਕੀ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਹਨ ਜਾਂ ਫੁੱਟਬਾਲ ਟੀਮ ਵਿੱਚ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਟੀਮਾਂ ਵਿੱਚ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 6 ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਸੰਘ ਦਾ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਸਮੂਹ C ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਸਾਰੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੋ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ (ਜੋ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕਰਦੇ ਹੋਏ)। ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $A \cup B = \{x : x \in A$ ਜਾਂ $x \in B\}$ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 1.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.4

ਚਿੱਤਰ 1.4 ਵਿੱਚ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਹਿੱਸਾ (shaded portion) $A \cup B$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਸੰਘ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਧਰਮ (Some Properties of the Operation of Union)

(i) $A \cup B = B \cup A$ ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative law)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (Associative law)

(iii) $A \cup \phi = A$ ਤਤਸਮਕ ਤੱਤ ਦਾ ਨਿਯਮ (Law of identity element, ϕ is the identity of $\cup$)

(iv) $A \cup A = A$ ਵਰਗਸਮ ਨਿਯਮ (Idempotent law)

(v) $U \cup A = U$ U ਦਾ ਨਿਯਮ (Law of U)

1.10.2 ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ (Intersection of sets) ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਉਹਨਾਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਹਨ। ਚਿੰਨ੍ਹ $\cap$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਾਟ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸਾਂਝੇ ਤੱਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ $A \cap B = \{x : x \in A$ ਅਤੇ $x \in B\}$.

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਉਦਾਹਾਰਣ 12 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $A \cap B$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

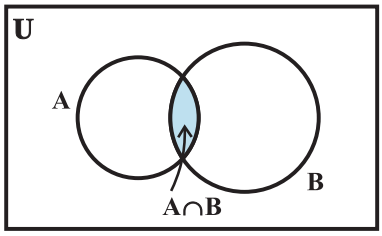
ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਸਿਰਫ਼ 6 ਅਤੇ 8 ਹੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੱਤ ਹਨ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A \cap B = \{6, 8\}$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਉਦਾਹਰਣ 14 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ X ਅਤੇ Y ਨੂੰ ਲਉ ਅਤੇ $X \cap Y$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤੱਤ ਗੀਤਾ ਹੀ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਸਿਰਫ਼ ਸਾਂਝਾ ਤੱਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $X \cap Y = \{$ ਗੀਤਾ$\}$.

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਮੰਨ ਲਓ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 3, 5, 7\}$. $A \cap B$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $A \cap B = B$

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A \cap B = \{2, 3, 5, 7\} = B$। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $B \subset A$ ਅਤੇ $A \cap B = B$.



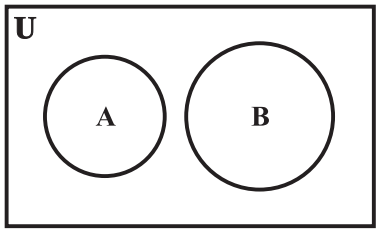
ਚਿੱਤਰ 1.5

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 7 ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੋਣ। ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ਅਤੇ } x \in B\}$$

ਚਿੱਤਰ 1.5 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ, A ਅਤੇ B ਦੀ ਕਾਟ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ $A \cap B = \phi$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ (disjoint sets) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.6

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਅਤੇ $B = \{1, 3, 5, 7\}$ ਹੈ ਤਾਂ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਤੱਤ ਨਹੀਂ, ਜੋ A ਅਤੇ B ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਹੋਵੇ।

ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਚਿੱਤਰ 1.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ B ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

ਕਾਟ ਦੀਆਂ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਧਰਮ (Some Properties of Operation of Intersection)

(i) $A \cap B = B \cap A$ — ਕ੍ਰਮਵਟਾਂਦਰਾ ਨਿਯਮ (Commutative law)

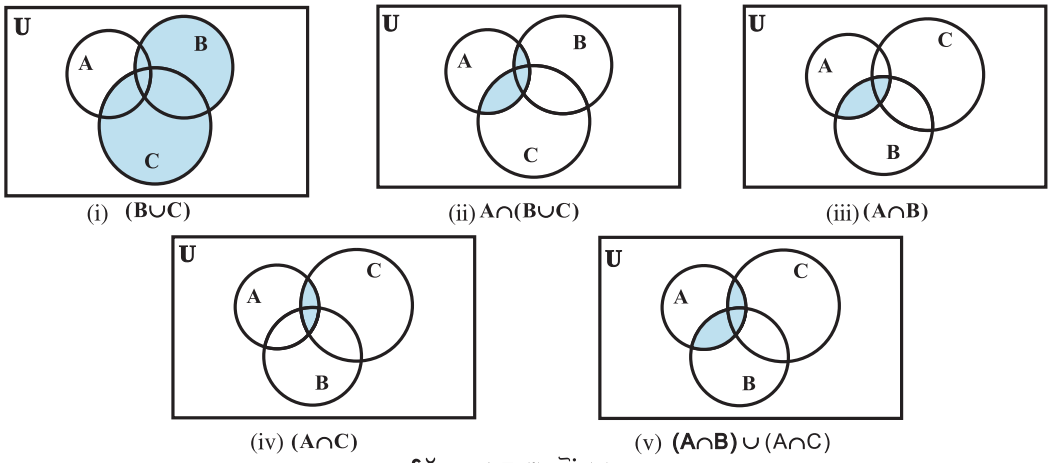
(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — ਸਹਿਚਾਰਤਾ ਨਿਯਮ (Associative law)

(iii) $\phi \cap A = \phi$, $U \cap A = A$ — ϕ ਅਤੇ U ਦਾ ਨਿਯਮ (Law of ϕ and U)

(iv) $A \cap A = A$ — ਵਰਗਸਮ ਨਿਯਮ (Idempotent law)

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — ਵੰਡ ਦਾ ਨਿਯਮ (Distributive law) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\cup$ ਤੇ $\cap$ ਵੰਡਿਆ ਹੈ।

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ (ਚਿੱਤਰ 1.7 (i) ਤੋਂ (v)) ਤੋਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



(i) $(B \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C)$ (iii) $(A \cap B)$ (iv) $(A \cap C)$ (v) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

ਚਿੱਤਰ 1.7 (i) ਤੋਂ (v)

1.10.3 ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ (Difference of sets) ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਦਾ ਅੰਤਰ ਉਹਨਾਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਤਾਂ ਹਨ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਚਿੰਨ੍ਹਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਇਸਨੂੰ A – B ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ "A ਘਟਾਉ B" ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਮੰਨ ਲਉ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}, B = { 2, 4, 6, 8 }. ਤਾਂ A – B ਅਤੇ B – A ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A – B = { 1, 3, 5 } ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ 1, 3, 5 ਤੱਤ A ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ B – A = { 8 }, ਕਿਉਂਕਿ 8 ਤੱਤ B ਵਿੱਚ ਹੈ ਪਰ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

