ਅਧਿਆਇ 10

ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ
(Straight Lines)

❖ *Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL* ❖

10.1 ਭੂਮਿਕਾ

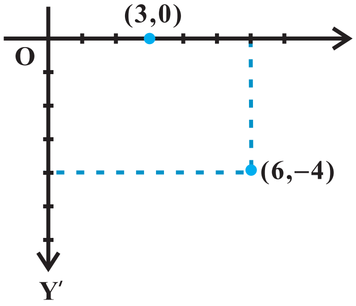
ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਤੋਂ ਦੋ ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ। ਮੁੱਖ ਤੌਰ ’ਤੇ ਇਹ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਸੁਚੱਜੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਮਸ਼ਹੂਰ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Rene Descartes ਨੇ 1637 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ La Geometry ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਤੋਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਰੰਭ ਹੋਇਆ। ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮੀ ਸੰਯੋਜਨ ਹੁਣ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼ੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ-ਧੁਰੇ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ, ਤਲ ਵਿਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਨਾ, ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ, ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਆਦਿ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਾਰ ਹਨ।

Rene Descartes
(1596 -1650)

ਆਉ ਪਿਛਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰੀਏ। ਦੁਹਰਾਈ ਲਈ XY ਤਲ ਵਿੱਚ (6, –4) ਅਤੇ (3, 0) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 10.1 ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (6, –4) ਧਨ x ਧੁਰੇ ਤੇ y–ਧੁਰੇ ਤੋਂ 6 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਅਤੇ ਰਿਣ–y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 4 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (3, 0) ਧਨ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.1

I. P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ’ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (6, – 4) ਅਤੇ (3, 0) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$\sqrt{(3-6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ ਇਕਾਈ}$$

II. (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ $m: n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ $\left(\dfrac{m\,x_2+n\,x_1}{m+n}, \dfrac{m\,y_2+n\,y_1}{m+n}\right)$.

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ A (1, –3) ਅਤੇ B (–3, 9) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਨੁਪਾਤ 1: 3 ਵਿਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $x = \frac{1.(-3)+3.1}{1+3} = 0$ ਅਤੇ $y = \frac{1.9+3.(-3)}{1+3} = 0$ ਹਨ।

III. ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $m = n$ ਤਾਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ਹਨ।

IV. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਹਨ।

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (4, 4), (3, – 2) ਅਤੇ (– 3, 16) ਹੈ।

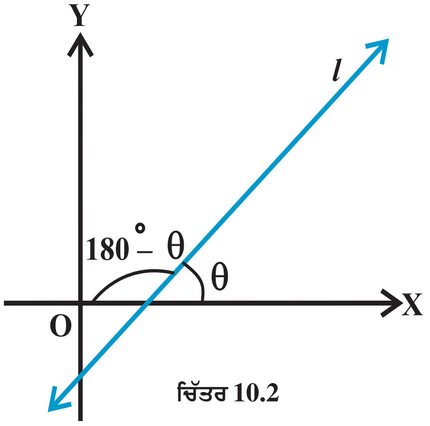
$$\frac{1}{2}\left|4(-2-16)+3(16-4)+(-3)(4+2)\right| = \frac{|-54|}{2} = 27$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਤਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਉਹ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਸਰਲ ਜਿਮਾਇਤੀ ਚਿੱਤਰ-ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਸ ਦੀ ਸਰਲਤਾ ਦੇ ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਰੇਖਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੀ ਇਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਰੋਜਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੇ ਅਨੁਭਵ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਰੋਚਕ ਅਤੇ ਉਪਯੋਗੀ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਥੇ ਸਾਡਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਜਿਸ ਲਈ ਢਲਾਣ (Slope) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਬਹੁਤ ਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

10.2 ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ (Slope of a Line)

ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਵਿੱਚ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਦੋ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਜੋ ਰੇਖਾ l, x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਘੜੀ ਦੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਰੇਖਾ l ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $0° \le \theta \le 180°$ (ਚਿੱਤਰ 10.2)।



ਚਿੱਤਰ 10.2

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 0° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਕ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ (y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ) ਦਾ ਝੁਕਾਅ 90° ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਜੇਕਰ θ ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ l ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਹੈ ਤਾਂ tan θ ਨੂੰ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਹ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 90° ਹੈ, ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

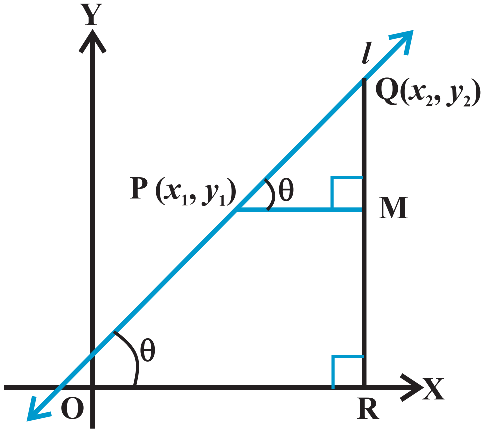
ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਨੂੰ m ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m = \tan \theta, \theta \ne 90°$

ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਢਲਾਣ 0 ਹੈ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

10.2.1 ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਜਦੋਂ ਉਸ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਨੂੰ ਉਸ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿਚ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10. 3 (i)

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P(x_1, y_1) ਅਤੇ Q(x_2, y_2) ਨਾ ਖੜ੍ਹੀ (non vertical) ਰੇਖਾ ਤੇ ਹਨ ਜਿਸ ਦਾ ਝੁਕਾਅ θ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $x_1 \neq x_2$ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ। ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹਾਂ।

ਲੰਬ QR, x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ PM ਲੰਬ RQ ਖਿੱਚੋ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 10.3 (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿਚ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ।

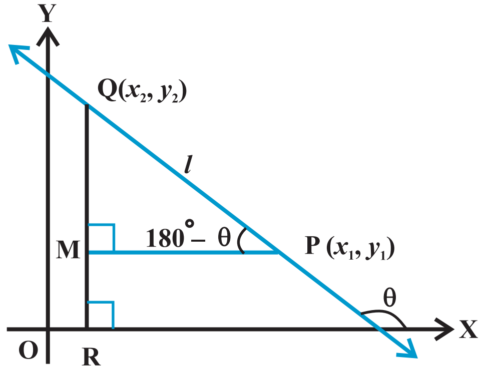
ਸਥਿਤੀ 1 ਜਦੋਂ ਕੋਣ θ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹੈ

ਚਿੱਤਰ 10.3 (i) ਵਿੱਚ, $\angle MPQ = \theta$ ...(1)

ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ $= m = \tan\theta$.

ਪ੍ਰੰਤੂ ΔMPQ, ਵਿਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $\tan\theta = \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ...(2)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ਚਿੱਤਰ 10. 3 (ii)

ਸਥਿਤੀ 2. ਜਦੋਂ ਕੋਣ θ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ

ਚਿੱਤਰ 10.3 (ii), ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$\angle MPQ = 180° - \theta$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = 180° - \angle MPQ$

ਹੁਣ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m = \tan\theta$$

$$= \tan(180° - \angle MPQ) = -\tan\angle MPQ$$

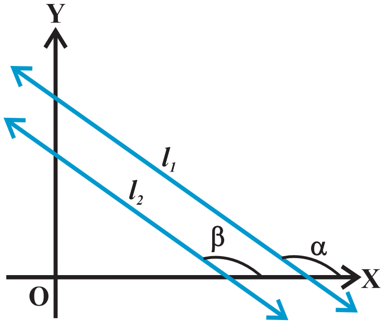
$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ :

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ਹੈ।

10.2.2 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ ਦੀ ਢਲਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ਰਤ

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿਚ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਢਲਾਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਕ੍ਰਮਵਾਰ α ਅਤੇ β ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10. 4

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਭਾਵ

$\alpha = \beta$ ਅਤੇ $\tan \alpha = \tan \beta$

ਇਸ ਲਈ $m_1 = m_2$, ਭਾਵ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ

ਅਰਥਾਤ

$$m_1 = m_2$$

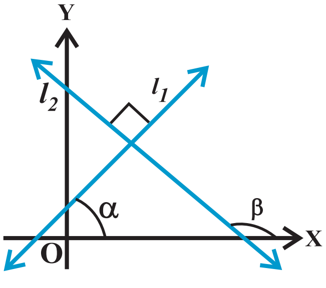
ਤਾਂ $$\tan \alpha = \tan \beta$$

ਟੇਂਜੈਂਟ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਤੋਂ ($0°$ ਅਤੇ $180°$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ), $\alpha = \beta$.