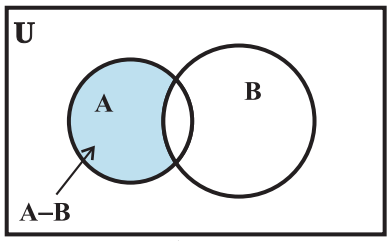
ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A - B \neq B - A$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਮੰਨ ਲਉ V = { *a, e, i, o, u* } ਅਤੇ B = { *a, i, k, u*} ਤਾਂ V – B ਅਤੇ B – V ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ V – B = { *e, o* } ਕਿਉਂਕਿ ਤੱਤ *e, o* ਸਮੂਹ V ਵਿੱਚ ਹਨ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ ਅਤੇ B – V = { *k* }, ਕਿਉਂਕਿ ਤੱਤ *k*, B ਵਿੱਚ ਹੈ ਪਰ V ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $V - B \neq B - V$ ਸਮੂਹ ਨਿਰਮਾਣ ਰੂਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

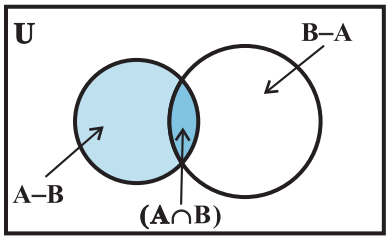
$$A - B = \{ x : x \in A \text{ ਅਤੇ } x \notin B \}$$



ਚਿੱਤਰ 1.8

ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ 1.8 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਛਾਇਆਅੰਕਿਤ ਹਿੱਸਾ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਅੰਤਰ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.9

ਟਿੱਪਣੀ : ਸਮੂਹ A – B, $A \cap B$ ਅਤੇ B – A ਸਾਰੇ ਸਮੂਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਭਾਵ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 1.9 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ ਸੰਘ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $X = \{1, 3, 5\}$ $Y = \{1, 2, 3\}$

(ii) $A = \{a, e, i, o, u\}$ $B = \{a, b, c\}$

(iii) $A = \{x : x$ ਇੱਕ 3 ਦੀ ਗੁਣਜ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

$B = \{x : x$ ਇੱਕ 6 ਤੋਂ ਘੱਟ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

(iv) $A = \{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $1 < x \leq 6\}$

$B = \{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $6 < x < 10\}$

(v) $A = \{1, 2, 3\}, B = \phi$

2. ਮੰਨ ਲਓ $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ ਕੀ $A \subset B$? $A \cup B$ ਕੀ ਹੈ ?

3. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $A \subset B$ ਤਾਂ $A \cup B$ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

4. ਜੇਕਰ $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$ ਅਤੇ $D = \{7, 8, 9, 10\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \cup B$ (ii) $A \cup C$ (iii) $B \cup C$ (iv) $B \cup D$

(v) $A \cup B \cup C$ (vi) $A \cup B \cup D$ (vii) $B \cup C \cup D$

5. ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਕਾਟ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6. ਜੇਕਰ $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{7, 9, 11, 13\}$, $C = \{11, 13, 15\}$ ਅਤੇ $D = \{15, 17\}$; ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \cap B$ (ii) $B \cap C$ (iii) $A \cap C \cap D$

(iv) $A \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $A \cap (B \cup C)$

(vii) $A \cap D$ (viii) $A \cap (B \cup D)$ (ix) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$

(x) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$

7. ਜੇਕਰ $A = \{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$, $B = \{x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$, $C = \{x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$ ਅਤੇ $D = \{x : x$ ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$, ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A \cap B$ (ii) $A \cap C$ (iii) $A \cap D$

(iv) $B \cap C$ (v) $B \cap D$ (vi) $C \cap D$

8. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜੇ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ :

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ ਅਤੇ $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $4 \leq x \leq 6\}$

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ ਅਤੇ $\{c, d, e, f\}$

(iii) $\{x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$ ਅਤੇ $\{x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$

9. ਜੇਕਰ $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$,

$C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, $D = \{5, 10, 15, 20\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $A - B$ (ii) $A - C$ (iii) $A - D$ (iv) $B - A$

(v) $C - A$ (vi) $D - A$ (vii) $B - C$ (viii) $B - D$

(ix) $C - B$ (x) $D - B$ (xi) $C - D$ (xii) $D - C$

10. ਜੇਕਰ $X = \{a, b, c, d\}$ ਅਤੇ $Y = \{f, b, d, g\}$, ਤਾ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) $X - Y$ (ii) $Y - X$ (iii) $X \cap Y$

11. ਜੇਕਰ **R** ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਅਤੇ **Q** ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇ ਤਾਂ **R – Q** ਪਤਾ ਕਰੋ ?

12. ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜੇ ਸਹੀ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਹੜੇ ਗ਼ਲਤ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਲਿਖੋ :

(i) $\{2, 3, 4, 5\}$ ਅਤੇ $\{3, 6\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

(ii) $\{a, e, i, o, u\}$ ਅਤੇ $\{a, b, c, d\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

(iii) $\{2, 6, 10, 14\}$ ਅਤੇ $\{3, 7, 11, 15\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

(iv) $\{2, 6, 10\}$ ਅਤੇ $\{3, 7, 11\}$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ।

1.11 ਸਮੂਹ ਦਾ ਪੂਰਕ (Complement of a Set)

ਮੰਨ ਲਓ U ਇਕ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ A, U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਉਹ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ 42 ਦੀਆਂ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A = \{x : x \in U$ ਅਤੇ x, 42 ਦੀ ਭਾਜਕ ਨਹੀਂ ਹੈ$\}$ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $2 \in U$ ਪਰ $2 \notin A$, ਕਿਉਂਕਿ 2, 42 ਦਾ ਭਾਜਕ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $3 \in U$ ਪਰ $3 \notin A$ ਅਤੇ $7 \in U$ ਪਰ $7 \notin A$। ਹੁਣ ਸਿਰਫ਼ 2, 3 ਅਤੇ 7 ਸਮੂਹ U ਦੇ ਉਹ ਤੱਤ ਹਨ ਜਿਹੜੇ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਭਾਵ $\{2, 3, 7\}$ ਨੂੰ U ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A ਦਾ ਪੂਰਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ A' ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A' = \{2, 3, 7\}$. ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $A' = \{x : x \in U$ ਅਤੇ $x \notin A\}$ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ $A' = U - A$ ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ :

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 8 ਮੰਨ ਲਓ U ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ A, U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ A ਦਾ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ U ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਚਿੰਨਾਤਮਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਨੂੰ U ਦੇ ਸੰਦਰਭ ਵਿੱਚ A' ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$A' = \{x : x \in U \text{ ਅਤੇ } x \notin A\} \text{ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ } A' = U - A$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A ਦੇ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਵਿਕਲਪ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ U ਅਤੇ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਮੰਨ ਲਓ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ਅਤੇ $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. A' ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ U ਦੇ 2, 4, 6, 8, 10 ਤੱਤ ਇਹੋ-ਜਿਹੇ ਹਨ, ਜੋ A ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਮੰਨ ਲਓ U ਇੱਕ ਸਹਿ ਸਿੱਖਿਆ (co-educational) ਸਕੂਲ ਦੀ ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਸਾਰੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਹੈ ਅਤੇ A ਜਮਾਤ XI ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। A' ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ A ਸਾਰੀਆਂ ਲੜਕੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A' ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਰਹੇ ਸਾਰੇ ਲੜਕਿਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ A ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ A' ਵੀ U ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਫਿਰ ਤੋਂ ਉਪਰੋਕਤ ਦਿੱਤੀ ਉਦਾਹਰਣ 20 ਤੋਂ $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

ਇਸ ਲਈ $(A')' = \{x : x \in U$ ਅਤੇ $x \notin A'\} = \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$

ਪੂਰਕ ਸਮੂਹ ਦੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਤੋਂ ਸਪੱਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ U ਦੇ ਕਿਸੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਲਈ $(A')' = A$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਅਗਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ $(A \cup B)'$ ਅਤੇ $A' \cap B'$ ਦਾ ਨਤੀਜਾ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਮੰਨ ਲਉ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 3\}$ ਅਤੇ $B = \{3, 4, 5\}$ ਹੈ ਤਾਂ A', B', $A' \cap B'$, $A \cup B$ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ਹੱਲ : ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $A' = \{1, 4, 5, 6\}$, $B' = \{1, 2, 6\}$ ਇਸ ਲਈ $A' \cap B' = \{1, 6\}$ ਫਿਰ ਤੋਂ $A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$, ਇਸ ਲਈ $(A \cup B)' = \{1, 6\}$ ਤਾਂ

$$(A \cup B)' = \{1, 6\} = A' \cap B'$$

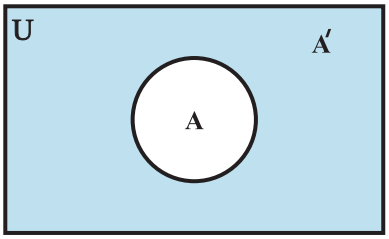
ਇਹ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿਆਪਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੀ ਠੀਕ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B, U ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਤਾਂ

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(A \cap B)' = A' \cup B'$। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ ਦਾ ਪੂਰਕ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਕਾਟ ਦਾ ਪੂਰਕ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਪੂਰਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸੰਘ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਡੀ. ਮਾਰਗਨਜ਼ ਨਿਯਮ (De Morgan's Laws) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਾਮ ਗਣਿਤਕਾਰ De Morgan ਦੇ ਨਾਮ ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ।

ਸਮੂਹ A ਦੇ ਪੂਰਕ A' ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 1.10 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਰਾਹੀਂ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ ਭਾਗ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਪੂਰਕ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.10

ਪੂਰਕ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਗੁਣਧਰਮ (Some Properties of Complement Sets)

1. ਪੂਰਕ ਨਿਯਮ, (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. ਡੀ ਮਾਰਗਨਜ਼ ਨਿਯਮ, (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. ਦੋਹਰਾ ਪੂਰਕ ਨਿਯਮ, $(A')' = A$

4. ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਦੇ ਨਿਯਮ $\phi' = U$ ਅਤੇ $U' = \phi$

ਇਹਨਾਂ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰਾਂ ਰਾਹੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 1.5

1. ਮੰਨ ਲਓ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ਅਤੇ $C = \{3, 4, 5, 6\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ (i) A' (ii) B' (iii) $(A \cup C)'$ (iv) $(A \cup B)'$ (v) $(A')'$ (vi) $(B - C)'$

2. ਮੰਨ ਲਉ $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਪੂਰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :
(i) $A = \{a, b, c\}$ (ii) $B = \{d, e, f, g\}$
(iii) $C = \{a, c, e, g\}$ (iv) $D = \{f, g, h, a\}$

3. ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਸਮੂਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਪੂਰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
(i) $\{x : x$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ$\}$
(ii) $\{x : x$ ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$
(iii) $\{x : x, 3$ ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਗੁਣਾਂਕ ਹੈ$\}$
(iv) $\{x : x$ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ $\}$
(v) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜੋ 3 ਅਤੇ 5 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦੀ ਹੈ$\}$
(vi) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਹੈ $\}$ (vii) $\{x : x$ ਇੱਕ ਪੂਰਨ ਘਣ ਹੈ$\}$
(viii) $\{x : x + 5 = 8\}$ (ix) $\{x : 2x + 5 = 9\}$
(x) $\{x : x \geq 7\}$ (xi) $\{x : x \in N$ ਅਤੇ $2x + 1 > 10\}$

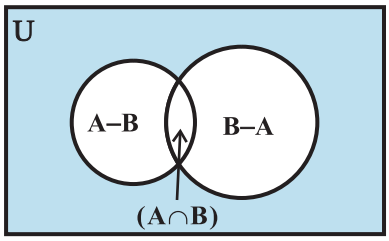
4. ਜੇਕਰ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$ ਅਤੇ $B = \{2, 3, 5, 7\}$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ।
(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਲਈ ਉਚਿਤ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉ :
(i) $(A \cup B)'$, (ii) $A' \cap B'$, (iii) $(A \cap B)'$, (iv) $A' \cup B'$

6. ਮੰਨ ਲਓ U, ਸਮਤਲ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਜੇਕਰ A ਉਹਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਦਾ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਕੋਣ $60°$ ਨਹੀਂ ਹੈ ਤਾਂ A' ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ ?

7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨਾਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :
(i) $A \cup A' = \ldots$ (ii) $\phi' \cap A = \ldots$
(iii) $A \cap A' = \ldots$ (iv) $U' \cap A = \ldots$

1.12 ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ ਅਤੇ ਕਾਟ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਵਿਵਹਾਰਕ (ਪ੍ਰਯੋਗਿਕ) ਪ੍ਰਸ਼ਨ (Practical Problems on Union and Intersection of Two Sets)



ਚਿੱਤਰ 1.11

ਪਹਿਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੰਘ, ਕਾਟ ਅਤੇ ਅੰਤਰ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਦੇ ਜੀਵਨ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁੱਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਾਠ, ਸੰਭਾਵਨਾ (ਪਾਠ 16) ਵਿੱਚ ਵਰਤਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਕੋਈ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ। ਜੇਕਰ $A \cap B = \phi$, ਤਾਂ

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ... (1)

$A \cup B$ ਦੇ ਤੱਤ ਜਾਂ A ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੇ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ ਪਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹੋਣਗੇ ਕਿਉਂਕਿ $A \cap B = \phi$। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ (1) ਨਤੀਜਾ ਤੁਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਤਾਂ

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ ... (2)

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੂਹ $A - B$, $A \cap B$ ਅਤੇ $B - A$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਸੰਘ $A \cup B$ (ਚਿੱਤਰ 1.11) ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$
$$= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) + n(A \cap B) - n(A \cap B)$$
$$= n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$ ਜੋ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇ A, B ਅਤੇ C ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹਨ ਤਾਂ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \quad \ldots (3)$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ ਤੋਂ}]$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[A \cap (B \cup C)] \quad [(2) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਕਿਉਂਕਿ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, ਇਸ ਤੋਂ

$$n[A \cap (B \cup C)] = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$$
$$= n(A \cap B) + n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

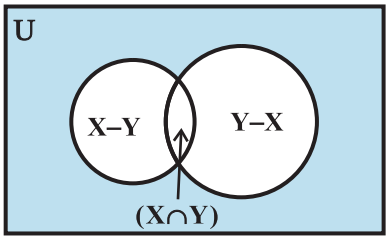
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ਇਸ ਤੋਂ (3) ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ $X \cup Y$ ਵਿੱਚ 50 ਤੱਤ, X ਵਿੱਚ 28 ਤੱਤ ਅਤੇ Y ਵਿੱਚ 32 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ $X \cap Y$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$n(X \cup Y) = 50,\ n(X) = 28,\ n(Y) = 32,\ n(X \cap Y) = ?$$



ਚਿੱਤਰ 1.12

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ :

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y),$$

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$n(X \cap Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cup Y)$$
$$= 28 + 32 - 50 = 10$$

ਦੂਸਰਾ ਤਰੀਕਾ : ਮੰਨ ਲਉ $n(X \cap Y) = k$, ਤਾਂ

$n(X - Y) = 28 - k$, $n(Y - X) = 32 - k$ (ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ 1.12 ਤੋਂ)

ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $50 = n(X \cup Y) = n(X - Y) + n(X \cap Y) + n(Y - X)$

$$= (28 - k) + k + (32 - k)$$

ਇਸ ਲਈ, $k = 10$

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਵਿੱਚ 20 ਅਧਿਆਪਕ ਹਨ ਜੋ ਗਣਿਤ ਜਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 12 ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 4 ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਵੇਂ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਂਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਗਣਿਤ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ M ਨਾਲ ਅਤੇ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ P ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਕਥਨ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਜਾਂ' ਸਾਨੂੰ ਸੰਘ ਅਤੇ ਸ਼ਬਦ ਅਤੇ ਸਾਨੂੰ ਕਾਟ ਬਾਰੇ ਸੰਕੇਤ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$n(M \cup P) = 20,\ n(M) = 12 \text{ ਅਤੇ } n(M \cap P) = 4$$

ਅਸੀਂ $n(P)$ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ!

ਨਤੀਜੇ

$$n(M \cup P) = n(M) + n(P) - n(M \cap P)$$

ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$20 = 12 + n(P) - 4$$

ਇਸ ਲਈ $n(P) = 12$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭੌਤਿਕ ਵਿਗਿਆਨ ਪੜ੍ਹਾਉਣ ਵਾਲੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 12 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25 : 35 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, 24 ਕ੍ਰਿਕਟ ਖੇਡਣਾ ਅਤੇ 16 ਫੁੱਟਬਾਲ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਖੇਡ ਖੇਡਣਾ ਜ਼ਰੂਰ ਪਸੰਦ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕ੍ਰਿਕਟ ਅਤੇ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਾਂ ਖੇਡਣੀਆਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ X ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕ੍ਰਿਕਟ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ Y ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਫੁੱਟਬਾਲ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। $X \cup Y$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੋਵੇਗਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਘੱਟੋ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਖੇਡ ਖੇਡਣੀ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ $X \cap Y$ ਉਹ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਾਂ ਖੇਡਣੀਆਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $n(X) = 24,\ n(Y) = 16,\ n(X \cup Y) = 35,\ n(X \cap Y) = ?$

ਨਿਯਮ $n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ

ਸਾਨੂੰ $35 = 24 + 16 - n(X \cap Y)$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $n(X \cap Y) = 5$

ਭਾਵ 5 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਾਂ ਖੇਡਣੀਆਂ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 26 : ਇਕ ਸਕੂਲ ਦੇ 400 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਰਵੇਖਣ ਕਰਨ ਤੇ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸੇਬ ਦਾ ਰਸ, 150 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਰਸ ਅਤੇ 75 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇਂ ਰਸ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਮਿਲਦੇ ਹਨ। ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਤਾਂ ਸੇਬ ਦਾ ਰਸ ਪੀਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ U ਉਹਨਾਂ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ A ਸੇਬ ਦਾ ਰਸ ਪੀਣ ਵਾਲੇ B ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਰਸ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ

$$n(U) = 400,\ n(A) = 100,\ n(B) = 150 \text{ ਅਤੇ } n(A \cap B) = 75$$

ਹੁਣ
$$\begin{aligned} n(A' \cap B') &= n(A \cup B)' \\ &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= n(U) - n(A) - n(B) + n(A \cap B) \\ &= 400 - 100 - 150 + 75 = 225 \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ 225 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ ਜੋ ਨਾ ਸੇਬ ਦਾ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਰਸ ਪੀਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 27 : 200 ਵਿਅਕਤੀ ਕਿਸੇ ਚਮੜੀ ਦੇ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪੀੜਤ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 120 ਵਿਅਕਤੀ ਰਸਾਇਣ C_1, 50 ਵਿਅਕਤੀ ਰਸਾਇਣ C_2, ਅਤੇ 30 ਵਿਅਕਤੀ ਰਸਾਇਣਾਂ C_1 ਅਤੇ C_2 ਦੋਵਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੋਏ ਹਨ, ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹੋਏ ਹਨ :