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਲੰਬ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10.5), ਤਾਂ $\beta = \alpha + 90°$



ਚਿੱਤਰ 10. 5

ਇਸ ਲਈ, $\tan \beta = \tan (\alpha + 90°)$

$$= -\cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

ਅਰਥਾਤ $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

ਜਾਂ $$m_1 m_2 = -1$$

ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ $m_1 m_2 = -1$, ਅਰਥਾਤ $\tan \alpha \tan \beta = -1$

ਤਾਂ $\tan \alpha = -\cot \beta = \tan (\beta + 90°)$ ਜਾਂ $\tan (\beta - 90°)$

ਇਸ ਲਈ, α ਅਤੇ β ਦਾ ਅੰਤਰ $90°$ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਆਪਸ ਵਿਚ ਲੰਬ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿਚ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਉਲਟ (ਗੁਣਾਤਮਕ) ਹੋਣ।

ਅਰਥਾਤ $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

ਜਾਂ $$m_1 m_2 = -1.$$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇਖੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ

(a) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (–1, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(b) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (7, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(c) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (3, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(d) ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ

ਹੱਲ : (a) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (– 1, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (7, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0$$

(c) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (3, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0},$$ ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(d) ਇੱਥੇ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ $\alpha = 60°$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m = \tan 60° = \sqrt{3}$$

10.2.3 *ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ*

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਬਾਰੇ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ, ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੋ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹੈ। ਜੇਕਰ α_1 ਅਤੇ α_2 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਝੁਕਾਅ ਹਨ, ਤਾਂ

$$m_1 = \tan\alpha_1 \quad \text{ਅਤੇ} \quad m_2 = \tan\alpha_2$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ θ ਅਤੇ ϕ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 (ਚਿੱਤਰ 10.6) ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ

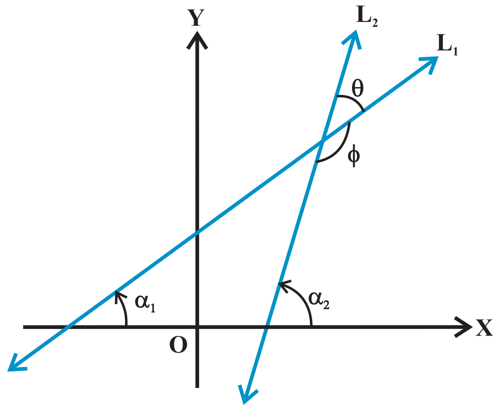
$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ ਅਤੇ } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$$

ਇਸ ਲਈ $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2} = \dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ (ਕਿਉਂਕਿ $1 + m_1m_2 \neq 0$)

ਅਤੇ $\phi = 180° - \theta$ ਇਸ ਲਈ

$$\tan\phi = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}, \text{ as } 1 + m_1m_2 \neq 0$$

ਹੁਣ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :



ਚਿੱਤਰ 10. 6

ਸਥਿਤੀ 1 ਜੇਕਰ $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ $\tan\theta$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\tan\phi$ ਰਿਣਾਤਮਕ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ θ ਨਿਊਣ ਕੋਣ ਅਤੇ ϕ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸਥਿਤੀ 2 ਜੇਕਰ $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਤਾਂ $\tan\theta$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\tan\phi$ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ θ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਅਤੇ ϕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ m_1 ਅਤੇ m_2 ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (ਮੰਨ ਲਉ θ)

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}\right|, \text{ ਜਿੱਥੇ } 1+m_1m_2 \neq 0 \qquad \ldots (1)$$

ਅਧਿਕ ਕੋਣ (ਮੰਨਿਆ ਕਿ ϕ) $\phi = 180^0 - \theta$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\dfrac{\pi}{4}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\dfrac{1}{2}$, ਹੈ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

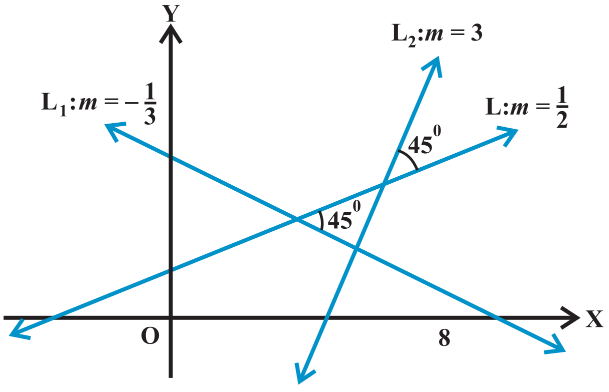
ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ m_1 ਅਤੇ m_2 ਢਲਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}\right| \qquad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$ ਅਤੇ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ (1), ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right| \quad \text{ਜਾਂ} \quad 1 = \left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|,$$



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m} = 1$ ਜਾਂ $\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m} = -1$

ਅਰਥਾਤ $m = 3$ ਜਾਂ $m = -\frac{1}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ 3 ਜਾਂ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.7 ਵਿੱਚ ਦੋ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: (–2, 6) ਅਤੇ (4, 8) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ (8, 12) ਅਤੇ (x, 24) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (– 2, 6) ਅਤੇ (4, 8) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(8, 12) ਅਤੇ (x, 24) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

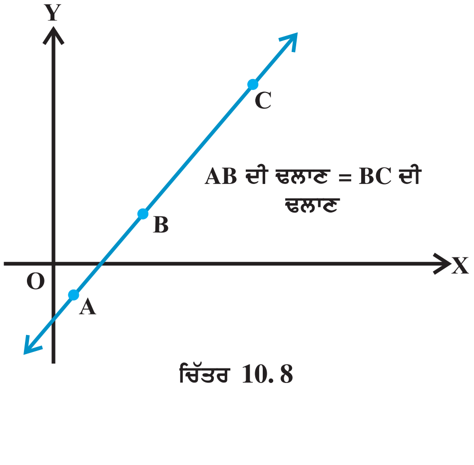
$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਲੰਬ ਹਨ

$m_1 m_2 = -1$, ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\frac{1}{3}\times\frac{12}{x-8} = -1 \quad \text{ਜਾਂ} \quad x = 4.$$

10.2.4 *ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਮਰੇਖਿਕਤਾ (Collinearity)* ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ A, B ਅਤੇ C, XY-ਤਲ ਵਿਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਤਿੰਨੋਂ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣਗੇ (ਚਿੱਤਰ 10.8) ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ AB ਦੀ ਢਲਾਣ = BC ਦੀ ਢਲਾਣ।



ਚਿੱਤਰ 10.8

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ P (h, k), Q (x_1, y_1) ਅਤੇ R (x_2, y_2) ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$

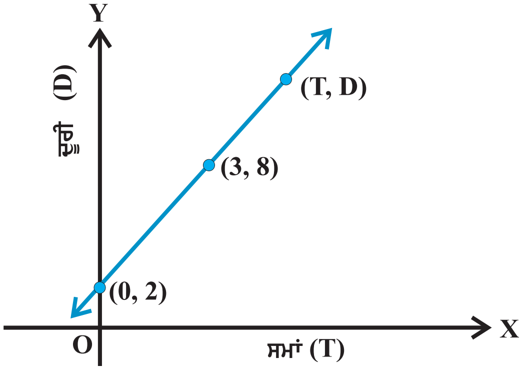
ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ P, Q ਅਤੇ R ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

PQ ਦੀ ਢਲਾਣ = QR ਦੀ ਢਲਾਣ, ਜੋ ਕਿ, $\frac{y_1-k}{x_1-h} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ਜਾਂ $$\frac{k-y_1}{h-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ਜਾਂ $$(h-x_1)(y_2-y_1)=(k-y_1)(x_2-x_1)$$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਚਿੱਤਰ 10.9 ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦਾ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦੇ ਦੋ ਸਥਾਨ ਜਦੋਂ T = 0, D = 2 ਅਤੇ ਜਦੋਂ T = 3, D = 8 ਹੈ ਦਰਜ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਢਲਾਣ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਗਤੀ ਦਾ ਨਿਯਮ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੂਰੀ, ਸਮੇਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.9

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ (T, D) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ T ਸਮੇਂ ਤੇ D ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਬਿੰਦੂ (0, 2), (3, 8) ਅਤੇ (T, D) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{8-2}{3-0}=\frac{D-8}{T-3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 6(T-3)=3(D-8)$$

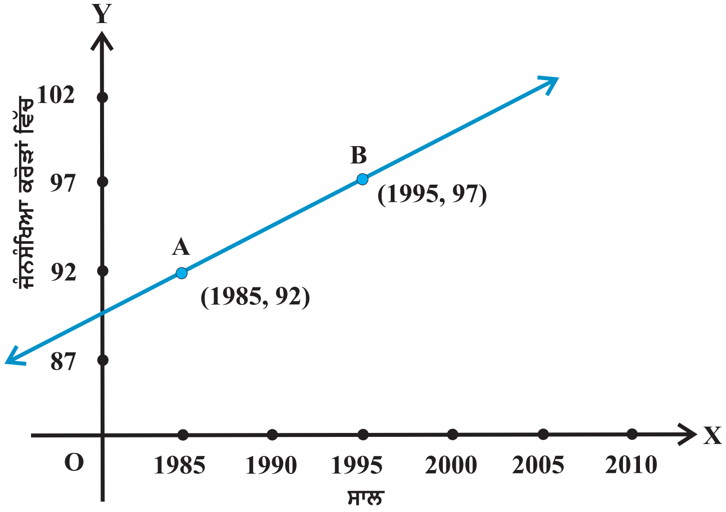
ਜਾਂ $D = 2(T + 1)$,

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਤਲ (Cartesian Plane) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) ਅਤੇ (– 4, –2) ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ $2a$ ਹੈ, ਦਾ ਅਧਾਰ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਅਧਾਰ ਦਾ ਮੱਧ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ : (i) PQ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। (ii) PQ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
4. x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (7, 6) ਅਤੇ (3, 4) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ P (0, – 4) ਅਤੇ B (8, 0) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
6. ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (4, 4), (3, 5) ਅਤੇ (–1, –1) ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
7. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਧਨਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘੜੀ ਦੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉਲਟ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
8. x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(x, -1)$, (2,1) ਅਤੇ (4, 5) ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ।
9. ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) ਅਤੇ (–3, 2) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
10. x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (3,–1), (4,–2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣ ਦਾ ਟੇਂਜੈਂਟ $\frac{1}{3}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਰੇਖਾ (x_1, y_1) ਅਤੇ (h, k) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ (Slope) m ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $k-y_1=m(h-x_1)$
13. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ $(h, 0)$, (a, b) ਅਤੇ $(0, k)$ ਇੱਕ ਰੇਖਾਂ 'ਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\frac{a}{h}+\frac{b}{k}=1$

14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੰਨਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਸਾਲ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 10.10), ਰੇਖਾ AB ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਲ 2010 ਵਿੱਚ ਜੰਨਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?



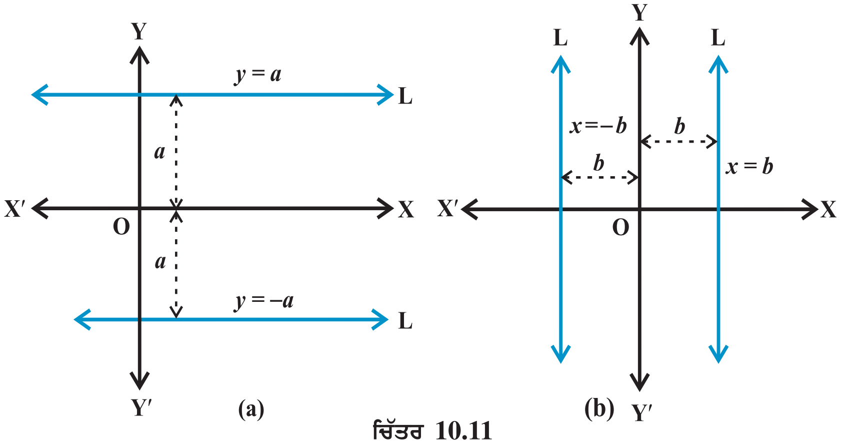
ਚਿੱਤਰ 10.10

10.3 ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ *(Various forms of the equation of a line)*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿਚ ਸਹਾਇਕ ਹੈ :

ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ’ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਰੇਖਾ ’ਤੇ ਹੋਣ ਦੀ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$, XY-ਤਲ ਵਿਚ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ L ਇਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਹੈ। L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਅਸੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨ ਜਾਂ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਤਾਂ ਹੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ P, L ਉੱਤੇ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਝੂਠ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਇਹ ਕਥਨ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ ਚਲ x ਅਤੇ y ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਧੀਨ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

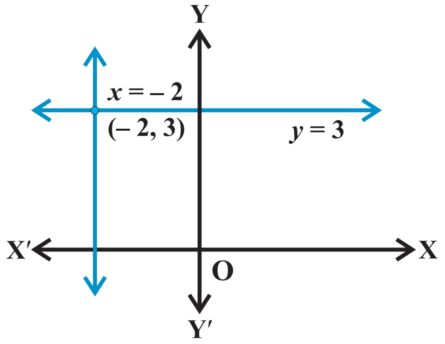
10.3.1 *ਲੇਟਵੀਆਂ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ (Horizontal and Vertical Lines)* ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ L, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ a ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਟੀ ਜਾਂ ਤਾਂ a ਜਾਂ $-a$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.11(*a*)] ਇਸ ਲਈ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਤਾਂ $y = a$ ਜਾਂ $y = -a$ ਹੈ। ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਚੋਣ, ਇਸ ’ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ ਜਾਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ b ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਸਥਿਤ ਇਕ ਖੜਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਤਾਂ $x = b$ ਹੈ ਜਾਂ $x = -b$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.11 (b)]।



ਚਿੱਤਰ 10.11

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਲਿਖੋ।

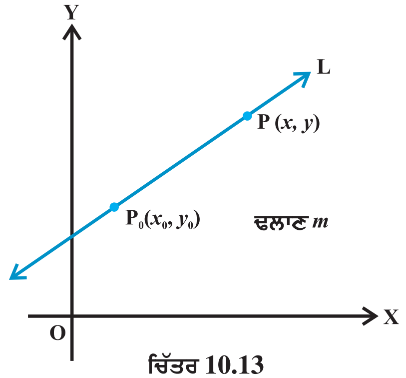
ਹੱਲ : ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਚਿੱਤਰ 10.12 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਟੀ 3 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = 3$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x = -2$ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.12)।



ਚਿੱਤਰ 10.12

10.3.2 *ਬਿੰਦੂ-ਢਲਾਣ ਰੂਪ (Point-slope form)* ਮੰਨ ਲਉ $P_0\ (x_0, y_0)$ ਇੱਕ ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ L ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ m ਹੈ 'ਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (Fixed) ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਰੇਖਾ L 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.13)।

ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 10.13

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \text{ਭਾਵ,} \quad y - y_0 = m(x - x_0) \qquad ...(1)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $P_0\ (x_0, y_0)$, L ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (x, y) ਦੇ ਨਾਲ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ $P_0(x_0, y_0)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ, ਢਲਾਣ m ਦੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮੀਕਰਣ

$y - y_0 = m\ (x - x_0)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

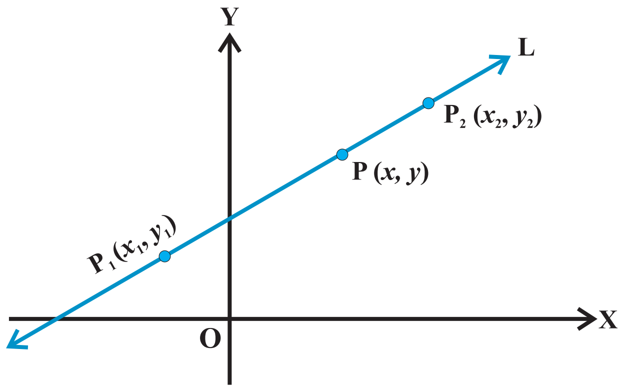
ਉਦਾਹਰਣ 7: ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ (– 2, 3) ਵਿੱਚ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਢਲਾਣ – 4 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $m = -4$ ਅਤੇ ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0) = (-2, 3)$ ਹੈ

ਬਿੰਦੂ ਢਲਾਣ ਰੂਪ (Point slope Form) ਸੂਤਰ (1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$y - 3 = -4\ (x + 2)$ ਜਾਂ $4x + y + 5 = 0$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.3.3 *ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ (Two Point Form)* ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ L ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P_1(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $P_2(x_2, y_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ $P(x, y)$ ਰੇਖਾ L 'ਤੇ ਕੋਈ ਆਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.14)।



ਚਿੱਤਰ 10.14

ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ P_1, P_2 ਅਤੇ P ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ
P_1P ਢਲਾਣ = P_1P_2 ਦੀ ਢਲਾਣ

ਭਾਵ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, ਜਾਂ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \dots (2)$$

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, –1) ਅਤੇ (3, 5) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 3$ ਅਤੇ $y_2 = 5$, ਉਪਰੋਕਤ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$y-(-1)=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

ਜਾਂ $-3x+y+4=0$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

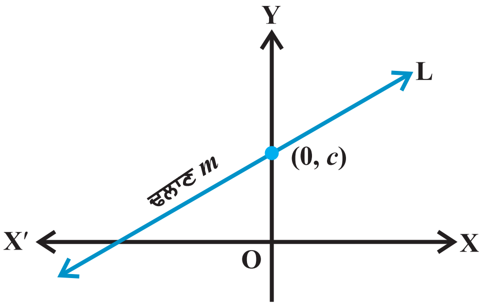
10.3.4 *ਢਲਾਣ-ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Slope-intercept form)* ਕਈ ਵਾਰ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਤੇ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 1 ਮੰਨ ਲਉ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ c ਦੂਰੀ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ10.15)। ਦੂਰੀ c, ਰੇਖਾ L ਦੀ y-ਅੰਤਰਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ, $(0, c)$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ m ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ ਢਲਾਣ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$y-c=m(x-0)$ ਜਾਂ $y=mx+c$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (x, y), ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ m ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ c, 'ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ

$$y=mx+c \quad \dots (3)$$



ਚਿੱਤਰ 10.15

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ c ਦਾ ਮੁੱਲ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਅੰਤਰਖੰਡ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਭਾਗ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 ਮੰਨ ਲਓ ਢਲਾਣ m ਦੀ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ d ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$y = m(x - d)$ ਹੈ। ... (4)

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਖੁਦ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸਥਿਤੀ-I ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਲਈ $\tan\theta = \frac{1}{2}$, ਜਿੱਥੇ θ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਹੈ ਅਤੇ (i) y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ (ii) x - ਅੰਤਰਖੰਡ 4 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇਥੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $c = -\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (3) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2y - x + 3 = 0,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

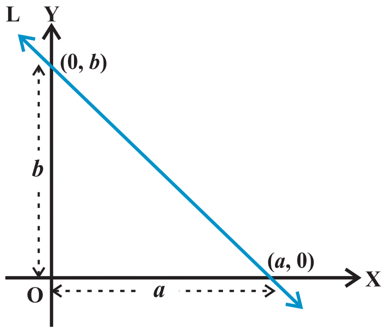
(ii) ਇੱਥੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $d = 4$

ਇਸ ਲਈ, ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (4) ਤੋਂ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2y - x + 4 = 0,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.3.5 *ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Intercept - form)* ਮੰਨ ਲਉ L ਰੇਖਾ, ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ x-ਅੰਤਰਖੰਡ a ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ b ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਰੇਖਾ L, x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(a, 0)$ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(0, b)$ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.16)।



ਚਿੱਤਰ 10.16

ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ-ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \quad \text{ਜਾਂ} \quad ay = -bx + ab,$$

ਅਰਥਾਤ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x - ਧੁਰੇ ਅਤੇ y - ਧੁਰੇ ’ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ—

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \text{... (5)}$$

ਉਦਾਹਰਣ 10: ਉਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ x–ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ’ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਤਰਖੰਡ –3 ਅਤੇ 2 ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ $a = -3$ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (5) ਤੋਂ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2x-3y+6=0.$$

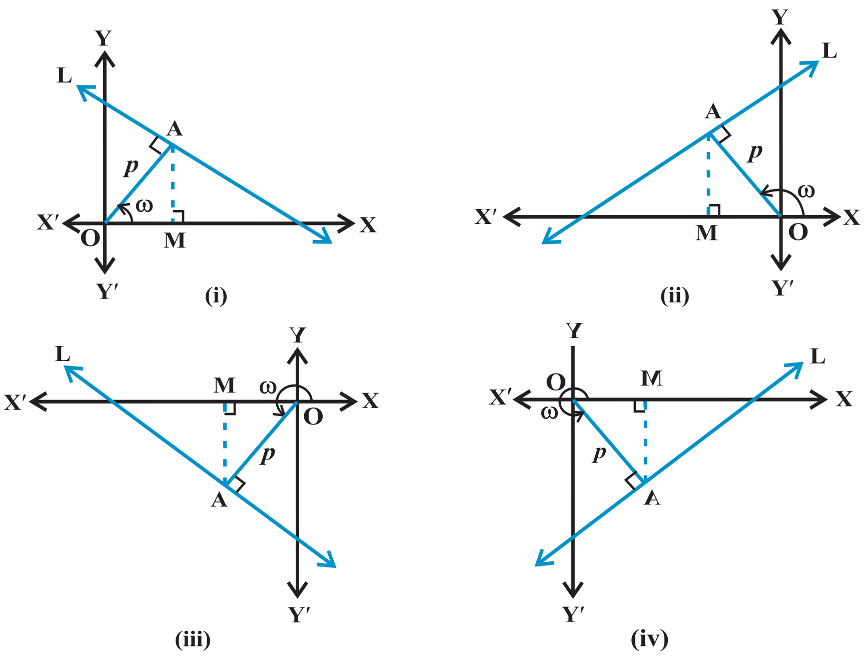
10.3.6 *ਲੰਬ ਰੂਪ (Normal form)* ਮੰਨ ਲਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਸਹਿਤ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ–ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਪਤਾ ਹੈ :

(i) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ’ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ।

(ii) ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ OA = p ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ OA ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ $\angle XOA = \omega$ ਹੈ। ਕਾਰਟੀਜਨ ਤਲ ਵਿਚ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸੰਭਵ ਸਥਿਤੀ ਚਿੱਤਰ 10.17 ਵਿਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਮੰਤਵ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ (slope) ਅਤੇ ਇਸ ’ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ AM ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.17

ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $OM = p\cos\omega$ ਅਤੇ $MA = p\sin\omega$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(p\cos\omega, p\sin\omega)$ ਹਨ।

ਦੁਬਾਰਾ, L ਰੇਖਾ OA ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\text{L ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ} = -\frac{1}{\text{OA ਦੀ ਢਲਾਣ}} = -\frac{1}{\tan\omega} = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

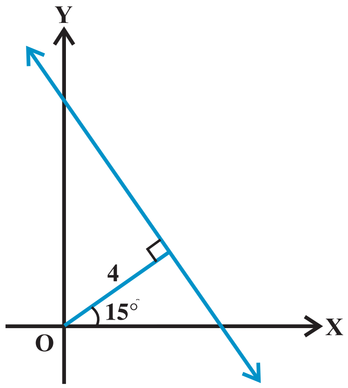
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$ ਅਤੇ ਇਸ ਉੱਪਰ ਬਿੰਦੂ $A(p\cos\omega, p\sin\omega)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਢਲਾਣ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y - p\sin\omega = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(x - p\cos\omega)$ ਜਾਂ $x\cos\omega + y\sin\omega = p(\sin^2\omega + \cos^2\omega)$

ਜਾਂ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ p ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ω ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ... (6)

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਇਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ 15° ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $p = 4$ ਅਤੇ $\omega = 15°$ (ਚਿੱਤਰ 10.18).



ਚਿੱਤਰ 10.18

ਹੁਣ $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ਅਤੇ $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ਕਿਉਂ?)

ਉਪਰੋਕਤ ਲੰਬ ਰੂਪ (6) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$x\cos 15° + y\sin 15° = 4 \text{ ਜਾਂ } \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4 \quad \text{ਜਾਂ} \quad (\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$$

ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਫਾਰਨਹੀਟ ਤਾਪਮਾਨ F ਅਤੇ ਨਿਸਚਿਤ ਤਾਪਮਾਨ K ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ K = 273 ਜਦੋਂ F = 32 ਅਤੇ K = 373 ਜਦੋਂ F = 212 ਹੈ। K ਨੂੰ F ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਅਤੇ F ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ K = 0 ਹੈ।

ਹੱਲ : F ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ K ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ xy ਤਲ ਵਿਚ ਦੋ ਬਿੰਦੂ (32, 273) ਅਤੇ (212, 373) ਹਨ। ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ (F, K) ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$K - 273 = \frac{373-273}{212-32}(F-32) \quad \text{ਜਾਂ} \quad K - 273 = \frac{100}{180}(F-32)$$

ਜਾਂ $$K=\frac{5}{9}(F-32)+273 \qquad ...(1)$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ, ਜਦੋ K = 0 ਹੈ

$$0=\frac{5}{9}(F-32)+273 \quad \text{ਜਾਂ} \quad F-32=-\frac{273\times 9}{5}=-491.4 \quad \text{ਜਾਂ } F=-459.4$$

ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸਰਲ ਰੂਪ $y = mx + c$ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ F ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅਤੇ K ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੈਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $K = mF + c$ ... (1)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਬਿੰਦੂਆਂ (32, 273) ਅਤੇ (212, 373) ਤੋਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ,

$$273 = 32m + c \qquad ... (2)$$

ਅਤੇ $$373 = 212m + c \qquad ... (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$m=\frac{5}{9} \text{ ਅਤੇ } c=\frac{2297}{9}$$

m ਅਤੇ c ਦੇ ਮਾਨ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ

$$K=\frac{5}{9}F+\frac{2297}{9} \qquad ... (4)$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਜਦੋਂ K = 0, ਤਾਂ (4) ਤੋਂ F = – 459.4

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $y = mx + c$ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਥਿਰ ਅੰਕ m ਅਤੇ c ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 10.2

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 8 ਤੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ—

1. x ਅਤੇ y ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਲਿਖੋ।
2. ਢਲਾਣ $\frac{1}{2}$ ਨਾਲ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (– 4, 3) ਵਿੱਚੋ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
3. ਢਲਾਣ m ਨਾਲ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
4. ਬਿੰਦੂ $(2, 2\sqrt{3})$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 75° ਕੋਣ ਤੇ ਝੁਕੀ ਹੋਈ ਹੈ।
5. x - ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਢਲਾਣ –2 ਵਾਲੀ।
6. y - ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 2 ਇਕਾਈ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ।
7. ਬਿੰਦੂਆਂ (–1, 1) ਅਤੇ (2, – 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਵੇ।
8. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ 5 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੁਆਰਾ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੋਵੇ।

9. Δ PQR ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ P (2, 1), Q (–2, 3) ਅਤੇ R (4, 5) ਹਨ। ਸਿਖ਼ਰ R ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (–3, 5) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (2, 5) ਅਤੇ (–3, 6) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 0) ਅਤੇ (2, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ’ਤੇ ਬਣੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 1: n ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰਖੰਡ ’ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

13. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (2, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧੁਰਿਆਂ ’ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਕੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੈ।

14. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ $\frac{2\pi}{3}$ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ 2 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (–2, 9) ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਤਾਂਬੇ ਦੀ ਛੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ L (ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ) ਸੇਲਸੀਅਸ ਤਾਪ C ਦਾ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ L = 124.942 ਤਾਂ C = 20 ਅਤੇ L = 125.134 ਤਾਂ C = 110 ਹੈ। L ਨੂੰ C ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

17. ਇੱਕ ਦੁੱਧ ਭੰਡਾਰ ਦਾ ਮਾਲਿਕ ਹਰ ਹਫ਼ਤੇ 980 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ 14 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਅਤੇ 1220 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ 16 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵੇਚਮੁੱਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਸੰਬੰਧ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਹਰ ਹਫਤੇ 17 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਨਾਲ ਕਿੰਨਾ ਦੁੱਧ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ।

18. P (a, b) ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ਹੈ।

19. ਬਿੰਦੂ R(h, k) ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ 1: 2 ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ (3, 0), (– 2, – 2) ਅਤੇ (8, 2) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

10.4 ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਧਾਰਣ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਣ (General Equation of a Line)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਇਕ ਘਾਤੀ ਵਿਆਪਕ ਜਾਂ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ, $Ax + By + C = 0$ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਚਲ ਹਨ ਅਤੇ A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਵਿਆਪਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਰੂਪ ***(Different forms of $Ax + By + C = 0$)*** ਰੇਖਾ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Slope-intercept form) ਜੇਕਰ $B \neq 0$ ਤਾਂ $Ax + By + C = 0$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \text{ ਜਾਂ } y=mx+c \qquad \dots (1)$$

ਜਿੱਥੇ $$m=-\frac{A}{B} \text{ ਅਤੇ } c=-\frac{C}{B}$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (1) ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਢਲਾਣ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ $-\frac{A}{B}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{B}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ B = 0, ਤਾਂ $x = -\frac{C}{A}$ ਜੋ ਕਿ ਖੜ੍ਹਵੀਂ (vertical) ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ x - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{A}$ ਹੈ।

(b) ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Intercept form) ਜੇਕਰ C ≠ 0, ਤਾਂ $Ax + By + C = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{... (2)}$$

ਜਿੱਥੇ $a = -\frac{C}{A}$ ਅਤੇ $b = -\frac{C}{B}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (2) ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ ਜਿਸਦਾ x - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{A}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{B}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $C = 0$, ਤਾਂ $Ax + By + C = 0$ ਨੂੰ $Ax + By = 0$, ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਸਿਫ਼ਰ ਅੰਤਰਖੰਡ ਹਨ।

(c) ਲੰਬ ਰੂਪ (Normal form) ਮੰਨ ਲਉ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਜਾਂ $Ax + By = -C$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਇਸ ਲਈ, $\frac{A}{\cos \omega} = \frac{B}{\sin \omega} = -\frac{C}{p}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\cos \omega = -\frac{Ap}{C}$ ਅਤੇ $\sin \omega = -\frac{Bp}{C}$

ਹੁਣ $\sin^2\omega + \cos^2\omega = \left(-\frac{Ap}{C}\right)^2 + \left(-\frac{Bp}{C}\right)^2 = 1$

ਜਾਂ $p^2 = \frac{C^2}{A^2+B^2}$ ਜਾਂ $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਇਸ ਲਈ $\cos\omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ਅਤੇ $\sin \omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $\cos \omega = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin \omega = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ਅਤੇ $p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਉਚਿਤ ਵਰਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ p ਧਨਾਤਮਕ ਰਹੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ (i) ਢਲਾਣ (ii) x ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2} \qquad \text{... (1)}$$

(1) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $y = mx + c$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਢਲਾਣ $m = \frac{3}{4}$ ਹੈ।

(ii) ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$3x - 4y = -10 \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{x}{-\frac{10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad \text{... (2)}$$

(2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ x-ਅੰਤਰਖੰਡ $a = -\frac{10}{3}$ ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ $b = \frac{5}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਮੀਕਰਣ $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ। p ਅਤੇ ω ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) ਨੂੰ $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \text{ ਜਾਂ } \cos 30°\, x + \sin 30°\, y = 4 \qquad \ldots (2)$$

(2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $x \cos \omega + y \sin \omega = p$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, $p = 4$ ਅਤੇ $\omega = 30°$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਰੇਖਾਵਾਂ $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ ਅਤੇ $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ—

$$y - \sqrt{3}x - 5 = 0 \text{ ਜਾਂ } y = \sqrt{3}x + 5 \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$\sqrt{3}y - x + 6 = 0 \text{ ਜਾਂ } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3} \qquad \ldots (2)$$

ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_1 = \sqrt{3}$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ (2) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਣ ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \ldots (3)$$

m_1 ਅਤੇ m_2 ਦੇ ਮੁੱਲ (3) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\theta = 30°$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਜਾਂ $30°$ ਜਾਂ $180° - 30° = 150°$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਜਿੱਥੇ $b_1, b_2 \neq 0$

(i) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, ਅਤੇ (ii) ਇੱਕ-ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \qquad \ldots (2)$$

ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਢਲਾਣਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ਅਤੇ $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ ਹਨ, ਹੁਣ

(i) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ $m_1 = m_2$, ਜਿਸ ਤੋਂ

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ ਜਾਂ } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

(ii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਲੰਬ ਹਨ, ਜੇਕਰ $m_1.m_2 = -1$, ਜਿਸ ਤੋਂ

$$\frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ ਜਾਂ } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x - 2y + 3 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $(1, -2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $x - 2y + 3 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad ...(1)$$

ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_1 = \frac{1}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) 'ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

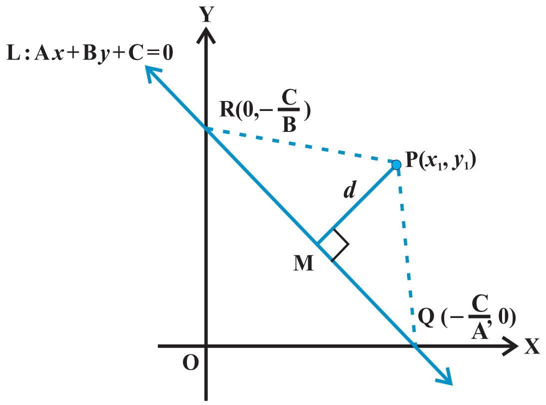
ਢਲਾਣ -2 ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ $(1, -2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y - (-2) = -2(x - 1) \text{ ਜਾਂ } y = -2x,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.5 ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ (Distance of a Point From a Line)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ L : $Ax + By + C = 0$ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਬਿੰਦੂ P (x_1, y_1) ਤੋਂ ਦੂਰੀ d ਹੈ। ਰੇਖਾ L ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ PM ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 10.19) । ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ x-ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ Q ਅਤੇ R 'ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ; ਤਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ Q$\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ ਅਤੇ R $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 10.19

ਖੇਤਰਫਲ $(\Delta PQR) = \frac{1}{2} PM.QR$, ਜਿਸ ਤੋਂ $PM = \frac{2 \text{ ਖੇਤਰਫਲ } (\Delta PQR)}{QR}$ ... (1)

ਫਿਰ ਤੋਂ ਖੇਤਰਫਲ $(\Delta PQR) = \frac{1}{2}\left| x_1\left(0+\frac{C}{B}\right)+\left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B}-y_1\right)+0\left(y_1-0\right)\right| = \frac{1}{2}\left| x_1\frac{C}{B}+y_1\frac{C}{A}+\frac{C^2}{AB}\right|$

ਜਾਂ 2 ਖੇਤਰਫਲ $(\Delta PQR) = \left|\frac{C}{AB}\right| . \left|Ax_1+By_1+C\right|$, ਅਤੇ $QR = \sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2+\left(\frac{C}{B}-0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2+B^2}$

ਖੇਤਰਫਲ (ΔPQR) ਅਤੇ QR ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$PM = \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad d = \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ (d) ਹੈ

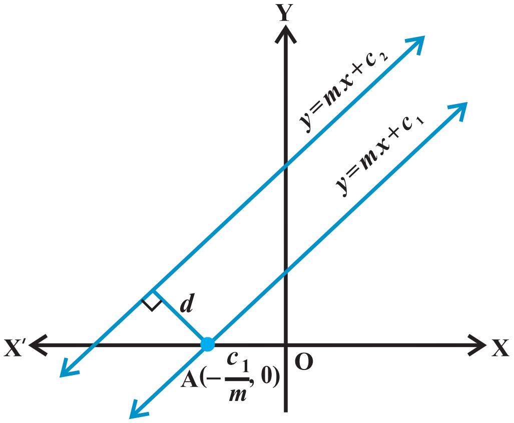
$$d = \frac{\left|Ax_1+By_1+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

10.5.1 ***ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ (Distance between two parallel lines)*** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ (Slopes) ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ—

$y = mx + c_1$ ... (1)

ਅਤੇ $y = mx + c_2$ ... (2)

ਚਿੱਤਰ 10.20 ਵਿਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ, ਰੇਖਾ (1) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ A $\left(-\frac{c_1}{m}, 0\right)$ ’ਤੇ ਕੱਟੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ 10.20

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ, ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਰੇਖਾ (2) ਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right)+(-c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad d = \frac{\left|c_1-c_2\right|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = mx + c_1$ ਅਤੇ $y = mx + c_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਮ (ਸਧਾਰਨ) (General Form) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ ਜੋ ਕਿ $Ax + By + C_1 = 0$ ਅਤੇ $Ax + By + C_2 = 0$, ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰ ਦਾ ਰੂਪ ਬਣ ਜਾਵੇਗਾ $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਆਪ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਬਿੰਦੂ (3, – 5) ਦੀ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 26 = 0$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 26 = 0$ ਹੈ। ... (1)

(1) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਰੇਖਾ ਦੀ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਨਾਲ ਕਰਨ ’ਤੇ

$$A = 3,\ B = -4 \text{ ਅਤੇ } C = -26.$$

ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1) = (3, -5)$ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3.3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x - 4y + 7 = 0$ ਅਤੇ $3x - 4y + 5 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $A = 3$, $B = -4$, $C_1 = 7$ ਅਤੇ $C_2 = 5$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ $d = \frac{|7-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$ ਹੈ ।

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਢਲਾਣ-ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$
2. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$, (iii) $3y + 2 = 0$
3. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਇਸ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$
4. ਬਿੰਦੂ (–1, 1) ਦੀ ਰੇਖਾ $12(x + 6) = 5(y - 2)$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ।
6. ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ–
   (i) $15x + 8y - 34 = 0$ ਅਤੇ $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x + y) + p = 0$ ਅਤੇ $l(x + y) - r = 0$
7. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $3x - 4y + 2 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (–2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।
8. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x - 7y + 5 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।