(i) ਰਸਾਇਣ C_1 ਪਰ, ਰਸਾਇਣ C_2 ਨਹੀਂ (ii) ਰਸਾਇਣ C_2 ਪਰ, ਰਸਾਇਣ C_1 ਨਹੀਂ

(iii) ਰਸਾਇਣ C_1 ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ C_2

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ U ਸਰਵਵਿਆਪੀ ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਚਮੜੀ ਰੋਗ ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹਨ, A ਰਸਾਇਣ C_1 ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਅਤੇ B ਰਸਾਇਣ C_2 ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਲੋਕਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਤਾਂ $n(U) = 200$, $n(A) = 120$, $n(B) = 50$ ਅਤੇ $n(A \cap B) = 30$

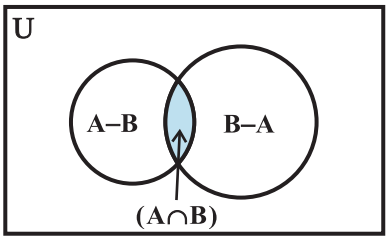
(i) ਚਿੱਤਰ 1.13 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਅਨੁਸਾਰ

$$A = (A - B) \cup (A \cap B).$$

$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$ (ਕਿਉਂਕਿ $(A - B)$ ਅਤੇ $A \cap B$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ)

ਜਾਂ $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 120 - 30 = 90$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋ ਰਸਾਇਣ C_1 ਤੋਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹਨ, ਪਰ C_2 ਤੋਂ ਨਹੀਂ, 90 ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 1.13

(ii) ਚਿੱਤਰ 1.13 ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ

$B = (B - A) \cup (A \cap B)$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

ਅਤੇ $n(B) = n(B - A) + n(A \cap B)$

(ਕਿਉਂਕਿ $B - A$ ਅਤੇ $A \cap B$ ਨਾ-ਜੁੜੇ ਹਨ

ਜਾਂ $n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

$= 50 - 30 = 20$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜੋ ਰਸਾਇਣ C_2 ਤੋਂ ਤਾਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਹਨ ਪਰ C_1 ਤੋਂ ਨਹੀਂ 20 ਹੈ।

(iii) ਰਸਾਇਣ C_1 ਜਾਂ ਰਸਾਇਣ C_2 ਤੋਂ ਪ੍ਰਭਾਵਿਤ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ,

ਭਾਵ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 120 + 50 - 30 = 140$

ਅਭਿਆਸ 1.6

1. ਮੰਨ ਲਉ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $n(X) = 17$, $n(Y) = 23$ ਅਤੇ $n(X \cup Y) = 38$ ਹੈ, $n(X \cap Y)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸਮੂਹ ਹਨ ਅਤੇ $X \cup Y$ ਵਿੱਚ 18 ਤੱਤ ਹਨ, X ਵਿੱਚ 8 ਤੱਤ ਅਤੇ Y ਵਿੱਚ 15 ਤੱਤ ਹਨ। $X \cap Y$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?
3. 400 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ, 250 ਵਿਅਕਤੀ ਹਿੰਦੀ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 200 ਵਿਅਕਤੀ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਹਿੰਦੀ ਅਤੇ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ?
4. ਜੇਕਰ S ਅਤੇ T ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ S ਵਿੱਚ 21 ਤੱਤ, T ਵਿੱਚ 32 ਤੱਤ ਅਤੇ $S \cap T$ ਵਿੱਚ 11 ਤੱਤ ਹਨ। $S \cup T$ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?
5. ਜੇਕਰ X ਅਤੇ Y ਦੋ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਅਤੇ X ਵਿੱਚ 40 ਤੱਤ, $X \cup Y$ ਵਿੱਚ 60 ਤੱਤ ਅਤੇ $X \cap Y$ ਵਿੱਚ 10 ਤੱਤ ਹੋਣ ਤਾਂ Y ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਤੱਤ ਹੋਣਗੇ ?
6. 70 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ, 37 ਵਿਅਕਤੀ ਕਾੱਫ਼ੀ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 52 ਵਿਅਕਤੀ ਚਾਹ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਘੱਟੋਂ-ਘੱਟ ਇਹਨਾਂ ਦੋਵਾਂ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਰਥਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਪਸੰਦ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਹਨ ਜੋ ਕਾੱਫ਼ੀ ਅਤੇ ਚਾਹ ਦੋਨਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ?
7. 65 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ, 40 ਕ੍ਰਿਕਟ ਖੇਡਣਾ, 10 ਕ੍ਰਿਕਟ ਅਤੇ ਟੈਨਿਸ ਦੋਵੇਂ ਖੇਡਣਾ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਸਿਰਫ਼ ਟੈਨਿਸ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ, ਕ੍ਰਿਕਟ ਨਹੀਂ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਟੈਨਿਸ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ?
8. ਇੱਕ ਕਮੇਟੀ ਵਿੱਚ 50 ਵਿਅਕਤੀ ਫਰੈਂਚ ਬੋਲਦੇ ਹਨ, 20 ਵਿਅਕਤੀ ਸਪੈਨਿਸ਼ ਬੋਲਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 10 ਵਿਅਕਤੀ ਸਪੈਨਿਸ਼ ਅਤੇ ਫਰੈਂਚ ਦੋਵੇਂ ਬੋਲਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਘੱਟੋਂ-ਘੱਟ ਇੱਕ ਭਾਸ਼ਾ ਬੋਲ ਸਕਦੇ ਹਨ ?

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 28 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਸ਼ਬਦ " CATARACT " ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਅਤੇ ਸ਼ਬਦ "TRACT" ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ X ਸ਼ਬਦ "CATARACT" ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ

$$X = \{ C, A, T, R \}$$

ਮੰਨ ਲਓ Y ਸ਼ਬਦ " TRACT" ਲਿਖਣ ਵਾਲੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਤਾਂ

$$Y = \{ T, R, A, C, T \} = \{ T, R, A, C \}$$

ਕਿਉਂਕਿ X ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ Y ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ Y ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਤੱਤ X ਵਿੱਚ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $X = Y$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 29 : ਸਮੂਹ $\{ -1, 0, 1 \}$ ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਉ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $A = \{ -1, 0, 1 \}$, A ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਖਾਲੀ ਸਮੂਹ ϕ ਹੈ। A ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤੱਤ ਹੈ $\{ -1 \}$, $\{ 0 \}$, $\{ 1 \}$ ਹਨ। A ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦੋ ਤੱਤ ਹਨ $\{-1, 0\}$,$\{0,1\}$, $\{-1, 1\}$ਹਨ। A ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਤੱਤ ਹਨ, ਖੁਦ A ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ϕ $\{-1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-1, 0\}$, $\{-1, 1\}$, $\{0, 1\}$ ਅਤੇ $\{-1, 0, 1\}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 30 : ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A \cup B = A \cap B$ ਤੋਂ ਭਾਵ $A = B$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a \in A$ ਤਾਂ $a \in A \cup B$। ਕਿਉਂਕਿ $A \cup B = A \cap B$ ਇਸ ਲਈ $a \in A \cap B$ ਭਾਵ $a \in B$ ਇਸ ਲਈ $A \subset B$. ਇਸੇ ਹੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੇਕਰ $b \in B$ ਤਾਂ $b \in A \cup B$। ਕਿਉਂਕਿ

$A \cup B = A \cap B$, ਇਸ ਲਈ $b \in A \cap B$ ਇਸ ਲਈ $b \in A$. ਇਸ ਲਈ $B \subset A$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A = B$

ਉਦਾਹਰਣ 31 : ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$$P (A \cap B) = P (A) \cap P (B)$$

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $X \in P (A \cap B)$ ਤਾਂ $X \subset A \cap B$, ਇਸ ਲਈ $X \subset A$ ਅਤੇ $X \subset B$

$\therefore X \in P (A)$ ਅਤੇ $X \in P (B)$

ਜਿਸਤੋਂ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ $X \in P (A) \cap P (B)$ ਇਸ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $P (A \cap B) \subset P (A) \cap P (B)$

ਮੰਨ ਲਓ $Y \in P (A) \cap P (B)$ ਇਸ ਤੋਂ $Y \in P (A)$ ਅਤੇ $Y \in P (B)$

ਇਸ ਲਈ $Y \subset A$ ਅਤੇ $Y \subset B$ ਇਸ ਲਈ $Y \subset A \cap B$, ਇਸ ਤੋਂ ਸਿੱਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ $Y \in P (A \cap B)$

ਇਸ ਤੋਂ $P (A) \cap P (B) \subset P (A \cap B)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $P (A \cap B) = P (A) \cap P (B)$

ਉਦਾਹਰਣ 32 : ਇੱਕ ਬਜ਼ਾਰ ਵਿੱਚ ਖੋਜ਼ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਸਮੂਹ ਨੇ 1000 ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਰਵੇਖਣ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਦੱਸਿਆ ਕਿ 720 ਗ੍ਰਾਹਕ ਉਤਪਾਦ A ਨੂੰ ਅਤੇ 450 ਗ੍ਰਾਹਕ ਉਤਪਾਦ B ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦੋਹਾਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ U ਉਹਨਾਂ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਪੁੱਛੇ ਗਏ। S ਉਹਨਾਂ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਉਤਪਾਦ A ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ T ਉਹਨਾਂ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਉਤਪਾਦ B ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $n (U) = 1000, n (S) = 720, n (T) = 450$

ਹੁਣ
$$\begin{aligned} n (S \cup T) &= n (S) + n (T) - n (S \cap T) \\ &= 720 + 450 - n (S \cap T) = 1170 - n (S \cap T) \end{aligned}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $n (S \cup T)$ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ ਜਦੋਂ $n (S \cap T)$ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗਾ, ਪਰ $S \cup T \subset U$ ਇਸ ਲਈ $n (S \cup T) \leq n (U) = 1000$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $n (S \cup T)$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁਲ 1000 ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $n (S \cap T)$ ਦਾ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਮੁੱਲ 170 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਵਾਂ ਉਤਪਾਦਾਂ ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਗ੍ਰਾਹਕਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 170 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 33 : 500 ਕਾਰ ਮਾਲਕਾਂ ਤੋਂ ਪੁੱਛਣ ਤੇ ਇਹ ਪਤਾ ਲੱਗਿਆ ਕਿ, 400 ਕੋਲ A ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਾਰ ਹੈ, 200 ਕੋਲ B ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਅਤੇ 50 ਕੋਲ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕਾਰ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਅੰਕੜੇ ਸਹੀਂ ਹਨ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ, ਕਿ ਪੁਛਗਿੱਛ ਕੀਤੇ ਗਏ ਕਾਰ ਮਾਲਕਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ U ਹੈ, M ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕਾਰ A ਦੇ ਮਾਲਕ ਹਨ ਅਤੇ S ਉਹਨਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜੋ ਕਾਰ B ਦੇ ਮਾਲਕ ਹਨ।

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $n(U) = 500$, $n(M) = 400$, $n(S) = 200$ ਅਤੇ $n(S \cap M) = 50$.

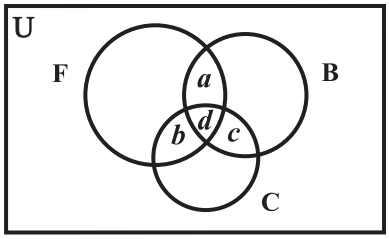
ਹੁਣ $n(S \cup M) = n(S) + n(M) - n(S \cap M) = 200 + 400 - 50 = 550$

ਪਰ $S \cup M \subset U$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਤੋਂ $n(S \cup M) \subset n \subset U$).

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਅੰਕੜੇ ਸਹੀ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 34 : ਇੱਕ ਕਾਲਜ ਵਿੱਚ ਫੁੱਟਬਾਲ ਲਈ 38, ਬਾਸਕਟ ਬਾਲ ਲਈ 15 ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਦੇ ਲਈ 20 ਤਮਗੇ ਵੰਡੇ ਗਏ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਤਮਗੇ ਕੁੱਲ 58 ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਨ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਤਿੰਨ ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨਾਂ ਖੇਡਾਂ ਲਈ ਮਿਲਨ ਤਾਂ ਕਿੰਨੇ ਲੋਕਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਿਰਫ਼ ਦੋ ਖੇਡਾਂ ਲਈ ਮਿਲੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ F, B ਅਤੇ C ਸਮੂਹ ਉਹਨਾਂ ਆਦਮੀਆਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਫੁੱਟਬਾਲ, ਬਾਸਕਟ ਬਾਲ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 1.14

ਤਾਂ $n(F) = 38$, $n(B) = 15$, $n(C) = 20$

$n(F \cup B \cup C) = 58$ ਅਤੇ $n(F \cap B \cap C) = 3$

ਹੁਣ $n(F \cup B \cup C) = n(F) + n(B) + n(C) - n(F \cap B) - n(F \cap C) - n(B \cap C) + n(F \cap B \cap C)$

ਇਸ ਤੋਂ $n(F \cap B) + n(F \cap C) + n(B \cap C) = 18$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਚਿੱਤਰ 1.14 ਵਿੱਚ ਵਿਖਾਈ ਵੇਨ ਚਿੱਤਰ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਇੱਥੇ a ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਫੁੱਟਬਾਲ ਅਤੇ ਬਾਸਕਟਬਾਲ ਲਈ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ, b ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਫੁੱਟਬਾਲ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ, c ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਬਾਸਕਟ ਬਾਲ ਅਤੇ ਕ੍ਰਿਕਟ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ ਅਤੇ d ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ।

ਇਸ ਲਈ $d = n(F \cap B \cap C) = 3$ ਅਤੇ $a + b + d + d + c + d = 18$

ਇਸ ਲਈ $a + b + c = 9$,

ਜੋ ਉਹਨਾਂ ਲੋਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤਿੰਨ ਖੇਡਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਦੋ ਖੇਡਾਂ ਵਿੱਚ ਤਮਗੇ ਮਿਲੇ।

ਪਾਠ 1 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੂਹਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਣ ਕਿਸਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਨਿਰਣਾ ਕਰੋ :

$A = \{ x : x \in \mathbf{R}$ ਅਤੇ $x, x^2 - 8x + 12 = 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ$\}$,

$B = \{ 2, 4, 6 \}$, $C = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$, $D = \{ 6 \}$.