9. ਰੇਖਾਵਾਂ $\sqrt{3}x + y = 1$ ਅਤੇ $x + \sqrt{3}y = 1$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਬਿੰਦੂਆਂ $(h, 3)$ ਅਤੇ $(4, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਰੇਖਾ $7x - 9y - 19 = 0$ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ ਕੋਣ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। h ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ

$A\,(x - x_1) + B\,(y - y_1) = 0$ ਹੈ।

12. ਬਿੰਦੂ $(2, 3)$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 60° ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ 2, ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, 4)$ ਅਤੇ $(-1, 2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ (right bisector) ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਬਿੰਦੂ $(-1, 3)$ ਤੋਂ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 16 = 0$ ਤੋਂ ਸੁੱਟੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਅਧਾਰ ਬਿੰਦੂ (Foot of perpendicular) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਤੇ ਲੰਬ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(-1, 2)$ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। m ਅਤੇ c ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ ਅਤੇ $x\sec\theta + y\,\text{cosec}\,\theta = k$, ਤੇ ਲੰਬ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $p^2 + 4q^2 = k^2$.

17. ΔABC ਦੇ ਸਿਖਰ $A\,(2, 3)$, $B\,(4, -1)$ ਅਤੇ $C\,(1, 2)$ ਹਨ, ਸਿਖ਼ਰ A ਤੋਂ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੀ ਭੁਜਾ ਤੇ ਸੁੱਟੇ ਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ p ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸੁੱਟੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇ, ਜਿਸਦੇ ਧੁਰਿਆ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ a ਅਤੇ b, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$ ਅਤੇ $3x - y - 2 = 0$ ਸੰਗਾਮੀ (Concurrent) ਹਨ ਤਾਂ k ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਗਾਮੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੀਜੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$$2x + y - 3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$5x + ky - 3 = 0 \quad \ldots (2)$$

$$3x - y - 2 = 0 \quad \ldots (3)$$

(1) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad x = 1, \quad y = 1$$

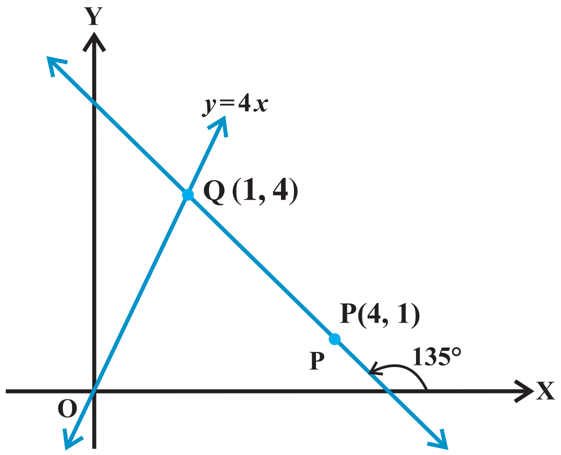
ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $(1, 1)$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(1,1)$ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਇਸ ਲਈ

$$5.1 + k\,.1 - 3 = 0 \text{ ਜਾਂ } k = -2$$

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਬਿੰਦੂ (4, 1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $4x - y = 0$ ਦੀ ਦੂਰੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 135° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $4x - y = 0$ ਹੈ ... (1)

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਬਿੰਦੂ P (4, 1) ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਦੋਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 10.21)



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ tan 135° = –1 ਹੈ। ਢਲਾਣ – 1 ਅਤੇ P (4, 1) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

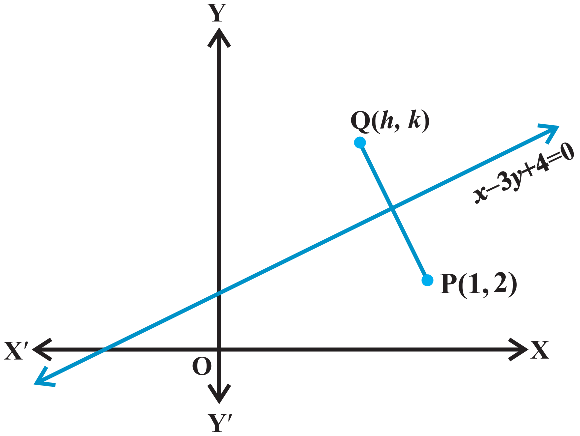
$y - 1 = -1\,(x - 4)$ ਜਾਂ $x + y - 5 = 0$ ਹੈ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, $x = 1$ ਅਤੇ $y = 4$ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ Q (1, 4) ਹੈ। ਹੁਣ ਰੇਖਾ (1) ਦੇ ਬਿੰਦੂ P (4, 1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ (2) ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ = ਬਿੰਦੂਆਂ P (4, 1) ਅਤੇ Q (1, 4) ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ ਇਕਾਈ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਦਰਪਣ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (image) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ Q (h, k) ਬਿੰਦੂ P (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ। ... (1)



ਚਿੱਤਰ 10.22

ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾ (1), ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਦਾ ਲੰਬ-ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ [(ਚਿੱਤਰ10.22)]

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾ PQ ਦੀ ਢਲਾਣ = $\dfrac{-1}{\text{ਰੇਖਾ } x-3y+4=0 \text{ ਦੀ ਢਲਾਣ}}$

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{k-2}{h-1}=\dfrac{-1}{\frac{1}{3}}$ ਜਾਂ $3h+k=5$ ... (2)

ਅਤੇ PQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ, ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ $\left(\dfrac{h+1}{2},\dfrac{k+2}{2}\right)$ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{h+1}{2}-3\left(\dfrac{k+2}{2}\right)+4=0$ ਜਾਂ $h-3k=-3$ ... (3)

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $h=\dfrac{6}{5}$ ਅਤੇ $k=\dfrac{7}{5}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ $\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{7}{5}\right)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $y=m_1x+c_1, y=m_2x+c_2$ ਅਤੇ $x = 0$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\dfrac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ ਹੈ।

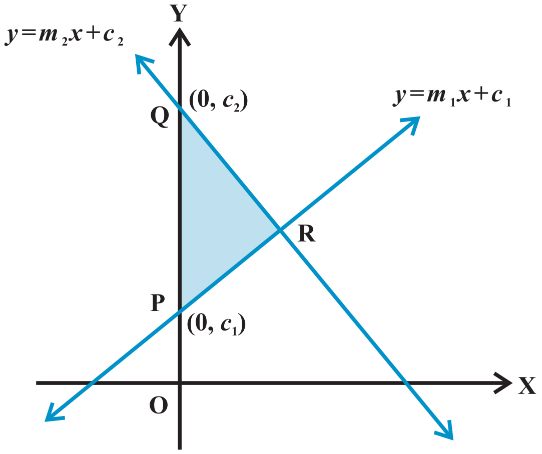
ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$y = m_1x + c_1$ ... (1)

$y = m_2x + c_2$ ... (2)

$x = 0$ ... (3)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਰੇਖਾ $x = 0$ (y-ਧੁਰਾ) ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ 'ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (3) ਦੁਆਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਸਿਖਰ P $(0, c_1)$ ਅਤੇ Q $(0, c_2)$ ਬਣਾਏ ਗਏ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10. 23)। ਤੀਜਾ ਸਿਖ਼ਰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.23

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ

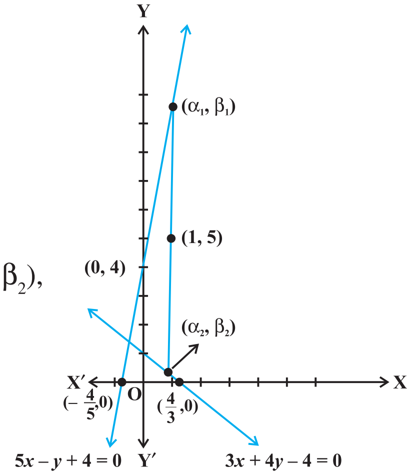
$$x=\frac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)} \text{ ਅਤੇ } y=\frac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}$$

ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਤੀਜਾ ਸਿਖਰ R $\left(\dfrac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)},\dfrac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}\right)$

ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$=\frac{1}{2}\left|0\left(\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}-c_2\right)+\frac{c_2-c_1}{m_1-m_2}(c_2-c_1)+0\left(c_1-\frac{m_1c_2-m_2c_1}{m_1-m_2}\right)\right|=\frac{(c_2-c_1)^2}{2|m_1-m_2|}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $5x - y + 4 = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 4 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (1, 5) ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.24

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$5x - y + 4 = 0$ ... (1)

$3x + 4y - 4 = 0$ ... (2)

ਮੰਨ ਲਉ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ, ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ (α_1, β_1) ਅਤੇ (α_2, β_2), ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$ ਅਤੇ

$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$

ਜਾਂ $\beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ ਅਤੇ $\beta_2 = \frac{4-3\alpha_2}{4}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ (1, 5) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ (α_1, β_1) ਅਤੇ (α_2, β_2) ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=1 \quad ਅਤੇ \quad \frac{\beta_1+\beta_2}{2}=5,$$

ਜਾਂ $$\alpha_1+\alpha_2=2 \quad ਅਤੇ \quad \frac{5\alpha_1+4+\frac{4-3\alpha_2}{4}}{2}=5,$$

ਜਾਂ $\alpha_1+\alpha_2=2$ ਅਤੇ $20\alpha_1-3\alpha_2=20$ ... (3)

(3) ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ α_1 ਅਤੇ α_2, ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\alpha_1=\frac{26}{23} \text{ ਅਤੇ } \alpha_2=\frac{20}{23} \text{ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ, } \beta_1 = 5.\frac{26}{23}+4 = \frac{222}{23}$$

ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (1, 5) ਅਤੇ (α_1, β_1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ

$$y-5=\frac{\beta_1-5}{\alpha_1-1}(x-1) \text{ ਜਾਂ } y-5=\frac{\frac{222}{23}-5}{\frac{26}{23}-1}(x-1)$$

ਜਾਂ $107x - 3y - 92 = 0$,

ਜੋ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਬਿੰਦੂਪਥ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x - 2y = 5$ ਅਤੇ $3x + 2y = 5$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਮਾਨ ਹੈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ

$$3x - 2y = 5 \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$3x + 2y = 5 \quad \ldots (2)$$

ਮੰਨ ਲਉ (h, k) ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{|3h-2k-5|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|3h+2k-5|}{\sqrt{9+4}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad |3h-2k-5| = |3h+2k-5|,$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$ ਜਾਂ $-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$

ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸੰਬੰਧਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $k = 0$ ਜਾਂ $h = \frac{5}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (h, k) ਸਮੀਕਰਣਾਂ $y = 0$ ਜਾਂ $x = \frac{5}{3}$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਪਥ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਰੇਖਾ $(k - 3)\,x - (4 - k^2)\,y + k^2 - 7k + 6 = 0$ ਹੈ
   (a) x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ
   (b) y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ
   (c) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

2. θ ਅਤੇ p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਸਮੀਕਰਣ $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ ਰੇਖਾ $\sqrt{3}\,x + y + 2 = 0$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ ਹੋਵੇ।

3. ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ, ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਬਣੇ ਅੰਤਰਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ – 6 ਹੈ।

4. y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ ?

5. ਬਿੰਦੂਆਂ $(\cos\theta, \sin\theta)$ ਅਤੇ $(\cos\phi, \sin\phi)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x - 7y + 5 = 0$ ਅਤੇ $3x + y = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ।

7. ਰੇਖਾ $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ 'ਤੇ ਲੰਬ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਇਹ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।

8. ਰੇਖਾਵਾਂ $y - x = 0$, $x + y = 0$ ਅਤੇ $x - k = 0$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ ਅਤੇ $2x - y - 3 = 0$, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਣ।

10. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ ਅਤੇ $y = m_3x + c_3$ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$

11. ਬਿੰਦੂ (3, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x - 2y = 3$ ਨਾਲ 45° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $4x + 7y - 3 = 0$ ਅਤੇ $2x - 3y + 1 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਸਮਾਨ ਹਨ।

13. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਨਾਲ ਕੋਣ θ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, $\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta}$ ਹੈ।

14. ਬਿੰਦੂਆਂ (–1, 1) ਅਤੇ (5, 7) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਰੇਖਾ $x + y = 4$ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ?

15. ਰੇਖਾ $4x + 7y + 5 = 0$ ਦੀ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $2x - y = 0$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਬਿੰਦੂ (–1, 2) ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਰੇਖਾ $x + y = 4$ ਨਾਲ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

17. ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ (1, 3) ਅਤੇ (– 4, 1) ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲੰਬ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਬਿੰਦੂ (3, 8) ਦਾ ਰੇਖਾ $x + 3y = 7$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਦਰਪਣ ਹੈ।

19. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 3x + 1$ ਅਤੇ $2y = x + 3$ ਦਾ ਰੇਖਾ $y = mx + 4$ ਨਾਲ ਝੁਕਾਅ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਤਾਂ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $x + y - 5 = 0$ ਅਤੇ $3x - 2y + 7 = 0$ ਤੋਂ ਚਲ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾਂ 10 ਹੈ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ P ਪੱਕਾ ਰੇਖਾ ਤੇ ਚੱਲੇਗਾ।

21. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $9x + 6y - 7 = 0$ ਅਤੇ $3x + 2y + 6 = 0$ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ।

22. ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਕਿਰਨ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਪਰਾਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪਰਵਰਤਿਤ ਕਿਰਣ ਬਿੰਦੂ (5, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

23. ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ਅਤੇ $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਰੇਖਾ $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ 'ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ b^2 ਹੈ।

24. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $2x - 3y + 4 = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 5 = 0$ ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਪੱਥਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖੜ੍ਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $6x - 7y + 8 = 0$ ਦੇ ਪਥ 'ਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਅਪਣਾਈ ਗਈ ਪੱਥ (Path) ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਂ (Non-vertical) ਰੇਖਾ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਦੀ ਢਲਾਣ (m) ਹੈ-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

- ਜੇਕਰ ਇਕ ਰੇਖਾ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਕੋਣ α ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ : $m = \tan\alpha$, $\alpha \neq 90^\circ$
- ਲੇਟਵੀਂ (Horizontal) ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ m_1 ਅਤੇ m_2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (ਮੰਨ ਲਓ θ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0.$$

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ –1 ਹੈ।
- ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ AB ਦੀ ਢਲਾਣ = BC ਦੀ ਢਲਾਣ
- x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ a ਦੂਰੀ ਤੇ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ
  $y = a$ ਜਾਂ $y = -a$ ਹੈ।
- y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ b ਦੂਰੀ ਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ $x = b$ ਜਾਂ $x = -b$ ਹੈ।
- ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ (x_o, y_o) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਸਥਿਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮੀਕਰਣ $y - y_o = m(x - x_o)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ।
- ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- ਢਲਾਣ m ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ c ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ $y = mx + c$ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ x-ਅੰਤਰਖੰਡ d ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ
  $y = m(x - d)$ ਹੈ।
- x ਅਤੇ y-ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ਹੈ।
- ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ p ਅਤੇ ਇਸ ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ω ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਹੈ।
- ਕੋਈ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ, A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ X ਵਿਆਪਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵਿਆਪਕ (General equation of a line) ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $Ax + By + C = 0$ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ (d) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $Ax + By + C_1 = 0$ ਅਤੇ $Ax + By + C_2 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ : $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

— ❖ —