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰ ਇਕ ਲਈ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਹੜਾ ਕਥਨ ਠੀਕ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਗ਼ਲਤ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਠੀਕ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਇਹ ਗ਼ਲਤ ਹੈ ਤਾਂ ਉਦਾਹਰਣ ਦਿਉ।

(i) ਜੇਕਰ $x \in A$ ਅਤੇ $A \in B$, ਤਾਂ $x \in B$

(ii) ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਅਤੇ $B \in C$, ਤਾਂ $A \in C$

(iii) ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਅਤੇ $B \subset C$, ਤਾਂ $A \subset C$

(iv) ਜੇਕਰ $A \not\subset B$ ਅਤੇ $B \not\subset C$, ਤਾਂ $A \not\subset C$

(v) ਜੇਕਰ $x \in A$ ਅਤੇ $A \not\subset B$, ਤਾਂ $x \in B$

(vi) ਜੇਕਰ $A \subset B$ ਅਤੇ $x \notin B$, ਤਾਂ $x \notin A$

3. ਮੰਨ ਲਓ A, B, ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਹਨ ਕਿ $A \cup B = A \cup C$ ਅਤੇ $A \cap B = A \cap C$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $B = C$

4. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਚਾਰ ਸ਼ਰਤਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਤੁਲ (Equivalent) ਹਨ :

(i) $A \subset B$ (ii) $A - B = \phi$ (iii) $A \cup B = B$ (iv) $A \cap B = A$

5. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $A \subset B$, ਤਾਂ $C - B \subset C - A$

6. ਮੰਨ ਲਓ $P(A) = P(B)$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $A = B$

7. ਕੀ ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B, ਲਈ $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$ ਠੀਕ ਹੈ ? ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ।

8. ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

$A = (A \cap B) \cup (A - B)$ ਅਤੇ $A \cup (B - A) = (A \cup B)$

9. ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

10. ਇਹ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਜੇਕਰ $A \cap B = A \cap C$ ਤਾਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ $B = C$

11. ਮੰਨ ਲਓ A ਅਤੇ B ਸਮੂਹ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ X ਲਈ $A \cap X = B \cap X = \phi$ ਅਤੇ $A \cup X = B \cup X$ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $A = B$

(ਸੰਕੇਤ $A = A \cap (A \cup X)$, $B = B \cap (B \cup X)$ ਅਤੇ ਵੰਡ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੋ)

12. A, B ਅਤੇ C ਸਮੂਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ $A \cap B$, $B \cap C$ ਅਤੇ $A \cap C$ ਖ਼ਾਲੀ ਸਮੂਹ ਨਾਂ ਹੋਣ ਅਤੇ $A \cap B \cap C = \phi$.

13. ਕਿਸੇ ਸੂਕਲ ਵਿੱਚ 600 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਤੇ ਕੀਤੇ ਸਰਵੇਖਣ ਅਨੁਸਾਰ, 150 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਚਾਹ, 225 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਕਾਫ਼ੀ ਅਤੇ 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਦੋਵੇ, ਚਾਹ ਅਤੇ ਕਾਫ਼ੀ ਪੀਣ ਵਾਲੇ ਮਿਲੇ। ਇਹ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨਾਂ ਤਾਂ ਚਾਹ ਪੀਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ, ਕਾੱਫ਼ੀ ?

14. ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਇੱਕਠ ਵਿੱਚ, 100 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਿੰਦੀ ਜਾਣਦੇ ਹਨ, 50 ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ ਜਾਣਦੇ ਹਨ ਅਤੇ 25 ਦੋਵੇਂ ਭਾਸ਼ਾਵਾਂ। ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਜਾਂ ਹਿੰਦੀ ਜਾਣਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਅੰਗਰੇਜ਼ੀ। ਇਕੱਠ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਹਨ ?

15. 60 ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਤੇ ਕੀਤੇ ਸਰਵੇਖਣ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ 25 ਲੋਕ H ਅਖ਼ਬਾਰ, 26 ਲੋਕ ਅਖਬਾਰ T, 26 ਲੋਕ ਅਖ਼ਬਾਰ I, 9 ਲੋਕ H ਅਤੇ I ਦੋਵੇਂ, 11 ਲੋਕ H ਅਤੇ T ਦੋਵੇਂ, 8 ਲੋਕ T ਅਤੇ I ਦੋਵੇਂ ਅਤੇ 3 ਲੋਕ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਅਖ਼ਬਾਰਾਂ ਪੜ੍ਹਦੇ ਹਨ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਅਖ਼ਬਾਰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।

(ii) ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਅਖ਼ਬਾਰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਾਲੇ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ।

16. ਇੱਕ ਸਰਵੇਖਣ ਵਿੱਚ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ 21 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ A, 26 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ B ਅਤੇ 29 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ C ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ 14 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ A ਅਤੇ B, 12 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ C ਅਤੇ A, 14 ਵਿਅਕਤੀ ਉਤਪਾਦ B ਅਤੇ C ਅਤੇ 8 ਵਿਅਕਤੀ ਤਿੰਨੋਂ ਹੀ ਉਤਪਾਦ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਵਿਅਕਤੀ ਕੇਵਲ ਉਤਪਾਦ C ਨੂੰ ਪਸੰਦ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਕੁਝ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾਵਾਂ ਅਤੇ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਸਾਰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ।

- ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਵਸਤੂਆਂ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਭਾਸ਼ਿਤ/ਸੁਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਇਕੱਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਇੱਕ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਤੱਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਖ਼ਾਲੀ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।
- ਇਕ ਸਮੂਹ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤੱਤਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਸਮੂਹ ਅਸੀਮਤ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਮੂਹ A ਅਤੇ B ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਬਿਲਕੁਲ ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਤੱਤ ਹੋਣ।
- ਇੱਕ ਸਮੂਹ A, ਸਮੂਹ B ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਤੱਤ B ਦੇ ਵੀ ਤੱਤ ਹੋਣ। ਅੰਤਰਾਲ R ਦੇ ਉਪ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
- ਕਿਸੇ ਸਮੂਹ A ਦਾ ਘਾਤ ਸਮੂਹ A ਦੇ ਸਾਰੇ ਉਪ ਸਮੂਹਾਂ ਦਾ ਇਕੱਠ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ P(A) ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।
- ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਸੰਘ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਿਹੜੇ ਤੱਤ ਜਾਂ ਤਾਂ A ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਜਾਂ B ਵਿੱਚ।
- ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਕਾਟ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਅਤੇ B ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ (ਭਾਵ ਸਾਂਝੇ) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਦਾ ਅੰਤਰ, ਜਦ A ਅਤੇ B ਇਸੇ ਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਹੋਣ, ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੇ ਤੱਤਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ A ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਪਰ B ਵਿੱਚ ਨਾ ਹੋਣ।
- ਕਿਸੇ ਦੋ ਸਮੂਹਾਂ A ਅਤੇ B ਲਈ, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ਅਤੇ $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- ਜੇਕਰ A ਅਤੇ B ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹ ਹੋਣ ਕਿ $A \cap B = \phi$, ਤਾਂ

  $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ ਅਤੇ

  ਜੇਕਰ $A \cap B \neq \phi$, ਤਾਂ $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਜਰਮਨ ਦੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ Georg Cantor (1845 ਈ : 1918 ਈ:) ਨੂੰ ਆਧੁਨਿਕ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦੇ ਵੱਡੇ ਹਿੱਸੇ ਦਾ ਜਨਮਦਾਤਾ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਾ ਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖੋਜ (ਸ਼ੋਧ) ਪੱਤਰ 1874 ਈ : ਦੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਵਿੱਚ ਆਏ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸਮਾਂ ਉਸ ਵਕਤ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋਇਆ ਜਦੋਂ ਉਹ $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + \ldots$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਾਲੀਆਂ ਤਿਕੋਣਮਿਤੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ (trigonometric series) ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਰਹੇ ਸੀ। 1874 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਨੇ ਆਪਣੇ ਇੱਕ ਸ਼ੋਧ (ਖੋਜ) ਪੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਸੰਗਤਤਾ (correspondence) ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ। 1879 ਈ: ਤੋਂ ਬਾਦ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸ਼ੋਧ (ਖੋਜ) ਪੱਤਰ ਐਬਸਟਰੇਕਟ ਸਮੂਹਾਂ (abstract sets) ਦੇ ਗੁਣਧਰਮਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਏ।

Cantor's ਦੀ ਸੋਧ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੋਰ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ (ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ) Richard Dade Kind (1831 ਈ.- 1916 ਈ.) ਨੇ ਪ੍ਰਸੰਸਾ ਯੋਗ ਢੰਗ ਨਾਲ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤਾ। ਲੇਕਿਨ KRONECKOR (1810ਈ-1893ਈ) ਨੇ ਅਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹਾਂ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਸਮੂਹਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੈਣ ਦੀ ਅਲੋਚਨਾ ਕੀਤੀ। ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ Gottlob frege ਨੇ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰ ਦੇ ਨਿਯਮਾਂ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਉਸ ਸਮੇਂ ਤਕ ਪੂਰਾ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਅਸਤਿਤਵ (ਹੋਂਦ) ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਸੀ। ਇੱਕ ਪ੍ਰਸਿਧ ਅੰਗਰੇਜ਼ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ Bertand Russell (1872 ਈ. -1970 ਈ.) ਸਨ, ਜਿਨਾਂ ਨੇ 1902 ਈ. ਵਿੱਚ ਦੱਸਿਆ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਮੂਹਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਦੇ ਅਸਤਿਤਵ (ਹੋਂਦ) ਦੀ ਕਲਪਨਾ ਇੱਕ ਵਿਰੋਧਾਭਾਸ ਨੂੰ ਜਨਮ ਦਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰਸਿੱਧ Russel ਨੂੰ (Paradox) Paul R. Halmos ਦੇ ਇਸਦੇ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ "Naive Set Theory" ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਹੈ ਕਿ "ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਵਿੱਚ ਸਭ ਕੁਝ ਹੈ"।

ਇਕੱਲੇ Russel's ਪੈਰਾਡੋਕਸ (Paradox) ਹੀ ਨਹੀਂ ਸਨ ਜੋ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਵਿੱਚ ਸਾਹਮਣੇ ਆਏ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਪੈਰਾਡੋਕਸ (Paradoxes) ਕੁਝ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ (mathematicians) ਅਤੇ ਤਰਕ ਸ਼ਾਸਤ੍ਰੀਆਂ ਨੇ ਪੇਸ਼ ਕੀਤੇ। ਇਹਨਾਂ ਲੜੀਵਾਰ ਪੈਰਾਡੋਕਸ (Paradoxes) ਦੇ ਸਿੱਟੇ ਵਜੋਂ ਪਹਿਲੀ ਸਵੈਸਿੱਧ (axiomatisation) ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਬਾਰੇ 1908 ਵਿੱਚ Ernst Zermelo ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਈ। 1922ਈ. ਵਿੱਚ Abraham Fraenkel ਨੇ ਦੂਸਰਾ ਪ੍ਰਸਤਾਵ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। 1925 ਈ. ਵਿੱਚ John Von Neumann ਨੇ ਲਗਾਤਰਤਾ ਦਾ ਸਪੱਸ਼ਟ ਰੂਪ (axiom) ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ 1937 ਈ. ਵਿੱਚ Paul Bernays ਨੇ ਸੰਤੋਖਜਨਕ ਸਵੈਸਿੱਧ (axiomatisation) ਪੇਸ਼ ਕੀਤੇ। Kurt Godel ਦੁਆਰਾ 1940 ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਸੁਧਾਰ ਆਪਣੇ ਮੋਨੋਗਰਾਫ਼ (monograph) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ। ਇਸ ਸੁਧਾਰ ਨੂੰ Von Neumann-Berneys (VNG) ਜਾਂ Godel Benays (GB) ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਕਠਨਾਈਆਂ ਦੇ ਬਾਵਜੂਦ, Cantor ਦੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤ ਨੂੰ ਵਰਤਮਾਨ ਕਾਲ ਦੇ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅੱਜਕੱਲ ਗਣਿਤ ਦੇ ਜ਼ਿਆਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਨੂੰ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਕ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਨ।